

# Statistische Eigenschaften der Multikriteriellen Optimierung mittels Wünschbarkeiten

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Statistik der Universität Dortmund  
vorgelegt von

Detlef Steuer  
aus Lünen

Ahrensburg, Januar 2005

**Gutachter:**

Prof. Dr. C. Weihs  
Prof. Dr. H. Hebbel

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Februar 2005

„Is there not promise of rain?“  
Ling Tan asked suddenly out of the darkness.  
There had been need of rain for many days.  
„Only a promise,“ Lao Er said.  
*Pearl S. Buck - Dragon Seed*

## Danksagung

Ich danke meiner Frau Susanne und meinen Kindern Muriel, Merlin und Lion Noel für unendliche Geduld.

Herrn Prof. Dr. C. Weihs danke ich für Ermutigung zur rechten Zeit.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Das Problem der Multikriteriellen Optimierung</b>	<b>13</b>
2.1	Problemtypen der MCO . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Hierarchie der Optimierungen</b>	<b>17</b>
3.1	Situation . . . . .	17
3.2	Hierarchie der Optimierungen . . . . .	18
3.2.1	Einfache, empirische MCO . . . . .	19
3.2.2	Empirische MCO mit funktionalem Zusammenhang . . . . .	19
3.2.3	Optimierung über dem Faktorraum bei funktionalem Zusammenhang . . . . .	19
3.2.4	MCO mit geschätztem funktionalem Zusammenhang . . . . .	20
3.2.5	MCO unter Berücksichtigung der Fehlerterme . . . . .	20
3.3	Das Kalibrationsproblem . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Ansätze zur Multikriteriellen Optimierung</b>	<b>23</b>
4.1	Dominanz . . . . .	23
4.2	Pareto-Optimalität . . . . .	24
4.3	Andere Verfahren der MCO in OR und Statistik . . . . .	25
4.3.1	Grafische Verfahren: Beispiel Overlay Plots . . . . .	26
4.3.2	Ord nende Verfahren: Prometee / GAIA . . . . .	26
4.3.3	Andere Verfahren in der Statistik . . . . .	27
4.4	Anforderungen an ein MCO Verfahren . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Wünschbarkeiten (desirabilities)</b>	<b>29</b>
5.1	Das Konzept der Wünschbarkeit . . . . .	29
5.2	Wünschbarkeiten nach Harrington . . . . .	31
5.3	Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer-Suich . . . . .	35
5.4	Alternative Indexfunktionen . . . . .	40
5.4.1	Der Maximin-Index . . . . .	42
5.4.2	Das arithmetische Mittel . . . . .	43
5.5	Wünschbarkeitsplot . . . . .	44

## Inhaltsverzeichnis

<b>6</b>	<b>Simulationstechnik</b>	<b>47</b>
6.1	Wahl der Programmiersprache . . . . .	47
6.2	Zufallsgenerator . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Anwendung von Wünschbarkeiten: Praxis und Probleme</b>	<b>49</b>
7.1	Empirische Optimierung . . . . .	49
7.2	Schwachstellen des gängigen Verfahrens . . . . .	50
7.2.1	Probleme in der Optimierung durch die funktionale Form . . . . .	50
7.2.2	Die Form der Antwortfläche . . . . .	51
7.3	Optimierung nach Modellbildung, kein Fehlerterm . . . . .	52
7.3.1	Der Versuch von Derringer-Suich . . . . .	53
7.3.2	Simulation von Wiederholungen des Versuchs . . . . .	54
7.3.3	Direkte Modellierung des Index . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von <math>x</math></b>	<b>57</b>
8.1	Übertragung des MCO-Problems auf Zufallsvariablen . . . . .	57
8.2	Herleitung der Verteilungen spezieller Wünschbarkeiten . . . . .	59
8.3	Die gestutzte Normalverteilung . . . . .	60
8.4	Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$ . . . . .	61
8.5	Verteilung einiger anderer Wünschbarkeitsfunktionen . . . . .	73
<b>9</b>	<b>Realistische Wünschbarkeiten</b>	<b>79</b>
9.1	Definition der realistischen Wünschbarkeiten . . . . .	79
9.2	Nutzen des realistischen Ansatzes . . . . .	81
9.3	Die Harrington Skala revisited . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Verteilung verallgemeinerter Wünschbarkeiten als Funktion von <math>x</math></b>	<b>85</b>
<b>11</b>	<b>Ergebnisse für Exponenten <math>\beta \neq 1</math></b>	<b>91</b>
11.1	Verbesserte Version der Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktionen . . . . .	92
11.2	Approximationsidee . . . . .	93
11.3	Linearisierte Wünschbarkeiten . . . . .	93
11.4	Güte der Approximationen . . . . .	101
11.4.1	Einfach linearisierte Wünschbarkeit . . . . .	101
11.4.2	Zweifach linearisierte Wünschbarkeit . . . . .	101
11.4.3	Güte der Approximation der gesuchten Verteilung . . . . .	103
11.4.4	Bewertung der verschiedenen Approximationen . . . . .	104
11.4.5	Mögliche Verbesserung des Verfahrens . . . . .	105
<b>12</b>	<b>Verteilung des Wünschbarkeitsindex</b>	<b>107</b>
12.1	Verteilung für den Maximin-Index . . . . .	107
12.2	Verteilung für das geometrische Mittel . . . . .	108
12.2.1	Ausschussquote von $q(Y)$ . . . . .	108
12.2.2	Skalierfähigkeit des Wünschbarkeitsindex . . . . .	109

*Inhaltsverzeichnis*

<b>13 Fazit und Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>14 Symbol- und Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>117</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>120</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>

## *Inhaltsverzeichnis*



# 1 Einleitung

Eine Hauptaufgabe der angewandten Statistik in der industriellen Praxis kann mit den Begriffen *Qualitätskontrolle* und *-optimierung* gut angenähert werden.

Typische Beispiele sind die Anwendung von Kontrollkarten oder auch die Versuchsplanung. Jeweils besteht das Ziel der angewandten Methode darin, ein vorgegebenes „Produkt“ in seinen Eigenschaften zu kontrollieren bzw. zu verbessern. Eine schöne Darstellung des Qualitätsproblems findet sich z.B. in [CW99].

Die klassische Statistik beschäftigt sich hier jedoch fast ausschließlich mit eindimensionalen Zielgrößen. Bei diesen ist der Begriff der „Qualität“ sehr einfach zu erfassen: Es gibt **eine** Messgröße, welche mit der *Qualität* identifiziert werden kann. Der Anwender hat in diesen Fällen bereits vor der Messung eine klare Vorstellung davon, was für sein Produkt „gute“ Qualität bedeutet.

Die Fokussierung auf die eindimensionale Sichtweise der Produktoptimierung ist weitgehend durch das Fehlen der geeigneten mathematischen und/oder computerintensiven Verfahren in der Zeit bis ca. 1980 zu erklären, da die Optimierung höherdimensionaler Zielgrößen oft nur mit erheblichem Rechenaufwand durchzuführen ist. Erst seit dem Aufkommen schneller, ubiquitärer Rechenleistung sind viele multidimensionale Verfahren praktikabel geworden.

Ein Bereich, der für diese Entwicklung typisch ist, stellt die Versuchsplanung dar. Auch dort ist erst durch die heute zur Verfügung stehende Rechenleistung die Anwendung bestimmter, komplexer Designs handhabbar geworden.

Durch die jahrzehntelange Forschung sind die eindimensionalen Fragen allerdings entsprechend gut verstanden. Theorie und Praxis befinden sich in diesem Bereich auf einem sehr hohen Niveau, während die Probleme hochdimensionaler Daten weiterhin Gegenstand intensiver Untersuchungen sind.

Verlässt man die eindimensionale Betrachtung, so gelangt man schnell in einen Bereich, in dem sehr viel weniger methodisches Wissen vorhanden ist. Oftmals wird deshalb versucht, die Problemdimension zu reduzieren, um die gut untersuchten Methoden anwenden zu können. Allerdings ist eine solche Dimensionsreduktion oft *a priori* nicht möglich, so dass eine echt mehrdimensionale Behandlung des Problems zwingend geboten ist.

Ein mehrdimensionales Problem, die so genannte *Multikriterielle Optimierung*, kurz *MCO* (*multi-criteria-optimisation*), ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

## 1 Einleitung

Zunächst wird kurz auf die mathematischen Ansätze einer multivariaten Optimierung eingegangen. Zur Lösung empirischer Probleme liegen auf dem Gebiet des Operations Research (OR) einige Erfahrungen vor, wobei allerdings die statistischen Eigenschaften der eingesetzten Verfahren keine Rolle spielen. Es lassen sich jedoch allgemein zu beachtende Prinzipien herleiten, die die Formulierung von Anforderungen an MCO-Verfahren erlauben.

Ein Verfahren, welches die wichtigsten der hergeleiteten Anforderungen erfüllt, sind die *Wünschbarkeitsfunktionen* und *Wünschbarkeitsindizes*, auf denen hier das Augenmerk liegt.

Die Ursprünge dieser Methodik liegen bereits im Jahre 1965, jedoch ist es erst durch die Rechenleistung moderner Computer in den letzten Jahren möglich, die Methode der Wünschbarkeiten in ihrer Flexibilität voll auszuschöpfen.

Auf rein analytischem Wege ist es in der Regel nicht möglich, zu Aussagen über die Güte einer Optimierung mittels Wünschbarkeiten zu gelangen, weshalb es nötig ist, auf numerische oder simulationsgestützte Verfahren zurückzugreifen. Insbesondere gelingt es erst dadurch, auch Fehlerabschätzungen für Optimierungen auf Basis von Wünschbarkeiten anzugeben.

Weiterhin wird aufgezeigt, dass die traditionell angewandte Methode der Arbeit mit Wünschbarkeiten Einschränkungen unterliegt, die in den technischen Gegebenheiten der sechziger Jahre des 20. Jahrhunderts zu suchen sind. Diese Einschränkungen müssen heute nicht mehr akzeptiert werden. In der Literatur (und somit in der Praxis) findet sich allerdings noch immer das alte Vorgehen, bei dem eine Erwartungswertbildung „zu früh“ durchgeführt wird (s. Kapitel 7).

In Kapitel 9 wird eine Verbesserung dieses Vorgehens angegeben, die es erstmalig ermöglicht, die eigentliche Frage, nämlich nach der Faktoreinstellung, welche unter Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehler zu den besten Ergebnissen führt, zu beantworten.

Mittels dieses verbesserten Verfahrens wird es ebenfalls möglich, für Wünschbarkeitsfunktionen und -indizes einige Verteilungseigenschaften zu berechnen.

Der Wünschbarkeitsindex hat auch in der praktischen Arbeit seine feste Bedeutung. In vielen Softwarepaketen wird er als Hilfsmittel der multivariaten Optimierung implementiert.

Eine der frühesten Implementierungen findet sich in STAVEX (Statistisches Versuchsplanungs Experten System), [SW95], [AG03], einem Programmpaket, welches bei Ciba-Geigy, heute Novartis, zur Qualitätsoptimierung entwickelt und eingesetzt wurde. STAVEX wird auch heute noch entwickelt, inzwischen jedoch von AICOS Technologies AG, Basel. Minitab [Inc03] enthält ab der Version 13 Wünschbarkeiten vom Derringer-Suich Typ. Ebenfalls implementiert hat dieses Verfahren Design Expert [Inc00]. Dort findet sich zusätzlich auch noch der Harrington-Typ der Wünschbarkeit.

Auch unabhängig von speziellen kommerziellen Anbietern haben Wünschbarkeiten inzwischen ihre Bedeutung erlangt: Das *National Institute for Standards* (NIST) schlägt Wünschbarkeiten des Derringer-Suich Typs, also des Typs, der im Mittelpunkt der vorgelegten Untersuchung steht, als einziges Verfahren seiner Klasse zur multikriteriellen Optimierung vor [NIS].

Ein Nebenprodukt der vorliegenden Arbeit sind eine ganze Reihe von Funktionen zur Behandlung von Wünschbarkeiten, die in **R** [R D03] implementiert wurden. Unter anderem entstanden Funktionen für den neuen *Wünschbarkeitsplot* (s. Kapitel 5.5) zur Erzeugung von Zufallsvariablen entsprechend der Verteilung von Wünschbarkeiten und natürlich für die Wünschbarkeitsfunktionen selbst. Letzteres natürlich auch für die allgemeineren Fälle, die in Kapitel 5.3 eingeführt werden.

Es ist geplant, diese Sammlung von Funktionen als Paket im *CRAN* (*comprehensive R archive network*) zu veröffentlichen. Es wird dann unter <http://cran.r-project.org> herunter zu laden sein.

Als Randbemerkung bleibt noch, dass „Desirability Index“ ebenfalls als *terminus technicus* im Black Jack Spiel Verwendung findet. Dort bezeichnet er eine bestimmte Art der Bewertung einer Kartenverteilung. Mit diesem Desirability Index beschäftigt sich die vorliegende Arbeit nicht.

## *1 Einleitung*

## 2 Das Problem der Multikriteriellen Optimierung

Prototypisch für die Problematik der Multikriteriellen Optimierung sei das stark vereinfachte Beispiel einer Produktoptimierung bei der Herstellung einer Tablette betrachtet.

Die interessierende Größe ist in diesem Falle eine abstrakte *Qualität* der Tablette. Leider ist diese Größe jedoch nicht direkt messbar, so dass man gezwungen ist, sich eine formale Definition für die Qualität einer Tablette über zu messende *Qualitätsmerkmale* herzuleiten. In einem stark vereinfachten Beispiel seien diese Größen z.B. die Löslichkeit  $L$  der Tablette in Wasser, gemessen in Prozent des gelösten Wirkstoffs nach einer Minute Zeit im Wasser, und die Haltbarkeit  $H$  der Tablette während des Transportes, gemessen z.B. in Milligramm abgebröckelter Tablette nach 1 min in einer Rüttelmaschine. Eine optimale Tablette hätte nun die Eigenschaften, dass

1. der komplette Wirkstoff nach einer Minute gelöst ist,
2. ein Transport zu überhaupt keinem Verlust an Wirkstoffmasse führt.

Es ist leicht vorstellbar, dass solche gegenläufigen Anforderungen nicht zugleich durch **ein** Design erfüllt werden können. Das Auftreten dieser so genannten *Antagonisten* führt deshalb stets in die Notwendigkeit, Kompromisslösungen zu suchen.

Formal liefert jedes Design einer Tablette  $T$  eine Messung  $(l, h)$  und aus diesen Elementen des  $\mathbb{R}^2$  soll der beste Kompromiss ausgewählt werden. Im Allgemeinen wird es kein eindeutig bestes Design geben, da im  $\mathbb{R}^2$  bekanntlich keine Totalordnung existiert. Es wird also nötig, einen formalen Rahmen aufzustellen, der eine Entscheidung unter den möglichen Designs auf Grund anwendungsorientierter Kriterien ermöglicht. Dieser formale Rahmen muss in der Regel Größen verschiedener Maßeinheiten vergleichbar machen, um Kompromisslösungen zu konstruieren. Wenn man so will, handelt es sich hierbei um die Aufgabe, „Äpfel und Birnen“ vergleichbar zu machen.

Die Objekte einer solchen Multikriteriellen Optimierung können vielfältigster Natur sein. Es kann sich, wie im Beispiel, um eine Produktoptimierung handeln, es

## 2 Das Problem der Multikriteriellen Optimierung

kann aber auch die Notwendigkeit bestehen, ein Ranking von Lieferanten zu erstellen, oder gar die Notwendigkeit, unter verschiedenen Produktionsverfahren ein „bestes“ auszuwählen.

Im Kapitel 3 wird das Problem der MCO in eher formalem Rahmen noch einmal eingeführt.

Zusammenfassend versucht eine Multikriterielle Optimierung also, in einer Menge  $\mathbb{G}$  von möglichen Objekten dasjenige zu identifizieren, welches bei gemeinsamer Betrachtung aller Merkmale  $Y_i$  dieses Objektes das „beste“ im Sinne der Anwendung ist.

Diesen Vorgang kann man ganz allgemein als Qualitätsoptimierung bezeichnen, entsprechend die  $Y_i$  als „Qualitätsmerkmale“.

### 2.1 Problemtypen der MCO

Die Qualitätsmerkmale  $Y_i$  selbst können ebenfalls von vielfältiger Gestalt sein. Es kann sich um qualitative, ordinale oder metrische Größen handeln, Messwerte können stetig oder diskret vorhanden sein. Lediglich nominale Merkmale kommen nicht als Qualitätsmerkmale in Frage, da jedes *einzelne* Merkmal anordbar sein muss.

Betrachtet man die Arten von Anforderungen an die Qualitätsmerkmale, so kann man genau zwei wichtige Klassen dieser Merkmale und damit auch zwei Klassen von Optimierungsaufgaben identifizieren:

1. Merkmale, bei denen die maximale Qualität bei einem exakt definierten Wert, dem Sollwert ( $T$ , target value), erreicht ist. Sowohl Unter-, als auch Überschreiten dieses Wertes vermindern die Qualität. Dieser Fall wird im Folgenden als Sollwertfall ( $TV$ ) bezeichnet. Oftmals werden in diesem Fällen untere ( $LSL$ , lower specification limit) und obere ( $USL$ , upper specification limit) Spezifikationsgrenzen angegeben. Es kann ebenfalls vorkommen, dass statt eines Sollwertes ein ganzes Intervall von voll befriedigenden Werten angegeben wird.
2. Merkmale, bei denen eine Erhöhung des Messwertes stets auch eine Verbesserung in der Qualität bedeutet. In der Literatur heißt dieser Fall „*the-larger-the-better*“. Dieser wird im Folgenden als Maximierungsproblem ( $LB$ ) bezeichnet.

Fälle, in denen es mehrere Bereiche „guter“ Werte, getrennt durch Bereiche „schlechter“ Werte gibt, sind denkbar, werden aber in dieser Arbeit nicht behandelt. Es scheinen auch keine Fälle der praktischen Anwendung solcher Spezifikationen zu existieren.

## 2.1 Problemtypen der MCO

Natürlich gibt es auch Fälle, in denen nicht eine Maximierung, sondern eine Minimierung erforderlich ist. In diesen Fällen werden die Probleme durch Negation des Qualitätsmerkmals oBdA in ein Maximierungsproblem überführt. Denn da die Negation die Ordnungsrelation umkehrt, gilt:

Gegeben sei ein Qualitätsmerkmal  $Y_i$ , welches minimiert werden soll. Durch Übergang zu  $-Y_i$  erhält man ein äquivalentes Qualitätsmerkmal, welches maximiert werden muss.

Im Weiteren sind alle Probleme entweder vom Typ  $(TV)$  oder vom Typ  $(LB)$ , eine eventuell notwendige Negation sei bereits durchgeführt.

## *2 Das Problem der Multikriteriellen Optimierung*



# 3 Hierarchie der Optimierungen

In diesem Abschnitt wird der formale Rahmen der Arbeit gesteckt. Insbesondere werden zum einen die Notationen eingeführt, zum anderen die Hierarchie der verschiedenen in der MCO auftretenden Optimierungen verdeutlicht. Es bietet sich an, diese beiden Punkte gemeinsam zu behandeln, da die natürliche Hierarchie der verschiedenen Optimierungen einen großen Teil der Notation bestimmt.

## 3.1 Situation

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind „Produkte“ (aus einer Grundgesamtheit  $\mathbb{G}$ ), deren Qualität durch die Messung von  $m$  Eigenschaften  $Y := (Y_1, \dots, Y_m)$  bestimmt wird. Ein Produkt kann also mit seinen Eigenschaften identifiziert werden. Die einzelnen Komponenten  $Y_i, i = 1, \dots, m$ , heißen Zielgrößen. In dieser Schreibweise bezeichnen  $Y$  und  $Y_i$  Zufallsvariablen. Realisationen werden mit Kleinbuchstaben  $y = (y_1, \dots, y_m)$  bezeichnet.

Da Wünschbarkeiten ein Instrument der Optimierung sind, befindet man sich in der Regel bei ihrer Anwendung im Optimierungsschritt des dreistufigen Vorgehens mit Hilfe der Versuchsplanung „screening, modelling, optimisation“ [CW99].

In dieser Situation lassen sich die Eigenschaften der Produkte nicht direkt einstellen. Sie ergeben sich vielmehr aus der Durchführung eines Versuchs mit den Einstellungen  $x := (x_1, \dots, x_k)$  für die  $k$  interessierenden Einstellgrößen (Faktoren), einem Fehlervektor  $\epsilon := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$  mit einer Komponente für jede Zielgröße, sowie durch einen unterstellten, funktionalen Zusammenhang  $f$  zwischen Einstellgrößen und Zielgrößen, der gegebenenfalls geschätzt werden muss.

Im statistischen Sinne sind die untersuchten Zielgrößen  $Y_i$  und die Restgrößen  $\epsilon_i, i = 1, \dots, m$ , für jede Faktoreinstellung  $x$  aus der Menge aller möglicher Einstellungen  $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^k$ , dem so genannten *Operationsbereich (region of operability)*, Zufallsvariablen, während die Einstellgrößen fest sind. Es sind also

$Y_1, \dots, Y_m, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  : für jedes  $x \in \mathbb{O}$  Zufallsvariablen,

$x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{O}$  sind die festen Einstellgrößen.

Der funktionale Zusammenhang  $f$  ist komponentenweise für jede Zielgröße zu

### 3 Hierarchie der Optimierungen

betrachten. Es ergibt sich somit:

$$Y = (Y_1, \dots, Y_m) = (f_1(x, \epsilon_1), \dots, f_m(x, \epsilon_m)) = f(x, \epsilon).$$

Die eigentliche Aufgabe der MCO besteht nun darin, mittels einer geeigneten dimensionsreduzierenden Funktion  $s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine Ordnung der Produkte im  $\mathbb{R}^m$  zu ermöglichen. Die Rolle dieser Funktion  $s$  können beispielsweise die hier untersuchten Wünschbarkeitsindizes übernehmen.

Um die Begrifflichkeiten zunächst einfach zu halten, sei für den Moment angenommen, dass der Zusammenhang zwischen Einstellung  $x$  und Produkt  $y$  deterministisch ist. Für diesen klassischen Fall gilt die

**Definition 3.1 (Lösung der MCO-Aufgabe)** Jede Lösung  $y_{opt}$  der **MCO-Aufgabe** mit

$$y_{opt} : s(y_{opt}) = \max_{y \in f(\mathbb{O})} s(y) = \max_{x \in \mathbb{O}} s(f(x))$$

heißt ein *optimales Produkt*. Jedes Urbild  $x_{opt}$  einer Lösung  $y_{opt} = f(x_{opt})$ , heißt *optimale Faktoreinstellung*.

Auf die Fälle mit nicht vernachlässigbarem Fehler wird an entsprechender Stelle eingegangen. Die hier eingeführten Begriffe werden dann der Situation angemessen übertragen.

**Bemerkung 3.2** Die Fehler  $\epsilon_i$  sind im Folgenden durchgängig als paarweise unabhängig vorausgesetzt.

Wird bei einem MCO-Problem die Rückübertragung in den Faktorraum versucht, so handelt es sich inhärent um ein *Kalibrationsproblem*, in der Regel mit mehreren Ziel- und Einstellgrößen. Diese Probleme sind sehr schwierig zu behandeln. Anmerkungen hierzu finden sich in Kapitel 3.3.

## 3.2 Hierarchie der Optimierungen

Die verschiedenen, auftretenden Optimierungsaufgaben lassen sich auf natürliche Weise in Hierarchiestufen einordnen, bei denen die Unsicherheit über die zu optimierenden Daten immer größer und die Optimierungsaufgabe deshalb immer schwieriger wird.

Komplexität bezieht sich hier nicht nur auf den formalen Rahmen, sondern auch auf die inhaltliche Aufgabenstellung. Während es bei deterministischen Optimierungsaufgaben noch recht klar zu formulieren ist, wann ein Objekt besser ist als ein anderes, wird dieses zunehmend schwerer, wenn man Mess- und Modellfehler berücksichtigen will.

Unter Berücksichtigung dieser Kriterien ergibt sich eine Hierarchie von Optimierungen, deren Stufen, nach aufsteigender Komplexität geordnet, in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

### 3.2.1 Einfache, empirische MCO

Unter einer einfachen MCO versteht man die Anordnung einer endlichen Anzahl höherdimensionaler Objekte  $y_1, \dots, y_n$  mit dem Ziel, ein optimales Objekt  $y_{opt}$  zu identifizieren. Diese  $y_i$  werden nicht als Realisierungen eines Zufallsprozess verstanden. Diese Art MCO ist in der Praxis sehr häufig anzutreffen, ja sie bilden sogar eine eigene Disziplin, das so genannte MCDM (*multi criteria decision making*). Anwendungen finden sich z. B. in der Wasserwirtschaft. Meistens handelt es sich in diesen Situationen nicht um „Produkte“ im engeren Sinne, zwischen denen entschieden wird, sondern um Standorte von Industrieanlagen oder Zulieferbetriebe, welche multi-kriteriell bewertet werden sollen.

In der Regel spielen in diesen Situationen die statistischen Eigenschaften des Entscheidungsfindungsprozesses keine Rolle.

### 3.2.2 Empirische MCO mit funktionalem Zusammenhang

Auf der nächsten Hierarchiestufe befinden sich die Fälle, bei denen nicht eine endliche Anzahl von  $y_i$  gegeben ist, sondern bei denen die einzelnen Zielgrößen  $y_i$  deterministisch über einen funktionalen Zusammenhang  $f$  von einer Zahl von Einflussgrößen  $x_1, \dots, x_k$  abhängen, wie im Abschnitt 3.1 beschrieben.

Die Optimierung besteht in diesem Falle darin, auf der Antwortfläche der Kurve  $f(x)$  ein globales Maximum zu finden. Diese Art Optimierung ist theoretisch gut verstanden, es ist deshalb aber auch bekannt, dass das Auffinden des globalen Optimums einer solchen Antwortfläche durch die üblichen Optimierungsalgorithmen nicht garantiert werden kann, wenn über diese Fläche nichts weiter bekannt ist. Übliche Anforderungen sind natürlich die Differenzierbarkeit der Funktion  $f$  oder der Zusammenhang der Gebiete, über die optimiert werden soll. Natürlich muss eine solche Aufgabe nicht eindeutig lösbar sein.

### 3.2.3 Optimierung über dem Faktorraum bei funktionalem Zusammenhang

Die nächste Komplexitätsstufe stellt die Hinzunahme des Kalibrationssschrittes dar. Es wird nicht mehr nach einem Optimum im Produktraum, sondern nach dem Urbild eines solchen Optimums im Faktorraum gesucht. Auch hier sind noch

### 3 Hierarchie der Optimierungen

alle Größen als deterministisch angenommen. Statistische Fragestellungen spielen bis zu dieser Hierarchiestufe keine Rolle.

#### 3.2.4 MCO mit geschätztem funktionalem Zusammenhang

Auf dieser Stufe befinden sich die Beispiele für die Anwendung von Wünschbarkeitsindizes in der Literatur.

Der Zusammenhang  $y = f(x)$  ist nicht mehr als bekannt angenommen, sondern es findet eine Schätzung der individuellen Modelle  $y_i = f_i(x)$  statt und es wird das Problem

$$! \max_{\hat{y}} s(\hat{y}) = \max_{x \in \mathbb{O}} s(\hat{f}(x)), \hat{y} = \hat{f}(x)$$

gelöst.

Genau für diese Situation hat Harrington das Konzept der Wünschbarkeiten (s. Kapitel 5.2) entwickelt und Derringer-Suich ihre Verbesserung der Wünschbarkeiten (s. Kapitel 5.3) vorgestellt.

Die Schätzungen  $\hat{f}_i$  werden in der Literatur behandelt, als lägen „wahre“ Zusammenhänge vor. Die Information, dass lediglich Schätzungen vorliegen, wird vernachlässigt. Auf die Auswirkungen dieses Vorgehens auf die Güte der gewonnenen Lösungen wird für den Fall der Wünschbarkeiten in Kapitel 7 eingegangen.

Auch hier ergibt sich die nächste Komplexitätsstufe auf natürliche Weise durch die Frage nach den optimalen Faktoreinstellungen bzw. durch den Übergang zur Kalibration.

Aus statistischer Sicht ist zu bemerken, dass im Gegensatz zu den ersten Hierarchiestufen die Berechnung des Optimums im Faktorraum zu einer Schätzprozedur wird. Als Ergebnis erhält man also einen Schätzer  $\widehat{x_{opt}}$  für eine optimale Faktoreinstellung  $x_{opt}$  bei bekanntem  $f$ !

**Bemerkung 3.3** Durch den Kalibrationsschritt induziert die Funktion  $s$  auch eine Ordnung auf dem Faktorraum  $\mathbb{O}$ . Da die Kalibration in dieser Arbeit im Rahmen der numerischen Optimierung der Antwortfläche von  $s$  über dem Faktorraum geschieht, überträgt sich die Ordnung im Produktraum so auf den Faktorraum und wird nicht besonders behandelt. Es wird als Ordnungsfunktion auf dem Faktorraum stets nur die durch  $s$  induzierte Ordnung benutzt.

#### 3.2.5 MCO unter Berücksichtigung der Fehlerterme

Da die zu optimierenden Größen eigentlich Zufallsvariablen sind, ist es naheliegend, auch die Verteilungsinformationen über die  $Y_i$  zu nutzen. Entweder kann eine Ordnung auf den Verteilungsfunktionen der  $Y_i$  definiert werden oder man

nutzt Kenngrößen der Verteilung, wie z.B. Erwartungswert oder Ausschussquote. Dieses Vorgehen ist erstmals in [Ste00] vorgeschlagen worden. Im Zusammenhang mit dem Harringtonschen Index wurde dieser Ansatz in [WW03] weiter verfolgt. Hier wird dieses Vorgehen erstmals im Zusammenhang mit den Wünschbarkeiten von Derringer-Suich detailliert vorgestellt.

Erst auf dieser Komplexitätsstufe wird es möglich, die „richtige“ Optimierungsaufgabe zu behandeln. Was „richtig“ in diesem Zusammenhang bedeutet, sowie die möglichen Folgerungen werden ausführlich ab Kapitel 8 untersucht.

Die Kalibration ist auch hier der letzte, aber wichtige Schritt und liefert ebenfalls einen Schätzer  $\widehat{x}_{opt}$  für eine optimale Faktoreinstellung.

## 3.3 Das Kalibrationsproblem

Wie diese Auflistung der Optimierungsstufen zeigt, ist die letztendliche Kalibrierung zurück auf den Faktorraum der entscheidende Schritt der MCO. Es wäre deshalb sehr wünschenswert, statistische Eigenschaften für eben diese Schätzung  $\widehat{x}_{opt}$  herzuleiten. Leider hat sich diese Aufgabe für den Moment als zu schwierig erwiesen. Bereits durch den Übergang zu Zufallsvariablen im Optimierungsschritt ist aber eine Verbesserung des klassischen Vorgehens gelungen.

Nicht gelungen ist, die Auswirkungen der numerischen Optimierung im Kalibrations-schritt analytisch zu fassen. Allerdings gehören Probleme im Zusammenhang mit der Kalibration zu den schwierigen Problemen der aktuellen Forschung. Einen schönen Einblick in dieses Gebiet findet man z.B. in [BKM03].

Für die Beurteilung der Güte der durch Kalibration gewonnenen Schätzer  $\widehat{x}_{opt}$  ist man weiterhin auf Simulationen angewiesen. Zumindest sind sehr viel effizientere Simulationen durch die Herleitung exakter Verteilungsfunktionen für die individuellen Wünschbarkeiten in Kapitel 8 möglich geworden.

### *3 Hierarchie der Optimierungen*

# 4 Ansätze zur Multikriteriellen Optimierung

Bevor die statistische Betrachtungsweise in den Vordergrund tritt, soll kurz dargestellt werden, welche Ansätze in anderen Bereichen der Mathematik für die Lösung des MCO-Problems verfolgt werden.

Die hier vorgestellten Ansätze haben gemeinsam, dass sie auf den Einsatz von Expertenwissen verzichten. Es wird versucht, trotz fehlender Anordnung des  $\mathbb{R}^m$ , eine „objektive“, rein formale Optimierung durchzuführen und ein bestes Element zu identifizieren.

Es zeigt sich, dass die prinzipiellen Mängel dieser Verfahren zur Formulierung von Anforderungen an multikriterielle Optimierungsverfahren führen, welche dann später als Maßstab auch an die Wünschbarkeiten angelegt werden müssen.

## 4.1 Dominanz

Der einfachste und nahe liegende, aber auch sehr optimistische Ansatz ist zu versuchen, ein eindeutig „bestes“ Objekt unter allen Kandidaten zu finden. Dieser Ansatz führt zum Begriff der *Dominanz*.

**Definition 4.1 (Dominanz)** Gegeben seien zwei Punkte  $x, y$  im  $\mathbb{R}^m$ . Man sagt  $x$  **dominiert**  $y$ , in Zeichen  $x \gg y$ , wenn  $x_i \geq y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , und  $x_j > y_j$  für ein  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Die multikriterielle Optimierungsaufgabe ist nun gelöst, wenn man ein  $x_{opt} \in \mathbb{O} \subset \mathbb{R}^m$  findet, so dass gilt

$$\text{für alle } x \in \mathbb{O} \setminus \{x_{opt}\} : x_{opt} \gg x.$$

$x_{opt}$  heißt dann *optimales Element* von  $\mathbb{O}$ .

Die Menge  $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^m$  heißt entweder *region of operability*, wenn es sich um eine Versuchsplanungssituation handelt, in der Faktoreinstellungen optimiert werden sollen, oder *region of operations*, wenn unter einer gegebenen Menge von Objekten, welche direkt auswählbar sind, ein optimales Objekt gefunden werden soll.

In der Anwendung lässt sich „ $>$ “ lesen als „besser“.

**Bemerkung 4.2** Eine wichtige Beobachtung ist, dass wegen der fehlenden Totalordnung des  $\mathbb{R}^m$  nicht gilt:  $x \gg y$  oder  $y \gg x$  für beliebige  $x \neq y$  aus  $\mathbb{O}$ !

Das Konzept der Dominanz ist formal sehr schön und einfach, hat jedoch in der Anwendung eine gravierende Schwachstelle: Es muss kein dominierendes Objekt existieren. Tatsächlich ist es in der Anwendung mit steigender Dimension, bzw. Kriterienzahl immer unwahrscheinlicher, ein dominierendes Objekt zu finden.

## 4.2 Pareto-Optimalität

Da Dominanz sich als zu strenges Kriterium erweist, versucht man es abzuschwächen. Es muss zwar nicht immer ein dominantes Element geben, aber im Umkehrschluss existieren dann sicher nicht-dominierte Elemente.

Dies führt zum Begriff der Pareto Optimalität:

**Definition 4.3 (Pareto-Optimalität)** Sei eine Teilmenge  $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^m$  gegeben. Ein Punkt  $x \in \mathbb{O}$  heißt pareto-optimal, wenn es keinen Punkt  $y \in \mathbb{O}$  gibt, mit  $y \gg x$ .

Im Zusammenhang mit der Optimierung bedeutet dies, dass ein Objekt, welches nicht koordinatenweise im Sinne der Dominanz verbessert werden kann, in gewisser Weise als „optimal“ angesehen wird. Die Menge der pareto-optimalen Punkte ist also die Menge der nicht dominierten Punkte.

