

Statistische Analyse und Rattererkennung beim Einlippen-Tiefbohren

Dissertation

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Statistik der Universität Dortmund

vorgelegt von

Anita Silvia Busch

aus Wermelskirchen

Dortmund 2006

1. Gutachter: Prof. Dr. U. Gather

2. Gutachter: Prof. Dr. R. Fried

Tag der mündlichen Prüfung: 5. April 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Spektralanalyse	8
2.1	Zeitreihen: stochastische Prozesse und Modelle	8
2.2	Spektralanalyse für stationäre Zeitreihen	10
2.2.1	Spektrum	10
2.2.2	Spektraldarstellung eines stationären Prozesses	13
2.2.3	Periodogramm und Spektraldichteschätzer	14
2.2.4	Prozesse mit gemischten Spektren	22
2.3	Spektralanalyse für nichtstationäre Zeitreihen	24
2.3.1	Evolutionäres Spektrum	25
2.3.2	Lokale Stationarität	27
2.3.3	Andere Abschwächungen der Stationarität	29
2.3.4	Schätzer der zeitveränderlichen Spektraldichte	30
2.3.5	SLEX-Periodogramm	33
2.4	Spektrale Abweichungen	42
2.4.1	Abweichungsmaße für zwei Spektraldichten	42
2.4.2	Nichtparametrische spektrale Abweichungsmaße	47
2.4.3	Tests auf Unterschiede in den Spektraldichten	49
3	Datenanalyse	52
3.1	Experiment	52

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
3.2 Statistische Analyse	55
3.3 Versteckte Frequenzen	61
3.4 Modellierung	64
3.5 Vergleich spektraler Abweichungsmaße	66
4 Methoden zur Strukturbrucherkenung	70
4.1 Parametrische Kontrollkarten	71
4.2 Klassische Kontrollkarten	73
4.3 Multivariate Kontrollkarten	77
4.4 Kontrollkarten für Zeitreihen	79
4.5 Nichtparametrische Strukturbrucherkenung	82
5 Entdeckung spektraler Veränderungen	85
5.1 Offline-Strukturbrucherkenung	85
5.1.1 Strukturbrucherkenung mit spektraler Verteilungsfunktion	86
5.1.2 CUSUM-Karte für die evolutionäre Spektraldichte	87
5.2 Online-Strukturbrucherkenung	89
5.2.1 Übersicht über sequentielle Verfahren	90
5.2.2 Kontrollkarten für die Veränderung des Spektrums	94
5.2.3 Vergleich der Strategien an simulierten Zeitreihen	99
5.2.4 Anwendung auf die Bohrdaten	104
6 Zusammenfassung und Ausblick	110
A Beweise	113
B Datenanalyse	120
Symbolverzeichnis	131
Literaturverzeichnis	143

Kapitel 1

Einleitung

Das Einlippen-Tiefbohren wird eingesetzt, um schmale, tiefe Bohrungen von hoher Oberflächengüte und Formgenauigkeit zu erzeugen. Es wird für Bohrungen in Metall z. B. bei Zuführungskanälen und Ventildführungen verwendet. Allgemein ist Tiefbohren dadurch definiert, dass ein großes Verhältnis (3 - 250) der Länge zum Durchmesser des Werkzeuges besteht, wobei das Einlippen-Tiefbohren ein spezielles Tiefbohrverfahren für kleine Bohrungsdurchmesser bis 40 mm darstellt. Das zugehörige Werkzeug wird in [Abbildung 1.1](#) gezeigt. Die Besonderheiten sind, dass das Werkzeug nur eine Schneide besitzt, der Kühlschmierstoff (KSS) durch zwei Bohrungen im Werkzeug zugeführt wird und die abgetrennten Späne mit dem Kühlschmierstoff durch die Span-Nut im Werkzeug aus dem Werkstück gespült werden, weswegen das Werkzeug eine asymmetrische Form besitzt.

Der Einlippen-Tiefbohrprozess ist sehr anfällig für Störungen, die die Bohrungsqualität beeinflussen können. Wegen seines durch die Span-Nut geschwächten Querschnitts und seiner langschaftigen Bauweise ist das Einlippen-Tiefbohrwerkzeug besonders schwingungsanfällig und neigt schnell zu Ratterschwingungen. Eine weitere mögliche Störung ist ein Spänestau, bei dem die abgelösten Späne zwischen Bohrungswand und Werkzeugschaft klemmen. In beiden Situationen können die Störungen zu erhöhtem Schneidenverschleiß, zu einem Werkzeugbruch und zu verminderter Maß- und Formgenauigkeit der Bohrung führen. In jedem Fall ist dann eine Nachbearbeitung der Oberfläche notwendig, wenn nicht das Werkstück sogar zum Ausschuss gezählt werden muss.

Es ist somit eine Prozessüberwachung notwendig, damit Gegenmaßnahmen eingeleitet werden können, möglichst schon bevor Ratterschwingungen oder andere Prozessstörungen Scha-

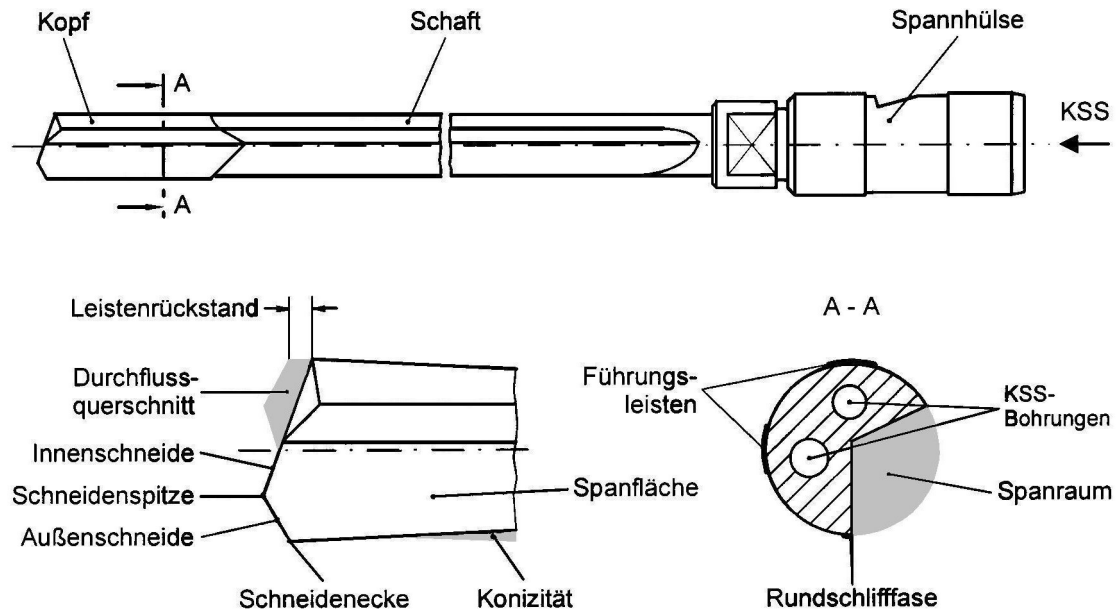


Abbildung 1.1: Darstellung des Einlippen-Tiefbohrwerkzeugs Quelle: [VDI-Verlag, Düsseldorf \(1996\)](#)

den verursachen. Bisher konnte dazu nicht auf einen kundigen Prozessbeobachter verzichtet werden. Das Institut für Spanende Fertigung der Universität Dortmund hat sich zum Ziel gesetzt eine automatische Prozessüberwachung zu entwickeln, die eine hohe Prozesssicherheit bei gleichzeitig hoher Wirtschaftlichkeit gewährleistet. Das Tiefbohr-Bearbeitungszentrum „IXION TLF 1004“ wird genutzt, um experimentell das Einlippen-Tiefbohrverfahren zu untersuchen. Letztendlich soll über die Einstellgrößen „Schnittgeschwindigkeit“ und „Vorschubgeschwindigkeit“ eine Regelung entwickelt werden, bei der jede Störung direkt bei ihrem Auftreten erkannt und ihr durch eine geeignete Veränderung der Einstellungen entgegengewirkt wird.

In [Weinert u. a. \(2002\)](#) wird beschrieben, welche sensorischen Messgrößen mittels welcher Messvorrichtungen zur Identifizierung der Störungen während der Überwachung geeignet sind. Die Kräfte am Werkzeug können nicht direkt an der Wirkungsstätte gemessen werden, da das Einlippenwerkzeug aufgrund seiner geringen Größe recht unzugänglich ist. Deshalb muss zur Rattererkennung und Spänestauererkennung auf indirekte Maße zurückgegriffen werden. Die folgenden drei Sensoren liefern die Größen zur Prozessüberwachung:

- Eine Prallplatte, auf die der austretende Kühlschmierstoff mit den abgetrennten Spänen auftrifft, eignet sich dazu, einzelne Austritte von Spänen zu identifizieren. Ein längeres Ausbleiben von Spantreffern kann als Indiz für einen Spänestau gewertet werden.
- Durch Axialkraftmessung (Bohrmoment) wird ein Signal erzeugt, mit dem die Prozessabschnitte erkennbar werden. Durch die Sensorik kann somit eine Unterteilung des Bohrprozesses in Leerlauf, Anbohren, statisches Bohren und Ausbohren vorgenommen werden.
- Zur Schwingungserkennung wurden Positionen für Schallaufnehmer getestet, die eventuell auftretende Ratterschwingungen erkennbar machen. Dabei ergab sich, dass ein Körperschallsensor am Gehäuse des Bohrers geeignet ist, Veränderungen durch Ratterschwingungen zu erkennen. Als Sensor wird hier ein piezoelektrischer Beschleunigungsaufnehmer verwendet, der am Bohrarm durch einen Magnetfuß befestigt ist.

In Abbildung 1.2 ist der Einlippen-Tiefbohrer mit den angebrachten Sensoren dargestellt.

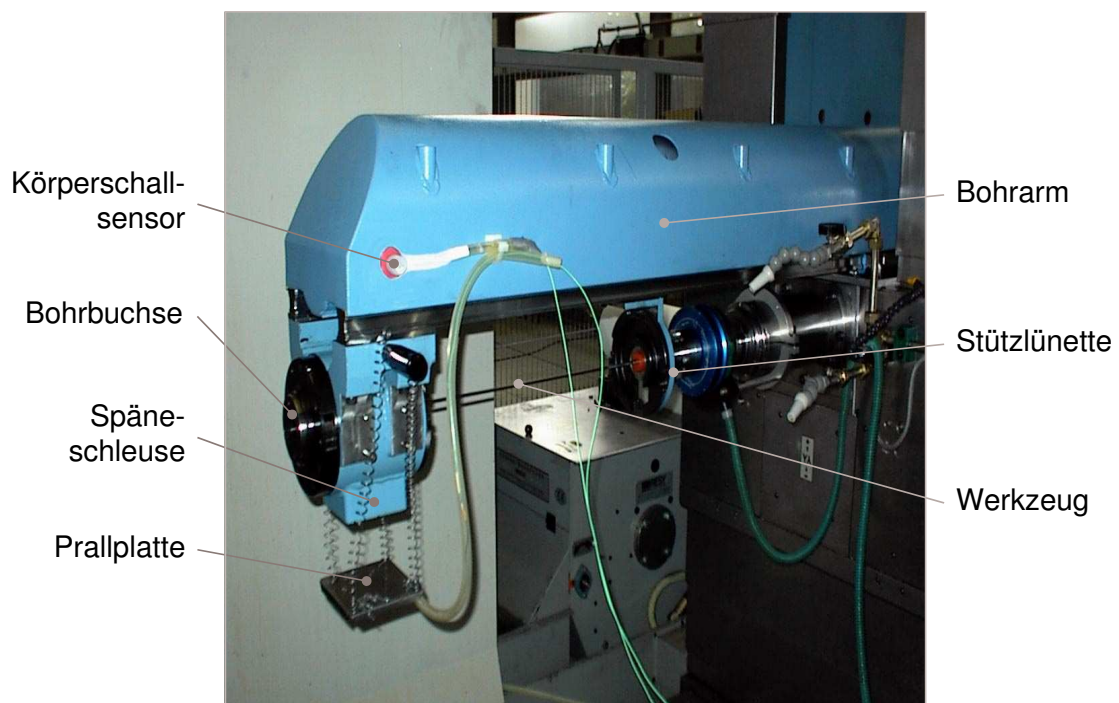


Abbildung 1.2: Einlippen-Tiefbohrer im Bearbeitungszentrum IXION TLF 1004

Gegenstand der vorliegenden Dissertation ist die Entwicklung statistischer Verfahren, die anhand des Körperschallsignals eine frühzeitige Erkennung von Ratterschwingungen ermöglichen. Veränderungen in der Struktur der Zeitreihe des Körperschallsignals, die als der Beginn von Ratterschwingung gewertet werden können, sollen identifiziert werden. Eine derartige „Strukturbrucherkenkung“ soll schließlich zu einem Alarmsystem führen.