Im Umkehrschluß sollte keine Lösung des Optimierungsproblems akzeptiert werden, welche nicht pareto-optimal ist, da in einem solchen Fall eine koordinatenweise bessere Lösung existiert. Man erhält so eine erste starke Anforderung für Verfahren zur Lösung von MCO-Problemen:

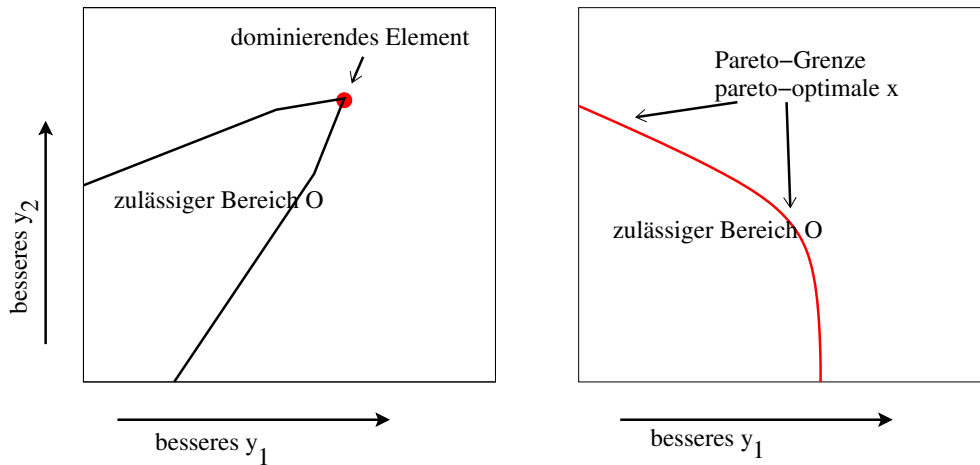
**Jede vorgeschlagene Lösung einer MCO muss pareto-optimal unter allen möglichen Kandidaten sein!**

Wie man sehen wird, erfüllen einige der in der Literatur üblichen Verfahren diese Bedingung nicht. Für den wichtigen Fall der Derringer-Suich Funktionen kann aber eine einfache Einschränkung angegeben werden, so dass die vorgeschlagene Variante die Pareto-Optimalität garantiert! (s. Kapitel 9)

Die Menge aller pareto-optimalen Punkte einer Menge heißt die *Pareto-Grenze* dieser Menge. Im Prinzip könnte sich die Suche nach einer Lösung also auf die Pareto-Grenze beschränken. Es ist aber leider in der Praxis sehr schwer, diese Grenze zu bestimmen. In Abbildung 4.1 sind die Begriffe *Dominanz* und *Pareto-optimalität* veranschaulicht.



Abbildung 4.1: Dominanz und Pareto-Optimalität



In gewisser Weise ist das Problem der pareto-optimalen Lösungen komplementär zum Problem der Dominanz. Während es im Falle der Dominanz oft **keine** Lösung gibt, gibt es im Falle der Pareto-Optimalität oft viele Lösungen, zwischen denen in der Anwendung entschieden werden muss. Da jedoch in der Anwendung nach **einer** besten Lösung gesucht wird, muss eine Möglichkeit gefunden werden, zwischen den möglichen Lösungen zu differenzieren. An dieser Stelle kann die Mathematik ohne anwendungsbezogene Hilfestellung nicht weiterhelfen. Es muss Expertenwissen in das Optimierungsverfahren einbezogen werden!

Der Anwender wird zwischen verschiedenen Aspekten der vorgeschlagenen Lösungen gewichten müssen, um zu einer Entscheidung zu gelangen. Die endgültige Entscheidung für ein Optimum wird stark problemabhängig sein und die relative Wichtigkeit der verschiedenen Qualitätsmerkmale berücksichtigen.

Es ergibt sich daraus eine zweite starke Forderung an ein gutes Verfahren für die MCO:

**Es muss möglich sein, die verschiedenen Merkmale unterschiedlich zu gewichten, um Expertenwissen berücksichtigen zu können!**

## 4.3 Andere Verfahren der MCO in OR und Statistik

Im Bereich des Operations Research ist eine Vielzahl von Heuristiken entwickelt worden, um Probleme der MCO zu lösen. In der Regel ist über deren statistische Eigenschaften nichts bekannt. Dies ist allerdings auch nicht überraschend, da bei

## 4 Ansätze zur Multikriteriellen Optimierung

ihrer Entwicklung diese Aspekte keine Rolle spielten. In der Regel dienen sie zur Optimierung unter Vernachlässigung eventueller Fehler in der Modellierung, genau wie ursprünglich die Wünschbarkeiten. Bei ihrer Entwicklung stand klar die Anwendung auf konkrete Probleme im Vordergrund.

Möchte man eine Liste von Verfahren erstellen, die jeweils die verschiedenen Klassen von Ansätzen zur Lösung von MCO-Problemen repräsentieren, so könnte man zu folgender, unvollständiger Aufstellung gelangen:

- Die Pareto-Optimalität, die den mathematischen, nicht problemspezifischen Ansatz repräsentiert.
- Grafische Verfahren, z.B. *overlay plots*.
- Rangbasierte Verfahren, ein Beispiel ist *Prometee*.
- Wünschbarkeiten, die in dieser Arbeit behandelt werden.
- (Geld-)Verlustfunktionen, die in die Klasse der Nutzenfunktionen fallen.

Der Pareto-Ansatz ist im vorhergehenden Abschnitt behandelt worden. Wünschbarkeiten sind Gegenstand dieser Arbeit.

Für die grafischen Verfahren und die rangbasierten Verfahren seien im Folgenden exemplarisch zwei gebräuchliche Klassen von Verfahren angeführt. Zu den anderen Verfahren werden einige Bemerkungen zu Vor- und Nachteilen gemacht.

### 4.3.1 Grafische Verfahren: Beispiel Overlay Plots

Overlay Plots bemühen sich auf grafische Art und Weise, eine Kompromisslösung zu finden. Es wird versucht, durch Überlagerung von Konturplots einen visuellen Eindruck zu bekommen, in welchen Bereichen mit besonders guten Kompromisslösungen zu rechnen ist. Diese Methode funktioniert nicht mit mehr als drei- oder vierdimensionalen Zielgrößen, da die Plots sehr schnell unübersichtlich werden. Als wirklich multikriterielles Verfahren ist es deshalb nur sehr eingeschränkt zu empfehlen.

### 4.3.2 Ordnende Verfahren: Prometee / GAIA

Da beide Verfahren in den Details sehr kompliziert aufgebaut sind, kann hier nur ein oberflächlicher Abriss gegeben werden. Bei Prometee (bzw. GAIA) werden alle möglichen paarweisen Vergleiche zwischen den zu untersuchenden Objekten in Betracht gezogen, um eine partielle Präordnung im  $\mathbb{R}^m$  herzustellen.

### 4.3 Andere Verfahren der MCO in OR und Statistik

Hierzu wird zu jeder Zielgröße  $Y$  eine so genannte Präferenzfunktion  $P_Y$  definiert, welche der Differenz zweier Experimente  $a$  und  $b$  zu dieser Zielfunktion einen numerischen Wert  $P_Y(a, b) = P_Y(a - b)$  zuordnet. Eine von einem Experten in der Anwendung festgelegte *Präferenzindexfunktion*  $\Pi(a, b)$  dient zum Vergleich zweier Experimente. Die Summe  $\sum_b \Pi(a, b)$  über alle Präferenzindizes heißt „positive outranking flow“, die Summe  $\sum_b \Pi(b, a)$  entsprechend „negative outranking flow“ des Experiments  $a$ . Mit Hilfe dieser „outranking flows“ kann eine Präordnung auf dem Raum der Experimente (bzw. Faktoreinstellungen) erzeugt werden.

Als Verfahren der MCO sind sowohl Prometee als auch GAIA sehr flexibel anzuwenden, jedoch sehr schwer zu interpretieren. Über die theoretischen Eigenschaften dieser Klasse von Verfahren ist sehr wenig bekannt.

Einen schönen Überblick über diese und einige andere Verfahren der MCO in Operations Research liefert z.B. [HdSD92].

#### 4.3.3 Andere Verfahren in der Statistik

Andere Verfahren, die ihren Ursprung eher in der Statistik haben, sind Nutzenfunktionen und monetäre Verlustfunktionen.

Der entscheidende Unterschied von Wünschbarkeiten zu Nutzenfunktionen liegt in der Unbeschränktheit der Nutzenfunktionen. In der Regel werden quadratischen Nutzenfunktionen gewählt, welche deshalb aber mit wachsender Abweichung von einem Sollwert zu beliebig großen Nutzen- bzw. Verlustwerten führen. Dieser Ansatz hat auch eher (beweis-)technische Gründe, als dass er eine inhaltliche Interpretation ermöglicht, wie es die Wünschbarkeiten leisten.

Der Ansatz, die Wünschbarkeiten als Nutzenfunktionen mit endlichem Wertebereich zu betrachten, wird in der Dissertation von Jessenberger [Jes00] verfolgt.

Zu Nutzenfunktionen gibt es eine umfangreiche Literatur (s. z.B. [Mos94]). Für den Fall multiattributieller Nutzenfunktionen wird in Beweisen jedoch stets die Konvexität geeigneter Nutzenfunktionen benutzt, wodurch die Anwendung etwas eingeschränkt wird.

Bei monetären Verlusten wird versucht, direkt zu quantifizieren, welchen Nutzen bzw. welche Kosten bestimmten Merkmalsausprägungen als Geldwert entsprechen. Es ist in der Regel jedoch nicht möglich, mit genügender Genauigkeit die monetären Folgen einer Produktionsabweichung festzulegen. Gerade zu diesem Ansatz liefern die Wünschbarkeiten eine angemessene und sehr geeignete Ergänzung.

Verlust- und Nutzenfunktionen sind den Wünschbarkeiten konzeptionell zwar ähnlich, haben aber in der Anwendung offenbar den Platz gelassen, den ein Verfahren wie die Wünschbarkeiten benötigen, um sich zu entwickeln.

Die alternativen Verfahren werden in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

## 4.4 Anforderungen an ein MCO Verfahren

Zusammenfassend ergeben sich aus den Stärken und Schwächen der vorgestellten Verfahren folgende Anforderungen, an Hand derer sich die Güte eines MCO-Verfahrens beurteilen lassen muss:

1. Die wichtigste Eigenschaft eines solchen Verfahrens muss die Fähigkeit sein, Expertenwissen adäquat in die Optimierung mit einzubeziehen. Ohne Einbeziehen externen Wissens bleibt das Ergebnis einer solchen Optimierung ohne Belang. Dies ist in der Praxis gleichbedeutend damit, dass Gewichte für die verschiedenen Zielgrößen festgelegt werden können. In diesem Zusammenhang ist darauf zu achten, dass die vorgeschlagenen Gewichtungen möglichst inhaltlich interpretierbar sind. Gibt es zu den Gewichten eine Intuition, wie man z.B. eine bestimmte Zielgröße „doppelt so stark“ gewichtet wie eine andere, so ist dies ein weiteres Gütekriterium für das Verfahren.
2. Um die verschiedenen Merkmale miteinander vergleichen zu können, muss das Verfahren einheitenlose Maßzahlen für die einzelnen Größen betrachten („Äpfel und Birnen vergleichbar machen“).
3. Jede angebotene Lösung muss pareto-optimal sein.
4. Das Verfahren muss möglichst mit einer steigenden Problemdimension, sprich steigender Kriterienzahl, skalieren. Dies bedeutet, dass es unabhängig von der Problemdimension anwendbar und möglichst auch interpretierbar sein soll.

Diese Kriterien bilden den Maßstab, mit dem sich der Gegenstand der vorliegenden Arbeit, die Wünschbarkeiten, beurteilen lassen müssen.

# 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

Ein Verfahren, welches die soeben formulierten Anforderungen gut erfüllt, ist das zweistufige Wünschbarkeitsverfahren, aufgeteilt in die individuellen Wünschbarkeitsfunktionen je Zielgröße und zusammenfassendem Wünschbarkeitsindex für das Gesamtprodukt.

Bevor in späteren Abschnitten auf einige konkrete Formulierungen von Wünschbarkeiten eingegangen wird, soll zunächst der formale Rahmen dieses Konzeptes in möglichst großer Allgemeinheit angegeben werden.

## 5.1 Das Konzept der Wünschbarkeit

Gegeben sei ein Objekt mit Qualitätsmerkmalen  $Y_1, \dots, Y_m$ . Dann ergibt sich eine möglichst allgemeine Formulierung für eine *Wünschbarkeitsfunktion* zu:

**Definition 5.1 (Wünschbarkeitsfunktion)** Sei  $Y_i$  ein Qualitätsmerkmal, welches reellwertig erfasst wird. Eine Funktion

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ y_i &\mapsto d(y_i) \end{aligned}$$

heißt *Wünschbarkeitsfunktion* (desirability function) für die Komponente  $Y_i$  oder auch *Einzelwünschbarkeit* der Komponente  $Y_i$ . Einer Messung  $y_i$  des Merkmals  $Y_i$  wird eine reelle Zahl aus dem Intervall  $[0, 1]$  als so genannte *Wünschbarkeit* zugewiesen. Die Funktionen  $d$  sind dabei so zu wählen, dass „bessere“ Werte von  $Y_i$  größeren Werten von  $d(y_i)$  zugeordnet werden. Ein Wert  $d(y_i) = 0$  bedeutet, dass das Produkt im  $i$ -ten Merkmal den Anforderungen nicht in akzeptabler Weise entspricht, ein Wert  $d(y_i) = 1$  bedeutet, dass das Produkt bezüglich des  $i$ -ten Merkmals nicht weiter verbesserungsfähig ist.

Unter diese Definition fallen auch qualitative  $Y_i$ , wenn die qualitativen Messungen auf geeignete Weise in reelle Zahlen transformiert werden können. Die Struktur der Funktionen  $d$  ist hier offenbar nicht festgelegt, lediglich die Korrespondenz zwischen Wünschbarkeitswerten und Messungen.

## 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

Im Allgemeinen kann für jede Komponente  $Y_i$  eine andere Funktion  $d_i$  gewählt werden.

Diese Definition einer Wünschbarkeitsfunktion sorgt dafür, dass alle Qualitätsmerkmale in einheitenlose Maßzahlen übersetzt werden. Um das Konzept zu vervollständigen, muss jetzt noch eine entsprechende Festlegung für die Zusammenfassung zu einer Qualitätsmaßzahl für das Gesamtprodukt  $Y$  getroffen werden.

Entsprechend allgemein lautet die Definition für den Wünschbarkeitsindex:

**Definition 5.2 ((starker) Wünschbarkeitsindex)** Gegeben sei ein Objekt  $y \in \mathbb{R}^m$  mit Komponenten  $y_i, i = 1, \dots, m$ . Seien weiterhin  $d_i, i = 1, \dots, m$ , die den Komponenten zugeordneten Wünschbarkeitsfunktionen. Dann heißt eine Funktion

$$\begin{aligned} q : [0, 1]^m &\rightarrow [0, 1] \\ (d_1(y_1), \dots, d_m(y_m))' &\mapsto q(y) \end{aligned}$$

mit der Monotonieeigenschaft, dass zu zwei gegebenen Objekten  $y, z$  mit den selben zu messenden Eigenschaften und Komponenten  $y_1, \dots, y_m$  bzw.  $z_1, \dots, z_m$  gilt, dass

$$d_i(y_i) \geq d_i(z_i) \text{ für alle } i = 1, \dots, m \text{ und } d_j(y_j) > d_j(z_j) \text{ für ein } j \Rightarrow q(y) > q(z),$$

(*starker*) *Wünschbarkeitsindex* (desirability index) für  $y$  zu den Wünschbarkeitsfunktionen  $d_i, i = 1, \dots, m$ .

Die Abkürzung  $q$  wird gewählt, um eine Verwechslung des Index mit den einzelnen Wünschbarkeitsfunktionen auszuschließen und zugleich an die Eignung des Index als Qualitätsmaß zu erinnern.

Welche Bedeutung die geforderte Monotonieeigenschaft besitzt, zeigt folgendes Lemma.

**Lemma 5.3** Die geforderte Monotonieeigenschaft sichert die Pareto-Optimalität jeder Lösung  $y_{opt}$  des MCO-Problems.

**Beweis:** Angenommen eine Lösung  $y_{opt}$  des MCO-Problems wäre nicht pareto-optimal. Dann existiert ein Objekt  $z$  und ein Index  $i$ , so dass  $d_i(z_i) > d_i(y_i)$  und für die Komponenten  $j \neq i, j = 1, \dots, m$ , gilt  $d_j(z_j) \geq d_j(y_j)$ . Daraus würde aber folgen  $q(z) > q(y_{opt})$  und  $y_{opt}$  wäre keine Lösung des Problems. □

In der Praxis trifft man auch auf Indizes, die nicht der obigen Definition genügen. Diese nennt man *schwache Indizes* gemäß der folgenden Definition:

**Definition 5.4 (schwacher Wünschbarkeitsindex)** Gegeben sei ein Objekt  $y \in \mathbb{R}^m$  mit Komponenten  $y_i, i = 1, \dots, m$ . Seien weiterhin  $d_i, i = 1, \dots, m$ , die den Komponenten zugehörigen Wünschbarkeitsfunktionen. Dann heißt eine Funktion

$$\begin{aligned} q : [0, 1]^m &\rightarrow [0, 1] \\ (d_1(y_1), \dots, d_m(y_m))' &\mapsto q(y) \end{aligned}$$

mit der Monotonieeigenschaft, dass zu zwei gegebenen Objekten  $y, z$  mit denselben zu messenden Eigenschaften und Komponenten  $y_1, \dots, y_m$  bzw.  $z_1, \dots, z_m$  gilt, dass

$d_i(y_i) \geq d_i(z_i)$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und  $d_j(y_j) > d_j(z_j)$  für ein  $j \Rightarrow q(y) \geq q(z)$ ,  
schwacher Wünschbarkeitsindex für  $y$  zu den Wünschbarkeitsfunktionen  $d_i, i = 1, \dots, m$ .

Der Unterschied zwischen starken und schwachen Indizes ist also lediglich, dass, *ceteris paribus*, eine Verbesserung in einer Komponente im Falle eines schwachen Index nicht unbedingt zu einer Verbesserung der Qualitätsmaßzahl führt. Ein schwacher Index erzwingt folglich nicht die Pareto-Optimalität der Lösungen. Es wird auf diesen Umstand bei der Diskussion der verschiedenen Indizes noch näher eingegangen.

**Bemerkung 5.5** Es ist zu beachten, dass diese Formulierungen keinerlei Aspekte der Modellbildung oder der Modellfehler berücksichtigen. Der begriffliche Rahmen wird an den betreffenden Stellen entsprechend erweitert.

In dieser Allgemeinheit formuliert, ist das Konzept natürlich noch nicht operational. Dazu bedarf es konkreter Formulierungen von Funktionen, respektive Funktionenklassen, welche als Wünschbarkeitsfunktionen und Indizes dienen können.

Es gibt zwei wichtige Ansätze zur Umsetzung des Konzepts in der Praxis. Diese werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

## 5.2 Wünschbarkeiten nach Harrington

Am Anfang des Konzeptes der Wünschbarkeiten stand natürlich nicht die allgemeine Formulierung. Vielmehr wurden die Idee und der Name „Wünschbarkeit“ (*desirability*) 1965 von Edwin C. Harrington Jr. in [Har65] eingeführt. Harrington hatte das Verfahren als praktische Antwort auf ein Anwendungsproblem in der chemischen Industrie erdacht und erprobt.

Als Wünschbarkeitsfunktionen für Sollwertprobleme schlägt er die folgende Familie von Exponentialfunktionen vor:

## 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

**Definition 5.6 (Harringtonsche Wünschbarkeitsfunktion (TV))** Eine Funktion  $d^H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$d^H(y) := e^{-|\tilde{y}|^n}, \text{ wobei } \tilde{y} \text{ eine geeignete Transformation von } y \text{ ist,}$$

heißt *Harringtonsche Wünschbarkeitsfunktion für den Fall (TV)*.

Geeignet im Sinne von Harrington bedeutet,  $\tilde{y}$  so zu wählen, dass

$$d^H(LSL) = d^H(USL) = 1/e.$$

Als mögliche Transformation gibt er

$$\tilde{y} = \frac{2y - (USL + LSL)}{USL - LSL}$$

an.

Er betont insbesondere die durch eine solche Transformation erreichte Einheitenfreiheit der resultierenden Größen.

So definiert, ist  $d^H(y)$  symmetrisch um die Mitte zwischen der unteren Spezifikationsgrenze LSL und der oberen Grenze USL. Der Parameter  $n$  gibt eine Möglichkeit der Gewichtung der Abweichung vom Mittelwert. Große Werte von  $n$  ergeben flache Kurve im Bereich des Sollwertes, kleine Werte bestrafen kleine Abweichungen vom Sollwert stärker. Zwei typische Beispiele für Wünschbarkeitsfunktionen vom Harrington Typ zeigt das Bild 5.1. Wenn für ein weiteres  $y^*$  im Spezifikationsintervall die Wünschbarkeit  $d^H(y^*)$  bekannt ist, so kann daraus der Exponent bestimmt werden.

Aufgrund der Wahl einer symmetrischen Funktionenfamilie für den Sollwertfall war Harrington gezwungen, für den Maximierungsfall eine andere Funktionenklasse zu nutzen.

**Definition 5.7 (Harringtonsche Wünschbarkeitsfunktion (LB))** Eine Funktion  $d^H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

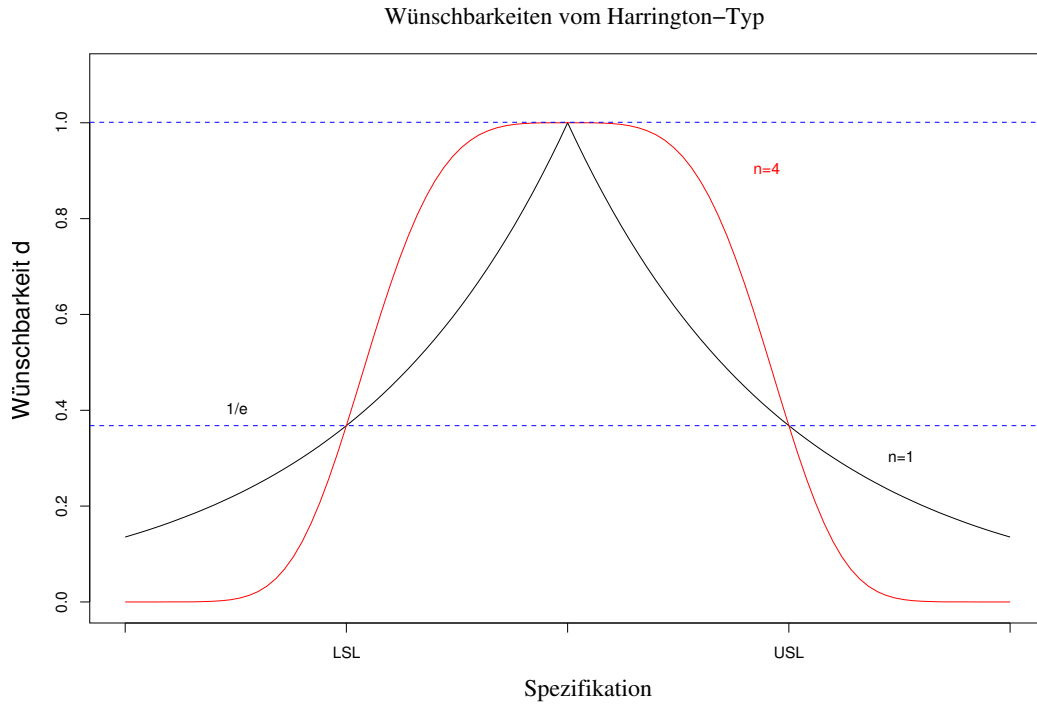
$$d^H(y) = e^{-(e^{-\tilde{y}})}, \text{ wobei } \tilde{y} \text{ eine geeignete Transformation von } y \text{ ist.}$$

heißt *Harringtonsche Wünschbarkeitsfunktion vom (LB) Typ*.

Die Transformation der Werte  $y$  nach  $\tilde{y}$  soll hier nach einer Messung der Größe  $y$  und der Zuweisung einer geeigneten Wünschbarkeit und einer entsprechenden Translation der Spezifikationsachse erfolgen. Da dieser Typ Wünschbarkeiten hier nicht weiter beachtet wird, sei zum einen für die Details auf den Artikel von Harrington [Har65], zum anderen für Ergebnisse zu seinen statistischen Eigenschaften auf die Arbeiten von Weber und Weihs [WW03] und Trautmann und Weihs [TW04] verwiesen.



Abbildung 5.1: Wünschbarkeitsfunktionen vom Harrington Typ für verschiedene Werte von  $n$ , Sollwertfall



Zur Kombination der individuellen Wünschbarkeiten  $d_i^H$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  zu einem Wünschbarkeitsindex empfiehlt Harrington das geometrische Mittel.

**Definition 5.8 (Harringtonscher Wünschbarkeitsindex)** Die Funktion  $q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$q^H(y) := \left( \prod_1^m d_i^H(y_i) \right)^{\frac{1}{m}}$$

heißt *Harringtonscher Wünschbarkeitsindex*.

Harringtons Begründung für die Wahl ist interessanterweise nicht mathematischer Natur. Viel mehr empfindet er das geometrische Mittel als mathematische Entsprechung des Effekts, dass ein Benutzer ein Produkt bereits dann als minderwertig betrachtet, wenn eine der gewünschten Eigenschaften des Produkts nicht erfüllt ist.

Für die Harringtonsche Auswahl von Funktionenklasse und Index gilt:

## 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

**Lemma 5.9** Ein durch den Harringtonschen Ansatz generierter Lösungsvorschlag  $y^{opt}$  ist pareto-optimal.

**Beweis:** Angenommen eine Lösung  $y^{opt}$  mit den Wünschbarkeiten  $d_i(y_i^{opt})$  ist nicht pareto-optimal, d.h. es gibt ein Objekt  $z$  mit Wünschbarkeiten  $d_i(z_i)$  und  $d_i(z_i) \geq d_i(y_i^{opt})$  und es existiert ein Index  $j$  mit  $d_j(z_j) > d_j(y_j^{opt})$ . Dann gilt

$$q(z) = d_j(z_j) \cdot \prod_{i \neq j} d_i(z_i) \geq d_j(z_j) \cdot \prod_{i \neq j} d_i(y_i^{opt}) > d_j(y_j^{opt}) \cdot \prod_{i \neq j} d_i(y_i^{opt}).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme  $y^{opt}$  ist Lösung. □

Für den eigentlichen Optimierungsschritt ist die Anwendung des geometrischen Mittels anstelle des Produktes der Einzelwerte bedeutungslos, da eine monotone Transformation die Lage der Maxima nicht ändert, jedoch sichert nur die Mittelwertbildung die Vergleichbarkeit des Wünschbarkeitsindex mit einer einzelnen Wünschbarkeitsfunktion. Dies ist ein für die Praxis wichtiger Aspekt, da nur so eine „Intuition“ dafür entwickelt werden kann, welche Bedeutung die errechneten Wünschbarkeiten für die Qualität eines Produktes haben.

Harrington hat die Wünschbarkeiten mit dem Fokus auf der praktischen Anwendbarkeit entwickelt. Er geht sogar so weit, eine Skala anzugeben, an Hand derer ein Anwender die Tauglichkeit seines Gesamtproduktes beurteilen soll. Sein Vorschlag sieht wie folgt aus:

- Wünschbarkeit 1 sei „ultimate satisfaction“ oder „improvement beyond this point has no value“;
- Wünschbarkeit 0.8 – 1 sei „excellent“ oder „well beyond anything available“;
- Wünschbarkeit 0.63 – 0.8 sei „good“ oder „slight improvement over industrial quality“;
- Wünschbarkeit 0.4 – 0.63 sei „acceptable, but poor“;
- Wünschbarkeit 0.3 – 0.4 sei „borderline“;
- Wünschbarkeit 0 – 0.3 sei „unacceptable to completely unacceptable“.

Angesichts der in Kapitel 9.3 erzielten Ergebnisse müssen seine Einteilungen als etwas zu stark verallgemeinernd angesehen werden. Sie beruhen auf der fälschlichen Vernachlässigung der Fehlerterme in den Modellen, weshalb Harrington sich die einseitige Betrachtung des Erwartungswertes leisten kann.

Eine detailliertere Erörterung der Möglichkeit einer solchen Skala findet sich in Kapitel 9.3.

### 5.3 Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer-Suich

Nichtsdestoweniger bieten die von Harrington angegebenen Werte eine gute Richtschnur für den Anwender zur anfänglichen Festlegung der Einzelwünschbarkeiten.

Harringtons Funktionen haben einige Nachteile gegenüber späteren Ansätzen. Insbesondere sind die Funktionen für den Sollwertfall durch die Symmetrie nicht sehr flexibel. Weiterhin ist Harrington gezwungen, für Maximierungsprobleme auf eine andere Klasse von Funktionen überzugehen, was die Vergleichbarkeit verschiedener Wünschbarkeitswerte weiter erschwert.

Der große Vorteil der Harringtonschen Funktionen liegt in der Möglichkeit, sie geschlossen anzugeben und in ihrer Differenzierbarkeit für die meisten Parameterwahlen. Beide Eigenschaften wirken sich günstig bei der numerischen Optimierung aus.

Es ist interessant zu bemerken, dass in Harringtons Konzept der Modellierung der Zielgrößen keine Bedeutung geschenkt wird. Zwar nutzt er das Werkzeug im Kontext der Versuchsplanung, er stellt jedoch keine Überlegungen an, welche Bedeutung die mit der Modellierung verbundene Unsicherheit für die Anwendung des Verfahrens hat.

Eine tiefere Betrachtung des Harringtonschen Ansatzes findet man in [WW03] bzw. [TW04].

## 5.3 Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer-Suich

In [DS80] stellen die Autoren Derringer und Suich einen alternativen Ansatz zur Definition der Wünschbarkeitsfunktion vor. Sie nutzen stückweise definierte Funktionen, um eine größere Flexibilität in der Gestalt der Kurven zu erreichen. In Abbildung 5.2 sind Beispiele dieser Funktionen für verschiedene Parameterkombinationen zu sehen. Folgende Definitionen legen die Derringer-Suich Funktionen fest:

### Definition 5.10 (Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktionen für (TV))

Eine Funktion  $d_{DS}^{TV} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den reellen Parametern untere Spezifikationsgrenze  $l$ , Sollwert  $t$ , obere Spezifikationsgrenze  $u$ , sowie den Gewichten  $\beta_l, \beta_r \in \mathbb{R}^+$  für Abweichungen nach links oder rechts vom Sollwert mit der Form

$$d_{DS}^{TV}(y) := \begin{cases} 0, & \text{für } y \leq l; \\ \left(\frac{y-l}{t-l}\right)^{\beta_l}, & \text{für } l < y \leq t; \\ \left(\frac{u-y}{u-t}\right)^{\beta_r}, & \text{für } t < y \leq u; \\ 0, & \text{für } u < y, \end{cases}$$

heißt *Wünschbarkeitsfunktion vom Derringer-Suich Typ für den Fall (TV)*.

## 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

Da im Fall (LB) der rechte Zweig „fehlt“, geben Derringer-Suich für diesen Fall folgende Definition.

### Definition 5.11 (Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktionen für (LB))

Eine Funktion  $d_{DS}^{LB} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Parametern  $l, t, \beta_l$  wie zuvor und der Form

$$d_{DS}^{LB}(y) := \begin{cases} 0, & \text{für } y < l; \\ \left(\frac{y-l}{t-l}\right)^{\beta_l}, & \text{für } l \leq y \leq t; \\ 1, & \text{für } t < y, \end{cases}$$

heißt *Wünschbarkeitsfunktion vom Derringer-Suich Typ für den Fall (LB)*.

Diese Definitionen scheinen zu implizieren, dass auch im Derringer-Suich Fall die verschiedenen Typen der Optimierung mit unterschiedlichen Funktionenklassen behandelt werden müssen. Allerdings erlaubt eine geeignete Umformulierung der Definitionen die Zusammenfassung beider Typen.

Um im Weiteren eine einheitliche Notation für diese Fälle zur Hand zu haben, wird definiert:

### Definition 5.12 (Einheitliche Notation für Derringer-Suich Funktionen)

Ein Quintupel  $(l, t, u, \beta_l, \beta_r)$  bezeichne eine Wünschbarkeitsfunktion vom Derringer-Suich Typ mit folgenden Vereinbarungen:

Wenn gilt

$$l, t, u \in \mathbb{R}, l < t < u, \beta_l, \beta_r \in \mathbb{R}^+, \text{ dann sei definiert } (l, t, u, \beta_l, \beta_r)(y) := d_{DS}^{TV}(y).$$

Wenn gilt

$$u = \infty, \text{ dann muss auch } \beta_r = 1 \text{ gelten und es ist } (l, t, \infty, \beta_l, 1)(y) := d_{DS}^{LB}(y).$$

Wenn das Argument aus dem Kontext klar ist, kann auch kurz

$$(l, t, u, \beta_l, \beta_r) := (l, t, u, \beta_l, \beta_r)(y)$$

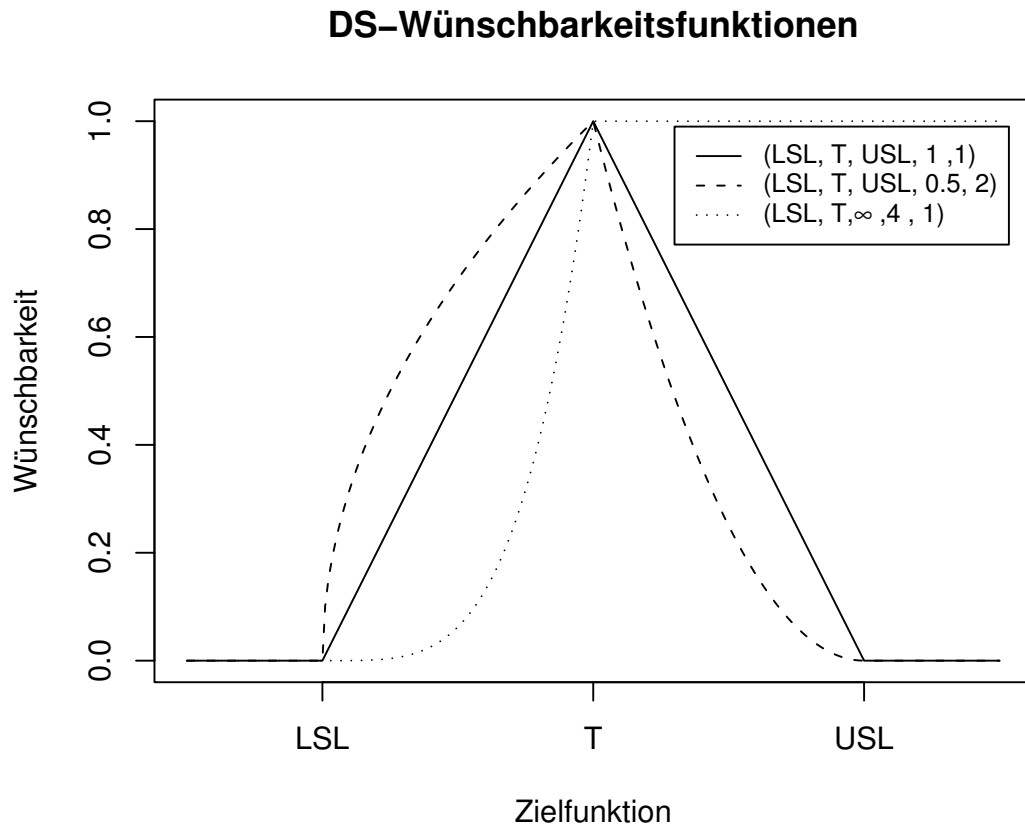
geschrieben werden.

Nachdem es nun möglich ist, eine unsymmetrische Gewichtung für Abweichungen vom Sollwert zu spezifizieren, ist folgende Feststellung hilfreich:

**Lemma 5.13** OBdA lassen sich (TV)-Probleme durch Derringer-Suich-Wünschbarkeiten so spezifizieren, dass  $\beta_l \geq \beta_r$  gilt.

### 5.3 Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer-Suich

Abbildung 5.2: Wünschbarkeitsfunktionen vom Derringer-Suich Typ für verschiedene Parameterwerte



**Beweis:** Sei  $d_1 := (l, t, u, \beta_l, \beta_r)$  eine Derringer-Suich-Funktion mit  $\beta_l < \beta_r$ . Betrachte die Funktion  $d_2 := (-u, -t, -l, \beta_r, \beta_l)$ . Es gilt dann:  $d_1(y) = d_2(-y)$  und  $d_2$  erfüllt die geforderte Voraussetzung.

□

Es lässt sich also jedes  $(TV)$ -Problem so formulieren, dass Abweichungen hin zu kleineren Werten mindestens so stark gewichtet werden, wie Abweichungen nach oben.

Als Wünschbarkeitsindex schlagen auch Derringer-Suich das geometrische Mittel vor.

**Definition 5.14 (Wünschbarkeitsindex nach Derringer-Suich)** Die Funk-

## 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

tion  $q^{DS} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$q^{DS}(y) := \left( \prod_1^m (l_i, t_i, u_i, \beta_{l_i}, \beta_{r_i})(y_i) \right)^{\frac{1}{m}}$$

heißt *Wünschbarkeitsindex nach Derringer und Suich*. Da dieser Typ von Wünschbarkeitsindex in dieser Arbeit hauptsächlich untersucht wird, wird auch kurz nur  $q$  geschrieben, sofern dadurch die Eindeutigkeit gegeben bleibt.

Dieser Wünschbarkeitsindex ist lediglich unter einer zusätzlichen Bedingung ein starker Wünschbarkeitsindex. Diese Bedingung bedeutet jedoch keine Einschränkung für die Anwendbarkeit des Verfahrens.

**Satz 5.15** Gegeben seien Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktionen  $d_i^{DS}, i = 1, \dots, m$ , sowie als Index  $q$  das geometrische Mittel. Dann liefern die Wünschbarkeiten nach Derringer-Suich unter der Voraussetzung, dass für den Lösungsvorschlag  $y_{opt}$  gilt  $q(y_{opt}) > 0$ , einen starken Wünschbarkeitsindex und die Lösungen sind pareto-optimal.

**Beweis:** Die Voraussetzung  $q(y) > 0$  bedeutet insbesondere, dass  $d_i^{DS}(y_i) > 0$  für alle  $i$ . Es sind somit die Voraussetzungen des Beweises für die Pareto-Optimalität des Harringtonschen Index gegeben. □

**Lemma 5.16** Ohne diese Voraussetzung ist der Derringer-Suich-Index lediglich ein schwacher Wünschbarkeitsindex.

**Beweis:** Sei wie oben  $y$  eine Lösung des MCO-Problems. Angenommen es gelte  $q^{DS}(y) = 0$ , dann muss es mindestens eine Komponente geben mit  $d_i(y_i) = 0$ . OBdA sei  $i = 1$ , dann kann ein zweiter Lösungsvorschlag  $z$  existieren, für den  $d_1(z_1) = d_1(y_1) = 0$  gilt, mit  $d_i(z_i) \geq d_i(y_i)$  für alle Koordinaten  $i \neq 1$ , sowie mindestens für einen Index  $j$  gilt  $d_j(z_j) > d_j(y_j)$ . In diesem Falle gilt  $q^{DS}(z) = q^{DS}(y) = 0$ , aber auch  $z \gg y$  koordinatenweise. □

**Bemerkung 5.17** Für die Praxis ist diese Einschränkung auf Objekte mit positiver Wünschbarkeit belanglos. Gibt es nur Objekte mit Wünschbarkeit Null, so liegen die wichtigen Probleme des Prozesses nicht im mathematischen Bereich!

**Bemerkung 5.18** Wie zu sehen ist, können trotz Indexbildung über das gleiche Funktional, z.B. das geometrische Mittel, je nach zugrunde liegender Funktion Indizes mit unterschiedlichen Eigenschaften entstehen. Sinnvollerweise fasst man deshalb die Einzelwünschbarkeiten und die zugehörige Indexbildung unter einem

### 5.3 Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer-Suich

Namen zusammen und nennt die Kombination z.B. das *Wünschbarkeitsverfahren* von Derringer-Suich.

Der große Vorteil der Derringer-Suich-Funktionen gegenüber dem Ansatz von Harrington liegt in der Möglichkeit, Abweichungen vom Sollwert nach rechts oder links unterschiedlich zu gewichten. Der Wünschbarkeitsansatz wird dadurch erheblich flexibler und kann leichter an eine Vielzahl praktischer Problem angepasst werden. Nach Meinung des Autors ist es genau diese Flexibilität, die Derringer-Suich zum Erfolg verholfen hat.

Die Flexibilität wiederum liegt in der stückweisen Definition der Wünschbarkeitsfunktionen begründet. Die Tragfähigkeit dieser Idee zeigt sich insbesondere darin, wie leicht sich der Ansatz auf  $n > 3$  Stützstellen erweitern lässt:

**Definition 5.19 (verallgemeinerte (Derringer-Suich) Wünschbarkeiten)**

Gegeben seien eine aufsteigend geordnete Menge von paarweise verschiedenen Stützstellen  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=0, \dots, n$ , eine Menge von Wünschbarkeitswerten  $d_i \in [0, 1]$ ,  $i = 0, \dots, n$ , an den Stützstellen  $y_i$ , sowie eine Menge von Gewichten  $\beta_i \in \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ , jeweils für das Intervall  $[y_{i-1}, y_i]$ .

Zusätzlich sei  $y_n = \infty$  in Verbindung mit  $d_n = \beta_n = 1$  zugelassen, um (LB) Probleme abzudecken. Dann heißt eine Funktion mit

$$d_{DS}^v(y) := \begin{cases} 0, & \text{für } y < y_0; \\ d_{i-1} + (d_i - d_{i-1}) \left( \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \right)^{\beta_i}, & \text{für } y \in [y_{i-1}, y_i] \text{ und } i : d_{i-1} \leq d_i; \\ d_i + (d_{i-1} - d_i) \left( \frac{y - y_i}{y_{i-1} - y_i} \right)^{\beta_i}, & \text{für } y \in [y_{i-1}, y_i] \text{ und } i : d_i < d_{i-1}; \\ 0, & \text{für } y > y_n \end{cases}$$

verallgemeinerte Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktion. Diese wird als das Tripel  $((y_0, \dots, y_n), (d_0, \dots, d_n), (\beta_1, \dots, \beta_n))$  angegeben.

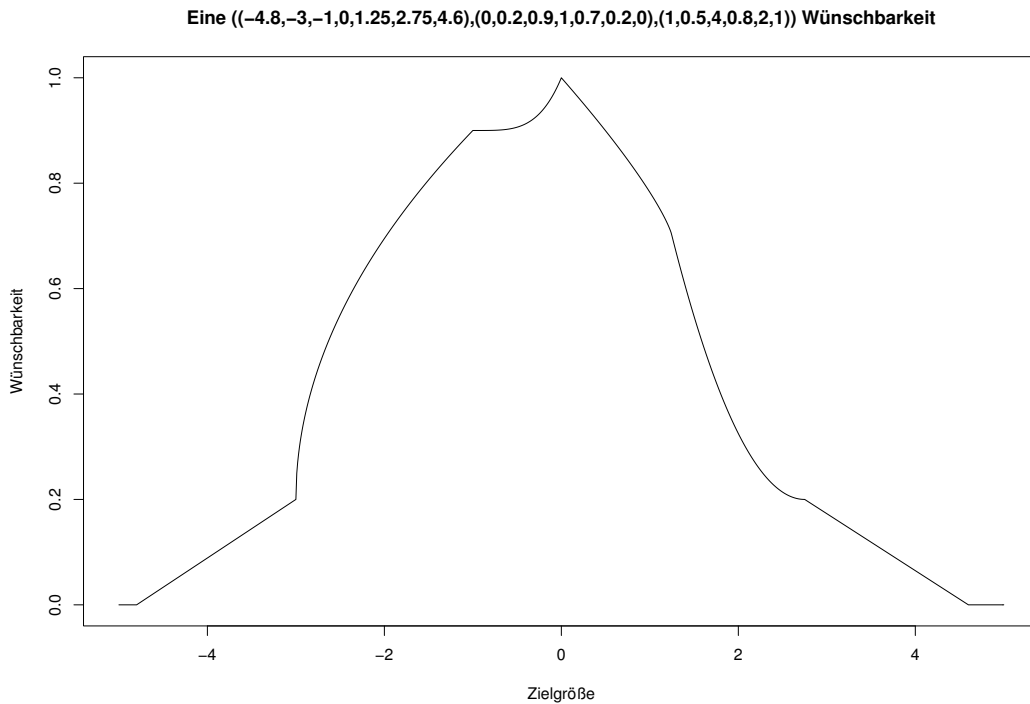
In Abbildung 5.3 ist eine solche verallgemeinerte Derringer-Suich Wünschbarkeit zu sehen. Der Spezialfall dieser Funktionen mit  $\beta_i = 1$ , für alle  $i$ , erweist sich später noch als sehr nützlich. Es ist zu beachten, dass diese Definition sehr allgemein ist und sowohl die Spezifikation mehrerer Maxima in den Wünschbarkeiten erlaubt, als auch abschnittsweise konstante Wünschbarkeitsfunktionen.

Für die direkte Anwendung ist eine solch allgemeine Funktion nicht geeignet. Eine derartige Vielzahl von Parametern ließe sich kaum problemspezifisch und sinnvoll festlegen.

Dass die üblichen Derringer-Suich Funktionen von der Verallgemeinerung abgedeckt werden, zeigt folgendes Korollar:

## 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

Abbildung 5.3: Beispiel einer verallgemeinerten Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktion



**Korollar 5.20** Gegeben sei eine  $(l, t, u, \beta_l, \beta_r)$  Wünschbarkeit. Diese ist darstellbar als Spezialfall der verallgemeinerten Derringer-Suich-Wünschbarkeit.

**Beweis:** Durch Einsetzen erhält man:  $(l, t, u, \beta_l, \beta_r) = ((l, t, u), (0, 1, 0), (\beta_l, \beta_r))$ .  $\square$

In der Praxis trifft man bisher lediglich auf die Standarddefinition. Anscheinend reicht die Spezifikation von zwei Geradenabschnitten meist aus, um die Bewertungsabsicht des Anwenders genügend genau abzubilden.

## 5.4 Alternative Indexfunktionen

Bei der Wahl der Indexfunktion bestehen formal große Freiheiten. Tatsächlich wird in der Anwendung fast immer das geometrische Mittel gewählt, da es eine Eigenschaft hat, die es von anderen Mittelwertbildungen unterscheidet: Ist eine Eigenschaft eines Produktes inakzeptabel, spricht die Wünschbarkeit einer



Komponente Null, so ist das Produkt als ganzes inakzeptabel, denn aus

$$d_j(y_j) = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^m d_i(y_i) = 0!$$

Sicherlich handelt es sich hierbei um eine inhaltlich vernünftige Forderung an ein Qualitätsmaß.

Ein zweiter wichtiger Aspekt bei der Wahl einer geeigneten Indexfunktion ist die Möglichkeit, die einzelnen Merkmale in der Mittelwertbildung nochmals unterschiedlich zu gewichten. Im Beispiel ist dies für den Harringtonschen Index und einen Gewichtsvektor  $\alpha$  ausgeführt:

$$q^\alpha(y) = \left( \prod_1^m d_H(y_i)^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\sum_1^m \alpha_i}}$$

Aus Gründen der Vergleichbarkeit ist eine passende Normierung natürlich zu beachten. Allerdings ist diese Art der Gewichtung sehr problematisch, da der Zusammenhang zwischen Gewicht und Gewichtung im Produkt nicht ersichtlich und schwer interpretierbar ist. Es ist beispielsweise nicht klar, wie etwa ein Merkmal „doppelt so stark“ gewichtet werden soll. Ein Verdoppeln eines Exponenten, wie es z. B. in STAVEX [SW95], [AG03] umgesetzt war, um eine Zielgröße mit doppeltem Gewicht zu berücksichtigen, entspricht dem sicherlich nicht. Auf Grund der Nichtlinearität des geometrischen Mittels ist es sehr schwierig, eine Gewichtung nach inhaltlichen Kriterien korrekt durchzuführen.

Glücklicherweise ist es für die Derringer-Suich Funktionen von vorn herein aussichtslos, auf diese Art und Weise zu gewichten, da die Exponenten  $\beta_l, \beta_r$  sich mit diesen zusätzlichen Gewichten  $\alpha_i$  verrechnen ließen.

Die Interaktion zwischen der Gewichtung innerhalb der einzelnen Wünschbarkeitsfunktion und einer globalen Gewichtung würde die Möglichkeit der zielgerichteten Parameterwahl in beiden Fällen stark behindern.

Dies sei an einem Beispiel erläutert.

**Beispiel** Gegeben sei ein MCO Problem mit Zielgrößen  $Y_1, \dots, Y_m$  und zugehörigen Wünschbarkeitsfunktionen  $d_i(y_i) = (l_i, t_i, u_i, \beta_l, \beta_r), i = 1, \dots, m$ . Das Gewicht der  $i$ -ten Zielgröße  $y_i$  soll nun in den Wünschbarkeitsindex  $q$  mit Gewicht

## 5 Wünschbarkeiten (desirabilities)

$\alpha_i$  eingehen,  $i = 1, \dots, m$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}
 q(y) &= \left( \prod_{i=1}^m d_i(y_i)^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{j=1}^m \alpha_j}} \\
 &= \prod_{i=1}^m \left( d_i(y_i)^{\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^m \alpha_j}} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^m \left( l_i, t_i, u_i, \frac{\alpha_i \beta_{l,i}}{\sum_{j=1}^m \alpha_j}, \frac{\alpha_i \beta_{r,i}}{\sum_{j=1}^m \alpha_j} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^m \left( l_i, t_i, u_i, \frac{m \alpha_i \beta_{l,i}}{\sum_{j=1}^m \alpha_j}, \frac{m \alpha_i \beta_{r,i}}{\sum_{j=1}^m \alpha_j} \right)^{\frac{1}{m}} \\
 &=: \left( \prod_{i=1}^m d_i^*(y_i) \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

Wenn man also sowohl Gewichte in den Definitionen der individuellen Wünschbarkeiten vergibt, als auch bei der Bildung des Wünschbarkeitsindex, so sind die Wirkungen dieser Gewichte nicht identifizierbar. Es folgt direkt, dass die Interpretation der so gegebenen Gewichte nicht eindeutig möglich ist. Die zwei Formulierungen des MCO Problems, zum einen mittels der  $d_i$  und zusätzlicher Gewichte  $\alpha_i$ , zum anderen mittels der daraus hergeleiteten  $d_i^*$ , sind *nicht unterscheidbar* !

### 5.4.1 Der Maximin-Index

Eine wichtige Alternative zum geometrischen Mittel ist die *Maximin*-Optimierung.

**Definition 5.21 (Maximin-Index)** Ein Wünschbarkeitsindex  $q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als

$$q^{\text{maximin}}(y) := \min_{i=1, \dots, m} d_i(y_i)$$

heißt Maximin-Index.

Die Optimierung versucht in diesem Fall das  $y$  zu identifizieren, welches die „beste schlechteste“ Eigenschaft unter allen möglichen Produkten besitzt.

Die Vergleichbarkeit des Index mit einer Einzelwünschbarkeit ist bei dieser Definition natürlich gegeben, ebenso die Sensitivität für inakzeptable Einzelkomponenten.

Leider gilt jedoch der folgende Satz:

**Satz 5.22** Der Maximin-Index garantiert **nicht** die Pareto-Optimalität eines Lösungsvorschlages  $y_{opt}$  zu einem gegebenen MCO-Problem.

**Beweis:** Sei  $y$  eine Lösung des MCO-Problems zu den Wünschbarkeiten  $d_i(y_i)$ . OBdA sei  $q^{maximin}(y) = d_1(y_1)$ , dann kann ein zweiter Lösungsvorschlag  $z$  existieren mit  $d_1(z_1) = d_1(y_1)$  und mit  $d_i(z_i) \geq d_i(y_i)$  für alle Koordinaten, sowie mindestens einem Index  $j$  mit  $d_j(z_j) > d_j(y_j)$ . In diesem Falle gilt

$$q^{maximin}(z) = q^{maximin}(y), \text{ aber auch } z \gg y \text{ koordinatenweise.}$$

□

Der Maximin-Index hat trotzdem seinen Platz in Anwendung und Theorie gefunden, da sich mit Hilfe der umfangreichen Literatur zu Ordnungsstatistiken theoretische Aussagen zum Maximin-Index treffen lassen. (s. Kap 12.1) Die mangelnde Pareto-Optimalität der mit diesem Index erzeugten Lösungen reduziert seine Akzeptanz in der Anwendung allerdings erheblich.

## 5.4.2 Das arithmetische Mittel

In der Literatur findet man auch die einfache arithmetische Mittelwertbildung. Insbesondere die Bedingung, dass ein Produkt in allen Aspekten akzeptabel sein muss, um insgesamt akzeptabel zu sein, bleibt hierbei jedoch unbeachtet. Obwohl das arithmetische Mittel einen starken Index definiert, wie das folgende Lemma zeigt, erscheint dieser Ansatz deshalb nicht der Problemstellung angemessen.

**Lemma 5.23** Das arithmetische Mittel definiert immer dann einen starken Index  $q$ , wenn das geometrische Mittel einen starken Index definiert.

**Beweis:** Der Beweis läuft genau so, wie im Fall des geometrischen Mittels, nur mit Summen an Stelle der Produkte.

Angenommen eine Lösung  $y$  mit den Wünschbarkeiten  $d_i(y_i)$  ist nicht pareto-optimal. D.h. es gibt ein Objekt  $z$  mit Wünschbarkeiten  $d_i(z_i)$  und  $d_i(z_i) \geq d_i(y_i)$  und es existiert ein Index  $j$  mit  $d_j(z_j) > d_j(y_j)$ . Dann gilt

$$q(z) = d_j(z_j) + \sum_{i \neq j} d_i(z_i) \geq d_j(z_j) + \sum_{i \neq j} d_i(y_i) > d_j(y_j) + \sum_{i \neq j} d_i(y_i) = q(y).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme.

□

## 5.5 Wünschbarkeitsplot

Zunächst erscheint die funktionale Form der Derringer-Suich Wünschbarkeiten sehr einfach, so dass ein Anwender die Funktionen als Hilfsmittel der Optimierung leicht akzeptiert. In einer Versuchsplanungssituation wird diese Einfachheit jedoch zu einer scheinbaren: Während die Grafen der Wünschbarkeiten den Zusammenhang zwischen den Zielgrößen und ihren jeweiligen Wünschbarkeit festlegen, interessiert eigentlich der Zusammenhang zwischen Faktoreinstellungen und Wünschbarkeit.

Durch den Modellbildungsschritt wird die Situation erheblich komplexer. Es hat sich immer wieder herausgestellt, dass es sehr schwierig ist, den Zusammenhang zwischen Faktoren  $x$  und Wünschbarkeiten  $d(\hat{f})$  zu visualisieren.

Um diese Visualisierung zu vereinfachen, wurde der so genannte Wünschbarkeitsplot entwickelt, der den Zusammenhang direkt ablesbar macht. Bei der Arbeit mit Wünschbarkeiten hat sich dieser Plot als hilfreich herausgestellt.

In der Abbildung 5.4 sind zwei Beispiele für Wünschbarkeitsplots zu sehen. In der rechten Hälfte eines Wünschbarkeitsplots ist jeweils der Zusammenhang zwischen einem Faktor  $x$  und einer Zielgröße  $y$  dargestellt.

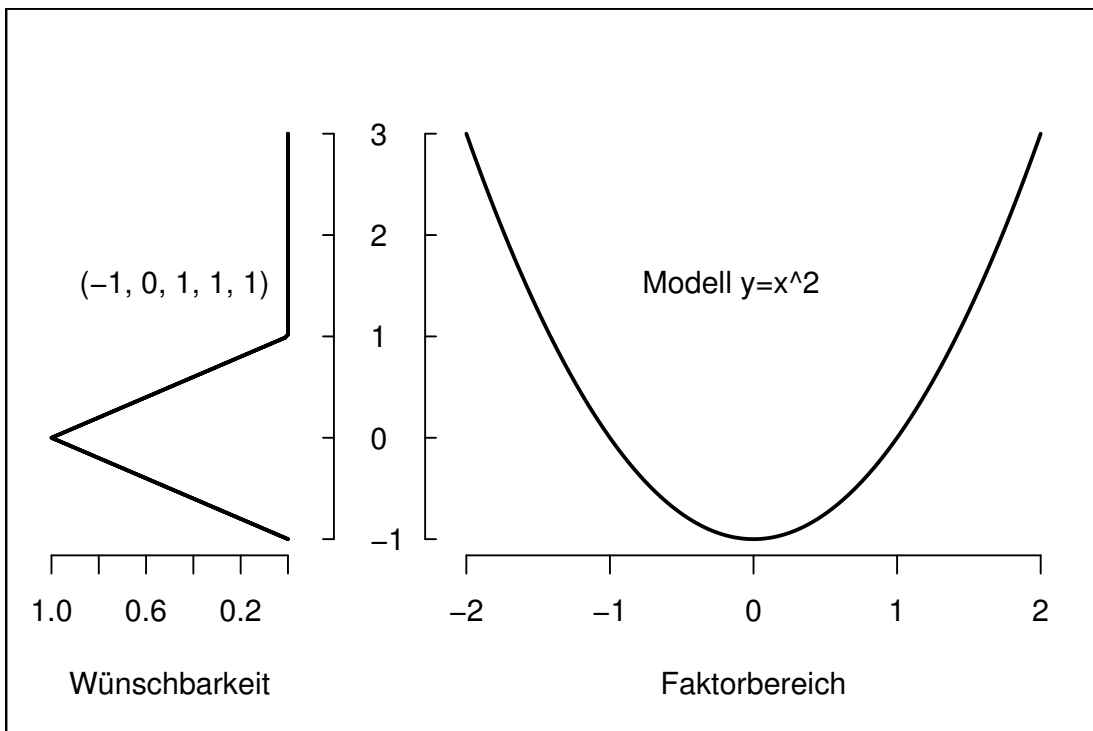
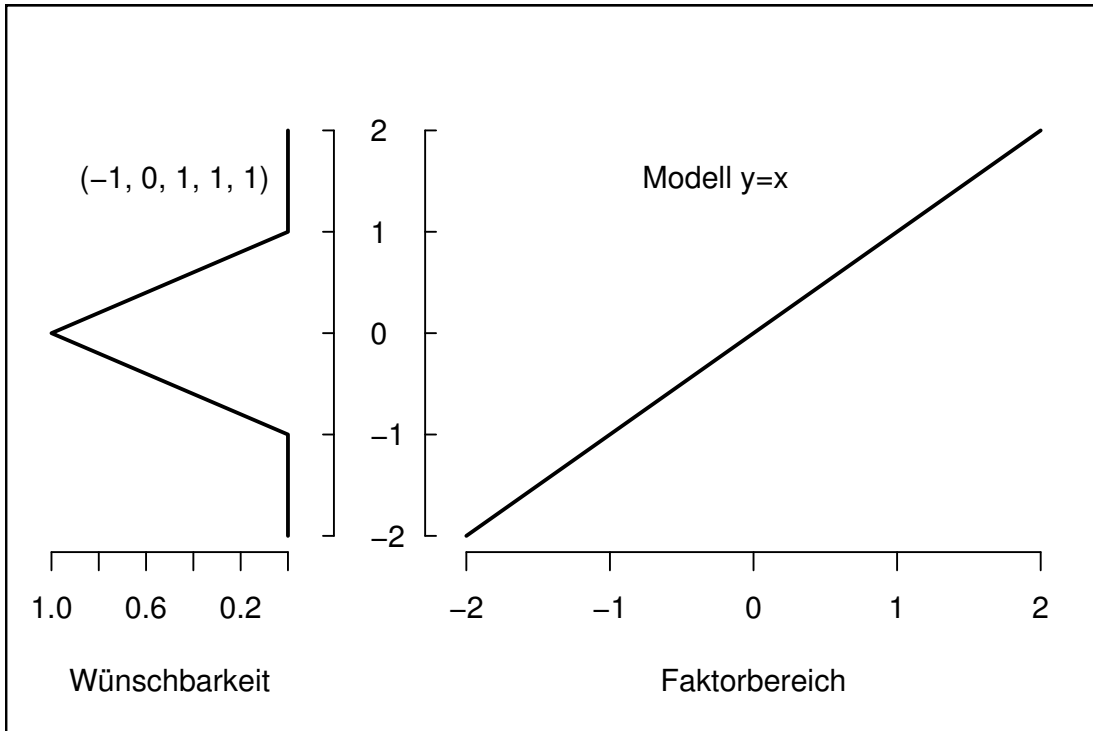
Der Faktorbereich wird auf der  $x$ -Achse abgetragen, die Messgröße auf der  $y$ -Achse. Zusätzlich wird in der linken Hälfte des Plots die Wünschbarkeitsfunktion der Messgröße abgetragen. Dies geschieht, indem im linken Teilplot die  $x$ -Achse mit der Wünschbarkeit belegt wird und die  $y$ -Achse wiederum mit der Messgröße. Auf der Wünschbarkeitsachse wird dabei der Wertebereich zusätzlich invertiert, so dass größere Werte weiter links liegen. Eine Wünschbarkeit von 0 wird somit direkt auf der  $y$ -Achse abgetragen. Größere Werte liegen weiter links. Da der Wertebereich der Wünschbarkeit auf  $[0, 1]$  beschränkt ist, ist es sinnvoll, dem linken Teilplot etwas weniger Fläche zuzuordnen. Als geeignet hat sich eine Aufteilung von 1:2 in der Breite für beide Teilplots herausgestellt.

Der Nutzen dieses Plots liegt darin, dass direkt die Wünschbarkeiten über dem Faktorraum abgelesen werden können, indem man zu einem  $x$ -Wert im rechten Plot den zugehörigen  $y$ -Wert aufsucht und dann auf dessen Höhe im linken Teilplot die Wünschbarkeit abliest.

Gleichzeitig sind die Informationen über den Modellzusammenhang bzw. die Messwerte im Plot verfügbar, was die Übersicht gegenüber einem Plot, in dem direkt die Wünschbarkeit über den Faktorraum abgetragen wird, erhöht.

Obwohl dieser Plot sich als sehr hilfreich erwiesen hat, scheint es sich um eine neue Idee zu handeln. Zumindest tritt ein solcher Plot in der Literatur bisher nicht auf.

Abbildung 5.4: Zwei Beispiele für Wünschbarkeitsplots



## 5 Wünschbarkeiten (*desirabilities*)

## 6 Simulationstechnik

Bei den Simulationen wurde insbesondere darauf geachtet, dass die Empfehlungen von Hoaglin und Andrews [HA75], soweit praktisch umsetzbar, befolgt werden. Diese beiden Autoren haben bereits 1975 darauf hingewiesen, dass bei allen wissenschaftlichen Arbeiten, welche auf computergestützten Simulationen beruhen, besonderes Augenmerk auf die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse gelegt werden muss. Leider wird diesen Ansprüchen auch nach mehr als einem vier-tel Jahrhundert längst nicht jeder Text gerecht, obwohl der Wissenschaftsbegriff der Naturwissenschaften eigentlich nach einem solchen Vorgehen verlangt. Ohne die Offenlegung der Simulationssoftware sind die veröffentlichten Ergebnisse nicht überprüfbar!

Besondere Weitsicht bewiesen die beiden Autoren mit ihrer Forderung, nach Möglichkeit *Open Source* Software zu Forschungszwecken einzusetzen, da nur so die vollständige Kontrolle sowohl des Wissenschaftlers selbst, als auch aller Rezipienten, über die Simulationsumgebung für die nicht unmittelbare Zukunft garantiert werden kann.

### 6.1 Wahl der Programmiersprache

Alle Simulationen dieser Arbeit wurden in der Programmiersprache **R** [R D03] ausgeführt. Diese Programmiersprache erfüllt in hervorragender Weise die Anforderungen von Hoaglin und Andrews. Die Software ist allgemein verfügbar, da als *Open Source* implementiert. Die Entwicklung wird durch ein internationales Team von Statistikern, Mathematikern und Informatikern weiter getrieben. Sie unterliegt einer außergewöhnlich guten Qualitätskontrolle, da die Entwickler in der Mehrzahl auch die intensivsten Anwender sind. Beispielsweise wird jede Nacht die neueste Entwicklerversion automatisiert einem intensiven Test unterzogen und am folgenden Tag in der statistischen Forschung und Anwendung von den Entwicklern genutzt. Zu beziehen ist **R** unter <http://cran.r-project.org>. Dort findet man sowohl den *Source Code*, als auch kompilierte Versionen für eine Vielzahl von Betriebssystemen.

In dieser Arbeit wird besonderer Wert auf die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse gelegt. Die Quelltexte zu allen Simulationen sind per e-mail erhältlich.

Die wichtigen Funktionen zur Arbeit mit Wünschbarkeiten sollen im CRAN

## 6 Simulationstechnik

(<http://cran.r-project.org>) als **R**-Paket veröffentlicht werden und zwar ebenfalls unter einer Open-Source Lizenz.

Durch die Wahl einer in *Open Source* implementierten Programmiersprache ist auch, in starkem Gegensatz zur Nutzung kommerzieller Software, die Nachvollziehbarkeit der Ergebnisse in der Zukunft gesichert. Während es bei kommerziellen Produkten in der Regel nicht möglich ist, Zugriff auf ältere Versionen der Software zu bekommen, so bleiben die alten Versionen von Open Source Programmen verfügbar. Es ist deshalb Außenstehenden auch in der Zukunft möglich, die Ergebnisse zu überprüfen.

### 6.2 Zufallsgenerator

Eine wichtige Rolle spielt bei Simulationen im Bereich der Statistik oft der verwendete Zufallsgenerator.

Für die Simulationen dieser Arbeit wurde der Standardgenerator für gleichverteilte Zufallsvariablen von **R** seit der Version 1.7.1 genutzt, ebenfalls mit den Standardstartwerten. Es handelt sich um den so genannten Mersenne-Twister Generator von [MN98]. Von diesem ist bekannt, dass er eine Periode von  $2^{19937} - 1$  besitzt und in 623 aufeinander folgenden Dimensionen eine Gleichverteilung erzeugt.

Die Grenzen dieses Generators liegen damit weit jenseits der Anforderungen der durchgeführten Simulationen. Diese dürfen folglich als vom Mechanismus der Zufallszahlenerzeugung unabhängig angesehen werden.

Bei jedem Start von **R** wird der Pseudo-Zufallsgenerator neu initialisiert, wodurch die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse garantiert ist.

Die Erzeugung von normalverteilten Zufallszahlen erfolgt über die Inversionsmethode.

Die Simulation der Zufallsvariablen für Wünschbarkeitsfunktionen erfolgt für die Fälle, in denen die Verteilungsfunktionen  $F$  in der Arbeit analytisch hergeleitet werden, über die bekannte Beziehung  $F^{-1}(U) \sim F$ , wenn  $U$  eine auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable bezeichnet. Sofern dies nicht möglich ist, wird direkt simuliert und die erreichte Genauigkeit angegeben.



# 7 Anwendung von Wünschbarkeiten: Praxis und Probleme

In diesem Kapitel soll die bisher gängige Praxis der Anwendung von Wünschbarkeiten dargestellt werden. Ein besonderes Augenmerk erhalten die Schwächen, die das Verfahren durch die Vernachlässigung der Modellbildungsproblematik aufweist.

## 7.1 Empirische Optimierung

In der Literatur zur Anwendung von Wünschbarkeiten finden sich bisher hauptsächlich drei methodische Ansätze.

Zum ersten werden Wünschbarkeitsfunktionen rein empirisch eingesetzt, also direkt auf Messungen verschiedener Eigenschaften. Dieses Vorgehen findet sich vor allem im MCDM (multi-criteria decision making) oder auch in der Qualitätskontrolle, z.B. in der Diplomarbeit von Hinzmann [Hin99] zur Bewertung von Lieferanten. In diesen Anwendungen werden keine Modellierungen vorgenommen, sondern die Wünschbarkeiten werden nur zum Ranking bereits bestehender, direkt auswählbarer Alternativen eingesetzt.

Wie sich bei der Arbeit von Hinzmann gezeigt hat, ist der Wünschbarkeitsansatz in diesem Umfeld gut vermittelbar. Durch die einfache Form der Wünschbarkeitsfunktionen ist es leicht, in Zusammenarbeit mit dem Anwender die Parameter so zu wählen, dass eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den Funktionswerten und dem „Gefühl“ des Anwenders hergestellt wird.

Statistische Eigenschaften dieses Vorgehens finden bei dieser Art Anwendungen allerdings eher keine Beachtung. Diese rein empirische Herangehensweise wird deshalb in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Die zweite Art der Anwendung, in der verbreitet Wünschbarkeiten genutzt werden, ist die Produktoptimierung. In einer Versuchsplanungssituation werden, nachdem individuelle Modelle für die verschiedenen Zielgrößen geschätzt wurden, unter Vernachlässigung der Fehlerterme multidimensionale Optimierungen

durchgeführt.

Im Zusammenhang mit diesem Vorgehen sind die statistischen Eigenschaften des gesamten Optimierungsprozesses natürlich sehr interessant.

In den folgenden Abschnitten werden einige Schwächen der Praxis bei der Nutzung von Wünschbarkeiten aufgezeigt. Diese Schwächen waren die Motivation, um in dieser Arbeit ein praktisch anwendbares, verbessertes Verfahren herzuleiten.

Eine dritte Klasse von Anwendungen für Wünschbarkeiten, nämlich wünschbarkeitsbasierte Kontrollkarten, ist erst in den letzten Jahren aufgekommen und wird hier nicht weiter verfolgt. Anwendungen in diesem Bereich finden sich in den Arbeiten von Trautmann [Tra04a], [Tra04b].

## 7.2 Schwachstellen des gängigen Verfahrens

In diesem Abschnitt werden einige der Schwächen des aktuell gängigen Verfahrens zur Anwendung von Wünschbarkeiten beschrieben.

Zunächst wird gezeigt, dass bereits bei dieser einfachsten Anwendung der Wünschbarkeiten erhebliche Probleme im eigentlichen Optimierungsschritt auftreten können.

### 7.2.1 Probleme in der Optimierung durch die funktionale Form

Zwar sind die Funktionen von Derringer-Suich flexibler in der Anwendung als die von Harrington, was ihre Beliebtheit sicherlich zu einem hohen Grade bewirkt, leider wird dieser Vorteil durch Maßnahmen erkauft, die für die numerische Optimierung alles andere als günstig sind:

- zum einen werden stückweise zusammengesetzte Funktionen genutzt, die in der Praxis oft schwierig zu handhaben sind, da sie zu zahlreichen Fallunterschiedungen führen,
- zum anderen sind diese Funktionen in der Regel in allen Stützpunkten nicht differenzierbar!

Insbesondere der zweite Punkt wird in der Literatur seltsamerweise nicht beachtet. Die Nichtdifferenzierbarkeit der Antwortfläche führt implizit dazu, dass keine gradientenbasierten Optimierungsverfahren genutzt werden dürften. Dies wird in der Regel ignoriert und die Optimierungen werden mittels Newton-Verfahren durchgeführt. In [dCFS97] wird versucht, dieses Problem dadurch zu beheben,

## 7.2 Schwachstellen des gängigen Verfahrens

dass an jeder „Knick“-Stelle Polynome 4. Grades stetig differenzierbar angepasst werden. Natürlich ist so die Differenzierbarkeit gerettet, jedoch werden die zu berechnenden Funktionen erheblich komplexer.

Tatsächlich ist das Problem für die Praxis wohl nicht so schwerwiegend, wie man auf den ersten Blick annehmen könnte, da die optimalen Einstellungen sich in der Regel nicht in der Nähe einer der nicht differenzierbaren Stellen befinden. Streng genommen müsste dies allerdings überprüft werden, bevor man ein gradientenbasiertes Verfahren einsetzt.