Die Untersuchungsergebnisse zeigen, dass die Fragestellung eine Betrachtung der zweiten Momente der Zeitreihe des Körperschallsignals erfordert. Eine Veranschaulichung der Korrelationsstruktur von stochastischen Prozessen bietet die Spektralanalyse, die in Kapitel 2 ausführlich behandelt wird. Ein wichtiges Instrument der Spektralanalyse stationärer Prozesse (siehe Abschnitt 2.2) ist das Periodogramm, das als eine Zerlegung der Leistung eines Signals bzw. der empirischen Varianz einer Zeitreihe in die Frequenzkomponenten harmonischer Schwingungen interpretiert werden kann. In Kapitel 2 werden des Weiteren alternative Schätzer der Spektraldichte vorgestellt, die als solche bessere Eigenschaften als das Periodogramm besitzen. Insbesondere durch die Beeinflussung von Rattern verletzen die betrachteten Zeitreihen die Stationaritätseigenschaften. Daher wenden wir uns in Abschnitt 2.3 Theorien zu, die sich mit Zeit-Frequenz-Darstellungen des Spektrums und allgemein mit Abschwächungen der Stationaritätsannahmen auseinandersetzen.

Schließlich wird in Abschnitt 2.3.5 das von [Ombao u. a. \(2001\)](#) entwickelte SLEX-Periodogramm eingeführt, das die Grundlage für eine komplexe Konstruktion zur Darstellung eines zeitabhängigen Spektrums bildet. Wegen spezieller Eigenschaften der SLEX-Periodogramme werden sie in dieser Arbeit in erster Linie für die Konstruktion der Kontrollkarten verwendet. Zur Erkennung spektraler Veränderungen sind insbesondere Abweichungsmaße, die Unterschiede zwischen den Spektren zweier Zeitreihen quantifizieren können, von Interesse (siehe Abschnitt 2.4).

Die Struktur der Daten des Körperschalls und deren durch Ratterschwingungen erzeugten Veränderungen werden in Kapitel 3 mit den in Kapitel 2 beschriebenen Verfahren untersucht. Verschiedene Modellansätze zur Beschreibung der Zeitreihendaten werden in Abschnitt 3.4 diskutiert. In Abschnitt 3.5 werden die in Abschnitt 2.4 vorgestellten Maße bezüglich ihrer Eignung untersucht, Signale aus als ruhig und als ratternd identifizierten Prozessausschnitten zu unterscheiden.

Die in Kapitel 4 dargestellten Verfahren bieten eine Übersicht über Verfahren zur Strukturbrucherkenkung und stellen gleichzeitig eine Grundlage für die im Weiteren entwickelten, speziell auf die Datensituation zugeschnittenen Methoden dar. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 klassische Kontrollkarten für univariate und multivariate, aber unabhängige Beobachtungen erläutert. Anschließend wird auf Kontrollkarten für Zeitreihen und insbesondere auf Kontrollkarten zur Erkennung spektraler Veränderungen in Zeitreihen, die auf parametrischen Modellen basieren, eingegangen. Da aus Abschnitt 3.4 bekannt ist, dass sich verschiedenste Modellklassen bei genauerer Untersuchung als sehr eingeschränkt geeignet erweisen, die Zeitreihen, sowohl global als auch lokal zu beschreiben, wird der Fokus auf Verfahren gelegt, die nicht auf starken Modellannahmen basieren. Nichtparametrische Methoden zur Strukturbrucherkenkung werden in Abschnitt 4.5 vorgestellt.

Speziell auf die Erkennung spektraler Veränderungen zugeschnittene Verfahren werden in Kapitel 5 umfassend diskutiert. Da die Daten der Bohrversuche eine besondere Struktur haben – leichte Strukturveränderungen existieren auch im ruhigen Bohrprozess und das Rattern setzt nicht immer mit einer abrupten Veränderung ein – sind die meisten der beschriebenen Verfahren nur bedingt geeignet. In Abschnitt 5.2.2 führen die problemorientierten Untersuchungen dieser Arbeit zur Entwicklung von Kontrollkarten, die speziell zur Erkennung spektraler Veränderungen in der Zeitreihe des Körperschallsignals geeignet sind. Simulationen in Abschnitt 5.2.3 verdeutlichen die Auswirkungen der Wahl unterschiedlicher Parameter für die Karten. In Abschnitt 5.2.4 wird deutlich, dass Versionen der Kontrollkarten eine Erkennung von Rattern sowohl im laufenden Prozess als auch beim Anbohren ermöglichen. Die wichtigsten der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse und gewonnenen Einsichten werden abschließend in Kapitel 6 zusammengefasst und diskutiert.

Kapitel 2

Spektralanalyse

In diesem Kapitel werden zunächst wichtige Begriffe in Bezug auf stochastische Prozesse und Zeitreihen definiert. Anschließend werden die Grundlagen für die Spektralanalyse stationärer Zeitreihen erklärt. Es folgt eine Zusammenstellung von Ergebnissen aus der Spektralanalyse nichtstationärer Zeitreihen und schließlich eine Diskussion zu Abstandsmaßen für spektrale Verteilungen und deren Schätzer.

2.1 Zeitreihen: stochastische Prozesse und Modelle

Ein stochastischer Prozess ist eine Menge $\{X(t, \omega); t \in T, \omega \in \Omega\}$ von Zufallsvariablen $\{X_t\} = \{X(t, \omega)\}$, wobei Ω den Stichprobenraum und T eine Indexmenge, z. B. die Zeit oder die Bohrtiefe, beschreiben. Für festes t ist $X_t := X(t, \omega)$ als Funktion von ω eine Zufallsvariable, für festes ω ist der Pfad $\{x_t\} := \{X(t, \omega)\}$ eine Funktion der Zeit als Realisation des stochastischen Prozesses $\{X_t\}$ und wird Zeitreihe genannt. Die Bezeichnung „Zeitreihe“ wird jedoch häufig für den zugehörigen stochastischen Prozess verwendet. Im weiteren Verlauf wird der Einfachheit halber von $T = \mathbb{Z}$ ausgegangen.

Definition 2.1 *Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt schwach stationär und im Weiteren abkürzend stationär, wenn für alle $t \in \mathbb{Z}$*

$$E(X_t) = \mu \quad \text{und}$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h), \quad h \in \mathbb{Z},$$

gilt, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $\gamma(h)$ eine reellwertige Funktion der Zeitdifferenz h ist.

Stationarität beinhaltet für $h = 0$, dass die Varianz von X_t nicht von t abhängt, also $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ für eine Konstante $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$. Man bezeichnet $\gamma(h)$ als die Autokovarianzfunktion von $\{X_t\}$.

Wenn eine Zeitreihe $\{x_t\}$ mit $t \in \{1, \dots, n\}$ als Realisation eines stationären stochastischen Prozesses vorliegt, kann die Autokovarianzfunktion für $|h| < n$ mittels

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_t - \bar{x}_n)(x_{t+|h|} - \bar{x}_n)$$

geschätzt werden, wobei $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$. Die Vorteile dieses verzerrten Schätzers gegenüber dem erwartungstreuen

$$\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{n - |h|} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_t - \bar{x}_n)(x_{t+|h|} - \bar{x}_n)$$

werden in [Priestley \(1981a\)](#) und darin zitierten Artikeln besprochen.

Zur Vereinfachung wird im Folgenden angenommen, dass der Prozess zentriert gemessen wird, also $\mu = 0$. In der Praxis wird hierzu das arithmetische Mittel \bar{x}_n von jedem Wert der Zeitreihe abgezogen.

Definition 2.2 *Ein stochastischer Prozess $\{\epsilon_t\}$ wird Weißes Rauschen genannt ([Priestley, 1981a](#)), wenn er aus einer Folge unkorrelierter Zufallsvariablen besteht, also $\gamma(h) = 0$ für alle $|h| > 0$.*

Weißes Rauschen bildet einen Grundbaustein für komplexere stochastische Prozesse.

Definition 2.3 *Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}$ wird linearer Prozess genannt ([Priestley, 1981a](#)), wenn er in der Form*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \epsilon_{t-j}$$

ausgedrückt werden kann, wobei $\{\epsilon_t\}$ Weißes Rauschen ist und für die Folge $\{\theta_j\}$ von Konstanten $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty$ gilt.

Besondere Bedeutung erlangte dabei eine bestimmte Klasse stochastischer Prozesse:

Definition 2.4 Ein stochastischer Prozess $\{X_t\}$ heißt ARMA(p, q)-Prozess (**A**utoregressive **M**oving **A**verage) genau dann, wenn Weißes Rauschen $\{\epsilon_t\}$ mit $E(\epsilon_t) = 0$ und $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$ für alle t und ϕ_1, \dots, ϕ_p und $\theta_0, \dots, \theta_q$ mit $\phi_p, \theta_q \neq 0$ und $\theta_0 = 1$ existieren, so dass

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \epsilon_{t-j}. \quad (2.1)$$

Die Zuweisungen $p = \infty$ und $q = \infty$ sind erlaubt. Falls $p = 0$ ist, sprechen wir von einem MA(q)-Prozess und von einem AR(p)-Prozess, falls $q = 0$ gilt.

2.2 Spektralanalyse für stationäre Zeitreihen

Die Spektralanalyse liefert eine Interpretation von Signalen, Zeitreihen oder stochastischen Prozessen als eine Zusammensetzung von Sinus- und Cosinusfunktionen, oder gleichbedeutend von komplexen Exponentialfunktionen, mit verschiedenen Amplituden und Frequenzen. Eine Zerlegung in diese einzelnen Bestandteile gibt Aufschluss über die Korrelationsstruktur eines Prozesses. In diesem Abschnitt werden zunächst die Begriffe der Spektraldichte und der spektralen Verteilungsfunktion geklärt. Anschließend wird auf die Spektraldarstellung eines stationären Prozesses eingegangen, die zur Interpretation und für die Erweiterung der Spektralanalyse auf den Fall nichtstationärer Prozesse von Bedeutung ist. Es folgen Ausführungen zur Schätzung der Spektraldichte und der spektralen Verteilungsfunktion. In Abschnitt 2.2.4 über gemischte Prozesse wird ein mögliches Vorgehen vorgestellt, wenn der Prozess keine absolut summierbare Autokovarianzfunktion besitzt und damit die Spektraldichte nicht existiert.

2.2.1 Spektrum

Definition 2.5 Sei $\{X_t\}$ ein stationärer stochastischer Prozess mit absolut summierbarer Autokovarianzfunktion $\gamma(h)$, $h \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall existiert die diskrete Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}, \quad \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (2.2)$$

Die stetige Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ wird Spektraldichte von $\{X_t\}$ genannt. Umgekehrt gilt $\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega h} d\omega$. Wenn X_t reell ist für alle t , gilt $f(\omega) = f(-\omega)$ für alle $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Wenn der Prozess keine absolut summierbare Autokovarianzfunktion besitzt, dann existiert auch die Spektraldichte nicht. Es kann aber immer eine Spektraldarstellung der Autokovarianzfunktion über ein Fourier-Stieltjes Integral erzeugt werden:

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h} dF(\omega). \quad (2.3)$$

Die Funktion $F(\omega)$ ist monoton nicht fallend mit $F(-\pi) = 0$ und $F(\pi) = \sigma^2 = \gamma(0)$ und wird als (nicht normierte) spektrale Verteilungsfunktion oder integriertes Spektrum bezeichnet.

In nahezu allen praktisch relevanten Fällen kann $F(\omega)$ als die Summe zweier Komponenten dargestellt werden (Wei, 1990) mit

$$F(\omega) \simeq F_s(\omega) + F_d(\omega),$$

wobei $F_d(\omega)$ die spektrale Verteilungsfunktion einer deterministischen Komponente $\{Z_t\}$ und $F_s(\omega)$ die spektrale Verteilungsfunktion der nicht deterministischen Komponente $\{X_t\}$ ist. Entsprechend kann jeder kovarianzstationäre Prozess $\{Y_t\}$ als Summe von zwei Komponenten

$$Y_t = X_t + Z_t \quad (\text{Wold-Zerlegung})$$

dargestellt werden. Ein Prozess ist deterministisch, wenn er Vorhersagen aus den vergangenen Beobachtungen ohne Fehler erlaubt (genauer siehe Brockwell und Davis, 1987).

Der Prozess $\{X_t\}$ besitzt eine absolut summierbare Autokovarianzfunktion und die Komponente F_s ist damit eine stetige, monoton nicht fallende Funktion. Für solche reinen nicht deterministischen Prozesse gilt $F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(\lambda) d\lambda$. Außerdem existiert die Spektraldichte $f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$ wie in Gleichung (2.2). Man spricht in diesem Fall davon, dass der Prozess ein *stetiges* Spektrum besitzt.