Ein anderer Aspekt, welcher ebenfalls nicht beachtet wird, ist, dass es durchaus möglich ist, nicht-zusammenhängende Gebiete von Null verschiedener Wünschbarkeiten zu erhalten, über die optimiert werden muss. In solchen Fällen garantieren gradientenbasierte Verfahren natürlich nicht das Auffinden eines globalen Optimums! Auch dieser Punkt wird in der Literatur nicht beachtet, müsste eigentlich jedoch auch geprüft werden.

Beispielhaft ist ein problematischer Fall in Abb 7.1 zu sehen. Das sehr einfache Modell  $y = -x^2 + 1$  mit nur je einer Einfluss- und Zielgröße zusammen mit einer  $(-1, 0, 0.5, 1, 1)$  Wünschbarkeit und  $\mathbb{O} = [-2, 2]$  führt bereits zu einer Situation unzusammenhängender Bereiche positiver Wünschbarkeiten.

Diese Abbildung zeigt auch bereits, dass weiterhin nicht von einer unimodalen Antwortfläche ausgegangen werden kann!

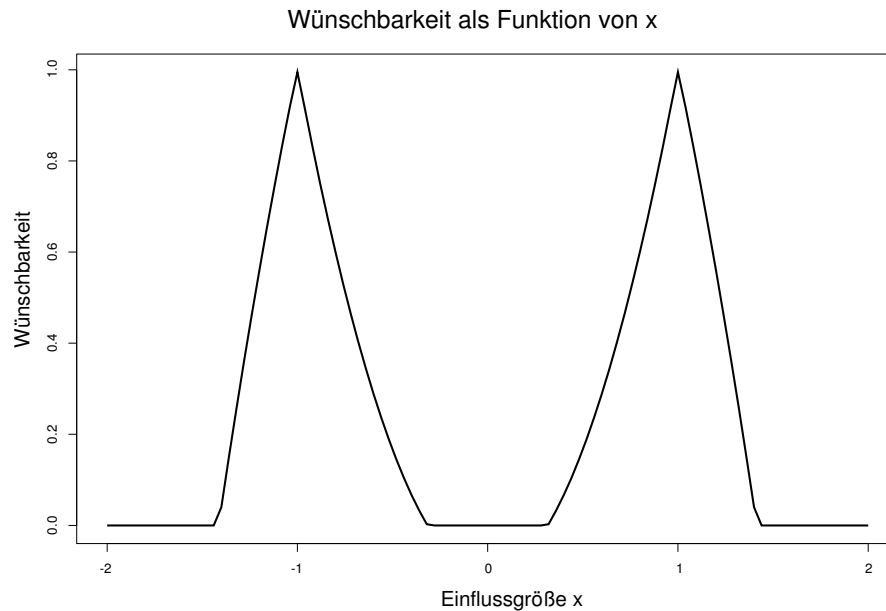
Dieses eindimensionale Beispiel zeigt also bereits, dass man sich für den Optimierungsschritt nicht auf die Gutartigkeit der Antwortfläche verlassen kann! Besonders im höherdimensionalen Fall muss davon ausgegangen werden, dass Gradientenverfahren theoretisch nicht funktionieren.

### 7.2.2 Die Form der Antwortfläche

Obwohl die Derringer-Suich Funktionen auf den ersten Blick sehr harmlos aussehen, sind doch, wie bereits gesehen, erhebliche Komplikationen in der Optimierung möglich. Sei z.B. das Modell  $y = x_1^2 + x_2^2$  geschätzt und dazu für die eindimensionale Zielgröße die Wünschbarkeit als  $(-1, 0, 4, 0.5, 0.5)$  spezifiziert. Weiterhin sei  $\mathbb{O} = [-2, 2]^2$  gegeben. Dann ergibt sich die Antwortfläche wie in Abb. 7.2 für die numerische Optimierung. Man sieht, dass es eine ganze Untermannigfaltigkeit mit identischer, optimaler Wünschbarkeit gibt. Die üblichen Optimierungsverfahren würden aber immer nur einen der optimalen Punkte als Lösung vorschlagen.

Wertvolle Information für den Anwender geht so eventuell verloren.

Abbildung 7.1: Beispiel für nichtzusammenhängende Gebiete positiver Wünschbarkeit



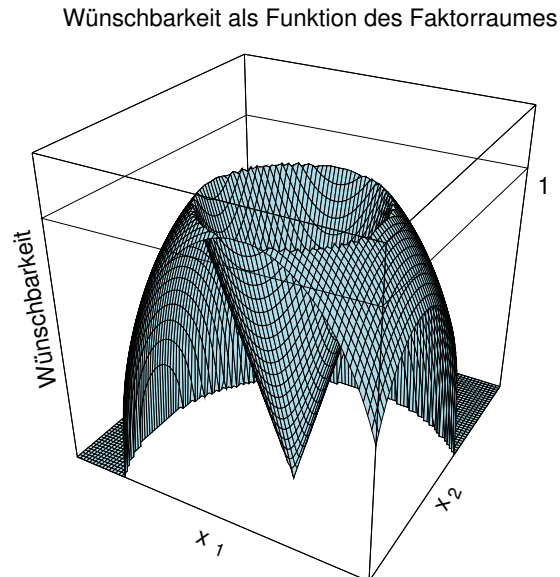
### 7.3 Optimierung nach Modellbildung, kein Fehlerterm

Bedenklicher als die in den vorhergehenden Abschnitten aufgezeigten Schwächen, die man im schlimmsten Fall durch eine erschöpfende Gittersuche im Optimierungsschritt bezwingen kann, ist eine methodische Schwachstelle des etablierten Vorgehens.

Die zweite der beschriebenen Klassen von Anwendungen ist die Optimierung eines Produktes mittels Modellierung der einzelnen Qualitätsmerkmale  $Y_i, i = 1, \dots, m$ . Oft werden Wünschbarkeiten im Zusammenhang mit der Versuchsplanung benutzt, speziell im Optimierungsschritt, in dem auch quadratische Modelle für die Zielgrößen zum Tragen kommen.

Das Vorgehen bei der MCO im Kontext der Versuchsplanung ist in der Literatur stets gleich und sei hier am Beispiel der Originaldaten von Derringer-Suich erläutert. Insbesondere wird aufgezeigt, an welchen Stellen dieses Vorgehen zu kurz greift.

Abbildung 7.2: Beispiel für überabzählbar viele optimale Punkte im Faktorraum



#### 7.3.1 Der Versuch von Derringer-Suich

Derringer-Suich demonstrierten den Nutzen ihrer neuen Funktionenklasse an einem Beispiel aus der chemischen Industrie, namentlich der Herstellung einer Gummimischung für Reifen. Es gab drei Einflussgrößen und vier Zielgrößen, die die zu optimierenden Eigenschaften des Gummis quantitativ beschrieben.

Die vier Zielgrößen mit den zugehörigen Wünschbarkeitsfunktionen sind:

- PICO Abrasion Index  $Y_1$  mit der Wünschbarkeitsfunktion  
 $d_1(Y_1) = (120, 170, \infty, 1, 0)$ ,
- 200% Modulus  $Y_2$  mit der Wünschbarkeitsfunktion  
 $d_2(Y_2) = (1000, 1300, \infty, 1, 0)$ ,
- Verlängerung am Bruchpunkt  $Y_3$  mit der Wünschbarkeitsfunktion  
 $d_3(Y_3) = (400, 500, 600, 1, 1)$ ,
- Härte  $Y_4$  mit der Wünschbarkeitsfunktion  
 $d_4(Y_4) = (60, 67.5, 75, 1, 1)$ .

Zur Modellbestimmung wurde nun ein zentral zusammengesetzter Versuchsplan mit 20 Versuchen und sechs Replikationen im Zentrum durchgeführt. Die Ergebnisse sind im Originaltext publiziert. Als Modellgleichungen für ein vollständiges Modell zweiter Ordnung erhielten sie:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_1(x) &= 139.1 + 16.5x_1 + 17.9x_2 + 10.9x_3 - 4.0x_1^2 - 3.5x_2^2 - 1.6x_3^2 \\
 &\quad + 5.1x_1x_2 + 7.1x_1x_3 + 7.9x_2x_3; \quad \hat{\sigma}_1 = 5.6, \\
 \hat{y}_2(x) &= 1261.1 + 268.2x_1 + 246.5x_2 + 139.5x_3 - 83.6x_1^2 - 124.8x_2^2 \\
 &\quad + 199.2x_3^2 + 69.4x_1x_2 + 94.1x_1x_3 + 104.4x_2x_3; \quad \hat{\sigma}_2 = 328.7, \\
 \hat{y}_3(x) &= 400.4 - 99.7x_1 - 31.4x_2 - 73.9x_3 + 7.9x_1^2 + 17.3x_2^2 + 0.4x_3^2 \\
 &\quad + 8.8x_1x_2 + 6.3x_1x_3 + 1.3x_2x_3; \quad \hat{\sigma}_3 = 20.6, \\
 \hat{y}_4(x) &= 68.9 - 1.4x_1 + 4.3x_2 + 1.6x_3 + 1.6x_1^2 + 0.1x_2^2 - 0.3x_3^2 \\
 &\quad - 1.6x_1x_2 + 0.1x_1x_3 - 0.3x_2x_3; \quad \hat{\sigma}_4 = 1.27.
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu Harrington wird hier auch Augenmerk auf die Modellierung der Zielgrößen gelegt. Um dann im letzten Schritt von den modellierten Zielgrößen zu den modellierten Wünschbarkeiten zu gelangen, wird der Fehlerterm jedoch vernachlässigt. Der Operationsbereich  $\mathbb{O}$  ist für die Versuchsplanung auf  $\mathbb{O} = [-1.633, 1.633]^3$  skaliert.

Schliesslich wird die Optimierung für das Problem

$$\max_{x \in \mathbb{O}} \hat{q}(Y) = \prod_{i=1}^4 \hat{y}_i$$

mittels eines Gradientenverfahrens gelöst.

### 7.3.2 Simulation von Wiederholungen des Versuchs

In Abbildung 7.3 sind die Folgen dieses Vorgehens zu sehen. In einer Simulationsstudie, ausgehend von den Modellen und den geschätzten Fehlervarianzen aus [DS80], wurde 1000 Mal der Versuch, wie er in Derringer-Suich durchgeführt wurde, wiederholt. Zu jeder Wiederholung wurde das geschätzte Optimum aufgezeichnet. In der Abbildung sind jeweils Schnitte durch den  $\mathbb{R}^3$  gezeigt und das bekannte Optimum ist durch gestrichelte Linien angedeutet. Zu all diesen geschätzten  $x_{opt,i}$  wurde anschließend die „wahre“ Wünschbarkeit berechnet. Im Falle der Simulation ist dies ja einfach möglich, in dem man das Ausgangsmodell an diesen Punkten berechnet.

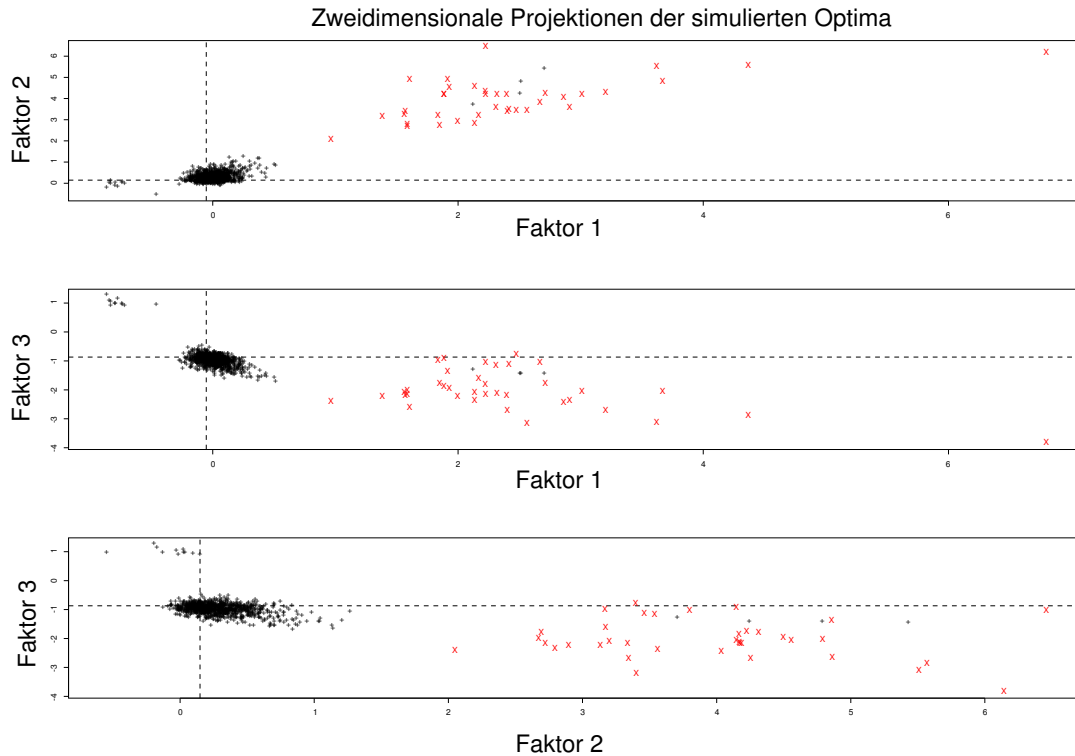
Das erstaunliche Ergebnis ist, dass in etwa bei 5% der geschätzten Optima eine wahre Wünschbarkeit von Null zu beobachten ist! Diese Optima sind in der Grafik durch „x“ gekennzeichnet. Sie finden sich in den Abbildungen jeweils etwas vereinzelt rechts von der Hauptmasse der Punkte.

Selbst die Durchführung der Optimierung garantierte in diesem Fall also nicht, brauchbare Produkte herzustellen! Dadurch, dass der Erwartungswert an der falschen Stelle berechnet wird, wird das Verfahren erheblich unsicher!

### 7.3 Optimierung nach Modellbildung, kein Fehlerterm

In Kapitel 9 wird eine Verbesserung dieser Situation mit Hilfe der hergeleiteten Verteilungsfunktionen und den so genannten *realistischen Wünschbarkeiten* angegeben.

Abbildung 7.3:  $\widehat{x}_{opt}$  für 1000 Wiederholungen analog zum Versuchsplan von Derringer-Suich



**Bemerkung 7.1** Die entscheidende Beobachtung zu diesen Simulationen ist, dass **nicht** das eigentliche MCO-Problem gelöst wird! Stattdessen begnügt man sich mit einer vereinfachten, leider aber auch falschen Lösung, da man nach der Lösung des falschen Problems sucht, nämlich:

$$\widehat{x}_{opt} := \max_{x \in \mathbb{O}} q(E(Y|x)).$$

Eigentlich gesucht ist in der klassischen Fragestellung eine Lösung des Problems

$$\widehat{x}_{opt} := \max_{x \in \mathbb{O}} E(q(Y|x))!$$

Es wird also die Erwartungswertbildung in den Wünschbarkeitsindex zu den einzelnen Wünschbarkeiten gezogen. Neben die Nichtausnutzung des Wissens über den Fehler tritt also auch noch die Nichtbeachtung der Nichtlinearität des geometrischen Mittels.

### 7.3.3 Direkte Modellierung des Index

Die wichtigste Voraussetzung für die Anwendung der beschriebenen Optimierungstechniken ist die Schätzung der individuellen Modelle  $\hat{f}_i$ . Wenn es möglich wäre, diesen Schritt zu überspringen und direkt eine Schätzung  $\hat{q}$  der Indexfunktion zu erhalten, die die individuellen Modelle nicht benötigt, so könnte man mit einer besseren Kontrolle der Fehlerterme rechnen und eventuell auch den Umfang der im Optimierungsschritt nötigen Versuchsreihen reduzieren. Leider zeigen die folgenden Überlegungen, dass eine solche Abkürzung nicht existieren kann.

Für den Fall, dass das geometrischen Mittel als Index genutzt wird, bekommt man Interaktionen zwischen den Faktoren und den Fehlertermen in die Modellgleichungen für den Index. Am einfachsten sieht man dies an einem Beispiel.

**Beispiel:** Angenommen es gibt zwei Zielgrößen  $Y_1, Y_2$ . Die Wünschbarkeiten seien so gewählt, dass  $d_i = f_i(x) + \epsilon_i = \alpha_i + \gamma_{i,1}x_1 + \gamma_{i,2}x_2 + \epsilon_i$ . Beide Zielgrößen seien vom Typ (LB). Weiterhin gebe es lediglich zwei Einflussgrößen  $x_1, x_2$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} q^{DS} &= \sqrt{d_1 \cdot d_2} \\ &= \left( (\alpha_1 + \gamma_{1,1}x_1 + \gamma_{1,2}x_2 + \epsilon_1) \cdot (\alpha_2 + \gamma_{2,1}x_1 + \gamma_{2,2}x_2 + \epsilon_2) \right)^{0.5} \end{aligned}$$

Durch die Produktbildung werden so Interaktionen zwischen Faktoren und Fehlertermen in das Modell für den Index  $q$  aufgenommen

Weiterhin sieht man direkt, dass selbst unter den obigen, einfachsten möglichen Annahmen ein Modell für  $(q^{DS})^2$  von der Ordnung  $\prod_i(ord(d_i))$  sein müsste. Hierbei bezeichnet  $ord(d_i)$  den Grad des Polynomes  $d_i$ .

Verlässt man diese idealisierenden Annahmen und betrachtet z. B. für den Derringer-Suich Fall die Nutzung nicht-ganzzahliger Exponenten, so würde dies zu einem Modell gebrochener Ordnung für den Index führen.

Für das geometrische Mittel scheidet die direkte Modellierung somit aus.

Auch für den Fall des Maximin-Index ist die Situation nicht günstiger. Es tritt für diesen Fall das Problem hinzu, dass eine Schätzung der Übergangsbereiche, in denen die Zielgröße, welche das Minimum bestimmt, wechselt, nötig würde. Auch dieses Vorgehen erscheint nicht einfacher, als die individuellen Modelle zu schätzen.

Als Fazit bleibt, dass eine direkte Modellierung der Indexfunktion  $q$  keine gangbare Alternative zur klassischen, mehrschrittigen Optimierung über die  $\hat{f}_i$  darstellt.



# 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

Die Betrachtungen in den vorhergehenden Kapiteln haben gezeigt, dass es sinnvoll ist, den Modellierungsfehler nicht zu vernachlässigen. Als Konsequenz bedeutet dies, die Werte der Wünschbarkeitsfunktionen und des Wünschbarkeitsindex als Zufallsvariablen zu betrachten. In der Optimierung sind folglich nicht mehr Funktionen von *Messwerten* direkt zu untersuchen, sondern vielmehr Kenngrößen von Zufallsvariablen, die eben diese Messwerte repräsentieren.

In diesem Kapitel wird zunächst das MCO-Problem auf die Optimierung von Zufallsvariablen übertragen. Im Anschluss werden für einige gebräuchliche Wünschbarkeitsfunktionen geschlossene Formen für die jeweiligen Verteilungsfunktionen, Dichten, Erwartungswerte und Varianzen hergeleitet.

Für Fälle, in denen dies nicht möglich ist, werden simulierte Verteilungen gezeigt. Im Anschluss wird darauf eingegangen, welche Bedeutung dieser Ansatz in der Praxis für die Optimierung hat.

## 8.1 Übertragung des MCO-Problems auf Zufallsvariablen

Durch den Übergang zur Ordnung von Verteilungsfunktionen muss man einige Begriffe für Zufallsvariablen neu definieren. Zum Beispiel muss man die Dominanz aus Kap 4.1 durch die stochastische Dominanz (vgl. z.B. [Mos94]) ersetzen:

**Definition 8.1 (stochastische Dominanz für Verteilungsfunktionen)** Seien  $F$  und  $G$  zwei Verteilungsfunktionen auf  $\mathbb{R}$ .  $F$  ist *stochastisch größer als*  $G$ , in Zeichen  $F \geq_{st} G$ , wenn gilt

$$F(x) \leq G(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Auf den ersten Blick widerspricht diese Definition der Intuition. Der Name *stochastisch größer* wird jedoch klar, wenn man bedenkt, dass die Verteilungsfunk-

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

tionen Unterschreitenswahrscheinlichkeiten definieren, für die Definition jedoch Überschreitenswahrscheinlichkeiten benötigt werden.

Die Relation „ $\geq_{st}$ “ bildet eine Teilordnung auf der Menge aller Verteilungsfunktionen, genannt die *stochastische Ordnung*. Manchmal wird sie zur Unterscheidung von anderen Ordnungsbegriffen der Stochastik auch *gewöhnliche stochastische Ordnung* genannt. Eine weitere Bezeichnung ist *stochastische Dominanz erster Ordnung*.

Mit Hilfe dieser Definition lässt sich nun auf natürliche Weise eine Dominanz für Zufallsvariablen definieren:

**Definition 8.2 (stochastische Dominanz für ZVen)** Gegeben seien zwei Verteilungsfunktionen  $F, G$  mit  $F \geq_{st} G$  und zwei ZVen  $X \sim F$  und  $Y \sim G$ . In diesem Fall sagt man auch  $X \geq_{st} Y$ ,  $X$  ist stochastisch größer als  $Y$  bzw.  $X$  dominiert  $Y$ .

Eine Zufallsvariable  $X$  dominiert eine andere Zufallsvariable  $Y$  also genau dann, wenn die zugehörige Verteilungsfunktion  $F_X$  die Verteilungsfunktion  $F_Y$  dominiert.

Inhaltlich bedeutet diese Dominanz, dass die ZV  $X$  jede feste Grenze mit größerer Wahrscheinlichkeit überschreitet als die ZV  $Y$ :

$$P(X > g) \geq P(Y > g) \text{ für alle } g \in \mathbb{R}.$$

Es ergibt sich direkt, dass die Teilordnung, welche durch diesen Dominanzbegriff erzeugt wird, nicht die Teilordnung, die durch die Ausschussquote induziert wird, stört. Für andere Kenngrößen, z.B. den Erwartungswert, gilt dieser Zusammenhang jedoch nicht.

Als Folgerung dieser Definitionen muss man von einem MCO-Verfahren auf Zufallsvariablen nunmehr fordern, dass keine Lösung des MCO-Problems vorgeschlagen wird, welche stochastisch dominiert wird.

Versteht man nunmehr die Produkte  $Y$  als Zufallsvariablen, so sind auch folgende Definitionen hilfreich:

**Definition 8.3 (Produktäquivalenz)** Zwei Faktoreinstellungen  $x_1, x_2 \in \mathbb{O}$  heißen *produktäquivalent*, in Zeichen  $x_1 \sim_P x_2$ , wenn die Verteilungen der zugehörigen Zielgrößen übereinstimmen, d.h.

$$x_1 \sim_P x_2 : \iff Y(x_1) =_{i.V.} Y(x_2).$$

**Bemerkung 8.4** Die Produktäquivalenz ist natürlich gegeben, wenn gilt  $f(x_1) = f(x_2)$ . Es kann aber auch produktäquivalente Faktoreinstellungen geben, für die diese Gleichheit nicht gilt.

## 8.2 Herleitung der Verteilungen spezieller Wünschbarkeiten

Entsprechend ergibt sich bei der Übertragung dieser Äquivalenz von den Produkten auf ihre Wünschbarkeiten der Begriff der Wünschbarkeitsäquivalenz:

**Definition 8.5 (Wünschbarkeitsäquivalenz)** Zwei Versuche  $x_1, x_2 \in \mathbb{O}$  heißen *wünschbarkeitsäquivalent*, in Zeichen  $x_1 \sim_q x_2$ , wenn die Verteilungen der Wünschbarkeiten der Zielgrößen übereinstimmen, d.h.

$$x_1 \sim_q x_2 : \iff q(Y(x_1)) =_{i.V.} q(Y(x_2)).$$

In dieser Arbeit wird das Konzept der stochastischen Dominanz nicht im Detail weiter untersucht. Stattdessen werden Kenngrößen der jeweiligen Verteilung zur Anordnung der Zufallsvariablen genutzt. Übliche Kenngrößen sind z.B. Erwartungswert, Median oder Interquartilsabstand. Eine weitere Größe, die im Zusammenhang mit der Produktoptimierung eine wichtige Rolle spielt, ist die *Ausschussquote*. Diese ist wie folgt definiert:

**Definition 8.6 (Ausschussquote)** Gegeben sei ein Wünschbarkeitsindex  $q(Y)$  und die zugehörige Verteilungsfunktion  $F_{q(Y)}$ . Dann heißt

$$p_0(q(Y)) := P(q(Y) = 0) = F_{q(Y)}(0)$$

Die Ausschussquote von  $Y$  unter  $q$ .

Inhaltlich gibt die Ausschussquote den Anteil unbrauchbarer Produkte an der Gesamtproduktion an.

**Bemerkung 8.7** Der Übergang zur Optimierung einer Antwortfläche, die an jeder Stelle eine Zufallsvariable repräsentiert, schafft methodische Probleme im eigentlichen Optimierungsschritt.

Die üblichen Verfahren sind nur auf deterministische Antwortflächen ausgelegt. Sie brechen deshalb die Optimierung einer Zufallsvariablen oft zu einem **zufälligen** Zeitpunkt ab, da das jeweilige Abbruchkriterium zu einem Zeitpunkt im Optimierungsprozess **zufällig** erfüllt wird.

Es sind mit den Verfahren zur deterministischen Optimierung keine zuverlässig reproduzierbaren Schätzungen  $\widehat{x_{opt}}$  für die Lage des Optimums  $x_{opt}$  zu erzielen!

## 8.2 Herleitung der Verteilungen spezieller Wünschbarkeiten

Um die auf Zufallsvariablen übertragenen Begriffe gewinnbringend einsetzen zu können, ist es zunächst nötig, die Verteilungsfunktionen der interessanten Variablen auch zu kennen.

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

In diesem Abschnitt wird die Verteilung der Wünschbarkeitsfunktion, aufgefasst als Zufallsvariable der Form

$$d^{DS}(Y) = d^{DS}(f(x) + \epsilon) \quad \text{mit} \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2),$$

für verschiedene Typen der Derringer-Suich-Wünschbarkeitsfunktion hergeleitet. Für viele Typen dieser Funktion lassen sich Erwartungswert und Varianz in geschlossener Form angeben. Ausgehend von den Ergebnissen zur Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$  lassen sich die Eigenschaften der anderen Formen leicht als Spezialfälle herleiten.

Im Folgenden wird kurz  $d$  für  $d^{DS}$  geschrieben.

### 8.3 Die gestutzte Normalverteilung

Da die gestutzte Normalverteilung in der Folge in den Beweisen auftritt, seien die benötigten Eigenschaften dieser Verteilung hier angeführt.

**Definition 8.8 (Gestutzte Normalverteilung)** Sei  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  eine normalverteilte Zufallsvariable. Dann heißt die Verteilung einer Zufallsvariablen

$$Z \quad \text{mit} \quad P(Z \leq q) := P(X \leq q \mid X \in [a, b])$$

bei  $a$  und  $b$  gestutzte Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ . Dabei sind  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . In Zeichen  $Z \sim N(a, b, \mu, \sigma^2)$ .

**Satz 8.9 (Eigenschaften der gestutzten Normalverteilung)** Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X \sim N(a, b, \mu, \sigma^2)$ . Dann ist die Verteilungsfunktion von  $X$  gegeben durch

$$F_X(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} \quad \text{mit} \quad a \leq x \leq b.$$

Die Dichtefunktion von  $X$  lautet

$$f_X(x) = \sigma^{-1} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \right]^{-1} \quad \text{mit} \quad a \leq x \leq b.$$

Für den Erwartungswert von  $X$  gilt:

$$E(X) = \mu + \frac{\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} \sigma.$$

#### 8.4 Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$

Für die Varianz von  $X$  gilt:

$$\text{Var}(X) = \left[ 1 + \frac{\frac{a-\mu}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \frac{b-\mu}{\sigma}\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} - \left( \frac{\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)} \right)^2 \right] \sigma^2$$

Die Aussagen über die gestutzte Normalverteilung sind der Literatur entnommen. (z. B. [Har87] 148 ff., [JKB94] 156 ff.)

Weiterhin wird der folgende Zusammenhang in den Beweisen wiederholt benötigt. Es gilt:

$$\varphi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Hierbei bezeichnet wie üblich  $\varphi_{\mu, \sigma^2}$  die Dichte einer  $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung und  $\varphi$  die Dichte der Standardnormalverteilung.

### 8.4 Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$

Für die folgenden Abschnitte sei stets ein Modell der Form

$$Y = f(x) + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

gegeben, wobei  $Y$  reellwertig sei.

Der komplizierteste Fall, für den exakte Formulierungen möglich sind, liegt vor, wenn gilt

$$d(Y) = (l, t, u, 1, 1)(Y).$$

Im allgemeinen Fall, nämlich wenn für den linken und rechten Exponenten auch Werte ungleich 1 zugelassen werden, ist die folgende Betrachtung nicht möglich, da die Verteilungen der Wünschbarkeitsfunktionen nicht mehr einfach aus der Normalverteilung abgeleitet werden könnten.

Die Zufallsvariable, deren Verteilung untersucht wird, ist somit

$$d(x, \epsilon) := \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) + \epsilon < l; \\ \frac{f(x) + \epsilon - l}{t - l} & \text{für } l \leq f(x) + \epsilon < t; \\ \frac{u - f(x) - \epsilon}{u - t} & \text{für } t \leq f(x) + \epsilon < u; \\ 0 & \text{für } u \leq f(x) + \epsilon. \end{cases}$$

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

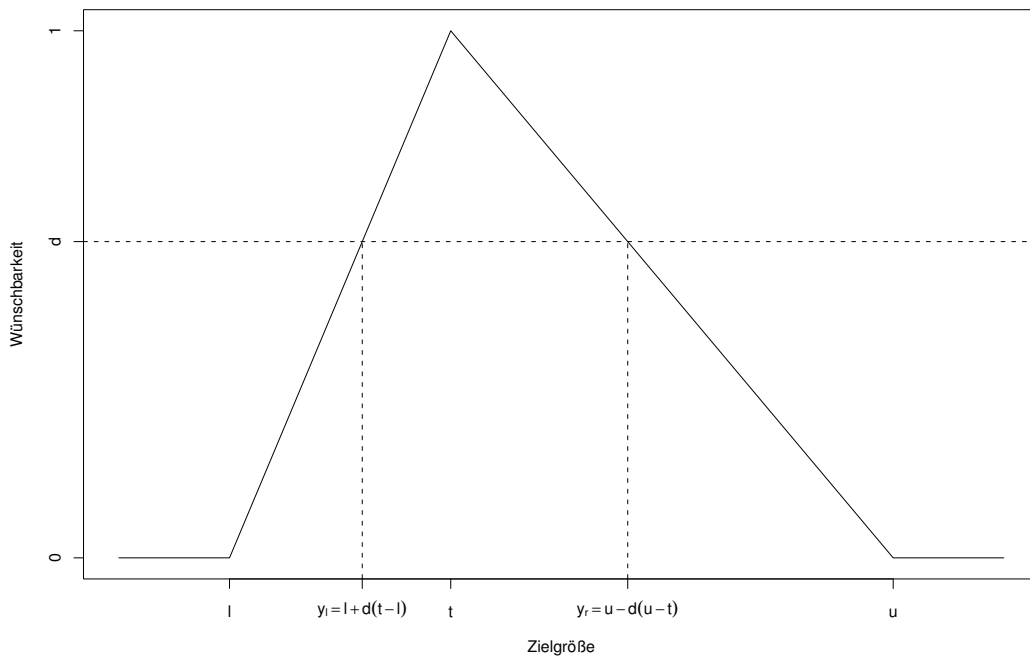
### Satz 8.10 (Verteilung der Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$ )

Die Verteilungsfunktion  $F_{d(x,\epsilon)}$  für eine Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$  ist:

$$F_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ \Phi\left(\frac{l + d \cdot (t - l) - f(x)}{\sigma}\right) + \\ \quad 1 - \Phi\left(\frac{u - d \cdot (u - t) - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d \in [0, 1]; \\ 1 & \text{für } d > 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Die Skizze 8.1 veranschaulicht die Beweisidee geometrisch.

Abbildung 8.1: Geometrische Situation des Satzes 8.10



**a)** Die Fälle  $d < 0$  und  $d > 1$  sind klar, da  $d(x, \epsilon) \in [0, 1]$ .

**b)**  $d(x, \epsilon) \leq d$  für  $d \in [0, 1]$ : Aus Skizze 8.1 lassen sich die benötigten Werte direkt ablesen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Bereiches links und rechts der senkrechten Linien. Diese Linien sind bei  $y_l = l + d \cdot (t - l)$  bzw.  $y_r = u - d \cdot (u - t)$ , was durch Einsetzen in eine Geradengleichung zu sehen ist. Also:

$$F_{d(Y)}(d) = P(d(Y) \leq d) = P(\{\omega \in \Omega \mid d(Y(\omega)) \leq d\})$$

#### 8.4 Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$

Nun ist

$$d(Y) \leq d \iff \begin{cases} Y \in \emptyset & \text{für } d < 0; \\ Y \notin [l + d \cdot (t - l), u - d \cdot (u - t)] \\ \iff Y < l + d \cdot (t - l) \wedge Y > u - d \cdot (u - t) & \text{für } d \in [0, 1]; \\ Y \in \mathbb{R} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} F_{d(Y)}(d) &= \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ F_Y(l + d \cdot (t - l)) + 1 - F_Y(u - d \cdot (u - t)) & \text{für } d \in [0, 1]; \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ \Phi\left(\frac{l + d \cdot (t - l) - f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{u - d \cdot (u - t) - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d \in [0, 1]; \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Die Verteilung einer  $(l, t, u, 1, 1)$  Wünschbarkeit an einer gegebenen Stelle  $x$  lässt sich also in geschlossener Form angeben. Es handelt sich um eine Mischung aus Normalverteilungsfunktionen mit einem Offset in der Null.

In Abbildung 8.2 sind exemplarisch drei typischen Formen der dabei auftretenden Verteilungsfunktionen gezeigt.

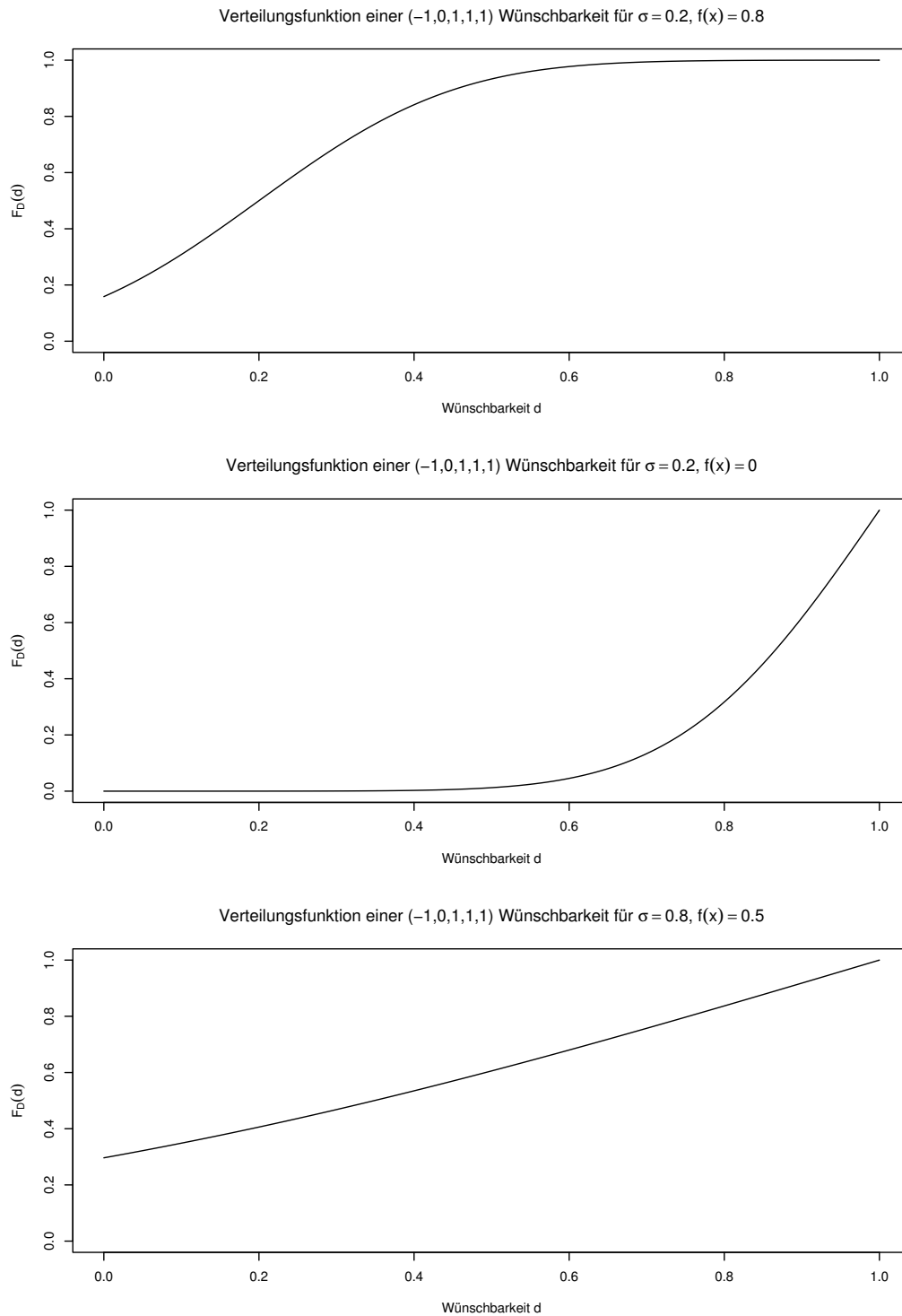
In der obersten Grafik ist ein gerade noch akzeptabler Fall zu sehen. Die Ausschussquote ist schon recht hoch und die Verteilungsfunktion hat ihre Masse fast ausschließlich im Bereich der Wünschbarkeiten unter 0.5. Das 95% Quantil von  $d$  liegt bei 0.53.