Der Prozess $\{Z_t\}$ kann als Überlagerung abzählbar vieler harmonischer Schwingungen ausgedrückt werden. Damit ist die Komponente F_d eine Treppenfunktion, die aus einer abzählbaren Menge von Sprüngen endlicher Höhe besteht. Es gibt also eine abzählbare Menge $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, so dass $F_d(\omega) = \sum_{\{\lambda \in \Lambda: -\pi \leq \lambda \leq \omega\}} p(\lambda)$, mit $\omega \in [-\pi, \pi]$, wobei das *diskrete* Spektrum $p(\lambda)$ für alle λ , die nicht aus der Menge Λ stammen, gleich Null ist.

Beispiel 2.1 Ein reellwertiger deterministischer Prozess ist z. B. gegeben durch

$$Z_t = \sum_{j=1}^r c_j \cos(\lambda_j t + \phi_j),$$

wobei $t \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{R}$ und $\lambda_j \in (0, \pi]$ für $j, k \in \{1, \dots, r\}$ Konstanten sind, mit $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$, und die Phasen $\{\phi_j\}_{j \in \{1, \dots, r\}}$ eine Folge unabhängiger, identisch gleich verteilter Zufallsvariablen auf $[-\pi, \pi]$ sind. Ein solcher Prozess besitzt ein diskretes Spektrum der Form

$$p(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4}c_j^2, & \text{falls } \omega = \lambda_j, j \in \{1, \dots, r\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alternative Schreibweisen für den Prozess sind

$$Z_t = \sum_{j=1}^r (a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)) = \sum_{j=-r}^r A_j e^{i\lambda_j t},$$

wobei $\lambda_{-j} = -\lambda_j$, für $j \in \{-r, \dots, r\}$. Die reellwertigen $a_j = c_j \cos \phi_j$ und $b_j = -c_j \sin \phi_j$ und das komplexwertige

$$A_j = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_j - ib_j), & \text{falls } j > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-j} + ib_{-j}), & \text{falls } j < 0 \\ 0, & \text{falls } j = 0 \end{cases}$$

mit $A_j = A_{-j}^*$ sind wegen der stochastischen Phase ϕ_j selbst Zufallsvariablen. Dabei sei x^* die komplex Konjugierte zu x . Die Amplitude der harmonischen Schwingung zur Frequenz λ_j ist durch $\frac{c_j}{2} = E(|A_j|)$ und die Phase durch $\phi_j = \arg(A_j)$ gegeben. Wegen der stochastischen, gleich verteilten Phase ist der Prozess stationär. In diesem Fall ist $E(Z_t) = 0$ und $\gamma(h) = E(Z_t Z_{t+h})$. Die Autokovarianzfunktion $\gamma(h)$ ist periodisch und daher nicht absolut summierbar.

Es interessieren hier im Besonderen *gemischte* Prozesse mit so genannten versteckten Frequenzen, also Zeitreihen mit einer spektralen Verteilungsfunktion, für die $F_s \neq 0$ und $F_d \neq 0$ und $F(\omega) = \sum_{j: \lambda_j \leq \omega} p(\lambda_j) + \int_{-\pi}^{\omega} f(\lambda) d\lambda$, mit $j \in \mathbb{N}$. Auf diese Prozesse wird in Abschnitt 2.2.4 noch genauer eingegangen.

Da bei einem reellwertigen stochastischen Prozess $f(\omega) = f(-\omega)$ und $p(\omega) = p(-\omega)$ gilt, betrachtet man in der Praxis $f(\omega)$ und $p(\omega)$ nur für $\omega \in [0, \pi]$. Zudem gilt für einen Prozess mit $E(X_t) = 0$ für alle t , dass $f(0) = 0$ und $p(0) = 0$ ist. Für das integrierte Spektrum gilt dann $F(\omega) - F(\omega') = F(-\omega') - F(-\omega)$ und es kann ein positives integriertes Spektrum folgendermaßen definiert werden (Priestley, 1981a):

$$F^+(\omega) = \int_0^{\omega} f(\lambda) d\lambda + \sum_{j: \lambda_j \leq \omega} p(\lambda_j) = F(\omega) - \frac{\sigma^2}{2}, \quad \omega \in [0, \pi]. \quad (2.4)$$

2.2.2 Spektraldarstellung eines stationären Prozesses

Wie für die Autokovarianzfunktion gibt es auch für eine Zeitreihe eine Spektraldarstellung. Jeder stationäre stochastische Prozess $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $E(X_t) = 0$ kann dargestellt werden als

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad (2.5)$$

wobei $\{dZ(\omega)\}_{\omega \in [-\pi, \pi]}$ ein komplexwertiger stochastischer Prozess ist (siehe [Priestley, 1988](#)). Für die Zuwächse $dZ(\omega)$ gilt, dass $E(dZ(\omega)) = 0$, $E(|dZ(\omega)|^2) = dF(\omega)$ mit der spektralen Verteilungsfunktion F von X_t und $E(dZ(\omega_1) dZ^*(\omega_2)) = 0$ für $\omega_1 \neq \omega_2$.

Darstellung (2.5) zeigt, dass alle stationären Prozesse in diskreter Zeit als Überlagerung harmonischer Schwingungen über dem Frequenzbereich $[-\pi, \pi]$ interpretiert werden können. Dementsprechend stellt in (2.5) $|dZ(\omega)|$ die zufällige Amplitude und $\arg(dZ(\omega))$ die zufällige Phase einer harmonischen Schwingung zur Frequenz $d\omega$ dar ([Priestley, 1988](#)).

Wenn die Spektraldichte $f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$ existiert und zudem gilt, dass $f(\omega) > 0$ für alle $\omega \in [-\pi, \pi]$, dann kann eine Funktion $A : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gefunden werden mit $f(\omega) = |A(\omega)|^2$ und der Prozess hat die Darstellung

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega) e^{i\omega t} d\tilde{Z}(\omega). \quad (2.6)$$

Für $d\tilde{Z}(\omega)$ gilt $E\left(|d\tilde{Z}(\omega)|^2\right) = d\omega$ und $E\left(d\tilde{Z}(\omega_1) d\tilde{Z}^*(\omega_2)\right) = 0$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$. Diese Darstellung kann aus Gleichung (2.5) abgeleitet werden, indem $dZ(\omega) = A(\omega) d\tilde{Z}(\omega)$ gesetzt wird. Es folgt, dass $\epsilon_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} d\tilde{Z}(\omega)$ Weißes Rauschen mit Spektraldichte 1 für alle ω ist.

Die Spektraldarstellungen für stochastische Prozesse mit diskretem Spektrum können wie in Beispiel 2.1 aussehen.

Folgende Interpretation ist hilfreich für das Verständnis des Spektrums. Die Leistung einer mechanischen, akustischen oder elektromagnetischen Welle ist proportional zum Quadrat des Betrags ihrer Amplitude. Deshalb lässt sich das Spektrum physikalisch als die Verteilung der Leistung eines Signals X_t über den kontinuierlichen Bereich von Frequenzen $[-\pi, \pi]$ interpretieren.

- Die durchschnittliche Leistung des Signals bzw. wegen $E(X_t) = 0$ die Varianz der Zeitreihe ist durch $\text{Var}(X_t) = E(X_t^2) = \int_{-\pi}^{\pi} dF(\omega)$ gegeben.

- Die Bandleistung oder die Varianz, beschränkt auf das spektrale Band $[\omega_1, \omega_2]$ mit $-\pi \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \pi$, ist durch $\int_{\omega_1}^{\omega_2} dF(\omega)$ gegeben.
- Der Anteil der Leistung eines Signals bzw. der Varianz einer Zeitreihe bei der Frequenz ω ist gegeben durch $dF(\omega)$.

2.2.3 Periodogramm und Spektraldichteschätzer

Sei $\{x_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$, eine Realisation eines reellwertigen stationären Prozesses mit $E(X_t) = 0$.

Ein wichtiges Instrument der Spektralanalyse von Zeitreihen ist das Periodogramm

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n x_t e^{-i\omega t} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| \leq n-1} \hat{\gamma}(h) e^{-i\omega h}. \quad (2.7)$$

Die 2π -periodische Funktion $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $I(-\omega) = I(\omega)$ ist durch die Funktionswerte bei den Fourierfrequenzen $\omega_j = 2\pi \frac{j}{n}$ mit $j \in \{-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ eindeutig bestimmt. Das Periodogramm wird daher oft nur an den Fourierfrequenzen berechnet. Bei reellwertigen Prozessen reicht die Betrachtung für $j \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ aus.

Das Periodogramm ist ein intuitiver Schätzer für die Spektraldichte $f(\omega)$, wenn diese existiert, weil es die entsprechende „Beobachtungsversion“ der Spektraldichte ist; vergleiche dazu Gleichung (2.2) und die zweite Gleichheit in (2.7). Der Wert des Periodogramms bei der Fourierfrequenz $\frac{2\pi j}{n}$ ist dann als Schätzung für den Mittelwert über das Spektralband $\left(\frac{2\pi(j-0.5)}{n}, \frac{2\pi(j+0.5)}{n} \right]$ zu sehen.

Liegt ein Prozess mit diskretem Spektrum vor, dessen einzelne harmonische Schwingungen genau Fourierfrequenzen besitzen, schätzt das Periodogramm das Quadrat der Amplituden dieser Schwingungen. Besitzen die Schwingungen andere Frequenzen als die Fourierfrequenzen, sind die Werte des Periodogramms auch bei benachbarten Frequenzen ungleich Null (siehe Bloomfield, 2000).

Die schnelle Fouriertransformation („Fast Fourier Transform“ siehe z. B. Bloomfield, 2000) kann genutzt werden, um die diskrete Fouriertransformation und darüber das Periodogramm an den Fourierfrequenzen zu berechnen. Dabei wird durch geschicktes Aufteilen der Summe $\sum_{t=1}^n x_t e^{-i\frac{2\pi j}{n}t}$, für $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, die Komplexität der Berechnung der Fouriertransformierten von n^2 auf $n \log_2 n$ verringert. Am schnellsten arbeitet der Algorithmus für $n \in 2^{\mathbb{N}}$.

Obwohl das Periodogramm asymptotisch erwartungstreu für alle $\omega \in [-\pi, \pi]$ ist, ist es in seiner ursprünglichen Form als Schätzer für die Spektraldichte $f(\omega)$ bei Prozessen mit stetigem Spektrum unbefriedigend (siehe z. B. [Priestley, 1981a](#)), denn

- das Periodogramm ist nicht konsistent, also $\text{Var}(I(\omega)) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$,
- als Funktion von ω ist das Periodogramm starken unregelmäßigen Fluktuationen unterworfen und eignet sich dementsprechend nicht als Schätzer für die stetige Spektraldichte $f(\omega)$.

Im Folgenden werden Techniken zur verbesserten Spektraldichteschätzung behandelt. Nicht-parametrische Spektraldichteschätzer, die asymptotisch erwartungstreu und konsistent für alle ω sind, können erzeugt werden, indem das Periodogramm *geglättet* wird. Eine Glättung über die Frequenzen ist insbesondere deshalb sinnvoll, weil $I(\omega_1)$ und $I(\omega_2)$ für jedes beliebige Paar von Frequenzen $\omega_1 \neq \omega_2$ asymptotisch unabhängig sind für wachsendes n .

Eine Verzerrung des Spektraldichteschätzers, die bei einer endlichen Stichprobe auftreten kann, ist das so genannte Leakage (engl. für Auslaufen). Damit wird das Phänomen bezeichnet, dass stark ausgeprägte Spitzen in der Spektraldichte im Periodogramm abgeflacht und verbreitert dargestellt werden. Die diskrete Fouriertransformation nimmt die Daten als unendliche periodische Reihe an, so dass ein Sprung, der eventuell zwischen den Werten am Anfang und Ende der Datenreihe existiert, höhere Werte bei allen Frequenzen erzeugt. Das ist insbesondere der Fall, wenn deterministische Anteile im Prozess vorhanden sind, deren Frequenzen nicht auf die Fourierfrequenzen fallen. Durch die Anwendung eines *Tapers* auf die Daten, also einer Heruntergewichtung der Ränder der Zeitreihe vor der Fouriertransformation, kann erreicht werden, dass der Schätzer ein reduziertes Leakage, also eine kleinere Verzerrung neben hohen Gipfeln des Periodogramms, hat.