Die mittlere Grafik zeigt eine Art Idealzustand. Die Ausschussquote ist praktisch 0, auch wenn natürlich in strengem Sinne  $P(d = 0) > 0$  immer gilt. Fast die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse ist im Bereich der Wünschbarkeiten größer als 0.7 konzentriert (95% Quantil von  $d$  bei 0.99).

Die untere Grafik zeigt die Auswirkungen stark verrauschter Messwerte. Zum einen steigt natürlich die Ausschussquote, zum anderen erhält die Verteilungsfunktion einen beinahe linearen Verlauf. Die Wünschbarkeiten folgen also auf  $[0, 1]$  in etwa einer Gleichverteilung, sofern sie nicht auf die 0 fallen. Bereits hier ist schön zu erkennen, dass die Vernachlässigung der durch Experimente gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Streuung der Messwerte wichtige Informationen fahrlässig nicht nutzt. Eine Zielgröße mit einer derartigen Verteilung der Wünschbarkeiten liefert keine bzw. wenig Informationen über die Güte an einer gegebenen Stelle  $f(x)$  in dem Sinne, dass sie alle Punkte im Optimierungsbereich in etwa gleich bewertet.

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

Abbildung 8.2: Beispiele für Verteilungsfunktionen von Wünschbarkeiten vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$  für verschiedene Werte von  $f(x)$  und  $\sigma$

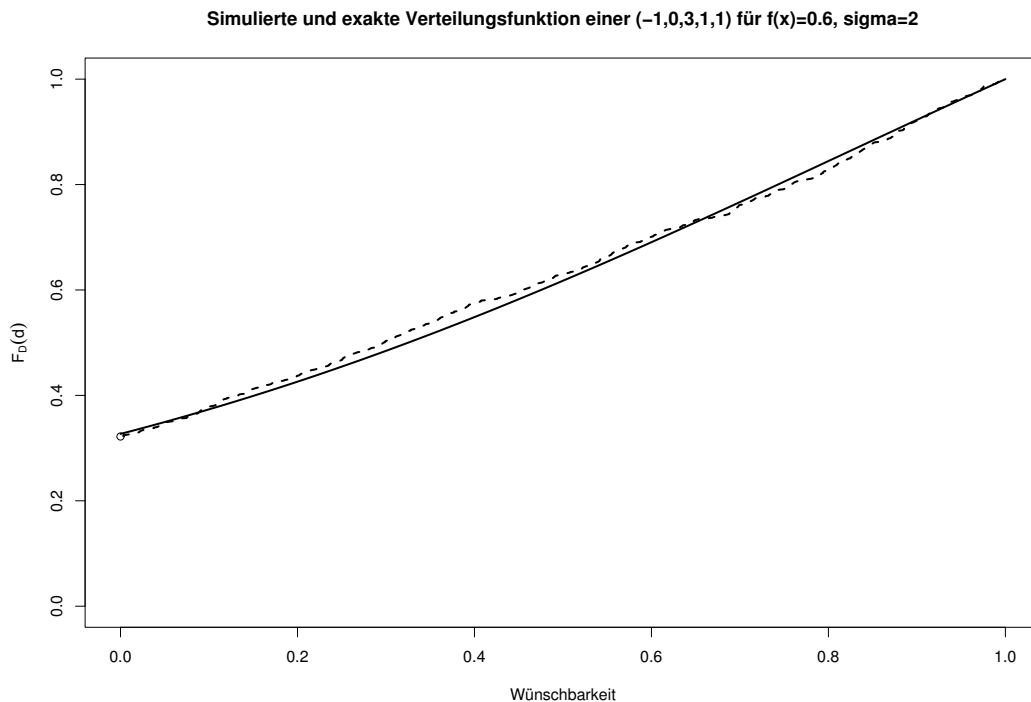




#### 8.4 Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$

In Abbildung 8.3 sind exakte Verteilungsfunktion (durchgezogene Linie) und durch Simulation gewonnene Verteilungsfunktion (gestrichelte Linie) für eine  $(-1, 0, 3, 1, 1)$ -Wünschbarkeit und ein spezielles  $x$  gegenübergestellt.

Abbildung 8.3: Gegenüberstellung von Simulation und exakter Verteilungsfunktion; Stichprobenumfang  $n = 1000$



Zwar sieht es in der Abbildung so aus, als sei ein Stichprobenumfang von 1000 für praktische Zwecke ausreichend, um den Einfluss der Fehlerterme zu berücksichtigen, allerdings sind auch die Varianzen der Schätzer für die wichtigen Kenngrößen Ausschussquote oder Erwartungswert wichtig. Um diese Kenngrößen auf zumindest 2 Dezimalen genau zu schätzen, ist es ohne exakte Ergebnisse für jede Funktionsauswertung in einer numerischen Optimierung nötig, in etwa 1000 Zufallszahlen zu erzeugen und mit den geschätzten Kenngrößen weiterzuarbeiten.

Selbst wenn also die Simulation für eine spezielle Verteilung zu durchaus zufriedenstellenden Ergebnissen führen würde, so ist die exakte Angabe der Verteilungen doch aus Gründen der Rechengeschwindigkeit sehr wünschenswert. Jede Funktionsauswertung zur Konstruktion der Antwortfläche im Optimierungsprozess wird ungefähr um den Faktor  $n$ , den Stichprobenumfang zur Schätzung in jedem Optimierungsschritt, beschleunigt. Um es ganz deutlich zu machen: Die

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

analytische Angabe der Verteilung für den Exponenten 1 beschleunigt bei akzeptabler Genauigkeit die Optimierung ca. um einen **Faktor 1000**.

Als die Idee der verbesserten Wünschbarkeiten in [Ste00] erstmals formuliert wurde, lagen exakte Ergebnisse noch nicht vor, weshalb damals gar mit einem Stichprobenumfang von 5000 gearbeitet wurde, um möglichst glatte Kurven zu bekommen, die mit den Optimierungsverfahren für deterministische Antwortflächen behandelt werden konnten. Um zu erträglichen Rechenzeiten zu kommen, wurde damals sogar erwogen, die Verteilungen mittels einer möglichst flexiblen Verteilungsklasse, wie zum Beispiel dem  $fQ$ -System von Scheffner [Sch98], in jedem Schritt zu schätzen. Dieser Mühen ist man nun durch die analytische Angabe der Verteilungen enthoben!

Als Folgerung aus der Berechnung der Verteilung lässt sich auch die Dichte geschlossen angeben. Diese ergibt sich als Mischdichte von Normalverteilungsdichten mit einem Punktgewicht auf der Null.

**Satz 8.11 (Dichte der Wünschbarkeit vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$ )** Die Dichtefunktion  $f_{d(x,\epsilon)}$  für eine Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, r, 1, 1)$  ist:

$$f_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} 0 & \text{für } d \notin [0, 1); \\ \Phi\left(\frac{l-f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{u-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ \frac{t-l}{\sigma}\varphi\left(\frac{l+d\cdot(t-l)-f(x)}{\sigma}\right) + \frac{u-t}{\sigma}\varphi\left(\frac{u-d\cdot(u-t)-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d \in (0, 1). \end{cases}$$

**Beweis:** Die Verteilung aus Satz 8.10 besitzt ein Punktgewicht für  $d = 0$ . Für  $d \in (0, 1)$  ergibt sich der Ausdruck durch Differentiation der Verteilung aus Satz 8.10.

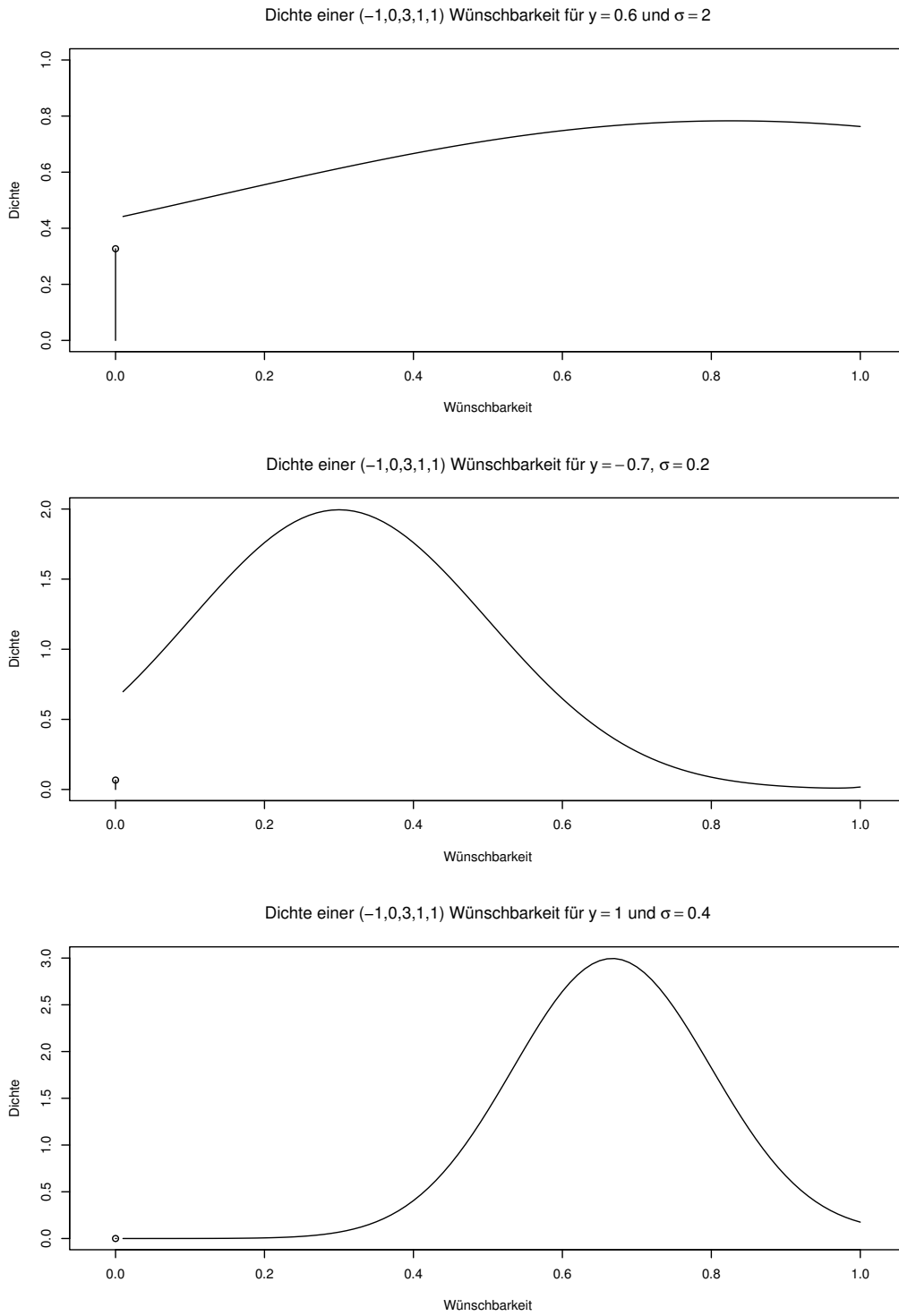
□

In Abbildung 8.4 sind typische Beispiele für derartige Dichten gezeigt. Wie zu erkennen ist, können diese Dichten links- oder rechtsschief sein, einen eindeutigen Modalwert haben, oder auch nicht, und sie unterscheiden sich stark in den Gewichten für  $d = 0$ . Insbesondere erscheint es angesichts dieser Grafiken schwierig, eine einzelne Kenngröße zu identifizieren, die zwischen mehreren Wünschbarkeiten eine Entscheidung erleichtert. In der oberen Kurve ist die Ausschussquote sehr hoch, dafür kommen aber auch Messungen mit sehr hoher Wünschbarkeit nennenswert vor (95%-Quantil von  $d$  bei 0.94). In der mittleren Kurve findet sich eine geringe Ausschussquote, dafür kommen Messungen hoher Wünschbarkeiten praktisch nicht vor (95%-Quantil von  $d$  bei 0.63). Um zwischen diesen Verteilungen eine Rangordnung zu erstellen, ist von Fall zu Fall ein geeignetes Kriterium in Abhängigkeit von der Anwendung zu bestimmen.

**Bemerkung 8.12** Diese Beispiele für Dichten zeigen bereits sehr deutlich auf, dass eine Normalapproximation der Wünschbarkeitsverteilungen, etwa zur Anwendung bei Kontrollkarten, nicht sinnvoll ist. Erstens treten Punktgewichte auf,

### 8.4 Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$

Abbildung 8.4: Beispiele für Dichten von Wünschbarkeiten vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$  für verschiedene Werte von  $f(x)$  und  $\sigma$



## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

zweitens sind die Verteilungen nicht symmetrisch und drittens ist der Träger endlich. Man darf also hoffen, dass eine Anwendung der hier gewonnenen Verteilungsaussagen für Wünschbarkeiten auf Kontrollkarten eine deutliche Verbesserung in der Praxis nach sich zieht.

Zwei wichtige Kenngrößen für die Güte einer Faktoreinstellung  $x$  sind die Ausschussquote und die erwartete Wünschbarkeit bei gegebenem  $x$ . Beide Größen lassen sich nun leicht angeben, einmal als das Punktgewicht auf der Null, zum anderen als der Erwartungswert der Verteilung.

**Lemma 8.13 (Ausschussquote bei gegebenem  $x$ )** Die Ausschussquote  $p_0(x)$  zu einer Faktoreinstellung  $x$  bei einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$  ergibt sich nach Satz 8.11 als

$$p_0(x) = \Phi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{u - f(x)}{\sigma}\right).$$

**Beweis:** Ergibt sich durch Ablesen aus der Dichte. □

Etwas komplizierter ist die Herleitung des Erwartungswertes bei gegebener Faktoreinstellung  $x$ .

**Satz 8.14 (Erwartungswert der Wünschbarkeit vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$ )** Für den Erwartungswert von  $d(x, \epsilon)$  für festes  $x$  und eine Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, r, 1, 1)$  gilt:

$$E(d(x, \epsilon)) = G_l \frac{f(x) - l}{t - l} + g_l \frac{\sigma}{t - l} + G_r \frac{u - f(x)}{u - t} - g_r \frac{\sigma}{u - t},$$

wobei

$$\begin{aligned} G_l &= \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right), \\ g_l &= \varphi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right), \\ G_r &= \Phi\left(\frac{u - f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right), \\ g_r &= \varphi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{u - f(x)}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

**Beweis:** Sei  $\varphi_{f(x), \sigma}(y)$  die Dichte einer Zufallsvariablen  $Y \sim N(f(x), \sigma^2)$ , ausge-

#### 8.4 Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$

wertet an der Stelle  $y$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} E(d(Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(y)f(y)dy \\ &= \underbrace{\int_l^t \frac{y-l}{t-l} \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy}_{=: A} + \underbrace{\int_t^u \frac{u-y}{u-t} \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy}_{=: B} \end{aligned}$$

wobei  $f(y) = \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)$  ausgenutzt wurde.

Der Übersichtlichkeit halber werden  $A$  und  $B$  getrennt berechnet. Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{t-l} \int_l^t y \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy - \frac{l}{t-l} \int_l^t \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy \\ &= \frac{\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)}{t-l} \cdot \underbrace{\int_l^t y \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(y)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)} dy}_{\text{E-Wert einer } N(l, t, f(x), \sigma^2)\text{-Vtg.}} \\ &\quad - \frac{l}{t-l} [\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)] \\ &= \frac{\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)}{t-l} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(l) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(t)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)} \right] \\ &\quad - \frac{l}{t-l} [\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)] \\ &= [\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)] \frac{f(x) - l}{t-l} + [\varphi_{f(x),\sigma^2}(l) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(t)] \frac{\sigma^2}{t-l}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{u-t} \int_t^u y \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy + \frac{u}{u-t} \int_t^u \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy \\ &= -\frac{\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)}{u-t} \cdot \underbrace{\int_t^u y \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(y)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)} dy}_{\text{E-Wert einer } N(t, u, f(x), \sigma^2)\text{-Vtg.}} \\ &\quad + \frac{u}{u-t} [\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)] \\ &= -\frac{\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)}{u-t} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(u)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)} \right] \\ &\quad + \frac{u}{u-t} [\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)] \\ &= [\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)] \frac{u - f(x)}{u-t} - [\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(u)] \frac{\sigma^2}{u-t}. \end{aligned}$$

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

Insgesamt folgt damit:

$$\begin{aligned}
 E(d(Y)) &= A + B \\
 &= [\Phi_{f(x),\sigma^2}(t) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(l)] \frac{f(x) - l}{t - l} + [\varphi_{f(x),\sigma^2}(l) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(t)] \frac{\sigma^2}{t - l} \\
 &+ [\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)] \frac{u - f(x)}{u - t} - [\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(u)] \frac{\sigma^2}{u - t} \\
 &= G_l \frac{f(x) - l}{t - l} + g_l \frac{\sigma}{t - l} + G_r \frac{u - f(x)}{u - t} - g_r \frac{\sigma}{u - t}.
 \end{aligned}$$

□

Auch die Varianz lässt sich für diesen Fall in geschlossener Form angeben. Allerdings wird der Ausdruck unhandlich.

**Satz 8.15 (Varianz der Wünschbarkeit vom Typ  $(l, t, u, 1, 1)$ )** Für die Varianz der ZV  $d(x, \epsilon)$  für festes  $x$  und eine Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, r, 1, 1)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(d(Y)) &= \frac{1}{(t - l)^2} \left[ G_l(\sigma - 2lf(x) + l^2) - g_l \cdot 2l\sigma \right. \\
 &\quad \left. + l\varphi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right) - t\varphi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(u - t)^2} \left[ G_r(u^2 - 2uf(x) + \sigma) - g_r \cdot 2u\sigma \right. \\
 &\quad \left. + t\varphi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) - u\varphi\left(\frac{u - f(x)}{\sigma}\right) \right] \\
 &+ \left[ G_l \frac{f(x) - l}{t - l} + g_l \frac{\sigma}{t - l} + G_r \frac{u - f(x)}{u - t} - g_r \frac{\sigma}{u - t} \right]^2.
 \end{aligned}$$

Dabei sind  $G_l, G_r, g_l$  und  $g_r$  definiert wie in Satz 8.14.

**Beweis:** Mit der bekannten Zerlegung

$$\text{Var}(d(Y)) = E(d(Y)^2) - \underbrace{[E(d(Y))]^2}_{\text{bekannt aus Satz 8.14}}$$

Bleibt also noch der erste Term zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 E(d(Y)^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(y)^2 f(y) dy \\
 &= \underbrace{\int_l^t \left(\frac{y - l}{t - l}\right)^2 \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy}_{=: A} + \underbrace{\int_t^u \left(\frac{u - y}{u - t}\right)^2 \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy}_{=: B}
 \end{aligned}$$

#### 8.4 Verteilung einer Wünschbarkeitsfunktion vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$

Die Terme  $A$  und  $B$  können zweckmässigerweise getrennt berechnet werden. Zunächst erhält man für  $A$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \left( \frac{1}{t-l} \right)^2 \int_l^t (y^2 - 2yl + l^2) \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy \\
 &= \frac{1}{(t-l)^2} \left[ \underbrace{\int_l^t y^2 \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy}_{=: A_1} - 2l \underbrace{\int_l^t y \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy}_{=: A_2} + l^2 \underbrace{\int_l^t \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy}_{A_3} \right].
 \end{aligned}$$

Wiederum werden die Terme  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  nacheinander berechnet.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_l^t y^2 \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy = \int_l^t y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-f(x))^2}{2\sigma^2}} dy \\
 &= \left[ \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \left( -e^{-\frac{(y-f(x))^2}{2\sigma^2}} \right) \right]_l^t - \int_l^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -e^{-\frac{(y-f(x))^2}{2\sigma^2}} \right) dy \\
 &= \frac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-f(x))^2}{2\sigma^2}} - \frac{-l}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-f(x))^2}{2\sigma^2}} + \sigma \int_l^t \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy \\
 &= \sigma l \varphi_{f(x), \sigma^2}(l) - \sigma t \varphi_{f(x), \sigma^2}(t) + \sigma [\Phi_{f(x), \sigma^2}(t) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)] \\
 &= \sigma (l \varphi_{f(x), \sigma^2}(l) - t \varphi_{f(x), \sigma^2}(t) + G_l),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_l^t y \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy \\
 &= [\Phi_{f(x), \sigma^2}(t) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)] \underbrace{\int_l^t y \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(y)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(t) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)} dy}_{\text{E-Wert einer } N(l, t, f(x), \sigma^2)} \\
 &= [\Phi_{f(x), \sigma^2}(t) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)] \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(l) - \varphi_{f(x), \sigma^2}(t)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(t) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)} \right] \\
 &= f(x) [\Phi_{f(x), \sigma^2}(t) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)] + \sigma^2 [\varphi_{f(x), \sigma^2}(l) - \varphi_{f(x), \sigma^2}(t)] \\
 &= f(x) G_l + \sigma g_l,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \Phi_{f(x), \sigma^2}(t) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l) \\
 &= G_l.
 \end{aligned}$$

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

Also ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{(t-l)^2} (A_1 - 2lA_2 + l^2A_3) \\
 &= \frac{\sigma}{(t-l)^2} (l\varphi_{f(x),\sigma^2}(l) - t\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) + G_l) - \frac{2l}{(t-l)^2} (f(x)G_l + \sigma g_l) \\
 &\quad + \left(\frac{l}{t-l}\right)^2 G_l \\
 &= \frac{1}{(t-l)^2} \left[ G_l(\sigma - 2lf(x) + l^2) - g_l \cdot 2l\sigma + l\varphi\left(\frac{l-f(x)}{\sigma}\right) - t\varphi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Nun kann  $B$  entsprechend berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{(u-t)^2} \int_t^u (u^2 - 2uy + y^2) \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy \\
 &= \frac{1}{(u-t)^2} \left[ \underbrace{u^2 \int_t^u \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy}_{=: B_3} - 2u \underbrace{\int_t^u y \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy}_{=: B_2} + \underbrace{\int_t^u y^2 \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy}_{=: B_1} \right]
 \end{aligned}$$

Da die Rechnungen analog zu denen für Teil  $A$  verlaufen, seien hier nur die Ergebnisse angegeben:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \sigma (t\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) - u\varphi_{f(x),\sigma^2}(u) + [\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)]) \\
 &= \sigma (t\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) - u\varphi_{f(x),\sigma^2}(u) + G_r), \\
 B_2 &= f(x) (\Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t)) + \sigma (\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(u)) \\
 &= f(x)G_r + \sigma g_r, \\
 B_3 &= \Phi_{f(x),\sigma^2}(u) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(t) \\
 &= G_r.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt für Teil  $B$ :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{(u-t)^2} (u^2B_3 - 2uB_2 + B_1) \\
 &= \left(\frac{u}{u-t}\right)^2 G_r - \frac{2u}{(u-t)^2} (f(x)G_r + \sigma g_r) \\
 &\quad + \frac{\sigma}{(u-t)^2} (t\varphi_{f(x),\sigma^2}(t) - u\varphi_{f(x),\sigma^2}(u) + G_r) \\
 &= \frac{1}{(u-t)^2} \left[ G_r(u^2 - 2uf(x) + \sigma) - g_r \cdot 2u\sigma \right. \\
 &\quad \left. + t\varphi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) - u\varphi\left(\frac{u-f(x)}{\sigma}\right) \right].
 \end{aligned}$$



## 8.5 Verteilung einiger anderer Wünschbarkeitsfunktionen

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(d(Y)) &= A + B + [E(d(Y))]^2 \\
 &= \frac{1}{(t-l)^2} \left[ G_l(\sigma - 2lf(x) + l^2) - g_l \cdot 2l\sigma \right. \\
 &\quad \left. + l\varphi\left(\frac{l-f(x)}{\sigma}\right) - t\varphi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) \right] \\
 &+ \frac{1}{(u-t)^2} \left[ G_r(u^2 - 2uf(x) + \sigma) - g_r \cdot 2u\sigma \right. \\
 &\quad \left. + t\varphi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) - u\varphi\left(\frac{u-f(x)}{\sigma}\right) \right] \\
 &+ \left[ G_l \frac{f(x)-l}{t-l} + g_l \frac{\sigma}{t-l} + G_r \frac{u-f(x)}{u-t} - g_r \frac{\sigma}{u-t} \right]^2.
 \end{aligned}$$

□

Nachdem diese Aussagen für den Sollwertfall gewonnen sind, lassen sich ähnliche Aussagen auch für andere Typen von Wünschbarkeiten treffen. Die Ergebnisse können als Spezialfälle des  $(l, t, u, 1, 1)$  Typs angesehen werden. Die Rechnungen werden deshalb nicht weiter ausgeführt. Sie verlaufen analog zu den eben durchgeführten.

## 8.5 Verteilung einiger anderer Wünschbarkeitsfunktionen

**Satz 8.16 (Verteilung der Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, \infty, 1, 1)$ )**

Die Verteilungsfunktion  $F_{d(x,\epsilon)}$  für eine Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, \infty, 1, 1)$  ist:

$$F_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ \Phi\left(\frac{l+d(t-l)-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d \in [0, 1); \\ 1 & \text{für } d \geq 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Der Beweis erfolgt im Wesentlichen analog zu Satz 8.10. Der linke Zweig der Wünschbarkeitsfunktion führt zu den selben Termen wie dort, der rechte Zweig wird hier durch ein Punktgewicht auf der Eins ersetzt.

□

**Satz 8.17 (Dichte der Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, \infty, 1, 1)$ )** Die Dichtefunktion  $f_{d(x,\epsilon)}$  für eine Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, \infty, 1, 1)$  lau-

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

tet:

$$f_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0 \text{ und } d > 1; \\ \Phi\left(\frac{l-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ \frac{t-l}{\sigma}\varphi\left(\frac{l+d(t-l)-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d \in (0, 1); \\ 1 - \Phi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Die Punktgewichte in der Null und der Eins ergeben sich als Unter- bzw. Überschreitenswahrscheinlichkeiten, der Ausdruck für  $d \in (0, 1)$  durch differenzieren der Verteilung aus 8.16.

□

**Lemma 8.18 (Ausschussquote einer  $(l, t, \infty, 1, 1)$  Wünschbarkeit)** Die Ausschussquote  $p_0(d(x, \epsilon))$  für  $d = (l, t, \infty, 1, 0)$  an einer Stelle  $f(x)$  beträgt

$$p_0(f(x)) = \Phi\left(\frac{l-f(x)}{\sigma}\right).$$

**Beweis:** Ablesen aus der Dichtefunktion in Satz 8.17.

□

**Bemerkung 8.19** Unter anderem bedeutet dies, dass immer gilt  $p_0(l) = 0.5$ . Es erscheint daher sinnvoll festzulegen, dass eine Ausschussquote von 0.5 eine äußerste Grenze für die Akzeptanz einer Faktoreinstellung  $x$  festlegt.

Eine weitere interessante Beobachtung ist, dass für die Ausschussquote die Unsymmetrie der Spezifikation der Wünschbarkeit keine Rolle spielt. Sie wird lediglich durch das Verhältnis zwischen dem Abstand von  $f(x)$  vom Rand des Spezifikationsintervalls und  $\sigma$  bestimmt (s. dazu auch Abbildung 9.3). Für eine Zielgröße  $Y$  legt diese Beobachtung folgende Definition nahe:

**Definition 8.20 (signal-to-noise-ratio einer Zielgröße)** Für eine Zielgröße  $Y$  mit spezifizierter Wünschbarkeitsfunktion  $(l, t, u, \beta_l, \beta_r)$  und der Modellgleichung  $Y = f(x) + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$  nennt man

$$SNR(Y) := \frac{u-l}{\sigma}$$

das signal-to-noise-ratio der Zielgröße  $Y$ .

**Satz 8.21 (Erwartungswert einer  $(l, t, \infty, 1, 1)$  Wünschbarkeit)** Der Erwartungswert für eine Wünschbarkeitsfunktion vom Typ  $(l, t, \infty, 1, 1)$  lautet:

$$E(d(x, \epsilon)) = G_l \frac{f(x)-l}{t-l} + g_l \frac{\sigma}{t-l} + 1 - \Phi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right).$$

Hierbei sind  $G_l$  und  $g_l$  definiert wie im Satz 8.14.

## 8.5 Verteilung einiger anderer Wünschbarkeitsfunktionen

**Beweis:** Wie im Beweis zu Satz 8.14 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 E(d(Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(y)f(y)dy \\
 &= \underbrace{\int_l^t \frac{y-l}{t-l} \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy}_{=A \text{ aus Satz 8.14}} + \underbrace{\int_t^{\infty} 1 \varphi_{f(x),\sigma^2}(y)dy}_{=1-\Phi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right)} \\
 &= G_t \frac{f(x)-l}{t-l} + g_t \frac{\sigma}{t-l} + 1 - \Phi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right),
 \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wird, dass  $f(y) = \varphi_{f(x),\epsilon}(y)$ .

□

Ein weiterer, häufiger Spezialfall ist die Wünschbarkeit vom Typ

$$d(x, \epsilon) := \lim_{\delta \rightarrow 0} (t - \delta, t, \infty, 1, 1)$$

mit der funktionalen Form

$$d(x, \epsilon) := \begin{cases} 1 & f(x) + \epsilon \geq t; \\ 0 & f(x) + \epsilon < t. \end{cases}$$

Hierfür gilt der

**Satz 8.22 (Verteilung einer  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(t - \delta, t, \infty, 1, 1)$  Wünschbarkeit)** Die Verteilungsfunktion  $F_{d(x,\epsilon)}$  für eine  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(t - \delta, t, \infty, 1, 1)$  Wünschbarkeit, gegeben wie oben, ist:

$$F_{d(x,\epsilon)} = \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ \Phi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } 0 \leq d < 1; \\ 1 & \text{für } d \geq 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Mit dem Ergebnis aus 8.16 gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Phi\left(\frac{t + d(t - (t + \delta)) - f(x)}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right).$$

□

**Satz 8.23 (Dichte einer  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(t - \delta, t, \infty, 1, 1)$  Wünschbarkeit)** Entsprechend ergibt sich die Dichte als Zähldichte mit

$$f_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ 1 - \Phi\left(\frac{t-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

**Beweis:** Folgt sofort durch Ablesen der Punktgewichte aus Satz 8.22. □

**Satz 8.24 (Erwartungswert einer  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(t - \delta, t, \infty, 1, 1)$  Wünschbarkeit)** Entsprechend ergibt sich der Erwartungswert als die Überschreitungswahrscheinlichkeit von  $t$ :

$$E(d(x, \epsilon)) = 1 - \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right)$$

**Beweis:** Klar aus Satz 8.23.

Als letzter Spezialfall soll noch das Ergebnis für die abschnittsweise optimale Wünschbarkeit vom Typ

$$d(x, \epsilon) := \lim_{\delta \rightarrow 0}(l + \delta, t, t + \delta, 0, 1)$$

untersucht werden.

Diese hat die funktionale Form:

$$d(x, \epsilon) := \begin{cases} 1 & l < f(x) + \epsilon \leq t; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierfür gelten folgende Aussagen:

**Satz 8.25 (Verteilung einer  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(l + \delta, t, t + \delta, 0, 1)$  Wünschbarkeit)** Die Verteilungsfunktion  $F_{d(x, \epsilon)}$  für eine Wünschbarkeit vom Typ  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(l, t, t + \delta, 0, 1)$  lautet:

$$F_{d(x, \epsilon)} = \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ 1 - \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ 1 & \text{für } d \geq 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Das Punktgewicht auf der Eins ergibt sich als Intervallwahrscheinlichkeit des Intervalls  $[l, t]$ , das Gewicht auf der Null als das Komplement dazu. □

**Satz 8.26 (Dichte einer  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(l + \delta, t, t + \delta, 0, 1)$  Wünschbarkeit)** Entsprechend ergibt sich die Dichte als Zähldichte mit

$$f_{d(x, \epsilon)}(d) = \begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 8.5 Verteilung einiger anderer Wünschbarkeitsfunktionen

**Beweis:** Die Punktgewichte ergeben sich als Intervallwahrscheinlichkeiten.  $\square$

**Satz 8.27 (Erwartungswert einer  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(l + \delta, t, t + \delta, 0, 1)$  Wünschbarkeit)**

Der Erwartungswert einer  $\lim_{\delta \rightarrow 0}(l + \delta, t, t + \delta, 0, 1)$  Wünschbarkeitsfunktion ergibt sich als

$$E(d(x, \epsilon)) = \Phi\left(\frac{t - f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l - f(x)}{\sigma}\right).$$

**Beweis:** Klar nach Satz 8.26.  $\square$

8 Verteilung der Wünschbarkeiten als Funktion von  $x$

# 9 Realistische Wünschbarkeiten

Im Kapitel 7.3 wurde am Beispiel gezeigt, welche Probleme durch die Vernachlässigung des Modellfehlers entstehen.

Durch die Herleitung der Verteilungsfunktionen für die Wünschbarkeiten, wie sie bei Derringer-Suich auftauchen, ist man jetzt in der Lage, diese Informationen im Optimierungsprozess zu nutzen. Es werden zunächst neue *realistische Wünschbarkeiten* definiert. Anschließend wird an Hand einer Simulationen geprüft, ob durch den Einsatz dieser Funktionen auch tatsächlich eine Verbesserung erreicht worden ist.

## 9.1 Definition der realistischen Wünschbarkeiten

Der Name *realistische Wünschbarkeit* wurde gewählt, um auszudrücken, dass diese Wünschbarkeiten nicht die Vereinfachungen des klassischen Vorgehens benötigen. Angesichts der Ergebnisse in Kap. 7.3 scheint für die klassischen Wünschbarkeiten der Zusatz *idealisiert* angemessen zu sein, um den Gegensatz zum hier Vorgestellten zu betonen.

**Definition 9.1 (realistische Wünschbarkeit (nach Derringer-Suich))** Gegeben sei eine eindimensionale Zielgröße  $Y$ , eine zugehörige Wünschbarkeitsfunktion  $d$ , sowie das Modell  $Y = f(x) + \epsilon$ ,  $\epsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Dann heißt die Funktion

$$d^r(Y) := E(d(x, \epsilon))$$

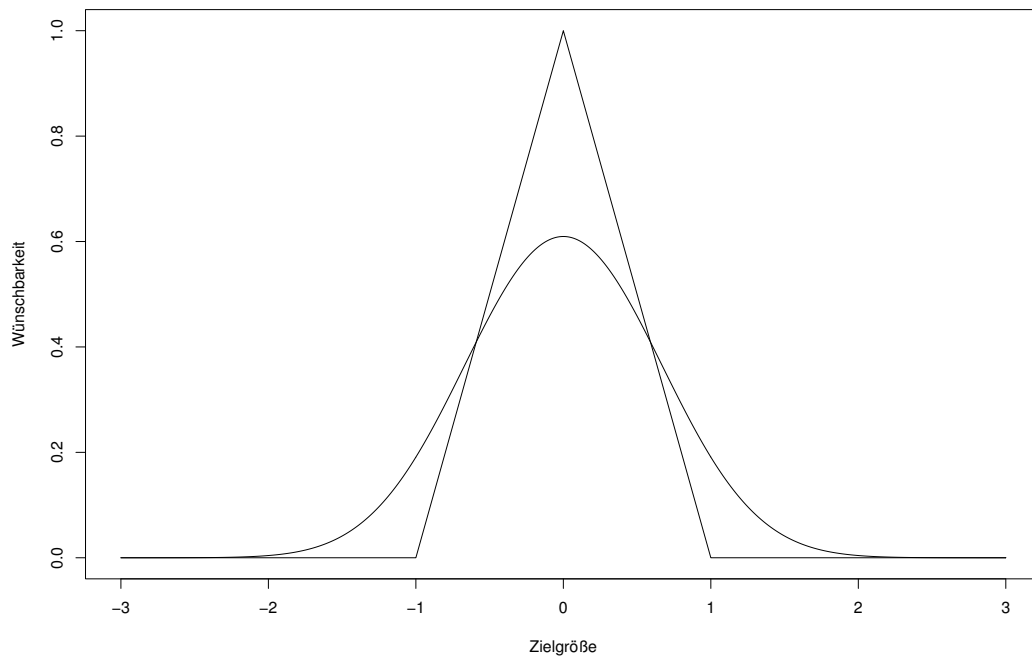
die *realistische Wünschbarkeit* von  $Y$ .

Der Erwartungswert wird zur Definition dieser realistischen Wünschbarkeit herangezogen, da er das Analogon für die klassische Betrachtungsweise unter Berücksichtigung der Fehlerterme darstellt. Natürlich lassen sich auch Indizes über andere Kenngrößen der Verteilung, insbesondere über die Ausschussquote definieren. Es gibt dort noch große Freiheiten für die jeweilige Anwendung. Um mit dem herkömmlichen Vorgehen möglichst vergleichbar zu bleiben, beschränkt man sich hier zunächst auf den Erwartungswert.

In Abbildung 9.1 ist eine klassische Derringer-Suich-Wünschbarkeit der entsprechenden realistischen Wünschbarkeit gegenübergestellt.

## 9 Realistische Wünschbarkeiten

Abbildung 9.1: Gegenüberstellung einer  $(-1, 0, 1, 1, 1)$  und der zugehörigen realistischen Wünschbarkeit für  $\sigma = 0.5$



Ein erster Vorteil für die numerische Behandlung der Wünschbarkeiten ist direkt in der Grafik erkennbar: Es gibt keine Gebiete der Wünschbarkeit Null mehr! Die Probleme, die durch nicht zusammenhängende Gebiete positiver Wünschbarkeiten entstehen können, sind somit verschwunden, ebenso natürlich durch die Erwartungswertbildung das Problem der fehlenden Differenzierbarkeit.

Mittels dieser realistischen Wünschbarkeitsfunktionen läßt sich nun ein realistischer Wünschbarkeitsindex definieren:

**Definition 9.2 (realistischer Wünschbarkeitsindex)** Unter den Voraussetzungen von Definition 9.1 für mehrere unabhängige Zielgrößen  $Y_i, i = 1, \dots, m$ ,



heißt eine Funktion  $q$  mit

$$\begin{aligned} q^r(Y) &:= \left( E \prod_1^m d_i(x, \epsilon) \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left( \prod_1^m E(d_i(x, \epsilon)) \right)^{\frac{1}{m}} \\ &= \left( \prod_1^m d_i^r(Y_i) \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

*realistischer Wünschbarkeitsindex*

Es ergibt sich direkt, dass ein Index, der auf realistischen Wünschbarkeiten beruht, pareto-optimale Lösungen generiert, da die Argumentation für den Harrington Fall greift!

## 9.2 Nutzen des realistischen Ansatzes

Um die Nützlichkeit dieses neuen Konzepts zu demonstrieren, wird eine weitere Simulationsstudie durchgeführt. Wiederum werden die Experimente von Derringer-Suich wiederholt, diesmal aber mit den *realistischen Wünschbarkeiten* als Grundlage für die numerische Optimierung. Die beobachteten „wahren“ Wünschbarkeiten werden mit den entsprechenden „wahren“ Wünschbarkeiten aus dem klassischen Vorgehen verglichen. Das Ergebnis ist überzeugend:

- Zum einen erhält man echt unterschiedliche mittlere Schätzer für  $\widehat{x_{opt}}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{x_{opt}^{ideal}} &= (-0.05, 0.145, -0.868) \text{ (Derringer-Suich),} \\ \widehat{x_{opt}^{real}} &= (0.13, 0.50, -1.08) \text{ (realistische Wünschbarkeiten),} \end{aligned}$$

welche räumlich nicht allzu nah beieinander liegen. (Zur Erinnerung: Der Faktorraum ist für die Versuchsplanung für jede Einflussgröße auf das Intervall  $[-1.633, 1.633]$  [DS80] normiert!).

- Zum zweiten, und das ist entscheidend, ist eine substantielle Verbesserung der Wünschbarkeit im geschätzten Optimum zu verzeichnen. Die Verbesserung liegt in diesem Beispiel in der Größenordnung von ca. 10%, denn folgende Werte werden beobachtet:

$$\overline{Q(\widehat{x_{opt}^{real}})} = 0.44 \quad \text{und} \quad \overline{Q(\widehat{x_{opt}^{ideal}})} = 0.40.$$

## 9 Realistische Wünschbarkeiten

Es darf also konstatiert werden, dass das Konzept der *realistischen* Wünschbarkeit auch in der Anwendung zu substantieller Verbesserung des optimierten Produktes führen kann!

**Bemerkung 9.3** Der Stichprobenumfang für diese Simulation betrug 5000 Wiederholungen! Dieser hohe Stichprobenumfang war nötig, um zwei gesicherte Dezimalen für die Schätzer zu bekommen. Eine Vorstudie hatte nämlich für den Varianzschätzer des Wünschbarkeitsindex im Optimum

$$\widehat{Var} \left( q^{ideal}(\widehat{x}_{opt}^{ideal}) \right) \approx 0.23$$

ergeben.

Über den *Zentralen Grenzwertsatz* erhält man dann leicht, dass ein Stichprobenumfang von ca. 4800 nötig ist, um die Standardabweichung im Bereich des geschätzten Optimums auf ca.  $\frac{1}{300}$  zu drücken. Mit der angegebenen Stichprobengröße kann man dann zumindest zwei Nachkommastellen mittels des 99%-Konfidenzintervalls als gesichert annehmen.

### 9.3 Die Harrington Skala revisited

In der Einführung zur Geschichte der Wünschbarkeiten wurde bereits darauf hingewiesen, dass Harrington seine Wünschbarkeitsskala deshalb so einfach angeben konnte, da er die Wünschbarkeiten nicht als Zufallsvariablen verstand. Berücksichtigt man neben dem Erwartungswert auch noch die Streuung von Wünschbarkeiten, so zeigt sich ein komplexeres Bild, als er in seiner Skala in Kapitel 5.2 vermitteln möchte.

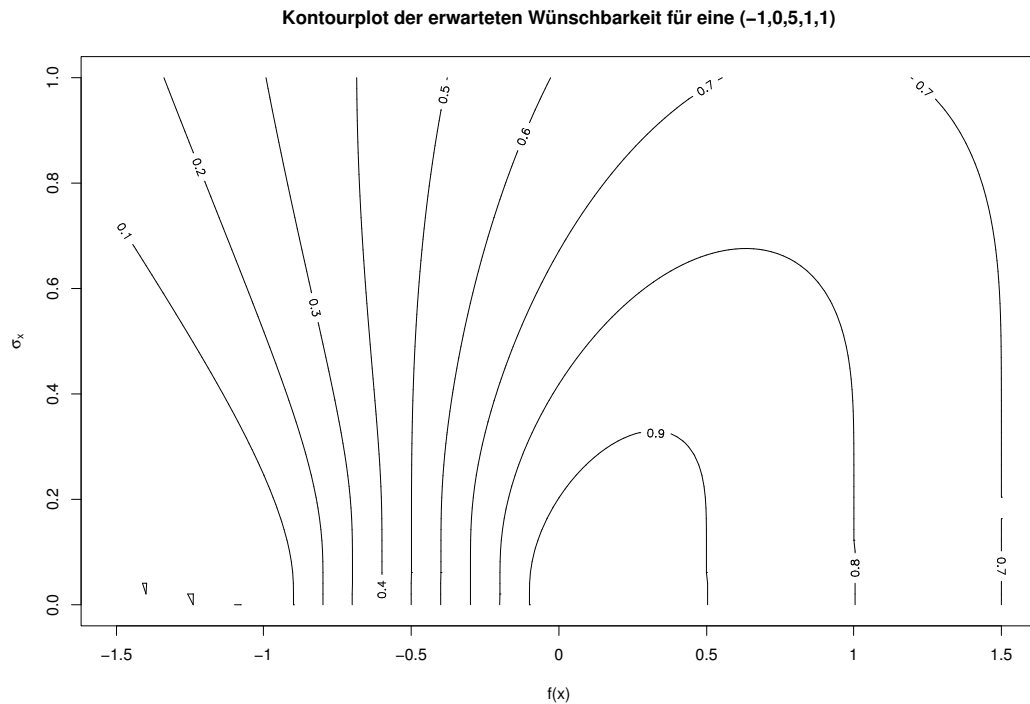
Abbildung 9.2 zeigt einen Konturplot der realistischen Wünschbarkeit  $d^r(x, \epsilon)$  für eine  $(-1, 0, 5, 1, 1)$  Funktion, abgetragen gegen verschiedene Werte für  $f(x)$  auf der  $x$ -Achse und den Modellfehler  $\sigma$  auf der  $y$ -Achse.

Wie man sehr gut erkennt, hängt die realistische Wünschbarkeit sowohl von  $f(x)$  als auch von  $\sigma$  ab, und es gibt einen *trade-off* zwischen diesen Größen.

Interessant an dieser Abbildung ist insbesondere die schöne Veranschaulichung des Umstandes, dass mit zunehmender Streuung  $\sigma$  der Wert für  $f(x)$ , welcher  $d^r(x, \epsilon)$  maximiert, sich immer weiter vom Sollwert entfernt.

Interpretieren lässt sich das dahingehend, dass ein wachsender Modellfehler schließlich die eigentliche Faktoreinstellung dominiert. Um den Erwartungswert zu maximieren, wird es dann sinnvoll, die maximale Verteilungsmasse der Fehlerverteilung im Spezifikationsintervall aufzufangen. Da außerdem die Fehlerverteilung als symmetrisch angenommen ist, verschiebt sich die optimale Einstellung für  $f(x)$  in Richtung auf die Mitte des Spezifikationsintervalls. Es wird für  $d^r(x, \epsilon)$  wichtiger,

Abbildung 9.2: Konturplot der erwarteten Wünschbarkeit  $E(d(Y))$  gegen  $f(x)$  und  $\sigma$



zufällig ein akzeptables Produkt zu erhalten als die eigentliche Faktoreinstellung zu optimieren.

Bei schrumpfenden signal-to-noise ratio  $(u - l)/\sigma$  hängt die optimale Einstellung immer weniger vom Abstand von  $f(x)$  vom Sollwert als vielmehr vom Abstand von  $f(x)$  von den Spezifikationsgrenzen ab.

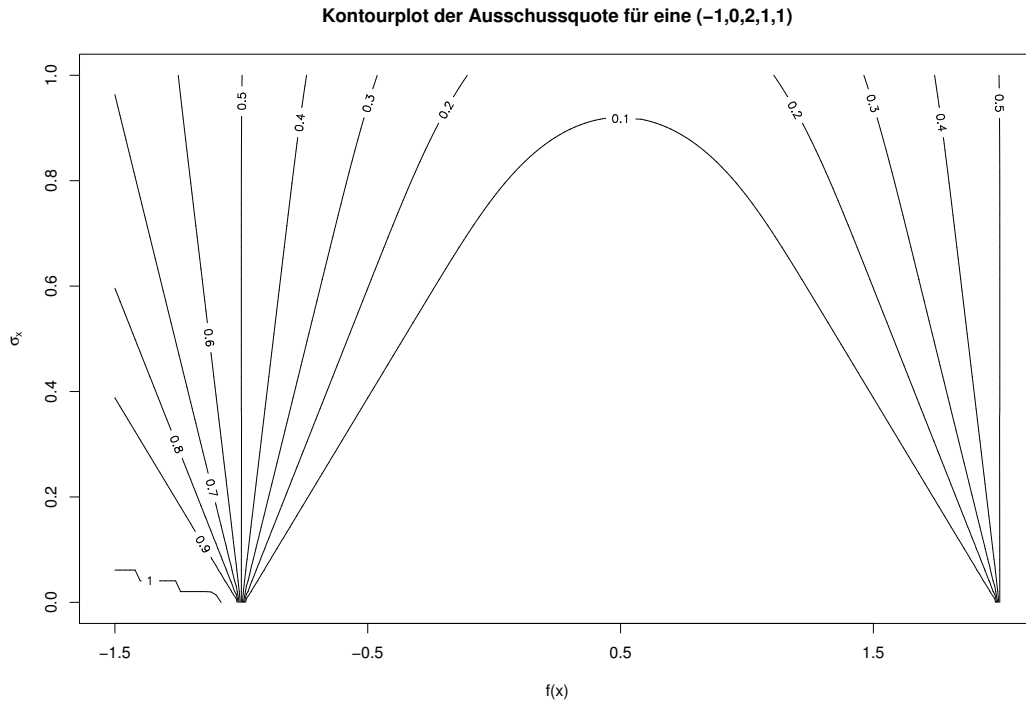
Schaut man sich die konkreten Werte für die erwartete Wünschbarkeit an, so muss man Harrington bemerkenswerten Weitblick bescheinigen. Seine Einteilung in Kapitel 5.2 lässt sich durchaus mittels der erzielbaren Werte für die realistischen Wünschbarkeiten stützen. Sie bieten deshalb für die Anwendung einen guten Anhaltspunkt zur Beurteilung eines Produktes, insbesondere im Zusammenhang mit den Ergebnissen aus 12.2 über das Skalieren des Verfahrens mit der Zahl der Zielgrößen.

Neben dem Erwartungswert wurde immer wieder die besondere Bedeutung der Ausschussquote betont.

In Abbildung 9.3 ist ein analoges Bild für die Ausschussquote für die ähnliche

## 9 Realistische Wünschbarkeiten

Abbildung 9.3: Konturplot der Ausschussquote  $p_0(x)$  gegen  $f(x)$  und  $\sigma$



Spezifikationen zu sehen. Hier ist gut zu erkennen, dass die Ausschussquote mit steigendem  $\sigma$  wächst, solange  $f(x)$  sich im Spezifikationsbereich befindet. In extremen Fällen, wenn  $f(x)$  gar nicht mehr innerhalb der Spezifikation liegt, sinkt die Ausschussquote sogar mit steigendem  $\sigma$ . Diese Beobachtung ist aber eher eine Kuriosität, da eine Einstellung außerhalb der Spezifikation in der Praxis nicht akzeptiert wird!

Wichtiger ist es zu sehen, dass die Ausschussquote in einem recht großen Teilbereich des Parameterraumes klein bleibt. Lediglich am Rand des Spezifikationsbereichs und für große Werte von  $\sigma$  steigt sie stark an.

Für die Ausschussquote erkennt man, dass lediglich der Abstand von  $f(x)$  vom Rand der Spezifikation wichtig ist, nicht jedoch die Nähe von  $f(x)$  zum Sollwert. Wählt man also die Ausschussquote als Entscheidungskriterium, so wird man stets versuchen,  $f(x)$  auf die Mitte des Spezifikationsintervalls einzustellen. Eventuell vergebene Gewichte spielen keine Rolle.

# 10 Verteilung verallgemeinerter Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

Da die verallgemeinerten Wünschbarkeiten später noch eine wichtige Rolle zu spielen haben, sind auch die Verteilungen für diese Klasse von Funktionen von Interesse. Auch in diesem und im nächsten Kapitel sei generell  $Y = f(x) + \epsilon$ ,  $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ , vorausgesetzt.

**Satz 10.1 (Verteilung verallgemeinerter Wünschbarkeitsfunktionen)** Gegeben sei eine verallgemeinerte Wünschbarkeitsfunktion

$$d := ((y_0, \dots, y_n), (d_0, \dots, d_n), (\beta_1, \dots, \beta_n)) \quad \text{mit} \quad \beta_i = 1 \text{ für alle } i,$$

gemäß Definition 5.19. Dann gilt für die Verteilungsfunktion  $F_{d(Y)}$ :

$$F_{d(Y)}(d) = \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ \Phi\left(\frac{y_0 - f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{y_n - f(x)}{\sigma}\right) + \\ \sum_{i: d_i, d_{i+1} \leq d} \left[ \Phi\left(\frac{y_{i+1} - f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_i - f(x)}{\sigma}\right) \right] + \\ \sum_{i: d_i < d \leq d_{i+1}} \left[ \Phi\left(\frac{y_i + \frac{d - d_i}{d_{i+1} - d_i}(y_{i+1} - y_i) - f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_i - f(x)}{\sigma}\right) \right] + \\ \sum_{i: d_{i+1} < d \leq d_i} \left[ \Phi\left(\frac{y_{i+1} - f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_{i+1} - \frac{d - d_{i+1}}{d_i - d_{i+1}}(y_{i+1} - y_i) - f(x)}{\sigma}\right) \right] \\ 1 & \text{für } 0 \leq d \leq 1; \\ & \text{für } d > 1. \end{cases}$$

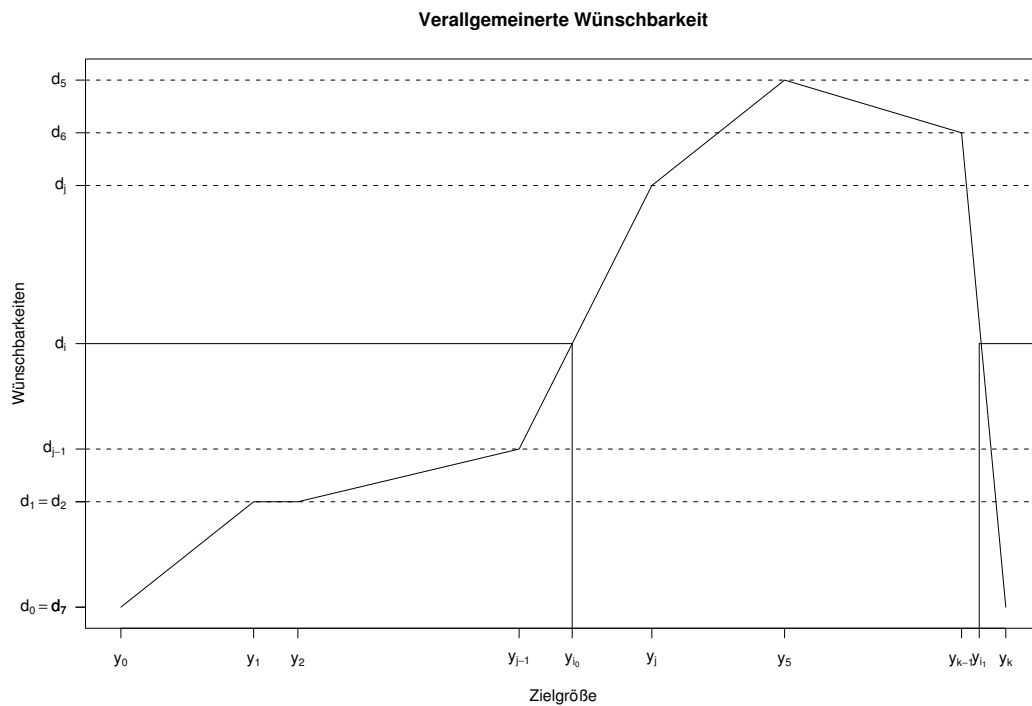
**Beweis:** Eine verallgemeinerte Wünschbarkeitsfunktion besteht aus Geradenabschnitten, welche sich in die vier Klassen partitionieren lassen, die sich in den Summanden wiederfinden. Hilfreich ist es, für die Motivation der gegebenen Klassifikation zunächst Skizze 10.1 zu Hilfe zu nehmen. Die Schnittpunkte einer Höhenlinie  $d$  sowie die Geradengleichungen lassen sich direkt ablesen oder durch elementare Rechnung herleiten.

Die Klassifikation der Geradenabschnitte geschieht wie folgt:

## 10 Verteilung verallgemeinerter Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

- Die Abschnitte ausserhalb der Spezifikation, also  $Y < y_0$  oder  $Y > y_n$ . Diesen Abschnitt könnte man auch der folgenden Gruppe zuschlagen, wegen seiner herausragenden Bedeutung als Angabe der Ausschussquote soll er aber gesondert genannt bleiben.
- Abschnitte, die komplett unterhalb von oder genau auf  $d$  liegen
- Abschnitte, die von unten nach oben die  $d$ -Linie kreuzen und
- Abschnitte, die von oben nach unten die  $d$ -Line kreuzen.

Abbildung 10.1: Skizze zum Beweis der Eigenschaften einer verallgemeinerten Wünschbarkeit



In der Abbildung 10.1 gilt

$$y_{i_0} = y_{j-1} + \frac{d_i - d_{j-1}}{d_j - d_{j-1}}(y_j - y_{j-1})$$

und

$$y_{i_1} = y_k - \frac{d_i - d_k}{d_{k-1} - d_k}(y_k - y_{k-1}),$$

wie man durch Ablesen der Geradengleichung direkt aus der Skizze entnehmen kann. Zwischen  $y_1$  und  $y_2$  ist die Wünschbarkeit konstant. Was nach der allgemeinen Definition auch möglich wäre, nämlich eine multimodale Festlegung der Wünschbarkeit, ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in der Skizze dargestellt. Im Falle der Multimodalität gibt es möglicherweise mehr als zwei Schnittpunkte mit der Geraden  $y \equiv d$ .

Der Wert  $F_{d(Y)}(d)$  ergibt sich somit als die Summe der Wahrscheinlichkeitsmassen, die auf die Geradenabschnitte unterhalb von  $d$  fallen. Geradenabschnitte, die komplett unterhalb von  $d$  liegen, gehen folglich ganz in die Berechnung ein, Geradenabschnitte, die von der Geraden  $y \equiv d$  geschnitten werden, verlaufen für steigende Geradenabschnitte von  $y_i$  bis zum Schnittpunkt, fallende Geradenabschnitte vom Schnittpunkt bis  $y_{i+1}$  ein. Die Schnittpunkte ergeben sich durch elementare Rechnung bzw. lassen sich direkt aus der Skizze 10.1 ablesen.  $\square$

**Satz 10.2 (Dichte einer verallgemeinerten Wünschbarkeit)** Die Voraussetzungen seien wie in Satz 10.1. Dann gilt für die Dichte  $f_{d(Y)}(d)$  mit  $d \in [0, 1]$ :

$$f_{d(Y)}(d) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{y_0-f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{y_n-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ \sum_{i:d_i=d_{i+1}=d} \left[ \Phi\left(\frac{y_{i+1}-f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_i-f(x)}{\sigma}\right) \right] & \text{für jedes Paar } d_i = d_{i+1} = d; \\ \sum_{i:d_i < d \leq d_{i+1}} \frac{y_{i+1}-y_i}{d_{i+1}-d_i} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y_i + \frac{d-d_i}{d_{i+1}-d_i}(y_{i+1}-y_i) - f(x)}{\sigma}\right) + \\ \sum_{i:d_{i+1} < d \leq d_i} \frac{y_{i+1}-y_i}{d_i-d_{i+1}} \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y_{i+1} - \frac{d-d_i}{d_{i+1}-d_i}(y_{i+1}-y_i) - f(x)}{\sigma}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte hat für jeden konstanten Geradenabschnitt ein Punktgewicht auf dem jeweiligen Wünschbarkeitswert. Außerhalb dieser Punktgewichte ist die Dichte jeweils eine Summe von verschiedenen Normalverteilungen.

**Beweis:** Die konstanten Geradenabschnitte führen zu den Punktgewichten, die sich direkt als entsprechende Intervallwahrscheinlichkeiten der jeweiligen Normalverteilungen berechnen. Außerhalb dieser Punkte positiver Wahrscheinlichkeit ergibt sich die Dichte durch Differentiation der Verteilungsfunktion.  $\square$

Auch den Erwartungswert einer solchen verallgemeinerten Wünschbarkeit kann man noch angeben, wenn man die Erkenntnisse aus dem Spezialfall in Satz 8.14 verwendet. Wieder treten im Wesentlichen gestutzte Normalverteilungen auf.

**Satz 10.3 (Erwartungswert einer verallgemeinerten Wünschbarkeit)** Gegeben sei wiederum eine verallgemeinerte Wünschbarkeit, wie in 10.1. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 E(d^v(Y)) &= \sum_{i:d_{i-1}=d_i} d_i \cdot [\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_i) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{i-1})] \\
 &+ \sum_{j:d_{j-1}<d_j} \left\{ \left( d_{j-1} + \frac{d_j - d_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(y_{j-1}) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(y_j)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{j-1})} - y_{j-1} \right] \right) \right. \\
 &\quad \left. \times [\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{j-1})] \right\} \\
 &+ \sum_{k:d_{k-1}>d_k} \left\{ \left( d_k + \frac{d_{k-1} - d_k}{y_k - y_{k-1}} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(y_{k-1}) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(y_k)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{k-1})} + y_k \right] \right) \right. \\
 &\quad \left. \times [\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{k-1})] \right\}
 \end{aligned}$$

**Beweis:** Die stückweise konstanten Abschnitte, also die Abschnitte  $i : d_{i-1} = d_i$ , der Funktionen werden im Beweis gesondert behandelt.

$$\begin{aligned}
 E(d^v(Y)) &= \sum_{i:d_{i-1}=d_i} d_i \cdot P(Y \in [y_{i-1}, y_i]) \\
 &+ \underbrace{\sum_{j:d_{j-1}<d_j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[ d_{j-1} + (d_j - d_{j-1}) \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right] \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy}_{=: A} \\
 &+ \underbrace{\sum_{k:d_{k-1}>d_k} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left[ d_k + (d_{k-1} - d_k) \frac{y_k - y}{y_k - y_{k-1}} \right] \varphi_{f(x),\sigma^2}(y) dy}_{=: B} \\
 &= \sum_{i:d_{i-1}=d_i} d_i \cdot [\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_i) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y)] + A + B
 \end{aligned}$$



Betrachte zunächst  $A$ :

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{j:d_{j-1} < d_j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[ d_{j-1} + (d_j - d_{j-1}) \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right] \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy \\
&= \sum_{j:d_{j-1} < d_j} \left\{ \left( d_j - y_{j-1} \frac{d_j - d_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right) \int_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy + \right. \\
&\quad \left. \frac{d_j - d_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} [\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1})] \underbrace{\int_{y_{j-1}}^{y_j} y \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(y)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1})} dy}_{\text{E-Wert einer } N(y_{j-1}, y_j, f(x), \sigma^2)} \right\} \\
&= \sum_{j:d_{j-1} < d_j} \left\{ \left( d_j - y_{j-1} \frac{d_j - d_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right) [\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1})] + \right. \\
&\quad \left. \frac{d_j - d_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} [\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1})] \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1}) - \varphi_{f(x), \sigma^2}(y_j)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1})} \right] \right\} \\
&= \sum_{j:d_{j-1} < d_j} \left\{ \left( d_j + \frac{d_j - d_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1}) - \varphi_{f(x), \sigma^2}(y_j)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1})} - y_{j-1} \right] \right) \right. \\
&\quad \left. \times [\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{j-1})] \right\}
\end{aligned}$$

Dann folgt mit analoger Rechnung für  $B$ :

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{k:d_{k-1} > d_k} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left[ d_k + (d_{k-1} - d_k) \frac{y_k - y}{y_k - y_{k-1}} \right] \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy \\
&= \sum_{k:d_{k-1} > d_k} \left\{ \left( d_k + y_k \frac{d_{k-1} - d_k}{y_k - y_{k-1}} \right) \int_{y_{k-1}}^{y_k} \varphi_{f(x), \sigma^2}(y) dy + \right. \\
&\quad \left. \frac{d_{k-1} - d_k}{y_k - y_{k-1}} [\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{k-1})] \underbrace{\int_{y_{k-1}}^{y_k} y \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(y)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{k-1})} dy}_{\text{E-Wert einer } N(y_{k-1}, y_k, f(x), \sigma^2)} \right\} \\
&= \sum_{k:d_{k-1} > d_k} \left\{ \left( d_k + \frac{d_{k-1} - d_k}{y_k - y_{k-1}} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(y_{k-1}) - \varphi_{f(x), \sigma^2}(y_k)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{k-1})} + y_k \right] \right) \right. \\
&\quad \left. \times [\Phi_{f(x), \sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(y_{k-1})] \right\}
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 10.4** Im Wesentlichen ergibt sich der Erwartungswert also als gewichtete Summe von Erwartungswerten von gestutzten Normalverteilungen, jeweils gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Intervalle. Es

## 10 Verteilung verallgemeinerter Wünschbarkeiten als Funktion von $x$

ist im Prinzip möglich, auch die Varianz einer verallgemeinerten Wünschbarkeit zu berechnen. Die Ausdrücke werden lediglich unhandlich, jedoch nicht mathematisch schwierig zu behandeln. Da die Varianz in dieser Arbeit im Folgenden nicht mehr benötigt wird, wird auch auf ihre Herleitung verzichtet.

**Bemerkung 10.5** Durch die Herleitung der Verteilungsfunktion und davon abgeleiteter Größen für diesen sehr allgemeinen Fall werden die Ergebnisse in Kapitel 8 zu Spezialfällen der hier gegebenen Formeln. Da sie jedoch „griffiger“ sind und die gebräuchlichsten Fälle abdecken, behalten sie ihre eigenständige Bedeutung und sind deshalb auch gesondert aufgeführt.

# 11 Ergebnisse für Exponenten

## $\beta \neq 1$

Erinnert man sich an den Grund, warum Derringer-Suich ihre Variante der Wünschbarkeiten eingeführt haben, sowie an eine der Anforderungen an ein gutes MCO-Verfahren, nämlich die Fähigkeit, unterschiedliche Gewichte für verschiedene Zielgrößen und verschiedene Arten der Abweichung zu vergeben, so muss man festhalten, dass noch nicht allzu viel gewonnen ist, wenn für den Fall  $\beta_i = 1$  für alle  $i$  die Verteilungen angegeben werden können.

Leider lassen sich die hier genutzten Berechnungsverfahren nicht auf den Fall anderer Exponenten übertragen, da durch das Exponentieren die Fehlerverteilung der Wünschbarkeiten nicht mehr einfach anzugeben ist.

Um zu zeigen, wie sich die Vergabe anderer Gewichte auf die Verteilungsfunktion auswirkt, sei hier noch einmal die bereits in Abbildung 8.3 als Beispiel gegebene  $(-1, 0, 3, \beta_l, \beta_r)$  Wünschbarkeit genutzt. In Abbildung 11.1 wird in der oberen Grafik ein Beispiel für  $\beta_i > 1$  gezeigt, in der unteren für  $\beta_i < 1, i = 1, 2$ .

Vergleicht man die Kurven in Abbildung 11.1 mit den Kurven in Abbildung 8.4, so ist leicht vorstellbar, dass mehr oder weniger jede Verteilung auf dem Intervall  $[0, 1]$  als Verteilung der Wünschbarkeit an einer Stelle  $f(x)$  möglich ist.

Für die Anwendung bedeutet dies, dass im Optimierungsschritt alle Wünschbarkeiten mit Gewichten  $\beta \neq 1$  mit dem in Bemerkung 8.7 geschilderten Problemen und dem damit verbundenen, rechentechnischen Aufwand simuliert werden müssen.

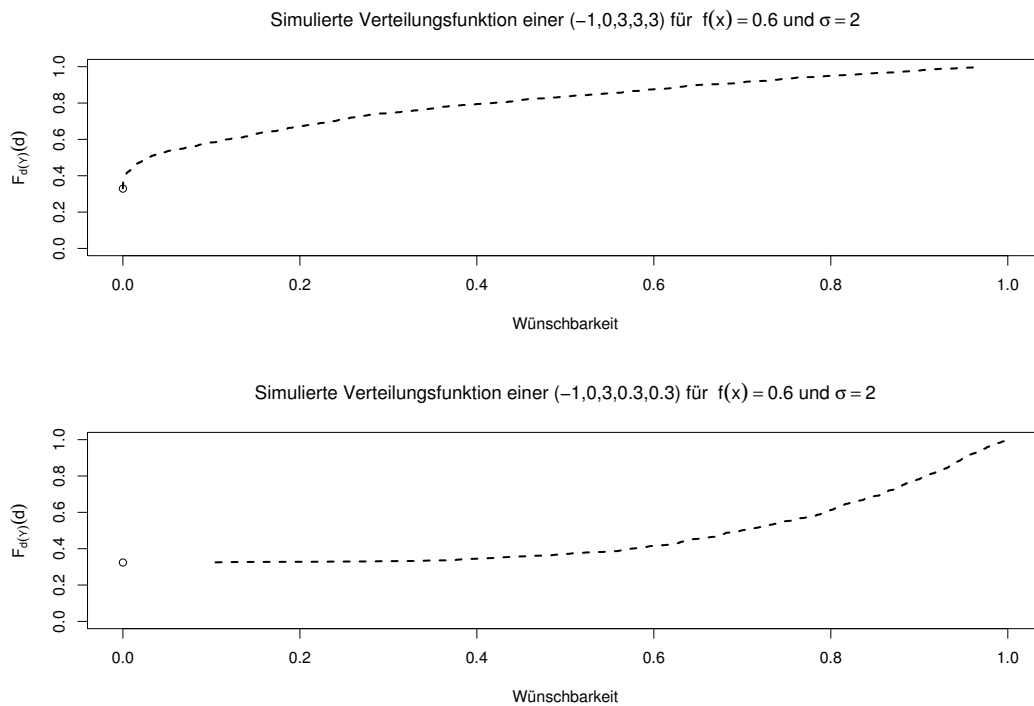
**Bemerkung 11.1** Eine interessante Beobachtung ist, dass die Ausschussquote  $p_0(x)$  von der Wahl der Exponenten unabhängig ist, da durch die Wahl des Exponenten nicht die Wahrscheinlichkeit  $P(d(Y) = 0)$  verändert wird!

Es folgt nach Meinung des Autors direkt, dass die Ausschussquote als alleiniges Merkmal zur Unterscheidung von Objekten bzw. Faktoreinstellungen nicht ausreicht. Die Wahl dieses einzelnen Kriteriums bedeutet unter anderem, dass eben genau der Vorteil der Derringer-Suich-Funktionen, nämlich die Möglichkeit, unterschiedliche Gewichte zu vergeben, nicht ausgenutzt wird!

Mit Hilfe spezieller Formen der verallgemeinerten Wünschbarkeiten aus Definition 5.19 ist es jedoch möglich, diesen Schritt mittels der im nächsten Kapitel

## 11 Ergebnisse für Exponenten $\beta \neq 1$

Abbildung 11.1: Beispiel für die Verteilungsfunktion einer Wünschbarkeit für Exponenten  $\beta_i$  größer 1 ((-1, 0, 3, 3, 3) Wünschbarkeit) und Exponenten  $\beta_i$  kleiner 1 ((-1, 0, 3, 0.3, 0.3) Wünschbarkeit)



vorgestellten Approximation zu entschärfen.