Glätten

Allgemein ist ein Kernschätzer (siehe [Venables und Ripley, 2002](#)) gegeben durch

$$\hat{f}_K(\omega) = \frac{1}{2\pi b} \int_{-\pi}^{\pi} K\left(\frac{\omega - \lambda}{b}\right) I(\lambda) d\lambda. \quad (2.8)$$

Der Kern $K(\alpha)$ ist eine nicht negative symmetrische Funktion, die so normiert ist, dass $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\alpha) d\alpha = 1$. [Bloomfield \(2000\)](#) definiert die Bandbreite, die ein Maß dafür ist,

wieviele der benachbarten Frequenzen beim Spektraldichteschätzer eine Rolle spielen, als $\sqrt{2 \left| \mathbb{E} \left(\hat{f}(\omega) \right) - f(\omega) \right| / f''(\omega)}$, die proportional zu b ist.

Aus Gründen der einfachen Berechenbarkeit ist es sinnvoll die Approximation

$$\hat{f}_K(\omega) \approx \frac{1}{nb} \sum_k K\left(\frac{\omega - \omega_k}{b}\right) I(\omega_k) \quad (2.9)$$

mit der Summe über die Fourier-Frequenzen zu verwenden. Sei $\{g_n(\cdot)\}$ eine Folge von Gewichtsfunktionen mit $g_n(k) = \frac{1}{nb} K\left(\frac{\omega_k - j}{b}\right)$ definiert, für die $g_n(k) \geq 0$, $g_n(k) = g_n(-k)$, $\sum_{|k| \leq m_n} g_n(k) = 1$ und $\sum_{|k| \leq m_n} g_n^2(k) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Für die Folge $\{m_n\}$ aus \mathbb{N} gilt, dass $m_n \rightarrow \infty$ und $\frac{m_n}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann entspricht die Approximation (2.9) an allen Fourierfrequenzen ω_j dem in [Brockwell und Davis \(1987, S. 341-343\)](#) definierten geglätteten Periodogramm („discrete spectral average estimator“)

$$\hat{f}_P(\omega_j) = \sum_{|k| \leq m_n} g_n(k) I(\omega_j - k). \quad (2.10)$$

Damit auch die Werte an den Rändern des Definitionsbereiches $[-\pi, \pi]$ existieren und angemessen geglättet werden, wird das Periodogramm $I(\omega)$ als 2π -periodische Funktion definiert. [Brockwell und Davis \(1987\)](#) zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen an $\{X_t\}$ der Schätzer in (2.10) für $f(\omega)$ gleichmäßig konsistent im quadratischen Mittel ist.

Ein oft besprochener Schätzer (siehe z. B. [Brockwell und Davis, 1987](#)), der die geschätzte Autokovarianzfunktion glättet bevor die Spektraldichte geschätzt wird, ist gegeben durch den „Lag-window-estimator“

$$\hat{f}_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| \leq M_n} w\left(\frac{h}{M_n}\right) \hat{\gamma}(h) e^{-i\omega h},$$

wobei $w(\cdot)$ eine Gewichtsfunktion ist mit $w(0) = 1$, $w(x) = w(-x)$ und $|w(x)| \leq 1$ für alle x , und $w(x) = 0$ für alle $|x| > 1$ und $M_n \rightarrow \infty$ und $\frac{M_n}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Mit dem Kern $W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| \leq M_n} w\left(\frac{h}{M_n}\right) e^{-i\omega h}$ kann dieser Schätzer wieder in die Form (2.8) gebracht werden:

$$\hat{f}_L(\omega) \approx \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda) I(\omega - \lambda) d\lambda,$$

wobei mit $I(0) = 0$ die Gleichheit gilt.

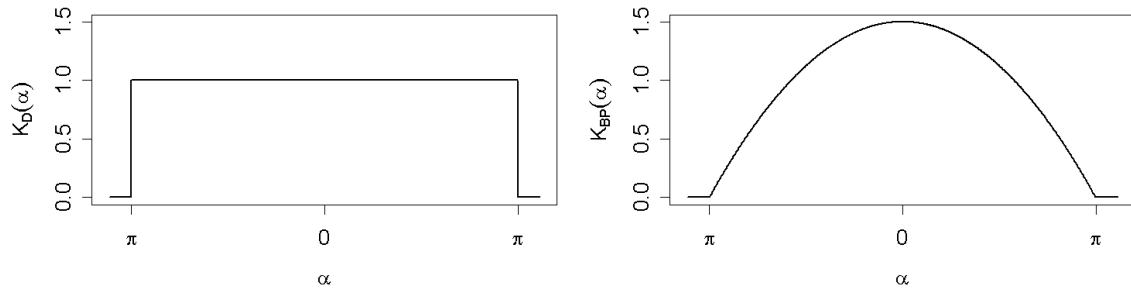


Abbildung 2.1: Daniell-Kern und Bartlett-Priestley-Kern

Beispiel 2.2 (siehe z. B. [Priestley, 1981a](#))

a) Der Daniellschätzer

$$\hat{f}_D(\omega_j) = \frac{1}{2d+1} \sum_{k=j-d}^{j+d} I(\omega_k), \quad \text{für } \omega_j = \frac{2\pi j}{n} \text{ mit } j \in \left\{0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$$

ist ein einfaches geglättetes Periodogramm mit gleichen Gewichten auf allen Frequenzen im betrachteten Fenster. Als Kernschätzer ausgedrückt, besitzt er den Kern

$$K_D(\alpha) = \mathbb{I}_{[-\pi, \pi]}(\alpha).$$

b) Der Bartlett-Priestley-Kern ist definiert als

$$K_{BP}(\alpha) = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\right) \mathbb{I}_{[-\pi, \pi]}(\alpha).$$

Dieser Kern wurde speziell für die Spektralanalyse entwickelt. Mit dieser Form des Kerns wird ein approximativer Ausdruck für die relative mittlere quadratische Abweichung der geschätzten von der wahren Spektraldichte minimiert.

Die Kerne sind in [Abbildung 2.1](#) graphisch dargestellt.

Das Glätten des Periodogramms mit hohen Bandbreiten kann zu großen Verzerrungen führen, wenn lokale Extremwerte als schmale Spitzen oder Täler auftreten. In der Nachbarschaft von hohen Werten ist diese Verzerrung durch das Glätten in der Regel wesentlich stärker ausgeprägt als die Verzerrung, die schon bei Berechnung des Periodogramms vorhanden ist. Je größer die Bandbreite, desto kleiner ist die Varianz der Schätzung, aber desto schlechter ist die Frequenz-Auflösung, die auch eine größere Verzerrung beinhaltet, und umgekehrt. In [Jenkins und Watts \(1968\)](#) wird gezeigt, dass die Wahl der Bandbreite entscheidender ist als die Wahl der Gewichtsfunktion.

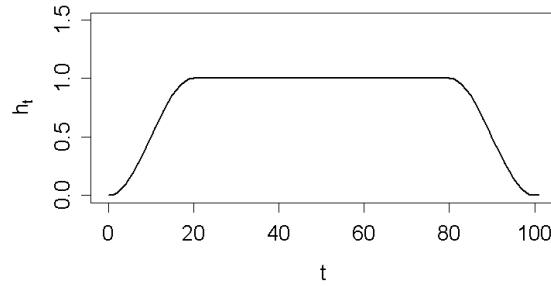


Abbildung 2.2: Split-Cosine-Taper mit $\beta = 0.2$ und $n = 100$

Tapern

Beim Tapern wird die ursprüngliche Zeitreihe x_1, x_2, \dots, x_n mit einem geeigneten Datenfenster (Taper) h_t multipliziert, so dass Beobachtungen an den Rändern herunter gewichtet werden, bevor das Periodogramm oder ein Spektraldichteschätzer berechnet wird. Ein getapertes Periodogramm ist dann gegeben durch

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{2\pi \sum_{t=1}^n h_t^2} \left| \sum_{t=1}^n h_t x_t e^{-i\omega t} \right|^2.$$

Die Verzerrung des Spektraldichteschätzers in der Nähe von Gipfeln wird durch das Tapern merklich verringert, wenn die zugehörige Frequenz keine Fourierfrequenz ist. Der Nachteil ist jedoch, dass die Varianz durch das Tapern vergrößert wird. Besonders zu empfehlen ist das Tapern, wenn starke Anteile mit niedrigen Frequenzen vorhanden sind (Koopmans, 1974).

Beispiel 2.3 Eine oft verwendete Taperfunktion ist der Split-Cosine-Taper, gegeben durch

$$h_t = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi t}{\beta n} \right) \right), & \text{falls } t \leq \beta n \\ 1, & \text{falls } \beta n < t < (1 - \beta)n \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(n-t)}{\beta n} \right) \right), & \text{falls } (1 - \beta)n \leq t, \end{cases}$$

für $t \in \{1, \dots, n\}$, wobei $0 < \beta \leq 0.5$ den Anteil der Zeitreihe festlegt, der am Anfang und am Ende heruntergewichtet wird. Abbildung 2.2 stellt eine solche Taperfunktion mit $\beta = 0.2$ und $n = 100$ graphisch dar.

Spektraldichteschätzer über gemittelte Periodogramme

Ein Spektraldichteschätzer mit vergleichsweise niedriger Varianz kann, wenn n groß ist, dadurch erzeugt werden, dass Periodogramme in Segmenten der Zeitreihe mit Länge $N < n$

berechnet und diese dann gemittelt werden. Solche Schätzer und deren Eigenschaften werden unter anderem von [Welch \(1967\)](#) und [Groves und Hannan \(1968\)](#) beschrieben. Bezeichne $x_{1,k}, \dots, x_{N,k}$ das k -te Segment der Zeitreihe, mit $k \in \{1, \dots, K\}$, wobei sich die einzelnen Segmente auch überlappen dürfen. Mit einer geeigneten Taperfunktion h_j , mit $j \in \{1, \dots, N\}$ und $\sum_{t=1}^n h_t^2 = 1$, ergibt sich der Schätzer

$$\hat{f}_{\text{MW}}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N b_t x_{t,k} e^{i\omega t} \right|^2. \quad (2.11)$$

Ein solcher Schätzer besitzt bei Verwendung der gleichen Anzahl von Daten eine wesentlich niedrigere Frequenzauflösung als ein geglättetes Periodogramm. Außerdem beschreiben [Groves und Hannan \(1968\)](#), dass das entstehende Leakage breiter ist als bei geglätteten Periodogrammen. Ein Vorteil dieses Schätzers ist aber, dass die asymptotische Unabhängigkeit zwischen den Werten der Spektraldichteschätzung bei verschiedenen Frequenzen erhalten bleibt und die Varianz gegenüber dem Periodogramm deutlich verringert wird.

Robuster Spektraldichteschätzer

Ein robuster spektraler Kernschätzer, vorgestellt in [von Sachs \(1991, 1994\)](#), soll den Anteil der stetigen Spektraldichte schätzen, ohne die scharfen Spitzen des diskreten Teils des Spektrums mit einzubeziehen. Angelehnt ist er an den in Gleichung (2.8) definierten nicht robusten Kernschätzer. Für jedes $\omega \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ ist er definiert als derjenige Wert $\hat{f}_r(\omega) := s$, mit $s > 0$, für den der Ausdruck

$$H_n(\omega, s) = \frac{1}{nb} \sum_{|j| \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} K\left(\frac{\omega - \omega_j}{b}\right) \Psi\left(\frac{I(\omega_j)}{s} - 1\right), \quad (2.12)$$

den Wert Null annimmt. Die Ψ -Funktion ist hierbei gewählt als eine Modifikation der Huber-Funktion

$$\Psi_H(x) = \max\{-c, \min(x, c)\}, \quad c > 0,$$

angepasst an den hier vorliegenden Fall einer asymmetrischen Verteilung von $I(\omega)$. Die Modifikation

$$\Psi_m(x) = \begin{cases} (1 - e^{-c}) \cdot \max\{-c, x\}, & \text{falls } x \leq 0 \\ \min\{x, c\}, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

mit $1 < c < 2$ ist so konstruiert, dass sie die Bedingung

$$\mathbb{E} \left(\Psi_m \left(\frac{I(\omega)}{f(\omega)} - 1 \right) \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

erfüllt. Damit ist bei existierender Spektraldichte $f(\omega)$ gesichert, dass $\hat{f}_r(\omega)$ ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für $f(\omega)$ ist. Auch die Konsistenz kann unter bestimmten Bedingungen nachgewiesen werden.

Spektraldichteschätzer über Zeitreihenmodelle (ARMA)

Wenn die Gestalt der beobachteten Zeitreihe vermuten lässt, dass der unbekannte zugrunde liegende Prozess durch einen ARMA-Prozess approximiert werden kann, dann kann man auch modellgestützte Spektraldichteschätzer bestimmen. Hierbei wird angenommen, dass die Spektraldichte des Prozesses existiert. Für stationäre und invertierbare ARMA(p, q)-Prozesse ist das Spektrum gegeben durch

$$f(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2 |1 + \sum_{j=1}^q \theta_j e^{-i\omega j}|^2}{2\pi |1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\omega j}|^2}.$$

Der zugehörige Schätzer $\hat{f}_{\text{ARMA}}(\omega)$ wird bestimmt, indem die Parameter des Prozesses $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ und σ_ϵ^2 durch geeignete Schätzer $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q$ und $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ ersetzt werden. Die Eigenschaften dieses Schätzers hängen stark von den Parameterschätzern im ARMA-Modell und von der Wahl von p und q ab (siehe [Brockwell und Davis, 1987](#)). Eine Kritik an diesem Verfahren ist, dass ein eigentlich nichtparametrisches Problem künstlich zu einem parametrischen Problem gemacht wird (z. B. [Diggle, 1990](#)). Ein auf ARMA-Modellen basierender Schätzer kann durch die globalen Annahmen stark verfälscht sein, wenn selbige nicht zutreffen. Vorteile dieser Methode sind die gute Anwendbarkeit bei kleinen Stichprobenumfängen, dass im Allgemeinen weniger Parameter geschätzt werden müssen und dass keine Glättung mehr erfolgen muss.

Schätzer für die normierte Spektraldichte

In vielen Bereichen wird mit der normierten spektralen Verteilungsfunktion $\check{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sigma^2}$ und der normierten Spektraldichte

$$\check{f}(\omega) = \frac{f(\omega)}{\sigma^2} \tag{2.13}$$

gearbeitet, für die $\check{F}(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \check{f}(\lambda) d\lambda = 1$ gilt. Diese haben die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte und -verteilung. Der intuitive Schätzer der Spektraldichte ist das normierte Periodogramm $\check{I}(\omega) = \frac{I(\omega)}{s^2}$ mit $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$. Verbesserungen des Schätzers sind analog zu den Überlegungen bei nicht normiertem Spektrum möglich (siehe [Priestley, 1981a](#)).

Schätzer für das integrierte Spektrum

Die Funktion

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} I(\lambda) d\lambda, \quad \text{für } \omega \in [-\pi, \pi], \quad (2.14)$$

ist ein asymptotisch erwartungstreuer und auch ohne Glättung konsistenter Schätzer für $F(\omega)$, der durch die Riemann-Summe über die Fourierfrequenzen

$$\hat{F}(\omega_k) = \frac{4\pi}{n} \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^k I(\omega_j), \quad \text{für } k \in \left\{ -\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}, \quad (2.15)$$

approximiert werden kann ([Priestley, 1981a](#)).

Genauso kann das positive integrierte Spektrum durch

$$\tilde{F}^+(\omega) = \int_0^{\omega} I(\lambda) d\lambda \quad (2.16)$$

beziehungsweise durch

$$\hat{F}^+(\omega_k) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^k I(\omega_j), \quad (2.17)$$

geschätzt werden.

Logarithmische Skala

Spektraldichte, Periodogramme und andere Spektraldichteschätzer werden oft auf einer logarithmischen Skala abgetragen. Ein Grund dafür ist, dass Konfidenzintervalle für die logarithmierte Spektraldichte über die Frequenzen hinweg konstante Breite haben, während bei der einfachen Spektraldichte bei Frequenzen mit hohen Spektraldichtewerten auch die Streuung größer ist ([Koopmans, 1974](#), S. 275). Durch die Transformation mit dem natürlichen Logarithmus wird also nicht nur die Schiefe der Verteilung der Periodogrammwerte verringert, sondern es findet auch eine Varianzstabilisierung über die Frequenzen hinweg statt.

2.2.4 Prozesse mit gemischten Spektren

Sei das Ziel die Identifizierung von so genannten versteckten Frequenzen, die zu den deterministischen Teilen der Zeitreihe gehören. Dazu hat [von Sachs \(1991, 1994\)](#) die folgende Methode vorgeschlagen. Der Prozess $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sei schwach stationär und es gelte

$$Y_t = Z_t + X_t. \quad (2.18)$$

Sei die deterministische Komponente

$$Z_t = \sum_{j=1}^r c_j \cos(\lambda_j t + \phi_j)$$

aus endlich vielen harmonischen Schwingungen mit den Frequenzen $\lambda_j \in [-\pi, \pi]$, mit $j \in \{1, \dots, r\}$ und $r \in \mathbb{N}$, zusammengesetzt. Die c_j seien Konstanten und die ϕ_j , für $j \in \{1, \dots, r\}$, seien unabhängige, gleich verteilte Zufallsvariablen auf $[-\pi, \pi]$. Die stochastische Komponente X_t sei ein linearer stationärer Prozess mit stetigem Spektrum, für den eine Spektraldichte $f_X(\omega)$ existiert.

Sei $I(\omega)$ das Periodogramm der getaperten Zeitreihe $\{y_t\}$ als Realisation des Prozesses $\{Y_t\}$. [Quinn und Hannan \(2001\)](#) zeigen, dass für festes r der approximative Maximum-Likelihood-Schätzer für die versteckten Frequenzen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ durch diejenigen r Fourierfrequenzen ω_k gegeben sind, die zu den größten Werten von $I(\omega_k)/f_X(\omega_k)$ gehören. In [Chen \(1988\)](#) wird die Statistik $v_k = I(\omega_k)/(f_X(\omega_k) \ln n)$ vorgeschlagen. Wenn keine versteckten Frequenzen im Signal vorhanden sind, also $Y_t = X_t$, gilt für hinreichend große n und für alle $\epsilon > 0$, dass $v_k < 1 + \epsilon$ für alle $k \in \{1, \dots, r\}$. Überschreitet v_k den Wert 1 relevant, ist dies ein Indiz für eine versteckte Frequenz bei ω_k oder einer benachbarten Frequenz.

Da $f_X(\omega_k)$ unbekannt ist, muss die Spektraldichte von $\{X_t\}$ robust gegen Ausreißer in einzelnen Frequenzen aus den Realisationen von $\{Y_t\}$ geschätzt werden. Dazu eignet sich der zuvor beschriebene robuste spektrale Kernschätzer $\hat{f}_{X,r}(\omega_k)$ ([von Sachs, 1994](#)).

In [von Sachs \(1991\)](#) wird nach dem Vorbild von [Chen \(1988\)](#) der folgende Algorithmus zum Aufspüren versteckter Frequenzen formuliert.

- Berechne $\hat{v}_j = I(\omega_j)/(\hat{f}_{X,r}(\omega_j) \ln n)$ bei den Frequenzen $\omega_j = \frac{\pi j}{n}$ mit $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dies ist ein Frequenzgitter, das doppelt so dicht ist wie die Fourierfrequenzen.
- Wähle $\epsilon > 0$. [Chen](#) schlägt $\epsilon \in [0.2, 0.5]$ vor.

- Finde diejenigen j , für die $\hat{v}_j > 1 + \epsilon$ gilt und nenne sie $j_1 < \dots < j_R$, wenn R solcher Frequenzen gefunden werden.
- Wenn $\omega_{j_{h+1}} - \omega_{j_h} < \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ gilt, so werden $\omega_{j_{h+1}}$ und ω_{j_h} der gleichen Gruppe zugeordnet, $h \in \{1, \dots, R-1\}$. Es werden also $\hat{r} \leq R$ Gruppen konstruiert, wobei nahe beieinander liegende Frequenzen in die gleiche Gruppe kommen, weil sie als eine Frequenz gesehen werden sollen.
- Finde diejenigen $j(p)$, die \hat{v}_j in der p -ten Gruppe maximieren, $p \in \{1, \dots, \hat{r}\}$. Der Wert $\hat{\lambda}_p = \omega_{j(p)} = \frac{\pi j(p)}{n}$ ist dann ein vorläufiger, auf das vorgegebene Frequenzgitter beschränkter Schätzwert für die p -te versteckte Frequenz.
- In einem weiteren Schritt können die Frequenzen genauer auf $[-\pi, \pi]$ geschätzt werden. Bei großem n ist jedoch keine relevante Verbesserung der Schätzer zu erwarten. Verfahren hierzu werden in [Quinn und Hannan \(2001\)](#) vorgestellt, die auch mehrere alternative Schätzmethoden für r und ω_j , $j \in \{1, \dots, r\}$, beschreiben.

Nachdem die versteckten Frequenzen identifiziert wurden, kann der Anteil der Zeitreihe mit diskretem Spektrum geschätzt werden. Dabei sind die Fehler x_t in dem Regressionsmodell

$$y_t = \sum_{j=1}^{\hat{r}} c_j \cos(\hat{\lambda}_j t + \phi_j) + x_t = \sum_{j=1}^{\hat{r}} \left(a_j \cos(\hat{\lambda}_j t) + b_j \sin(\hat{\lambda}_j t) \right) + x_t,$$

korreliert, und die Koeffizienten a_j und b_j , $j \in \{1, \dots, \hat{r}\}$, sind zufällig. [Priestley \(1981a\)](#) zeigt aber, dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer für eine Regression mit Sinus- und Cosinusfunktion immer noch asymptotisch effizient ist. Die Koeffizientenschätzer für eine beobachtete Zeitreihe y_1, \dots, y_n sind also gegeben durch ([Bloomfield, 2000](#))

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{t=1}^n y_t \cos(\hat{\lambda}_j t) \sum_{t=1}^n (\sin(\hat{\lambda}_j t))^2 - \sum_{t=1}^n y_t \sin(\hat{\lambda}_j t) \sum_{t=1}^n \cos(\hat{\lambda}_j t) \sin(\hat{\lambda}_j t) \right), \\ \hat{b}_j &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{t=1}^n y_t \sin(\hat{\lambda}_j t) \sum_{t=1}^n (\cos(\hat{\lambda}_j t))^2 - \sum_{t=1}^n y_t \cos(\hat{\lambda}_j t) \sum_{t=1}^n \cos(\hat{\lambda}_j t) \sin(\hat{\lambda}_j t) \right), \\ \text{mit } \Delta &= \sum_{t=1}^n (\cos(\hat{\lambda}_j t))^2 \sum_{t=1}^n (\sin(\hat{\lambda}_j t))^2 - \left(\sum_{t=1}^n \cos(\hat{\lambda}_j t) \sin(\hat{\lambda}_j t) \right)^2. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Schätzer für die Koeffizienten der alternativen Schreibweise als

$$\hat{c}_j = \sqrt{\hat{a}_j + \hat{b}_j},$$

$$\hat{\phi}_j = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{\hat{b}_j}{\hat{a}_j}\right), & \text{falls } \hat{a}_j > 0 \\ \arctan\left(-\frac{\hat{b}_j}{\hat{a}_j}\right) - \pi, & \text{falls } \hat{a}_j < 0, \hat{b}_j > 0 \\ \arctan\left(-\frac{\hat{b}_j}{\hat{a}_j}\right) + \pi, & \text{falls } \hat{a}_j < 0, \hat{b}_j \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } \hat{a}_j = 0, \hat{b}_j > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \hat{a}_j = 0, \hat{b}_j < 0 \\ \text{beliebig}, & \text{falls } \hat{a}_j = 0, \hat{b}_j = 0. \end{cases}$$

2.3 Spektralanalyse für nichtstationäre Zeitreihen

Sei $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stochastischer Prozess mit Erwartungswert 0 für alle t , aber mit einer zeitveränderlichen Kovarianzstruktur, so dass keine schwache Stationarität vorliegt. Damit Aussagen über die Korrelationsstruktur aus Beobachtungen eines nichtstationären Prozesses abgeleitet werden können, müssen einige Annahmen über den Prozess getroffen werden. Hierzu wird verlangt, dass sich die Korrelationsstruktur des Prozesses nicht abrupt ändert.

In [Priestley \(1981b\)](#) wird die Idee des evolutionären Spektrums vorgestellt. Ausgangspunkt ist die Spektraldarstellung stationärer Prozesse (2.5), bei der die Konstante ω in der komplexen Exponentialfunktion $e^{i\omega t}$ als „Frequenz“ und $E(|dZ(\omega)|^2)$ als der „Leistungsanteil“ bei dieser Frequenz interpretiert wird. Für nichtstationäre Prozesse kann wie in (2.6) eine Funktion $A_t(\omega)$ eingeführt werden, die nun jedoch zeitabhängig ist. Um ähnliche Bedeutungen der Begriffe „Frequenz“ und „Leistung“ bei der Spektraldarstellung nichtstationärer Prozesse zu erhalten, fordert [Priestley \(1981b\)](#) besondere Eigenschaften von $A_t(\omega)$ (siehe auch [Priestley, 1968](#)).