### 11.1 Verbesserte Version der Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktionen

In den vorstehenden Kapiteln wurde ausgeführt, dass für Gewichte  $\beta_l, \beta_r \neq 1$  die Verteilungen der Wünschbarkeitsfunktionen lediglich durch Simulationen gewonnen werden können. Dabei wurde auf die Probleme der Optimierung von durch Simulationen gewonnenen Schätzungen hingewiesen. Andererseits sind im Kapitel 8 auch die Verteilungsfunktionen für einige Grenzfälle der Derringer-Suich-Funktionen hergeleitet worden. Um die Möglichkeiten zu erweitern und auch den Fall  $\beta \neq 1$  ohne Simulationen behandeln zu können, werden modifizierte Wünschbarkeitsfunktionen vorgeschlagen, die dazu genutzt werden können, die Fälle mit  $\beta_l, \beta_r \neq 1$  geeignet zu approximieren und auf Fälle mit linearer Gewichtung zu-

rückzuführen. Diese Modifikationen sollen *einfach linearisierte (Derringer-Suich) Wünschbarkeitsfunktion* bzw. *zweifach linearisierte (Derringer-Suich) Wünschbarkeitsfunktion* genannt werden.

## 11.2 Approximationsidee

Der Approximation liegt die Idee zu Grunde, dass zur Spezifikation der Wünschbarkeiten durch den Anwender weiterhin die Derringer-Suich Funktionen als optisches Hilfsmittel genutzt werden. Für alle Rechnungen wird intern jedoch eine Funktion verwendet, die auf optimale Weise den Verlauf der spezifizierten Funktion approximiert.

## 11.3 Linearisierte Wünschbarkeiten

Für die einfach linearisierten Funktionen geschieht dies durch eine Verschiebung der Spezifikationsgrenzen.

Ist ein Gewicht  $\beta > 1$  spezifiziert, so wird die Spezifikationsgrenze auf den Sollwert zu bewegt, so dass das Integral über den quadrierten Abstand von spezifizierter und interner Funktion minimiert wird. Es sind mit diesem Verfahren gute Approximationen deshalb möglich, weil die Funktionsäste in den Derringer-Suich Funktionen keine Extrema besitzen und über einen weiten Teil ihres Definitionsbereichs einen linearen Verlauf nehmen. Für Gewichte  $\beta < 1$  werden entsprechend Bereiche von konstanter Wünschbarkeit 1 im Bereich des Zielwertes hinzugefügt. In Abbildung 11.2 ist ein Beispiel für die linearisierten Funktionen gezeigt, in der folgenden Definition 11.2 wird die Idee formalisiert.

**Definition 11.2 (einfach linearisierte Wünschbarkeitsfunktion)** Gegeben sei zunächst eine Wünschbarkeitsfunktion  $(l, t, \infty, \beta_l, 1)$ . Definiere nun

$$(l, t, \infty, \beta_l, 1)_{lin} := \begin{cases} (l, t, \infty, \beta_l, \beta_r) & \text{für } \beta_l = 1; \\ (l + c^*, t, \infty, 1, 1) & \text{für } \beta_l > 1; \\ (l, t - c^{**}, \infty, 1, 1) & \text{für } \beta_l < 1. \end{cases}$$

Dabei sind  $c^*$  und  $c^{**}$  so gewählt, dass jeweils gilt:

$$c^* (\text{bzw. } c^{**}) \text{ löst } \min_{c^* (\text{bzw. } c^{**}) \in [0, t-l]} \int_l^t ((l, t, \infty, \beta_l, 1) - (l, t, \infty, \beta_l, 1)_{lin})^2 dx$$

Sollwertprobleme vom Typ  $(l, t, u, \beta_l, \beta_r)$  werden zunächst in zwei Teilprobleme zerlegt:

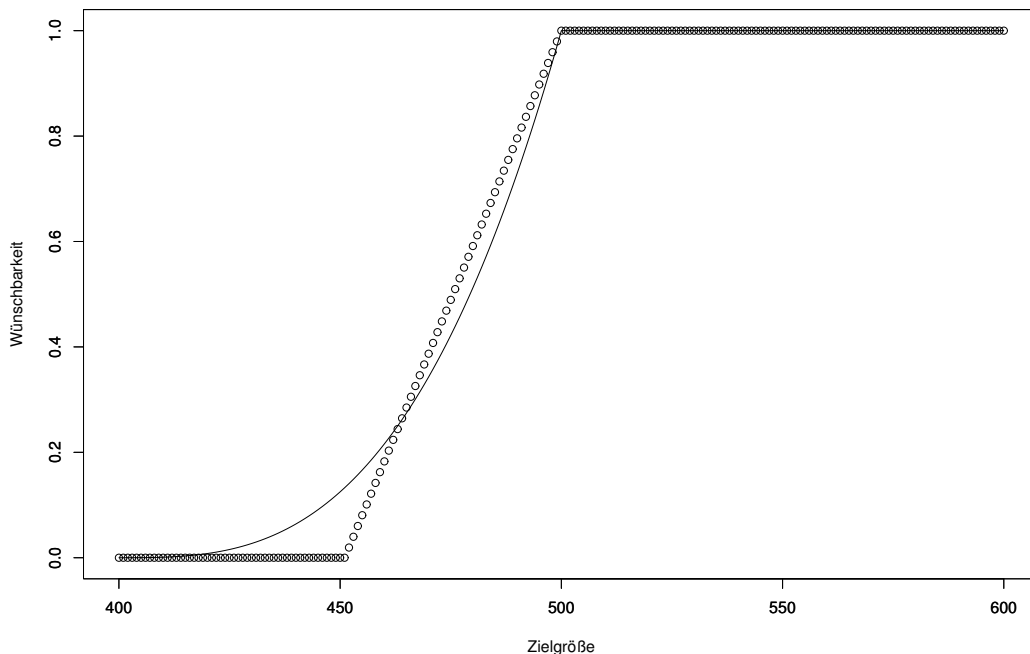
$$(l, t, u, \beta_l, \beta_r) = \begin{cases} (l, t, \infty, \beta_l, 1)(x) & \text{für } x \leq t; \\ (-u, -t, \infty, \beta_r, 1)(-x) & \text{für } t < x. \end{cases}$$

## 11 Ergebnisse für Exponenten $\beta \neq 1$

Definiere nun

$$(l, t, u, \beta_l, \beta_r)_{lin} = \begin{cases} (l, t, \infty, \beta_l, 1)_{lin}(x) & \text{für } x \leq t; \\ (-u, -t, \infty, \beta_r, 1)_{lin}(-x) & \text{für } t < x. \end{cases}$$

Abbildung 11.2: Linearisierte Wünschbarkeitsfunktion (durchgezogene Linie) und zugehörige spezifizierte  $(400, 500, \infty, 3, 1)$ -Funktion (gepunktete Linie)



Die quadratische Abweichung wird als Optimierungsziel genommen, um qualitativ „nah“ an der spezifizierten Kurve zu bleiben. Große Abweichungen, welche in der Tendenz natürlich auch eher zu Veränderungen der Verteilungsfunktionen, die schlussendlich ja angenähert werden sollen, führen würden, werden so vermieden.

Zwar sind  $c^*$  (bzw.  $c^{**}$ ) für beliebige  $\beta$  nicht analytisch zu berechnen, aber sie lassen sich numerisch gut bestimmen.

Ist die Güte der Approximation für einen konkreten Fall nicht ausreichend, so wird im folgenden Kapitel ein einfacher Weg zur weiteren Verbesserung der Approximation aufgezeigt.

**Bemerkung 11.3** Die Wahl des quadrierten Abstandes führt zu einer universell guten Approximation über den ganzen Verlauf der Kurve. Es kann aber durchaus sinnvoll sein, abhängig von der Problemstellung andere Optimalitätskriterien anzulegen. Beispielsweise könnte es für die Anwendung der Wünschbarkeiten im Bereich der Kontrollkarten sinnvoll sein, 95%-Quantile optimal anzunähern.

Da unabhängig von der Wahl des Kriteriums die Approximation nur einmal je Wünschbarkeit durchgeführt werden muss, werden der Anwendung der Wünschbarkeiten hier ganz neue Felder erschlossen!

Für den (*LB*)-Fall und im (*TV*)-Fall mit verstärkender Gewichtung, also  $\beta_{i,r} > 1$ , wird durch die Approximation im Wesentlichen der Spezifikationsbereich für die internen Berechnungen angepasst. In diesen Fällen können für die Verteilungen, Dichten etc. die Ergebnisse aus Kap 8 genutzt werden, um die Verteilungen der approximierenden Wünschbarkeiten anzugeben.

Im (*TV*)-Fall bei abschwächender Gewichtung ( $\beta_i < 1$  für mindestens ein  $i$ ) bekommen die approximierenden Funktionen eine bisher noch nicht betrachtete Struktur. Im Bereich des Sollwertes geschieht die Approximation durch ein Plateau mit konstanter Wünschbarkeit 1. Abbildung 11.3 zeigt einen solchen Fall.

Um die Verteilung einer solchen Wünschbarkeit mit Plateau zu berechnen, wird folgende Definition genutzt:

**Definition 11.4 (6-parametrische Wünschbarkeitsfunktion)** Die Funktion

$$(l, t_1, t_2, u, \beta_1, \beta_2)(y) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

mit

$$l < t_1 \leq t_2 < u \text{ alle aus } \mathbb{R}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$$

sei definiert als

$$(l, t_1, t_2, u, \beta_1, \beta_2)(y) := \begin{cases} (l, t_1, \infty, \beta_1, 1)(y) & \text{für } y < t_1; \\ 1 & \text{für } t_1 \leq y \leq t_2; \\ (-u, -t_2, \infty, \beta_2, 1)(-y) & \text{für } t_2 < y. \end{cases}$$

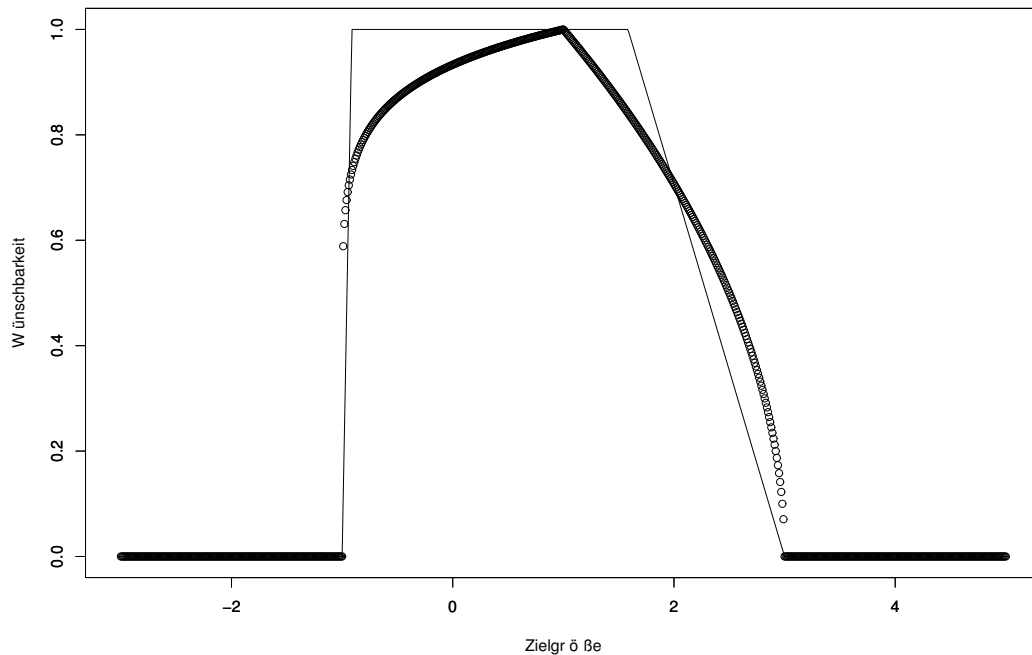
und heißt 6-parametrische Wünschbarkeitsfunktion.

Die 6-parametrischen Wünschbarkeitsfunktionen dienen nur als Hilfsmittel für die folgenden Berechnungen zur Vereinfachung der Schreibweise und erlangen ansonsten keinen eigenständige Bedeutung.

**Bemerkung 11.5** Diese 6-parametrischen Wünschbarkeiten sind ebenfalls Spezialfälle der in Definition 5.19 definierten Wünschbarkeiten. Setze nämlich dort  $y = (l, t_1, t_2, u)$ ,  $d = (0, 1, 1, 0)$  und  $\beta = (\beta_1, 1, \beta_2)$ .

## 11 Ergebnisse für Exponenten $\beta \neq 1$

Abbildung 11.3: Linearisierte Wünschbarkeitsfunktion (durchgezogene Linie) und zugehörige spezifizierte  $(-1, 1, 3, 0.1, 0.5)$ -Funktion (gepunktete Linie)



Über die Verteilung einer 6-parametrigen Wünschbarkeit lassen sich nun folgende Aussagen treffen:

**Satz 11.6 (Verteilung einer  $(l, t_1, t_2, u, 1, 1)$  Wünschbarkeit)** Gegeben sei eine  $(l, t_1, t_2, u, 1, 1)$  Wünschbarkeit  $d$ . Dann gilt für die Verteilung

$$F_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} 0 & \text{für } d < 0; \\ \Phi\left(\frac{l + d \cdot (t_1 - l) - f(x)}{\sigma}\right) + \\ \quad 1 - \Phi\left(\frac{u - d \cdot (u - t_2) - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d \in [0, 1]; \\ 1 & \text{für } d \geq 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Nach Bemerkung 11.5 handelt es sich um einen Spezialfall der Verteilung verallgemeinerter Wünschbarkeitsfunktionen aus Satz 10.1. Die Behauptung ergibt sich durch Einsetzen von  $y = (l, t_1, t_2, u)$ ,  $d = (0, 1, 1, 0)$  und  $\beta = (1, 1, 1)$



in das dortige Ergebnis. □

Entsprechend gilt für die Dichte der folgende

**Satz 11.7** Für die Dichte einer solchen Wünschbarkeit  $d$  unter den Voraussetzungen des Satzes 10.1 gilt:

$$f_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{l-f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{u-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ \frac{t_1-l}{\sigma} \varphi\left(\frac{l+d \cdot (t_1-l)-f(x)}{\sigma}\right) + \frac{u-t_2}{\sigma} \varphi\left(\frac{u-d \cdot (u-t_2)-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d \in (0, 1); \\ \Phi\left(\frac{t_2-f(x)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t_1-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Ergibt sich wiederum durch Einsetzen in das Ergebnis für verallgemeinerte Wünschbarkeiten in Satz 10.2. □

Schließlich sei auch der Erwartungswert noch angegeben:

**Satz 11.8** Für den Erwartungswert einer solchen Wünschbarkeit  $d$  gilt:

$$\begin{aligned} E(d(x, \epsilon)) &= \Phi_{f(x), \sigma^2}(t_2) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(t_1) \\ &+ \frac{1}{t_1 - l} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(l) - \varphi_{f(x), \sigma^2}(t_1)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(t_1) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)} \right] [\Phi_{f(x), \sigma^2}(t_1) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(l)] \\ &+ \frac{1}{u - t_2} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x), \sigma^2}(t_2) - \varphi_{f(x), \sigma^2}(u)}{\Phi_{f(x), \sigma^2}(u) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(t_2)} \right] [\Phi_{f(x), \sigma^2}(u) - \Phi_{f(x), \sigma^2}(t_2)] \end{aligned}$$

**Beweis:** Wiederum durch Einsetzen in den entsprechenden Satz 10.3 für verallgemeinerte Wünschbarkeiten. □

**Bemerkung 11.9** Durch die Approximation mit einfach linearisierten Wünschbarkeiten wird die Ausschussquote der anzunähernden Verteilung verändert, wenn verstärkende Gewichte spezifiziert wurden! Dies ist unmittelbar klar, wenn man sieht, dass die Ausschussquote lediglich vom Spezifikationsbereich abhängt, dieser jedoch im angeführten Falle geändert wird.

Um eine bessere Approximation an die spezifizierte Wünschbarkeitsfunktion zu erreichen und zugleich auch die Plateaubildung bei der intern genutzten Funktion zu vermeiden, ist auch ein Ansatz mit einer etwas aufwändigeren Optimierung möglich:

## 11 Ergebnisse für Exponenten $\beta \neq 1$

**Definition 11.10 (Zweifach linearisierte Wünschbarkeitsfunktion)** Gegeben sei zunächst eine Wünschbarkeitsfunktion  $(l, t, \infty, \beta_l, 1)$  mit  $\beta_l \neq 1$ . Definiere nun

$$(l, t, \infty, \beta_l, 1)_{2-lin} := ((l, y^*, t, \infty), (0, d^*, 1, 1), (1, 1, 1))$$

Auf der rechten Seite steht dabei eine verallgemeinerte Derringer-Suich Wünschbarkeit wie in Definition 5.19. Dabei sind  $y^*$  und  $d^*$  so gewählt, dass gilt:

$$(y^*, d^*) \text{ löst } \min_{(y^*, d^*) \in [l, t] \times [0, 1]} \int_l^t ((l, t, \infty, \beta_l, 1) - (l, t, \infty, \beta_l, 1)_{2-lin})^2 dx.$$

Für  $\beta_l = 1$  sei  $(l, t, \infty, 1, 1)_{2-lin} := (l, t, \infty, 1, 1)$ .

Sollwertprobleme vom Typ  $(l, t, u, \beta_l, \beta_r)$  werden, wie im einfach linearisierten Fall, zunächst in zwei Teilprobleme zerlegt:

$$(l, t, u, \beta_l, \beta_r) = \begin{cases} (l, t, \infty, \beta_l, 1)(x) & \text{für } x \leq t; \\ (-u, -t, \infty, \beta_r, 1)(-x) & \text{für } t < x. \end{cases}$$

Definiere nun

$$(l, t, u, \beta_l, \beta_r)_{2-lin} = \begin{cases} (l, t, \infty, \beta_l, 1)_{2-lin}(x) & \text{für } x \leq t; \\ (-u, -t, \infty, \beta_r, 1)_{2-lin}(-x) & \text{für } t < x. \end{cases}$$

Um Fallunterscheidungen in den folgenden Beweisen soweit als möglich zu vermeiden, sei nochmal auf Lemma 5.13 verwiesen, welches aussagt, dass für ein gegebenes Sollwertproblem  $(l, t, u, \beta_l, \beta_r)$  oBdA davon ausgegangen werden kann, dass  $\beta_l \leq \beta_r$  gilt.

Intern geht man also für ein Sollwertproblem  $(l, t, u, \beta_1, \beta_2)$  zu einer verallgemeinerten Derringer-Suich-Wünschbarkeit des Typs

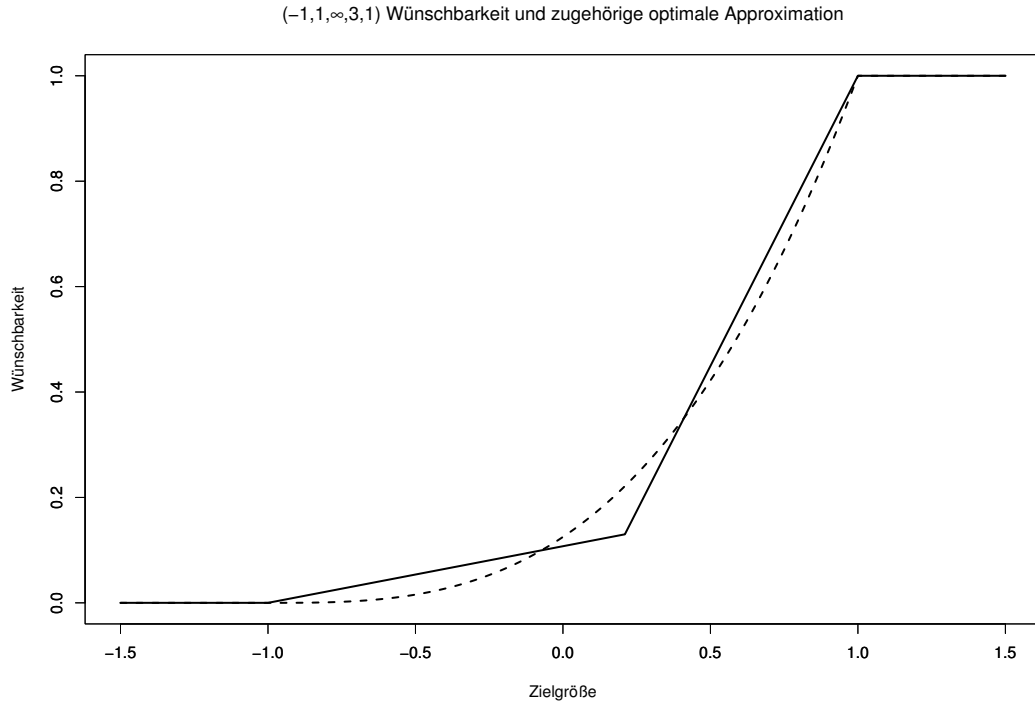
$$((l, y^*, t, y^{**}, u), (0, d^*, 1, d^{**}, 0), (1, 1, 1, 1))$$

über, wobei  $(y^*, d^*)$  sowie  $(y^{**}, d^{**})$  durch die Lösungen der Optimierungen in der Definition 11.10 für das Maximierungsproblem für den linken bzw. rechten Zweig sind.

Auch für diesen Spezialfall sollen die Verteilung und einige abgeleitete Größen angegeben werden. Die Beweise ergeben sich jeweils, wie in den Sätzen zur einfach linearisierten Wünschbarkeit, durch Einsetzen der entsprechenden Parameter in die allgemeinen Formeln aus Kapitel 8. Sie werden hier nicht nochmal ausgeführt. Ausformuliert werden diese Spezialfälle hier lediglich, da sie in Simulationen benötigt werden, nicht aber der ganz allgemeine Fall.

Zunächst betrachtet man die Verteilung einer zweifach linearisierten Funktion.

Abbildung 11.4: Zweifach linearisierte Wünschbarkeitsfunktion und zugehörige spezifizierte Funktion



**Satz 11.11 (Verteilung einer zweifach linearisierten Wünschbarkeit)** Gegeben sei eine verallgemeinerte Derringer-Suich-Wünschbarkeit

$$d := ((l, y_1, t, y_2, u), (0, d_1, 1, d_2, 0), (1, 1, 1, 1)),$$

wie sie nach dem Optimierungsschritt in der obigen Definition entsteht mit oBdA  $d_1 \leq d_2$ . Dann gilt für die Verteilungsfunktion

$$F_{d(x,\epsilon)}(d) := \begin{cases} P(Y \leq l + \frac{d}{d_1}(y_1 - l)) + P(Y > u - \frac{d}{d_2}(u - y_2)) & \text{für } 0 \leq d \leq d_1; \\ P(Y \leq y_1 + \frac{d-d_1}{1-d_1}(t - y_1)) + P(Y > u - \frac{d}{d_2}(u - y_2)) & \text{für } d_1 < d \leq d_2; \\ P(Y \leq y_1 + \frac{d-d_1}{1-d_1}(t - y_1)) + P(Y > y_2 - \frac{d-d_2}{1-d_2}(y_2 - t)) & \text{für } d_2 < d \leq 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Phi\left(\frac{l + \frac{d}{d_1}(y_1 - l) - f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{u - \frac{d}{d_2}(u - y_2) - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } 0 \leq d \leq d_1; \\ \Phi\left(\frac{y_1 + \frac{d-d_1}{1-d_1}(t - y_1) - f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{u - \frac{d}{d_2}(u - y_2) - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d_1 < d \leq d_2; \\ \Phi\left(\frac{y_1 + \frac{d-d_1}{1-d_1}(t - y_1) - f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{y_2 - \frac{d-d_2}{1-d_2}(y_2 - t) - f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d_2 < d \leq 1. \end{cases}$$

11 Ergebnisse für Exponenten  $\beta \neq 1$

**Beweis:** Erfolgt durch Einsetzen in Satz 10.1. □

**Satz 11.12 (Dichte einer zweifach linearisierten Wünschbarkeitsfunktion)**

Gegeben sei eine zweifach linearisierte Wünschbarkeitsfunktion  $d$  wie im vorhergehenden Satz 11.11. Dann ergibt sich die Dichte als

$$f_{d(x,\epsilon)}(d) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{l-f(x)}{\sigma}\right) + 1 - \varphi\left(\frac{u-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d = 0; \\ \frac{y_1-l}{d_1\sigma} \varphi\left(\frac{y_1+\frac{d-d_1}{1-d_1}(t-y_1)-f(x)}{\sigma}\right) + \frac{u-y_2}{d_2\sigma} \varphi\left(\frac{u-\frac{d}{d_2}(u-y_2)-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } 0 < d \leq d_1; \\ \frac{t-y_1}{(1-d_1)\sigma} \varphi\left(\frac{y_1+\frac{d-d_1}{1-d_1}(t-y_1)-f(x)}{\sigma}\right) + \frac{u-y_2}{d_2\sigma} \varphi\left(\frac{u-\frac{d}{d_2}(u-y_2)-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d_1 < d \leq d_2; \\ \frac{t-y_1}{(1-d_1)\sigma} \varphi\left(\frac{y_1+\frac{d-d_1}{1-d_1}(t-y_1)-f(x)}{\sigma}\right) + \frac{y_2-t}{(1-d_2)\sigma} \varphi\left(\frac{y_2-\frac{d-d_2}{1-d_2}(y_2-t)-f(x)}{\sigma}\right) & \text{für } d_2 < d \leq 1. \end{cases}$$

**Beweis:** Durch Einsetzen in die allgemeine Formel aus Satz 10.2. □

Bleibt noch für den Erwartungswert der folgende

**Satz 11.13 (Erwartungswert einer zweifach linearisierten Wünschbarkeit)**

Gegeben sei eine zweifach linearisierte Wünschbarkeitsfunktion  $d$  wie im Satz 11.11. Dann ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(d(x, \epsilon)) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \left( d_{j-1} + \frac{d_j - d_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(y_{j-1}) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(y_j)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{j-1})} - y_{j-1} \right] \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_j) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{j-1}) \right] \right\} \\ &\quad + \sum_{k=3}^4 \left\{ \left( d_k + \frac{d_{k-1} - d_k}{y_k - y_{k-1}} \left[ f(x) + \sigma^2 \frac{\varphi_{f(x),\sigma^2}(y_{k-1}) - \varphi_{f(x),\sigma^2}(y_k)}{\Phi_{f(x),\sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{k-1})} + y_k \right] \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_k) - \Phi_{f(x),\sigma^2}(y_{k-1}) \right] \right\} \end{aligned}$$

**Beweis** Wiederum durch Einsetzen in die allgemeine Formel aus Satz 10.3. □

Auf die Angabe der Verteilungseigenschaften für zweifach-linearisierte Wünschbarkeiten vom (*LB*)-Typ wird hier verzichtet. Durch Einsetzen in die allgemeine Form sind diese entsprechend leicht herzuleiten.

## 11.4 Güte der Approximationen

In diesem Abschnitt wird der Fehler untersucht, der durch die Approximation der spezifizierten Wünschbarkeiten erzeugt wird. Dazu wird für beide Arten der Approximation für einen weiten Wertebereich von Exponenten  $\beta_i$  der optimale Ergänzungsknoten berechnet und der integrierte quadratische Abstand zwischen spezifizierter  $(-1, 1, \infty, \beta, 1)$  und approximierender Funktion ermittelt.

Die Approximation erfolgt numerisch mittels der **R** Standard-Routinen *optimise* für die einfache Linearisierung und *optim* im zweifach linearisierten Fall.

Beide Optimierungs-Prozeduren ermöglichen die Angabe von Grenzen für die zu optimierenden Parameter.

### 11.4.1 Einfach linearisierte Wünschbarkeit

In Abbildung 11.5 sind für einen weiten Bereich von möglichen Gewichten die integrierten quadratischen Abstände zwischen bester einfach linearisierter Approximation und spezifizierter Wünschbarkeit abgetragen. In der linken Hälfte der Grafik finden sich die Werte für die Exponenten von  $1/20, 2/20, \dots, 20/20$ , und im rechten Teil für Exponenten  $1.5, 2, 2.5, \dots, 10$ .

Die Berechnung des integrierten Abstandes wurde in diesem Falle mittels der **R**-Standard-Routine *integrate* durchgeführt.

Man kann in der Grafik gut erkennen, dass es jeweils besonders ungünstige Bereiche der Gewichte für die Approximation gibt. Dies entspricht angesichts der funktionalen Form der Approximation den Erwartungen. Der absolute Betrag der Abweichung erscheint nicht so groß, dass man von der Verwendung der einfachen Approximation abraten sollte.

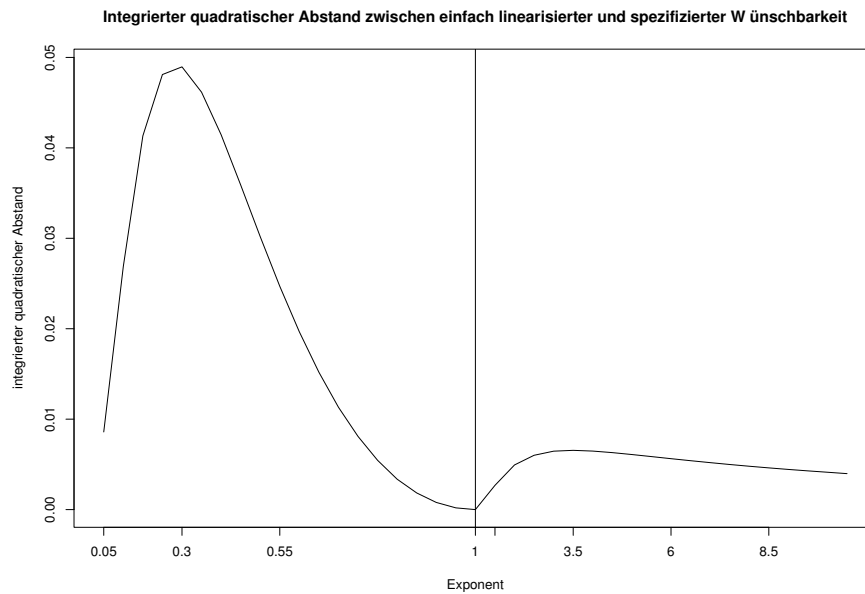
Die numerische Optimierung der Zielfunktion zeigte keine Auffälligkeiten. Der verwendete Algorithmus konvergierte stets. Auch das entspricht angesichts der glatten Kurvenverläufe der beiden Funktionen der Erwartung.

### 11.4.2 Zweifach linearisierte Wünschbarkeit

In Abbildung 11.6 wird die entsprechende Grafik für den doppelt linearisierten Fall gezeigt. Es ist ein qualitativ ähnlicher Verlauf, wie im Falle der einfachen

## 11 Ergebnisse für Exponenten $\beta \neq 1$

Abbildung 11.5: Optimaler integrierter quadratischer Abstand zwischen einfach linearer Approximation und spezifizierter Wünschbarkeit

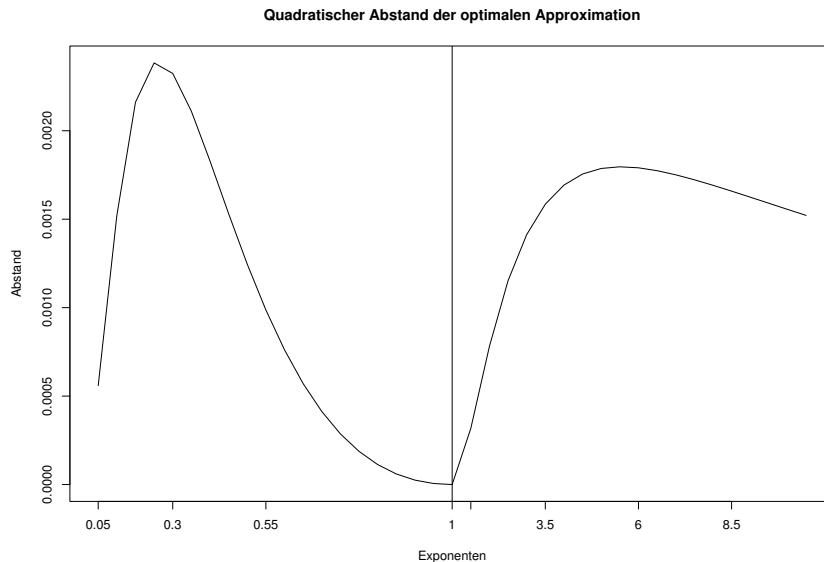


Linearisierung, zu erkennen. Die ungünstigsten Fälle liegen auch hier im Bereich kleiner bis mittlerer Exponenten, sowohl für die Gewichte größer als auch kleiner Eins. Insgesamt sind die Fehler der zweifachen Linearisierung kleiner, was aber auch allein schon dadurch begründet ist, dass sie eine umfassendere Funktionenklasse, aber keine echte Obermenge, der einfachen Linearisierungen darstellt.

**Bemerkung 11.14** Für den zweifach linearisierten Fall reichte die Verwendung der **R**-Funktion *integrate* nicht mehr aus. Anscheinend, da die Zahl der Stützstellen eingeschränkt ist, gelang es für extreme Exponenten nicht, ein eindeutiges Optimum zu identifizieren. Es kam deshalb eine einfache, selbstimplementierte Integrationsfunktion zum Einsatz, welche diesen Problemen Abhilfe schaffte. Als Folge sind leider die absoluten Größen der Abweichungen nicht ohne weiteres vergleichbar.

Was diese Abweichungen für die Verteilungen der approximierenden Wünschbarkeiten bedeuten, ist im folgenden Abschnitt beschrieben.

Abbildung 11.6: Optimaler integrierter quadrierter Abstand zwischen zweifach linearer Approximation und spezifizierter Wünschbarkeit



### 11.4.3 Güte der Approximation der gesuchten Verteilung

In Abb. 11.7 sind die simulierte Verteilung einer  $(-1, 0, \infty, 0.3, 1)$  Wünschbarkeit für  $f(x) = 0.6$  und  $\sigma = 2$  zusammen mit den exakten Verteilungen der einfach bzw. zweifach linearisierten Wünschbarkeiten an der selben Stelle eingezeichnet.

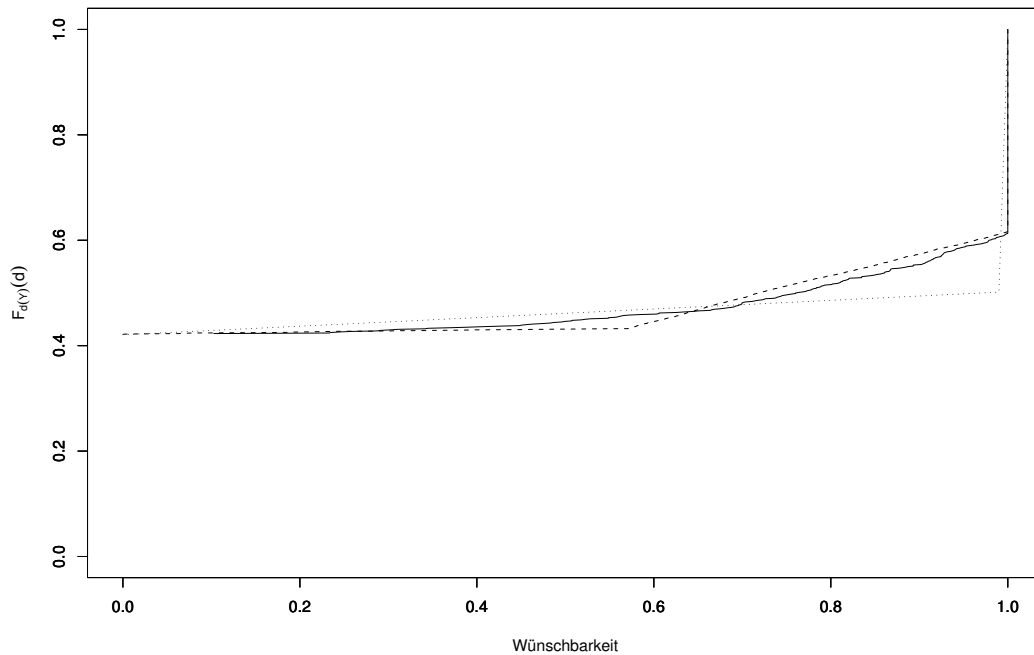
Die Parameter sind so gewählt, dass sie im in den Abbildungen 11.5 und 11.6 erkennbaren, ungünstigen Bereich liegen. Es wurde eine  $(-1, 0, \infty, 0.3, 1)$  als Ausgangspunkt gewählt und dann die zugehörigen optimalen Approximationen bestimmt.