Eine weitere, gerade in den Ingenieurwissenschaften häufig angewendete Darstellung eines zeitveränderlichen Spektrums ist das Wigner-Spektrum (siehe z. B. [Cohen, 1989](#)). Es wird über eine zeitabhängige Autokovarianzfunktion definiert. Wie in [Daubechies \(1994\)](#) beschrieben, ist der Vorteil dieses Verfahrens, dass keine Fensterfunktion oder ähnliches gewählt werden muss. Allerdings ist eine Interpretation des Wigner-Spektrums unter Umständen schwierig, da es auch negative Werte annehmen kann. Das Signal geht außerdem quadra-

tisch in die Wigner-Verteilung ein, wodurch Interferenzphänomene entstehen können. Es eignet sich vor allem bei kurzen Zeitreihen, bei denen sich auch die längere Rechenzeit nicht negativ bemerkbar macht.

Die Theorie zu Wavelets bietet eine andere Zeit-Frequenz-Darstellung eines Signals oder einer Zeitreihe (Daubechies, 1994), da sie eine große Familie von Funktionen verwendet und sich nicht auf gefensterte trigonometrische Funktionen beschränkt. Im Gegensatz zu den Fensterfunktionen bei Spektren, die auf der Fouriertransformation basieren, bekommt man bei einer Wavelet-Analyse für unterschiedliche Skalenparameter, die eine Verallgemeinerung der Frequenzen darstellen, unterschiedliche Zeitauflösungen. Dadurch ist sie besonders geeignet, um z. B. kurze Spitzen in einer Zeitreihe darzustellen.

Wegen der guten Interpretierbarkeit wird sich in diesem Abschnitt auf die Theorie des evolutionären Spektrums oder darauf basierende Darstellungen beschränkt. Nachdem die Ausführungen von Priestley (1981b) erläutert werden, wird die Theorie von Dahlhaus (1996) vorgestellt, mit der eine für nichtstationäre Prozesse sinnvolle Asymptotik und mit der lokalen Stationarität ein erweiterter Stationaritätsbegriff definiert wird. Außerdem werden weitere Stationaritätsdefinitionen eingeführt, die das spätere Vorgehen zur Schätzung der zeitveränderlichen Spektraldichte rechtfertigen. Als Schätzer werden das Spektrogramm und die von Dahlhaus (1996) und Priestley (1981b) entwickelten Möglichkeiten, das Spektrogramm zu modifizieren, beschrieben. Schließlich wird mit dem SLEX-Periodogramm eine Darstellungsform des zeitveränderlichen Spektrums mit besonderen Eigenschaften vorgestellt.

2.3.1 Evolutionäres Spektrum

Um eine Verallgemeinerung der Darstellung (2.5) auf nichtstationäre Prozesse zu erhalten, lockert Priestley (1981a) die Annahme der schwachen Stationarität, so dass für die Kovarianzfunktion nur noch gelten muss, dass sie darstellbar ist als

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_s^*(\omega) \phi_t(\omega) d\mu(\omega). \quad (2.20)$$

Die komplexwertige Funktion $\phi_t(\omega)$, mit $t \in \mathbb{Z}$ und $\omega \in [-\pi, \pi]$, soll bezüglich des Maßes μ quadratisch integrierbar sein. Unter diesen Bedingungen ist der Prozess darstellbar als

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_t(\omega) dZ(\omega), \quad (2.21)$$

mit $E(dZ(\omega)) = 0$, $E(|dZ(\omega)|^2) = d\mu(\omega)$ und $E(dZ(\omega_1)dZ^*(\omega_2)) = 0$ für $\omega_1 \neq \omega_2$. Für die Darstellung eines stationären Prozesses wählt man wie in Gleichung (2.5) $\phi_t(\omega) = e^{i\omega t}$. Gleichung (2.20) entspricht bei stationärem $\{X_t\}$ der Gleichung (2.3) mit $h = t - s$ und $\mu(\omega) = F(\omega)$.

Definition 2.6 (*Priestley, 1981b*)

Die Familie der oszillierenden Funktionen ist gegeben durch

$$\phi_t(\omega) = A_t(\omega)e^{i\omega t},$$

wobei $A_t(\omega)$ die Fouriertransformierte einer Funktion $dK_\omega(\lambda)$ ist, deren Absolutbetrag ein globales Maximum bei $\lambda = 0$ besitzt.

Eine Funktion aus dieser Familie kann man sich als Beschreibung einer harmonischen Schwingung mit Frequenz ω und mit sich für jede Frequenz unterschiedlich verhaltender, zeitveränderlicher Amplitude vorstellen. Die Bedingung an $A_t(\omega)$ soll dafür sorgen, dass $A_t(\omega)$ für festes ω im Wesentlichen eine Trendfunktion ist und wenig oszillierende Anteile besitzt.

Definition 2.7 (*Priestley, 1981b*)

Ein Prozess $\{X_t\}$ wird oszillierend genannt, wenn er über die folgende Spektraldarstellung formuliert werden kann:

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A_t(\omega)e^{i\omega t} dZ(\omega). \quad (2.22)$$

Dabei ist $A_t(\omega)$ wie in Definition 2.6 und $dZ(\omega)$ wie in Darstellung (2.21) gegeben.

Trotz der Einschränkung auf die Familie der oszillierenden Funktionen ist diese Darstellung im Allgemeinen in Bezug auf $A_t(\omega)$ nicht eindeutig. Deshalb wird diejenige Funktion $A_t(\omega)$ gewählt, die über t am wenigsten stark variiert, in dem Sinne, dass ihre Fouriertransformierte $dK_\omega(\lambda)$ am stärksten bei Null konzentriert ist. Die genaue Definition dieser Konzentration ist in Priestley (1981b, Abschnitt 11.2) nachzulesen, wo in diesem Zusammenhang so genannte semi-stationäre Prozesse definiert werden, bei denen $A_t(\omega)$ besonders glatt bezüglich t ist.

Außerdem wird die Standardisierung $A_0(\omega) = 1$ eingeführt. Das evolutionäre Spektrum zum Zeitpunkt $t = 0$ ist definiert als $d\mu(\omega)$ und für $t > 0$ ist es gegeben durch $dF(t, \omega) = |A_t(\omega)|^2 d\mu(\omega)$. Damit stellt $|A_t(\omega)|^2$ die Veränderung des Spektrums über die Zeit dar. Ist $\mu(\omega)$ absolut stetig in Bezug auf das Lebesgue-Maß, so existiert die evolutionäre Spektraldichte $f(t, \omega) := \frac{dF(t, \omega)}{d\omega}$ für alle ω , so dass $f(0, \omega) = \frac{d\mu(\omega)}{d\omega}$ für $t = 0$ und $f(t, \omega) = |A_t(\omega)|^2 f(0, \omega)$

für $t > 0$. Die Varianz $\text{Var}(X_t) = \int_{-\pi}^{\pi} dF(t, \omega) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \omega) d\omega$ (letztere Gleichung gilt nur, wenn die Spektraldichte existiert) ist interpretierbar als die Gesamtleistung des Prozesses zum Zeitpunkt t und $dF(t, \omega)$ ist der Anteil der Frequenz ω daran.

Eine Kritik von [Dahlhaus \(1996\)](#) an den Ausführungen Priestleys stützt sich darauf, dass diese keine asymptotischen Betrachtungen ermöglichen. Wächst die Länge n einer Zeitreihe x_1, \dots, x_n , bedeutet dies keinen Informationsgewinn für einen approximativ stationären Ausschnitt dieser Reihe. Die üblichen Folgerungen aus der Asymptotik stationärer Prozesse sind somit nicht mehr möglich. Bei stationären Prozessen ermöglichen zusätzliche Daten mit der gleichen Struktur, selbige genauer zu schätzen. Bei nichtstationären Prozessen dient ein Ausschnitt aus einem anderen Teil der Zeitreihe hingegen nicht zur Verbesserung der Aussagen für den betrachteten Ausschnitt.

2.3.2 Lokale Stationarität

Statt einen Prozess $\{X_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$ mit steigendem n immer länger werden zu lassen, werden in [Dahlhaus \(1996, 1997\)](#) Prozesse $\{X_{t,n}\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$ so definiert, dass mit steigendem n mehr Daten für jeden lokal stationären Abschnitt zur Verfügung stehen.

Außer der Änderung in der Interpretation der Asymptotik ist die Theorie von [Dahlhaus \(1996\)](#) sehr ähnlich zu Priestleys evolutionärem Spektrum. Die Idee ist, in der Darstellung (2.22) nur die Zeitskala zu verändern. Der Ausdruck $A_t(\omega)$ mit $t \in \mathbb{Z}$ wird hier durch $A\left(\frac{t}{n}, \omega\right)$ mit $\frac{t}{n} = u \in [0, 1]$ ersetzt. Außerdem verwendet Dahlhaus eine andere Standardisierung, so dass $|A\left(\frac{t}{n}, \omega\right)|^2$ selbst die zeitveränderliche Spektraldichte ist und nicht mehr die Veränderung über die Zeit. Es stellt sich allerdings heraus, dass z. B. AR-Prozesse mit zeitveränderlichen Parametern nur asymptotisch in dieser Weise dargestellt werden können, so dass folgende Definition eingeführt wird.

Definition 2.8 ([Dahlhaus, 1997](#))

Ein Ausschnitt eines stochastischen Prozesses $X_{t,n}$, $t \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, mit Erwartungswert 0 heißt lokal stationär mit Transferfunktion $A_{t,n}^0$, wenn eine Darstellung

$$X_{t,n} = \int_{-\pi}^{\pi} A_{t,n}^0(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega)$$

existiert. Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(i) $Z(\omega)$ ist ein stochastischer Prozess auf $[-\pi, \pi]$ mit $Z^*(\omega) = Z(-\omega)$ und

$$\text{cum}(dZ(\omega_1), \dots, dZ(\omega_k)) = \eta \left(\sum_{j=1}^k \omega_j \right) g_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) d\omega_1 \cdot \dots \cdot d\omega_k, \quad (2.23)$$

wobei $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, $|g_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1})| \leq c_k$, mit c_k konstant, für alle k gilt und $\eta(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi j)$ eine 2π -Erweiterung der Dirac-Delta-Funktion ist. Der Ausdruck $\text{cum}(dZ(\omega_1), \dots, dZ(\omega_k))$ bezeichnet die gemeinsame Kumulante von $dZ(\omega_1), \dots, dZ(\omega_k)$.

(ii) Es existiert eine Konstante K und eine in u stetige Funktion $A : [0, 1] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $A(u, -\omega) = A^*(u, \omega)$ und

$$\sup_t \sup_{\omega} \left| A_{t,n}^0(\omega) - A\left(\frac{t}{n}, \omega\right) \right| \leq \frac{K}{n} \quad \forall n. \quad (2.24)$$

Damit ist $f(u, \omega) = |A(u, \omega)|^2$ die zeitveränderliche (asymptotische) Spektraldichtefunktion.

Durch (2.23) wird unter anderem

$$\text{cum}(dZ(\omega)) = \text{E}(dZ(\omega)) = 0, \quad \text{und}$$

$$\text{cum}(dZ(\omega), dZ(\omega')) = \text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\omega')) = \text{E}(dZ(\omega) dZ^*(\omega')) = \delta(\omega - \omega') d\omega$$

für alle $\omega \neq \omega' \in (-\pi, \pi)$ gefordert.

Mit der Stetigkeit von $A(u, \omega)$ in u ist gesichert, dass der Prozess asymptotisch lokal eine stationäre Gestalt hat. Für verschiedene Untersuchungen, die auf lokaler Stationarität basieren, führt [Dahlhaus \(1997\)](#) zusätzlich zur Stetigkeit noch stärkere Glattheitsbedingungen für $A(u, \omega)$ ein.

Beispiel 2.4 ([Dahlhaus, 1996](#))

Sei $X_{t,n}$ ein ARMA-Prozess mit zeitveränderlichen Parametern, die in der Zeit stetige Funktionen darstellen. Das heißt, der Prozess ist eine Lösung von

$$X_{t,n} = \sum_{j=1}^p \phi_j \left(\frac{t}{n} \right) X_{t-j,n} + \sum_{j=1}^q \theta_j \left(\frac{t}{n} \right) \epsilon_{t-j,n} + \epsilon_{t,n},$$

und $\{\epsilon_{t,n}\}$ ist Weißes Rauschen mit Erwartungswert 0 und zeitveränderlicher Varianz $\sigma^2(\frac{t}{n})$.

Dann ist $X_{t,n}$ lokal stationär mit der zeitveränderlichen asymptotischen Spektraldichte

$$f(u, \omega) = \frac{\sigma^2(u) |1 + \sum_{j=1}^q \theta_j(u) e^{i\omega j}|^2}{2\pi |1 - \sum_{j=1}^p \phi_j(u) e^{i\omega j}|^2}.$$

Hier ist $A_{t,n}^0(\omega) \neq A(\frac{t}{n}, \omega)$ und die Gleichheit gilt nur asymptotisch gemäß Gleichung (2.24).

Für reine MA-Prozesse ist jedoch die Gleichheit gegeben.

2.3.3 Andere Abschwächungen der Stationarität

Einen Prozess, der sich an keiner Stelle graduell verändert, sondern aus endlich vielen stationären Segmenten zusammengesetzt ist, nennt man einen stückweise stationären Prozess.

Definition 2.9 (*Adak, 1998*)

Ein stochastischer Prozess $X_{t,n}, t \in \{1, \dots, n\}$, heißt stückweise stationär mit festen Sprungstellen $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{m+1} = 1$, wenn

$$X_{t,n} = \sum_{k=1}^m \mathbb{I}_{[u_k, u_{k+1})} \left(\frac{t}{n} \right) X_t^{(k)},$$

wobei $X_t^{(k)}, k \in \{0, 1, \dots, m\}$ unabhängige stationäre Prozesse mit Spektren $f^{(k)}(\lambda)$ sind.

Stückweise lokale Stationarität kann definiert werden, um auch Prozesse mit endlich vielen Sprüngen in einem sich ansonsten graduell über die Zeit verändernden Spektrum zuzulassen.

Definition 2.10 (*Adak, 1998*)

Ein stochastischer Prozess $X_{t,n}, t \in \{1, \dots, n\}$, mit Erwartungswert 0 heißt stückweise lokal stationär, wenn er lokal stationär gemäß Definition 2.8 an jeder Stelle $u \in [0, 1]$ bis auf endlich viele Sprungstellen ist.

Ein überlagerter stationärer Prozess versucht die harten Sprünge der stückweisen lokal stationären Prozesse zu vermeiden und kann somit einen lokal stationären Prozess besser approximieren.

Definition 2.11 (*Ombao u. a., 2001*)

Ein stochastischer Prozess $X_{t,n}, t \in \{1, \dots, n\}$, wird als ein überlagerter stationärer Prozess bezeichnet, wenn

$$X_{t,n} = \sum_{k=1}^m W_k \left(\frac{t/n - u_k}{u_{k+1} - u_k} \right) X_t^{(k)},$$

mit festen $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{m+1} = 1$. Die Anzahl der stationären Blöcke ist dann $m + 1$ und m ist die Anzahl der „Veränderungsstellen“ (analog zu den Sprungstellen zuvor). Die

Gewichtsfunktionen $W_k(\cdot)$ besitzen auch außerhalb des Intervalls $[u_k, u_{k+1})$ positive Werte und es muss gelten

$$\sum_{k=1}^m W_k\left(\frac{t/n - u_k}{u_{k+1} - u_k}\right) = 1 \quad \text{für alle } t.$$

Offensichtlich sind stückweise stationäre Prozesse auch stückweise lokal stationär, lokal stationäre Prozesse auch stückweise lokal stationär und stückweise stationäre Prozesse ein Spezialfall der überlagerten stationären Prozesse.

Betrachte die Anzahl m der Sprungstellen oder Veränderungsstellen aus den Definitionen 2.9 und 2.11 und die Anzahl der Beobachtungen n einer Zeitreihe. Wenn für $n \rightarrow \infty$ gilt, dass $m \rightarrow \infty$ und $\frac{m}{n} \rightarrow 0$, dann ist auch Folgendes gegeben:

- Jeder stückweise lokal stationäre Prozess kann durch einen stückweise stationären Prozess approximiert werden (Adak, 1998).
- Jeder lokal stationäre Prozess kann durch einen überlagert stationären Prozess approximiert werden (Ombao u. a., 2001).

Die Approximation ist hier in dem Sinne gemeint, dass das Mittel der erwarteten Abweichungsquadrate gegen Null geht. Mit der ersten Aussage wird gerechtfertigt, dass zum Schätzen der nichtstationären Spektraldichte stückweise lokal stationäre Prozesse in disjunkte Segmente aufgeteilt werden, auch in Bereichen des Prozesses, wo sich dessen Charakteristika graduell verändern. Mit der zweiten Aussage kann die Darstellung des empirischen Spektrums mit dem Spektrogramm und verwandten Verfahren, die über die Zeit gleitende Segmente benutzen, gerechtfertigt werden. Diese Darstellungen werden im nächsten Abschnitt besprochen.

2.3.4 Schätzer der zeitveränderlichen Spektraldichte

Eine Darstellungsform des empirischen zeitveränderlichen Spektrums für eine Zeitreihe $\{x_t\}$ für $t \in \{1, \dots, n\}$ ist das Spektrogramm

$$I(t, \omega_j) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{s=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} x_{t+s} e^{-i\omega_j(t+s)} \right|^2, \quad (2.25)$$

mit $t \in \{\frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, n - \frac{N}{2}\}$ und $\omega_j = \frac{2\pi j}{N}$ für $j \in \{0, 1, \dots, \frac{N}{2}\}$. Es ist eine Zusammensetzung von Periodogrammen, die in einem über die Zeitreihe gleitenden Fenster mit der Breite N (gerade) berechnet werden. Die Wahl der Fensterbreite beeinflusst Frequenz- und Zeitauflösung der Darstellung. Je größer das Fenster gewählt wird, desto feiner ist die Auflösung in Frequenzrichtung, aber desto glatter ist die Darstellung in der Zeitrichtung. Bei Wahl einer kleinen Fensterbreite sind schnelle Veränderungen in der Zeit erkennbar, aber es werden wenige Fourierfrequenzen dargestellt, so dass die Frequenzauflösung gröber wird. Als Schätzer für eine zeitveränderliche Spektraldichte ist das Spektrogramm ähnlicher Kritik auszusetzen wie das Periodogramm als Schätzer für die Spektraldichte stationärer Prozesse. Varianz und Verzerrung (Leakage) sind recht hoch. Ein kleines Fenster und damit wenige Beobachtungen bedeuten eine kleine Verzerrung durch die Nichtstationarität, aber auch eine schlechtere Frequenzauflösung und eine höhere Varianz.

Analog zum Vorgehen bei der Spektralanalyse stationärer Prozesse stellt [Dahlhaus \(1996\)](#) einen Kern-Schätzer für die zeitabhängige Spektraldichte vor. Dieser Schätzer entspricht einem Spektrogramm mit zuvor getaperten Daten in den Fensterausschnitten, die anschließend über die Frequenzen geglättet werden. Der Schätzer für $f(u, \omega)$ über dem Zeitintervall $\{[un] - \frac{N}{2} + 1, [un] + \frac{N}{2}\}$ der Größe N , mit $u \in [0, 1]$, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{f}(u, \omega) &= \frac{1}{2\pi b_F} \int K_F\left(\frac{\omega - \lambda}{b_F}\right) I_N(u, \lambda) d\lambda, \quad \text{mit} \\ I_N(u, \omega) &= \frac{1}{2\pi \sum_{t=1}^N h(\frac{t}{N})^2} \left| \sum_{s=1}^N h\left(\frac{s}{N}\right) X_{[un] - \frac{N}{2} + s, n} e^{-i\omega s} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

K_F ist ein Kern wie in (2.8) mit $K_F(x) = 0$ für alle $x \notin [-\pi, \pi]$, mit der Bandbreite b_F und mit der symmetrischen Taperfunktion h . [Dahlhaus \(1996\)](#) zeigt, dass $K_Z(x) = \frac{h(x+1/2)^2}{\int_0^1 h(x)^2 dx}$ die Rolle eines Kerns in der Zeitrichtung mit der Bandbreite $b_Z = \frac{N}{n}$ einnimmt. Verzerrung und Varianz des Schätzers hängen von den Bandbreiten b_F und b_Z und von der Glattheit sowohl in Frequenz- als auch in Zeitrichtung der wahren Spektraldichte ab. Frequenzauflösung, Zeitauflösung, Verzerrung und Varianz können nicht gleichzeitig optimiert werden. Um die Verzerrung zu verkleinern, müssen die Kerne möglichst spitz und die Bandbreiten möglichst klein gewählt werden. Wenn die Varianz hingegen klein sein soll, so verhält es sich genau umgekehrt. Bessere Ergebnisse werden erzielt, je flacher und konstanter die wahre Spektraldichte in Zeit- und Frequenzrichtung ist.

Eine etwas andere Strategie wählt [Priestley \(1981b\)](#) für die Entwicklung eines Schätzers der evolutionären Spektraldichte. Der vorgestellte Schätzer entspricht einem Spektrogramm aus zuvor in den Fenstern getaperten Daten, das anschließend über die Zeit geglättet wird. Er ist definiert als

$$\begin{aligned}\hat{f}_t(\omega) &= \sum_u w_u I_{t-u}(\omega), \quad \text{mit} \\ I_t(\omega) &= \left| \sum_s g_s X_{t-s} e^{-i\omega(t-s)} \right|^2.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Die Gewichtsfunktion g_s entspricht dem skalierten Datentaper h aus [\(2.26\)](#). Es wird gefordert, dass $\int_{-\pi}^{\pi} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$, wobei $\Gamma(\omega) = \sum_s g_s e^{-i\omega s}$ die Transferfunktion von g_s darstellt. Außerdem wird angenommen, dass die wahre Spektraldichte $f_t(\omega)$ für jedes t „glatt“ verglichen mit $|\Gamma(\omega)|^2$ ist. Für die Folge $\{w_t\}$ gelte $\sum_{t=-\infty}^{\infty} w_t = 1$, $\lim_{|t| \rightarrow \infty} w_t = 0$ und $w_t \geq 0$ für alle t . Damit wird gemäß des Mittelwertschätzers [\(2.11\)](#) für stationäre Spektraldichten auch die Varianz verringert, sofern sich die Eigenschaften des Schätzers über die Zeit entsprechend langsam verändern. Im Gegensatz zu den zuvor vorgestellten Schätzern [\(2.25\)](#) und [\(2.26\)](#) sorgt die Glättung im Zeitbereich über die in dem gleitenden Fenster berechneten und damit stark korrelierten Periodogrammwerten dafür, dass dieser nichtstationäre Spektraldichteschätzer keine schnellen Veränderungen in der Zeit darstellen kann. Für den Schätzer ist die Nichteindeutigkeit der Darstellung [\(2.22\)](#) nicht von Bedeutung, da er als eine geglättete Version der möglichen zeitveränderlichen Spektraldichten interpretiert werden kann.

Letztendlich werden nur die über die Zeit gemittelten Spektraldichten geschätzt. Wenn die zeitveränderlichen Spektraldichten ihren über die Zeit und die Frequenzen geglätteten Versionen ähneln, können die Schätzer auch geringe Verzerrung und kleine Varianz aufweisen. Eine Ausnahme bilden stückweise stationäre Prozesse, die nur bei richtiger Identifizierung der Sprungstellen gut geschätzt werden können.

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Schätzern für die zeitveränderliche Spektraldichte bieten die im folgenden Abschnitt besprochenen SLEX-Periodogramme eine mathematisch elegante Version zur Darstellung empirischer zeitveränderlicher Spektren mit vorteilhaften Eigenschaften.

2.3.5 SLEX-Periodogramm

SLEX-Periodogramme werden in [Ombao u. a. \(2001\)](#) auf der Grundlage der glatten lokalisierten komplexen Exponentialfunktionen oder abgekürzt SLEX (**S**mooth **L**ocalized **C**omplex **E**xponential) - Funktionen entwickelt. In [Ombao u. a. \(2001\)](#) werden die SLEX-Periodogramme verwendet, um für die retrospektive Betrachtung einer Zeitreihe eine automatische Einteilung in lokal stationäre Segmente zu erzeugen, die an die Schnelligkeit der strukturellen Veränderung in den Daten angepasst ist. Für eine Echtzeitanalyse kann ausgenutzt werden, dass die SLEX-Funktionen in Zeit und Frequenz lokalisierte Funktionen sind und über sie eine orthonormale Transformation definiert werden kann. Dadurch ist eine asymptotische Unkorreliertheit zwischen aussagekräftigen Periodogrammwerten gewährleistet, auch wenn die Periodogramme aus sich überschneidenden Zeitreihenausschnitten stammen.

Lokalisierung und Orthonormalbasen

Mit einer quadratisch integrierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ können zwei Funktionen $\frac{|g(t)|^2}{\|g\|^2}$ und $\frac{|\mathbf{g}(\lambda)|^2}{\|\mathbf{g}\|^2}$ definiert werden, welche die Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsdichten einer Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 besitzen, wobei $\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$ und \mathbf{g} die Fouriertransformierte von g ist ([Wickerhauser, 1993](#)). Falls g eine Funktion der Zeit ist, kann man die Zeitunschärfe und die Frequenzunschärfe als

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt \quad \text{und} \quad \Delta_\omega^2 = \frac{1}{\|\mathbf{g}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\mathbf{g}(\lambda)|^2 d\lambda$$

definieren ([Carmona u. a., 1998](#)). Diese Maße geben wieder, wie gut g und \mathbf{g} , bzw. deren zugehörigen Dichten, um den Wert 0 lokalisiert sind. Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt in diesem Zusammenhang, dass $\Delta_t \Delta_\omega \geq \frac{1}{2}$ und damit die beiden Funktionen nicht gleichzeitig beliebig stark lokalisiert sein können.