Wie zu erkennen ist, liegen insbesondere die zweifache Linearisierung und die aus einer Simulation gewonnene Verteilung der spezifizierten Wünschbarkeit bereits sehr dicht beieinander. Es wird eine sehr gute Approximation der Verteilung der Wünschbarkeitswerte erreicht.

Insgesamt zeigt dieses Beispiel, wie gut insbesondere die zweifache Linearisierung bereits eine Approximation der wahren Verteilung für Exponenten  $\beta \neq 1$  ermöglicht.

## 11 Ergebnisse für Exponenten $\beta \neq 1$

Abbildung 11.7: Simulierte Verteilung einer  $(-1, 0, \infty, 0.3, 1)$ , dazu die Verteilungen der einfach bzw. zweifach linear approximierten Wünschbarkeiten für  $f(x) = -0.6$  und  $\sigma = 2$



### 11.4.4 Bewertung der verschiedenen Approximationen

Die Simulationen dieses Abschnittes legen nahe, stets die zweifache Linearisierung zu nutzen. Zwar ist die optimale Anpassung etwas aufwändiger, da sie jedoch nur einmal für jede spezifizierte Wünschbarkeit durchgeführt werden muss, spielt das keine entscheidende Rolle. Ein weiterer Aspekt, der die zweifache Linearisierung angemessener erscheinen lässt, ist das Faktum, dass die Ausschussquoten von spezifizierter und approximierender Funktion gleich sind, da der Spezifikationsbereich nicht verändert wird, was für die einfach linearisierte Approximation eben nicht gilt.

Die einfache Linearisierung kann aber gut genutzt werden, um die Idee der Approximation in einer Anwendungssituation an einen Nichtstatistiker zu vermitteln.



### 11.4.5 Mögliche Verbesserung des Verfahrens

Obwohl nach Meinung des Autors die vorgeschlagene Approximation, insbesondere in der zweifach linearen Variante, ausreichend genau ist, kann es natürlich Situationen geben, in denen eine noch höhere Genauigkeit gefordert wird. Es sollen zwei mögliche Auswege für diese Situationen aufgezeigt werden:

- Die einfachste Möglichkeit ist die Erweiterung des Ansatzes auf  $n$ -fach lineare Approximationen. Dies würde bedeuten, analog zum Vorgehen in diesem Kapitel, die am besten approximierende verallgemeinerte Wünschbarkeit zu einer vorgegebenen Anzahl von Ergänzungsknoten zu identifizieren. Dieses Verfahren ist jedoch problematischer, als es zunächst aussieht, da mit der Anzahl der zu findenden Knoten die Dimension des Suchraumes ansteigt, mit den bekannten Folgen für die involvierte numerische Optimierung. Es sei daran erinnert, dass bereits bei der Schätzung der besten zweifach linearisierten Approximation die in  $\mathbf{R}$  implementierte Integrationsprozedur nicht mehr ausreichend genau war.
- Ein anderer Ansatz erscheint aussichtsreicher, um mit vertretbarem Aufwand eine weiter verbesserte Approximation zu erreichen: man optimiert direkt das Kriterium, mit dem später die Güte der Approximation gemessen werden soll. Das Optimalitätskriterium des integrierten, quadratischen Abstandes könnte ersetzt werden durch den Kolmogorov-Smirnov Abstand zwischen der durch die Approximation induzierten Verteilung und der simulierten Verteilung der spezifizierten Wünschbarkeit. Der Rechenaufwand wäre zwar größer, aber nur für jede spezifizierte Wünschbarkeit einmal durchzuführen.

Besonders der letzte Ansatz könnte vielversprechend sein. Die Idee, das Optimalitätskriterium zu ersetzen, kann auch für die Anwendung der Wünschbarkeiten in der Praxis sehr interessant sein. Wie bereits früher erwähnt, könnte man für Anwendungen mit Kontrollkarten beispielsweise genau die wichtigen Quantile optimal approximieren. An dieser Stelle sind viele Spielarten der optimalen Approximation denkbar, die dem jeweiligen Problem angemessen gewählt werden können! Die Möglichkeiten der Anwendung von Wünschbarkeiten werden dadurch stark erweitert!

11 Ergebnisse für Exponenten  $\beta \neq 1$

# 12 Verteilung des Wünschbarkeitsindex

Leider sind die Verteilungen der Wünschbarkeitsfunktionen nur Einzelaspekte in der globalen Optimierung. Eigentlich interessant ist die Verteilung des Wünschbarkeitsindex  $q(Y)$ , aufgefasst als Zufallsvariable. Für diesen sind jedoch, besonders für den Fall des geometrischen Mittels, keine analytischen Aussagen der Art möglich, wie sie für die Einzelwünschbarkeiten hergeleitet wurden. Dies wäre nur möglich, wenn die Verteilungen der Einzelwünschbarkeiten aus einer multiplikationsstabilen Verteilungsklasse stammten, was jedoch nicht der Fall ist. Man bleibt deshalb im Moment, um Aussagen über die Verteilung des Wünschbarkeitsindex zu gewinnen, auf Simulationen angewiesen.

Einige interessante Teilaussagen sind aber durchaus möglich. Diese werden in den folgenden Abschnitten ausgeführt. Für die Gültigkeit dieser Aussagen muss die generelle Voraussetzung, dass die Einzelfehler  $\epsilon_i, i = 1, \dots, m$  paarweise unabhängig sind, dahingehend verschärft werden, dass die einzelnen Zielgrößen  $Y_i, i = 1, \dots, m$  paarweise unabhängig sein müssen.

## 12.1 Verteilung für den Maximin-Index

Bereits in Kapitel 5.4.1 wurde als ein Grund für die Beliebtheit des Maximin-Index genannt, dass man Resultate für Ordnungsstatistiken nutzen kann, um Resultate über die Verteilung des Index zu bekommen.

Wenn man die Zielgrößen als unabhängig annimmt, kann mit Hilfe der Ergebnisse über Ordnungsstatistiken (z.B. in [JKB94]) die Verteilungsfunktion des Maximin-Index an einer Stelle  $x$  angegeben werden. Die einzige Besonderheit, die noch Beachtung erfordert, sind die Punktgewichte auf Null oder Eins.

Gegeben seien Zielgrößen  $Y_i$  mit zugehörigen Wünschbarkeiten  $d_i$ , welche an der Stelle  $x$  jeweils den Verteilungsfunktionen, evtl. approximiert,  $F_{d_i(Y_i)} i = 1, \dots, m$ , gehorcht. Dann gilt der folgende

**Satz 12.1 (Verteilung des Maximin-Index in Abhängigkeit von  $x$ )** Unter den genannten Voraussetzungen berechnet sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion

## 12 Verteilung des Wünschbarkeitsindex

des Maximin-Index  $q$  an einer Stelle  $x$  zu:

$$\begin{aligned}P(q(Y) = 0) &= 1 - \prod_1^m \left(1 - P(d_i(Y_i) = 0)\right), \\P(q(Y) = 1) &= \prod_1^m P(d_i(Y_i) = 1), \\P(q(Y) \leq d) &= 1 - \prod_1^m \left(1 - P(d_i(Y_i) \leq d \mid d_i(Y_i) \notin \{0, 1\})\right).\end{aligned}$$

**Beweis:** Die Punktwahrscheinlichkeiten ergeben sich einfach durch die Multiplikationen entsprechender Punktwahrscheinlichkeiten der Einzelfunktionen. Für die dritte Zeile gilt, dass die entsprechenden bedingten Zufallsvariablen stetig und paarweise unabhängig sind, mit einem Wertebereich in  $(0, 1)$ . Damit erfüllen sie die Voraussetzung, dass  $P(d_i(Y_i) = d_j(Y_j)) = 0$  für alle Paare von Indizes  $i \neq j$  gilt. Es kann also folgendes Ergebnis (z. B. [JKB94], S.7) genutzt werden:

**Satz 12.2** Wenn  $X_1, \dots, X_n$  stetige, paarweise unabhängige Zufallsvariablen sind, dann gilt für das Minimum  $X'_1$ :

$$P[X'_1 \leq x] = 1 - \prod_1^n \left(1 - P[X_i \leq x]\right).$$

Der Satz ist dort zwar für das Maximum aufgestellt, gilt aber natürlich entsprechend auch für das Minimum. □

## 12.2 Verteilung für das geometrische Mittel

Ein Teilaspekt der Verteilung von  $q(Y)$ , über den eine Aussage möglich ist, ist die Ausschussquote.

### 12.2.1 Ausschussquote von $q(Y)$

**Satz 12.3** Gegeben sei ein MCO-Problem, welches mit dem Wünschbarkeitsverfahren von Derringer-Suich behandelt wird. Die Komponenten  $Y_i$  seien paarweise unabhängig. Die Ausschussquote für ein Produkt mit Einzelwünschbarkeiten  $d_i$  zu einer gegebenen Faktoreinstellung  $x$  beträgt

$$p_0(q(Y)) = 1 - \prod_1^m \left(1 - p_0(d_i(Y_i))\right).$$

**Beweis:**

$$p_0(q) = P(q(Y) = 0) = 1 - \prod_1^m \left(1 - P(d_i(Y_i) = 0)\right) = 1 - \prod_1^m \left(1 - p_0(d_i(Y_i))\right).$$

□

**Bemerkung 12.4** Die Ausschussquoten für den Maximin-Index  $q^{maximin}$  und für das geometrische Mittel  $q$  sind natürlich gleich. Denn:

$$q^{maximin}(Y) = 0 \iff \text{es gibt ein } i : d_i(Y_i) = 0 \iff q(Y) = 0.$$

### 12.2.2 Skalierfähigkeit des Wünschbarkeitsindex

Eine der wichtigen Anforderungen an ein MCO-Verfahren war die Skalierbarkeit des Verfahrens, also die Frage, wie das Verfahren mit einer steigenden Zahl von Zielgrößen zurechtkommt.

Dazu wurden zunächst einige Simulationen durchgeführt, deren Ergebnisse in Abbildung 12.1 zu sehen sind. Auf der  $x$ -Achse ist die Anzahl der Zielgrößen abgetragen, auf der  $y$ -Achse jeweils der mittlere Wünschbarkeitsindex aus einer Stichprobe von 100 Messungen des Index.

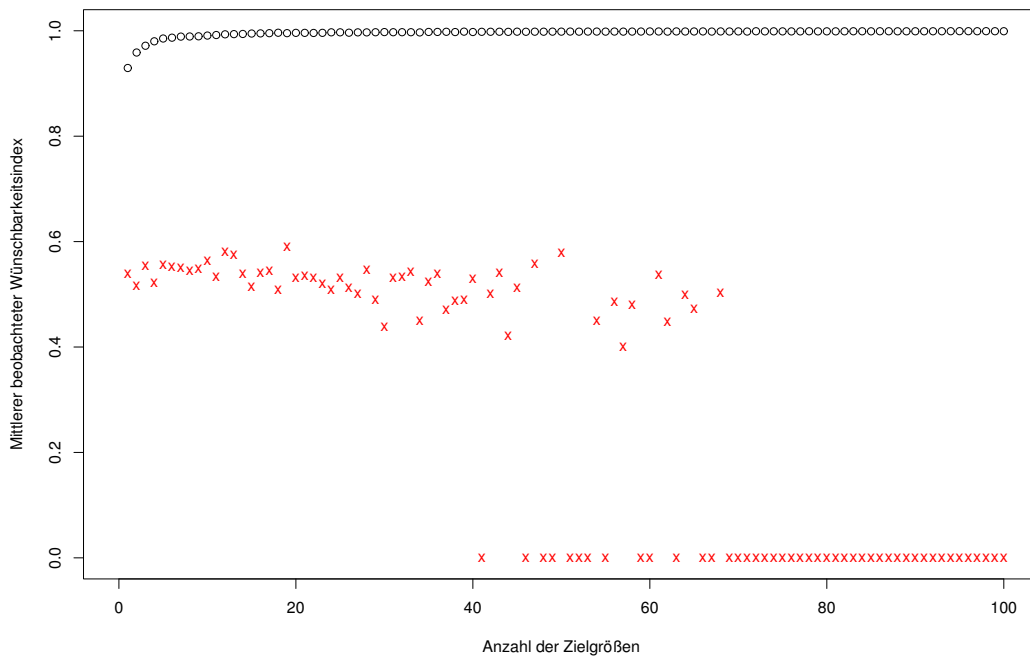
Man erkennt, dass der mittlere Wünschbarkeitsindex für den Fall mit geringerem Rauschen, also kleinem  $\sigma$  in etwa konstant zu bleiben scheint, auch für bis zu 100 Zielgrößen. Für die untere Kurve, mit großem  $\sigma$ , bleibt der mittlere Wünschbarkeitsindex ebenfalls eine ganze Weile, bis ca.  $n=40$  konstant, um dann plötzlich auf Null abzufallen. Zur Vereinfachung wurde für die Simulation angenommen, dass die Wünschbarkeiten für alle Zielgrößen unabhängig identisch verteilt sind und zwar mit der Verteilungsfunktion einer Wünschbarkeit  $(-1, 0, 1, 1, 1)$  im Punkte  $f(x) = 0$  und angenommenen Standardabweichungen  $\sigma$  von 0.1 bzw. 0.6.

Die Erklärung für dieses Verhalten liefert folgende Überlegung: Sei  $F_{d(Y)}$  die Verteilung der Zufallsvariablen  $d_i(Y_i), i = 1, \dots, m$ , gemäß der alle Komponenten verteilt sind. Wie bei der Herleitung der Verteilungen der Wünschbarkeiten in Kapitel 8 gesehen, gilt für diese Verteilungen immer  $p_0 := P(d(Y) = 0) > 0$ , also eine positive Ausschussquote für jede Zielgröße. Definiere nun  $Z := \prod_1^m d_i(Y)$ . Dann gilt der

**Satz 12.5 (Skalierfähigkeit des Wünschbarkeitsindex)** Unter den beschriebenen Voraussetzungen gilt, dass der Erwartungswert des Wünschbarkeitsindex nicht von der Anzahl der Zielgrößen abhängt!

## 12 Verteilung des Wünschbarkeitsindex

Abbildung 12.1: Simulierte Wünschbarkeitsindizes in Abhängigkeit von der Zahl der Zielgrößen



**Beweis:** Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} E(Z) &= P(d_i(Y_i) > 0 \text{ für alle } i) \cdot E\left(\prod_1^m d_i(Y_i) \mid d_i(Y_i) > 0 \text{ für alle } i\right) \\ &= \left(1 - P(d_1(Y_1) = 0)\right)^m \cdot E\left(d_1(Y_1) \mid d_1(Y_1) > 0\right)^m. \end{aligned}$$

Damit gilt aber auch, dass

$$\begin{aligned} [E(Z)]^{\frac{1}{m}} &= \left[\left(1 - P(d_1(Y_1) = 0)\right)^m \cdot E\left(d_1(Y_1) \mid d_i(Y_i) > 0\right)^m\right]^{\frac{1}{m}} \\ &= \left(1 - P(d_1(Y_1) = 0)\right) \cdot E\left(d_1(Y_1) \mid d_1(Y_1) > 0\right) \end{aligned}$$

unabhängig von  $m$  ist.

□

Das Verfahren skaliert im Erwartungswert also perfekt, wenn man identische Verteilungsfunktionen für die Komponenten unterstellt!

## 12.2 Verteilung für das geometrische Mittel

Für realisierte Stichproben ergibt sich interessanterweise ein anderes Bild: Bei der Beobachtung von Stichproben kommt der Term  $(1 - p_0)^m$  zum Tragen. Für jede Stichprobe gilt, dass

$$P(d(Y) = 0) = P\left(\prod_1^m d_i(Y_i) = 0\right) = 1 - (1 - p_0(d_1))^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

Dieses Verhalten erinnert stark an die Berechnung von Lauflängen von Kontrollkarten.

Für die Praxis bedeutet dies, dass immer dann, wenn die Ausschussquote  $p_0$  klein ist gegenüber der Anzahl der Zielgrößen, das Verfahren hervorragend skaliert. Andererseits gibt es aber praktische Schwierigkeiten, wenn die Ausschussquote so groß wird, dass mit dem Auftreten von Ausschuss gerechnet werden muss.

Diese Beobachtung impliziert, dass für den verbesserten Wünschbarkeitsindex eine Skala wie die von Harrington in Kapitel 5.2 sinnvoll sein kann.

Es lässt sich sogar eine ähnliche Aussage für nicht identisch verteilte Komponenten treffen, wenn man nur Komponenten betrachtet, für die gilt, dass die Ausschussquote als Null angenommen werden kann, also  $p_0 \approx 0$ .

Nutzt man die beiden folgenden Grenzwertsätze, so kann man eine schöne Aussage über den Wünschbarkeitsindex treffen.

**Satz 12.6 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)** Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten. Falls

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(X_i)}{i^2} < \infty$$

erfüllt ist, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

**Beweis:** Siehe z.B. [Sha99] S. 46 .

□

**Satz 12.7** Seien  $X_1, X_2, \dots$  reellwertige Zufallszahlen und sei  $g$  eine stetige Funktion, dann gilt:

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \text{ dann folgt } g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X).$$

**Beweis:** Siehe z.B. in allgemeiner Formulierung [Sha99] S. 42.

□

Dann gilt für den Wünschbarkeitsindex der folgende

**Satz 12.8 (Wünschbarkeit skaliert mit  $n$ )** Seien  $d_i(Y_i), i = 1, 2, \dots$ , Wünschbarkeitsfunktionen als Zufallsvariablen aufgefasst, die die Regularitätsbedingungen

$$p_0(d_i(Y_i)) = 0 \quad \text{und} \quad E(\log d_i(Y_i)) < \infty \quad \text{für alle } i \text{ und}$$

$$\sum_1^\infty \frac{\text{Var}(\log d_i(Y_i))}{i^2} < \infty$$

erfüllen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} E(q_n) &= E \left( \left[ \prod_1^n d_i(Y_i) \right]^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= E \left( e^{\frac{1}{n} \sum_1^n \log d_i(Y_i)} \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} E \left( e^{\frac{1}{n} \sum_1^n E(\log d_i(Y_i))} \right) = e^{\frac{1}{n} \sum_1^n E(\log d_i(Y_i))}. \end{aligned}$$

**Beweis:** Die Variablen  $\log d_i(Y_i)$  nehmen die Rolle der  $X_i$  im Satz 12.6 ein. Die Einschränkung  $p_0(d_i(Y_i)) = 0$  ist notwendig, um die Wohldefiniertheit von  $\log d_i(Y_i)$  zu garantieren. Mit den Regularitätsbedingungen folgt dann die Behauptung. □

**Bemerkung 12.9** Die Regularitätsbedingungen sind für die praktische Anwendung gerechtfertigte Annahmen. Die Einschränkung  $p_0(d_i(Y_i)) = 0$  widerspricht zwar zunächst einmal den Erkenntnissen über die Verteilungen der Wünschbarkeiten, denn unter den Generalvoraussetzungen, insbesondere der Annahme der Normalverteilung der Fehler, gilt für **jede** Wünschbarkeit  $p_0(d_i(Y_i)) > 0$ . Allerdings erhofft man sich in der Anwendung in der Nähe des Optimums  $x_{opt}$  kleine Ausschussquoten  $p_0(d_i(Y_i)) \approx 0$ . Ähnliches gilt auch für die anderen Regularitätsbedingungen. Sofern in der Nähe der Null keine bzw. kaum Wahrscheinlichkeitsmasse liegt, also ein  $\delta > 0$  mit  $P(d_i(Y_i) < \delta) \approx 0$  existiert, sind die Bedingungen für Erwartungswert und Varianz automatisch erfüllt. Für diese Fälle kann man folgern, dass sich die Gesamtwünschbarkeit in der Größenordnung einer mittleren Einzelwünschbarkeit bewegt.

Für die Wünschbarkeitsverfahren ist dies ein hervorragendes Ergebnis. Unabhängig von der Zahl der Zielgrößen ist bei Anwendung der realistischen Wünschbarkeitsfunktionen die Nutzung dieses Verfahrens möglich! Damit hebt es sich insbesondere von den grafischen Verfahren positiv ab.



## 13 Fazit und Ausblick

Es wurde gezeigt, dass die klassische Anwendung der Wünschbarkeiten in der Praxis einige Probleme mit sich bringt. Insbesondere liefern sie keinen Hinweis auf die Güte der vorgeschlagenen Lösungen, da die Informationen über die Größe des Fehlers nach dem Modellierungsschritt nicht weiter genutzt werden. Ein weiterer Fehler des klassischen Verfahrens ist, dass implizit eine vereinfachte Optimierungsaufgabe gelöst wird. Aus dieser Vereinfachung folgt natürlich auch, dass die Lösungen, die man erhält, nicht identisch sind mit denen der eigentlichen Optimierungsaufgabe. Durch eine Simulationsstudie wurde nachgewiesen, dass die Auswirkungen dieser Vereinfachung in der Praxis nicht zu vernachlässigen ist.

In der vorliegenden Arbeit ist es dann gelungen, die Notwendigkeit für die Lösung eines vereinfachten Problems zu beseitigen. Dazu wurden die Verteilungen für Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktionen für lineare Gewichtung ( $\beta_l, \beta_r = 1$ ) analytisch hergeleitet. Mit Hilfe dieser exakten Verteilungen war es nun möglich, die idealisierten Wünschbarkeiten durch realistische Wünschbarkeiten zu ersetzen, bei denen der Erwartungswert der Wünschbarkeit zu einer Faktoreinstellung  $x$  als maßgebliche Größe genutzt wird, nicht mehr nur der aus den geschätzten Modellen  $\hat{f}$  abgeleitete Wert. Der Erwartungswert wurde hier genutzt, um möglichst analog zum klassischen Verfahren vorzugehen. Durch das Vorliegen der exakten Verteilungen sind aber auch Wünschbarkeiten, welche durch andere Kenngrößen der Verteilung definiert werden, möglich geworden.

Nachdem in einer Simulationsstudie nachgewiesen wurde, dass durch die realistischen Wünschbarkeiten auch für die Praxis Verbesserungen zu erwarten sind, wurde das Problem der nicht linear gewichteten Wünschbarkeiten ( $\beta_l, \beta_r \neq 0$ ) angegangen. Durch die Approximation der nicht-linearen Derringer-Suich Funktionen durch lineare verallgemeinerte Derringer-Suich Funktionen ist es gelungen, den nichtlinearen Fall auf einen etwas komplizierteren linearen Fall zurückzuführen und für diesen ebenfalls die exakte Verteilungsfunktion anzugeben.

Einen analytischen Ausdruck für den Wünschbarkeitsindex herzuleiten, ist nicht gelungen. Allerdings ist es auch nicht zu erwarten, dass dieses unter der Annahme normalverteilter Fehler überhaupt möglich ist. In diesem Bereich ist man folglich weiter auf Simulationen angewiesen. Diese Simulationen sind aber durch die Herleitung der Verteilungen der Einzelwünschbarkeiten erheblich schneller und zuverlässiger möglich als zuvor. Das wichtigste Ergebnis für den Index ist, dass das Wünschbarkeitsverfahren von Derringer-Suich unter Verwendung der

realistischen Wünschbarkeiten hervorragend mit einer wachsenden Anzahl von Kriterien skaliert.

Durch den Übergang zu den realistischen Wünschbarkeiten wurden somit mehrere Probleme der Anwendung der idealisierten Wünschbarkeiten abgemildert oder behoben. Wünschbarkeitsbasierte Verfahren zur Lösung von MCO-Problemen könnten so ihre Position gegenüber anderen Verfahren in diesem Bereich weiter verbessern!

## Ausblick

Durch den Übergang zu einer Betrachtungsweise, die den unvermeidlichen Fehler in Messung und Modellierung berücksichtigt, kommt man von einem Problem der Anordnung deterministischer Größen zu einem Problem der Anordnung von Zufallsvariablen bzw. Verteilungsfunktionen.

Dort schließt sich ein Kreis: Das Ordnen von Zufallsvariablen ist ebenfalls wieder ein MCO-Problem! Der zentrale Begriff ist die stochastische Dominanz, die jedoch nicht zu einer vollständigen Ordnung auf dem Raum der Verteilungsfunktionen führt. Es lässt sich keine eindeutige Maßzahl angeben, die die stochastische Dominanz der möglichen Verteilungsfunktionen abbildet. Für die Praxis bedeutet dies, dass sich Anwender und Statistiker schon im Vorfeld auf eine zusammenfassende Größe einigen müssen.

Oft wird vorgeschlagen, sich konsequent auf die Ausschussquote  $p_0$  zu konzentrieren und diese zu optimieren. Dem muss widersprochen werden, da leicht Anwendungen vorstellbar sind, bei denen eine (relativ) hohe Ausschussquote, gepaart mit einem hohen Erwartungswert für die Qualität der gelungenen Produkte den Zielen des Anwenders näher kommt, als eine niedrige Ausschussquote gepaart mit einem niedrigen Erwartungswert. In der Regel wird man sich auf einen Kompromiss zwischen diesen beiden Größen einigen und diesen neuen Index optimieren.

Wie erwähnt, ist es für den nichtlinearen Fall nötig, sich auf Approximationen zu stützen. Diese Approximationen wurden hier über den integrierten, quadratischen Abstand durchgeführt. An dieser Stelle bestünde aber für eine konkrete Anwendung die Möglichkeit, die Optimierung der Approximation genau über eine für den Spezialfall wichtige Eigenschaft der Verteilung durchzuführen. Denkbar ist etwa die Approximation bestimmter Quantile für den Einsatz bei Kontrollkarten. Da die Verteilungen nun exakt bekannt sind, besteht die Hoffnung, die Leistungsfähigkeit wünschbarkeitsbasierter Kontrollkarten stark zu verbessern.

Die wichtigste Aufgabe, die in weiterer Forschung angegangen werden müsste, ist die Untersuchung der Möglichkeiten, Unsicherheitsbereiche für  $\widehat{x_{opt}}$  anzugeben. Es ist im Moment aber nicht absehbar, wie auf analytischem Wege dort Fortschritte

erzielt werden könnten. Das große Problem liegt darin, dass der nicht vermeidbare, numerische Optimierungsschritt nicht in seinen statistischen Eigenschaften erfasst werden kann. Im Moment bleibt hier nur der Weg über Simulationen. Es ist zu befürchten, dass für Fortschritte in diesem Bereich zunächst Durchbrüche in der Kalibrationstheorie nötig sind.

## *13 Fazit und Ausblick*

# 14 Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\gg$	dominiert
$(LB)$	Optimierungsproblem des Typs „the larger the better“
$LSL$	lower specification limit, untere Spezifikationsgrenze
$MCO$	Multi-Criteria Optimisation
$oBdA$	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
$ord(d)$	Grad eines Polynomes
$\varphi(\cdot)$	Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
$\varphi_{\mu,\sigma^2}(\cdot)$	Dichtefunktion der $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung
$\Phi(\cdot)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$\Phi_{\mu,\sigma^2}(\cdot)$	Verteilungsfunktion der $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung
$P(\cdot)$	Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses
$Q(\cdot)$	Wünschbarkeitsindex
$(TV)$	Optimierungsproblem vom Sollwerttyp
$USL$	upper specification limit, obere Spezifikationsgrenze
$X \sim F$	X ist verteilt gemäß F

14 *Symbol- und Abkürzungsverzeichnis*

# Abbildungsverzeichnis

4.1	Dominanz und Pareto-Optimalität . . . . .	25
5.1	Wünschbarkeitsfunktionen vom Harrington Typ für verschiedene Werte von $n$ , Sollwertfall . . . . .	33
5.2	Wünschbarkeitsfunktionen vom Derringer-Suich Typ für verschiedene Parameterwerte . . . . .	37
5.3	Beispiel einer verallgemeinerten Derringer-Suich Wünschbarkeitsfunktion . . . . .	40
5.4	Zwei Beispiele für Wünschbarkeitsplots . . . . .	45
7.1	Beispiel für nichtzusammenhängende Gebiete positiver Wünschbarkeit . . . . .	52
7.2	Beispiel für überabzählbar viele optimale Punkte im Faktorraum .	53
7.3	$\widehat{x}_{opt}$ für 1000 Wiederholungen analog zum Versuchsplan von Derringer-Suich . . . . .	55
8.1	Geometrische Situation des Satzes 8.10 . . . . .	62
8.2	Beispiele für Verteilungsfunktionen von Wünschbarkeiten vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$ für verschiedene Werte von $f(x)$ und $\sigma$ . . . . .	64
8.3	Gegenüberstellung von Simulation und exakter Verteilungsfunktion; Stichprobenumfang $n = 1000$ . . . . .	65
8.4	Beispiele für Dichten von Wünschbarkeiten vom Typ $(l, t, u, 1, 1)$ für verschiedene Werte von $f(x)$ und $\sigma$ . . . . .	67
9.1	Gegenüberstellung einer $(-1, 0, 1, 1, 1)$ und der zugehörigen realistischen Wünschbarkeit für $\sigma = 0.5$ . . . . .	80
9.2	Konturplot der erwarteten Wünschbarkeit $E(d(Y))$ gegen $f(x)$ und $\sigma$	83
9.3	Konturplot der Ausschussquote $p_0(x)$ gegen $f(x)$ und $\sigma$ . . . . .	84
10.1	Skizze zum Beweis der Eigenschaften einer verallgemeinerten Wünschbarkeit . . . . .	86
11.1	Beispiel für die Verteilungsfunktion einer Wünschbarkeit für Exponenten $\beta_i$ größer 1 ( $(-1, 0, 3, 3, 3)$ Wünschbarkeit) und Exponenten $\beta_i$ kleiner 1 ( $(-1, 0, 3, 0.3, 0.3)$ Wünschbarkeit) . . . . .	92

*Abbildungsverzeichnis*

11.2	Linearisierte Wünschbarkeitsfunktion (durchgezogene Linie) und zugehörige spezifizierte $(400, 500, \infty, 3, 1)$ -Funktion (gepunktete Linie) . . . . .	94
11.3	Linearisierte Wünschbarkeitsfunktion (durchgezogene Linie) und zugehörige spezifizierte $(-1, 1, 3, 0.1, 0.5)$ -Funktion (gepunktete Linie) . . . . .	96
11.4	Zweifach linearisierte Wünschbarkeitsfunktion und zugehörige spezifizierte Funktion . . . . .	99
11.5	Optimaler integrierter quadratischer Abstand zwischen einfach linearer Approximation und spezifizierter Wünschbarkeit . . . . .	102
11.6	Optimaler integrierter quadrierter Abstand zwischen zweifach linearer Approximation und spezifizierter Wünschbarkeit . . . . .	103
11.7	Simulierte Verteilung einer $(-1, 0, \infty, 0.3, 1)$ , dazu die Verteilungen der einfach bzw. zweifach linear approximierten Wünschbarkeiten für $f(x) = -0.6$ und $\sigma = 2$ . . . . .	104
12.1	Simulierte Wünschbarkeitsindizes in Abhängigkeit von der Zahl der Zielgrößen . . . . .	110



# Literaturverzeichnis

- [AG03] AICOS Technologies AG. *STAVEX*. <http://www.aicos.com>, 1997-2003. Version 4.3, Software Referenz.
- [Bil86] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Springer Texts in Statistics. Wiley New York, 2 edition, 1986.
- [BKM03] D. Benton, K. Krishnamoorthy und T. Mathew. Inferences in multivariate-univariate calibration. *The Statistician*, 52(1):15–39, 2003.
- [dCFS97] Enrique del Castillo, Shu-Kai Fan und John Semple. The computation of global optima in dual response systems. *Journal of Quality Technology*, 29(3):347–353, 1997.
- [DS80] G. Derringer und R. Suich. Simultaneous optimization of several response variables. *Journal of Quality Technology*, 12(4):214–219, 1980.
- [HA75] David C. Hoaglin und David F. Andrews. The reporting of computation-based results in statistics. *The American Statistician*, 29(3):122–126, 1975.
- [Har65] E.C. Harrington Jr. The desirability function. *Industrial Quality Control*, 21(10):494–498, 1965.
- [Har87] J. Hartung. *Statistik*. R. Oldenbourg, München, Wien, 6. edition, 1987.
- [HdSD92] M.M.W.B. Hendriks, J. H. de Boer, A.K. Smilde und D.A. Doornbos. Multicriteria decision making. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, (16):175–191, 1992.
- [Hin99] Matthias Hinzmann. Analyse und statistische Alternative eines Lieferantenschemas, 1999.
- [Inc00] Stat-Ease Inc. *Design Expert*. <http://www.statease.com>, 6 edition, 2000. Software Referenz.
- [Inc03] Minitab Inc. *Minitab*. <http://www.minitab.com>, 13 edition, 2003. Software Referenz.

## Literaturverzeichnis

- [Jes00] J. Jessenberger. *Prozessfähigkeitsindizes in der Qualitätssicherung*. BoD, Norderstedt, 2000. Dissertation.
- [JKB94] Norman L. Johnson, Samuel Kotz und N. Balakrishnan. *Continuous Univariate Distributions*, volume 1. Wiley, New York, 2 edition, 1994.
- [MN98] M. Matsumoto und T. Nishimura. Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, (8):3–30, 1998.
- [Mos94] Karl Mosler. Testing whether two distributions are stochastically ordered or not. *Diskussionsbeiträge zur Statistik und quantitativen Ökonomie* 64, Universität der Bundeswehr Hamburg, Juli 1994.
- [NIS] NIST/SEMATECH. *NIST e-Handbook of Statistical Methods*. National Institute of Standards  
<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pri/section5/pri5322.htm>.
- [R D03] R Development Core Team. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2003. ISBN 3-900051-00-3.
- [Sch98] Axel Scheffner. *Das fQ-System*. Dissertation, Universität Dortmund, 1998.
- [Sha99] Jun Shao. *Mathematical Statistics*. Springer Texts in Statistics. Springer, 1999.
- [Ste00] Detlef Steuer. An improved optimisation procedure for desirability indices. Technical Report 27, Universität Dortmund, FB Statistik, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund, 2000.
- [SW95] W. Seewald und C. Weihs. *STAVEX User Manual*. CIBA-GEIGY Ltd., 4.100 edition, 1995.
- [Tra04a] Heike Trautmann. The desirability index as an instrument for multivariate process control. Technical Report 43, Universität Dortmund, FB Statistik, SFB 475, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund, 2004.
- [Tra04b] Heike Trautmann. *Qualitätskontrolle in der Industrie anhand von Kontrollkarten für Wünschbarkeitsindizes - Anwendungsfeld Lagerverwaltung*. PhD thesis, Dissertation at the Graduate School of Production Engineering and Logistics and the Department of Statistics, Dortmund University, 2004.

- [WW03] Heike Weber und Claus Weihs. On the distribution of the desirability index using harrington's desirability function. Technical Report 3, Universität Dortmund, FB Statistik, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund, 2003.
- [TW04] Heike Trautmann und Claus Weihs. Uncertainty of the optimum influence factor levels in multicriteria optimization using the concept of desirability. Technical Report 23, Universität Dortmund, FB Statistik, SFB 475, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund, 2004.
- [CW99] Claus Weihs und Jutta Jessenberger. *Statistische Methoden der Qualitätssicherung und -optimierung*. Wiley-VCH, Weinheim, 1999.