Bei der Fouriertransformation wird ausgenutzt, dass die komplexe Exponentialfunktion $e^{i\omega_0 t}$ strikt frequenzlokalisiert ist bei ω_0 . Allerdings ist die Zeitunschärfe unendlich groß, es existiert also keine Lokalisierung in der Zeit. In der Zeitreihenanalyse wird diese Eigenschaft ausgenutzt, um die spektrale Verteilung als Leistungsanteile an den Frequenzen, wie in [Abschnitt 2.2.2](#) erläutert, zu interpretieren. Analog kann wegen der Lokalisierung in der Frequenz und der Orthogonalität von $e^{-i\omega_j t}$ das Periodogramm als eine Varianzdekomposition in die einzel-

nen Fourierfrequenzen verstanden werden. Die Lokalisierung beschränkt sich in der diskreten Fourieranalyse natürlich nur auf die Fourierfrequenzen. Für andere Frequenzen ist die Lokalisierung nicht mehr punktuell. Deshalb benutzt man, wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, Taperfunktionen, die die Frequenzunschärfe verkleinern.

Beim Übergang zu nichtstationären Prozessen möchte man zusätzlich eine Lokalisierung in der Zeit erhalten. Die naiven nichtstationären Spektraldichtedarstellungen wie das Spektrogramm, die in Abschnitt 2.3.4 vorgestellt wurden, entsprechen gefensterten Fouriertransformationen mit einer Fensterfunktion g , die in Zeit und Frequenz „gut“ lokalisiert ist. In diesem Fall sind die beobachteten Frequenzen $\omega \in \Omega$ und Zeitpunkte $s \in S \subseteq \mathbb{R}$ aber so gewählt, dass $\{g(t-s)e^{i\omega t}, \omega \in \Omega, s \in S\}$ keine Basis bildet, wie es eine Transformation eigentlich erfordert. Für die Spektrogramme bedeutet das, dass sie entweder redundante Information enthalten oder Informationen verloren gehen.

Das Balian-Low-Phänomen (Benedetto u. a., 2003) besagt, dass sobald eine solche Basis existiert (allgemeiner: wenn $g(t-s)e^{i\omega t}$ ein „Frame“ ist (Carmona u. a., 1998)) das Produkt der Unschärfen unendlich ist,

$$\left(\frac{1}{\|g\|} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt \right) \left(\frac{1}{\|g\|} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |g(\lambda)|^2 d\lambda \right) = \infty.$$

Wickerhauser (1993) konstruiert glatte lokalisierte Orthogonalbasen; sie bilden eine Möglichkeit, dass für eine Basis auch die Lokalisierungen vorhanden sind. Als Spezialfall dieser Konstruktion beschreiben Ombao u. a. (2001) die glatten lokalisierten komplexen Exponentialfunktionen oder abgekürzt SLEX-Funktionen, die als Grundlage eines zur Darstellung des Spektrums nichtstationärer Zeitreihen geeigneten Instruments dienen.

SLEX-Transformation

Bevor die SLEX-Funktion definiert werden kann, benötigen wir zunächst folgende Definition.

Definition 2.12 (Wickerhauser, 1993)

Eine Abschneidefunktion sei eine Funktion $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften, dass

- $r(s) = 0$ für alle $s \leq -1$,
- $r(s) = 1$ für alle $s \geq 1$,

- $|r(s)|^2 + |r(-s)|^2 = 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.5 (*Wickerhauser, 1993*)

Die Funktionen $r_{(j)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $j \in \mathbb{N}_0$,

$$r_{(0)}(s) = \begin{cases} 0, & \text{falls } s \leq -1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}(1+s)\right), & \text{falls } -1 < s < 1 \\ 1, & \text{falls } s \geq 1 \end{cases}$$

und

$$r_{(j+1)}(s) = r_{(j)}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right)$$

sind Abschneidefunktionen. Die Funktion $r_{(j)}(s)$ ist $2^j - 1$ mal stetig differenzierbar.

Die SLEX-Funktion lässt sich mittels der Abschneidefunktionen definieren, wobei hier, anders als in den zitierten Artikeln, sofort auf die Aufteilung der Zeitreihe eingegangen wird.

Definition 2.13 *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

- Für die Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_{K+1}$ gilt $1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{K+1} = n + 1$ und $\alpha_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \{1, \dots, K + 1\}$.
- Die Mengen S_1, \dots, S_K sind paarweise disjunkte Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, für die $S_k = \{\alpha_k, \alpha_k + 1, \dots, \alpha_{k+1} - 1\}$ und $\bigcup_{k=1}^K S_k = \{1, \dots, n\}$ gilt. Jedes S_k ist somit ein zusammenhängendes Zeitsegment der Länge $N_k := \alpha_{k+1} - \alpha_k$, also gilt $\sum_{k=1}^K N_k = n$. Außerdem sei N_k für alle k gerade.
- Die Konstanten $\epsilon_k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_k \in \mathbb{N}$ seien für alle $k \in \{1, \dots, K + 1\}$ so gewählt, dass $\epsilon_k + \epsilon_{k+1} \leq N_k$ und $2\varepsilon_k \leq N_k$.
- Seien r_k und q_k , $k \in \{1, \dots, K + 1\}$, Abschneidefunktionen wie in Definition 2.12.

Die SLEX-Funktionen für ein Segment S_k sind dann gegeben durch

$$\phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{N_k}} \left(\psi_k^+(t) e^{i\frac{2\pi j}{N_k}t} + \psi_k^-(t) e^{-i\frac{2\pi j}{N_k}t} \right), \quad j \in \left\{ -\frac{N_k}{2} + 1, \dots, \frac{N_k}{2} \right\}$$

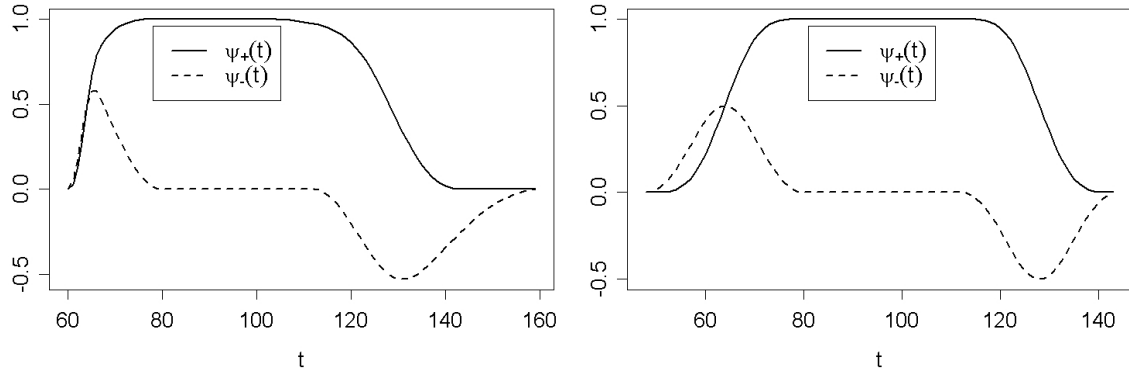


Abbildung 2.3: SLEX-Fensterfunktionen $\psi_2^+(t)$ und $\psi_2^-(t)$ bzgl. des Segments $S_2 = \{64, \dots, 127\}$ und mit den Abschneidefunktionen $r_2 = q_2 = r_3 = r_{(1)}$. Linke Abbildung: $\varepsilon_2 = 16$, $\varepsilon_3 = 4$ und $\varepsilon_4 = 32$. Rechte Abbildung: $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 16$.

mit den Fensterfunktionen

$$\psi_k^+(t) = r_k^* \left(\frac{t - \alpha_k}{\varepsilon_k} \right) q_k \left(\frac{t - \alpha_k}{\varepsilon_k} \right) q_k^* \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\varepsilon_k} \right) r_{k+1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\varepsilon_{k+1}} \right)$$

und

$$\begin{aligned} \psi_k^-(t) = & r_k^* \left(\frac{t - \alpha_k}{\varepsilon_k} \right) q_k \left(\frac{\alpha_k - t}{\varepsilon_k} \right) e^{i \frac{2\pi j}{N_k} 2\alpha_k} \\ & - q_k^* \left(\frac{t - \alpha_{k+1}}{\varepsilon_k} \right) r_{k+1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\varepsilon_{k+1}} \right) e^{i \frac{2\pi j}{N_k} 2\alpha_{k+1}}. \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung sind in [Abbildung 2.3](#) die Fensterfunktionen für zwei Beispiele dargestellt.

Satz 2.1 Die Familie der Vektoren

$$\left\{ \phi_{j,k} = (\phi_{j,k}(1), \dots, \phi_{j,k}(n))', j \in \left\{ -\frac{N_k}{2} + 1, \dots, \frac{N_k}{2} \right\}, k \in \{1, \dots, K\} \right\}$$

mit $\phi_{j,k}(t)$ aus [Definition 2.13](#) bildet eine Orthonormalbasis in \mathbb{C}^n .

Ein Beweis wird in [Anhang A](#) speziell für die hier beschriebenen Umstände geliefert. In [Ombao u. a. \(2001\)](#) wird in diesem Zusammenhang nur auf die allgemeinen theoretischen Ausführungen von [Wickerhauser \(1993\)](#) verwiesen, die diesen Spezialfall nur schwer erkennen lassen.

Betrachten wir nun den Spezialfall, dass die Abschneidefunktionen und deren Breiten für alle k gleich gewählt werden, also $\varepsilon := \varepsilon_k = \varepsilon_k$ und $r := r_k = q_k$ für alle k . Außerdem sei die

Aufteilung der Zeitreihe in die Segmente S_k , $k \in \{1, \dots, K\}$, so gewählt, dass $\frac{2\alpha_k}{N_k}$ und $\frac{2\alpha_{k+1}}{N_k}$ für alle k ganzzahlig sind. Das kann erreicht werden, indem N_k jeweils eine Zweierpotenz ist und z. B. eine dyadische oder eine gleichmäßige Aufteilung der Zeitreihe gewählt wird. In diesen Fällen ist $e^{j\frac{2\pi j}{N_k}2\alpha_k} = 1$ für alle k . Somit vereinfachen sich die Fensterfunktionen der SLEX-Funktion zu

$$\psi_k^+(t) = \left| r \left(\frac{t - \alpha_k}{\varepsilon} \right) \right|^2 \left| r \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\varepsilon} \right) \right|^2 \quad \text{und}$$

$$\psi_k^-(t) = r^* \left(\frac{t - \alpha_k}{\varepsilon} \right) r \left(\frac{\alpha_k - t}{\varepsilon} \right) - r^* \left(\frac{t - \alpha_{k+1}}{\varepsilon} \right) r \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\varepsilon} \right).$$

Wenn zudem noch eine reellwertige Abschneidefunktion gewählt wird, ist auch $\psi_k^-(t)$ reellwertig. Gleichzeitig mit der Eigenschaft als Orthonormalbasis ist $\phi_{j,k}(t)$ als Funktion von t lokalisiert in Zeit und Frequenz. Die Lokalisierung wird in Abbildung 2.4 anhand von Beispielen für die SLEX-Funktion und deren Fouriertransformierten veranschaulicht. Die Beschränktheit der Zeitunschärfe ist schnell einzusehen, weil die SLEX-Funktion nur auf einem kompakten Träger definiert ist. Die Fouriertransformierten der Fensterfunktionen $\psi_k^+(t)$ und $\psi_k^-(t)$ sind beide lokalisiert um 0, so dass die Fouriertransformierte von $\phi_{j,k}(t)$ zwei Häufungsbereiche mit Zentren bei $\omega_j = \frac{2\pi j}{N_k}$ und $-\omega_j$ besitzt. Bei der SLEX-Funktion wird die Leistung eines Signals also auf positive und negative Frequenzen verteilt, wobei $\|\psi_k^-(t)\|^2$ im Vergleich zu $\|\psi_k^+(t)\|^2$ schnell sehr klein wird, sobald ε kleiner wird oder steilere Abschneidefunktionen verwendet werden.

SLEX-Periodogramm

Mit der SLEX-Funktion kann nun das SLEX-Periodogramm definiert werden als

$$I(\omega_j, k) = \left| \sum_t x_t \phi_{j,k}^*(t) \right|^2, \quad (2.28)$$

mit $\omega_j = \frac{2\pi j}{N_k}$, $j \in \{-\frac{N_k}{2} + 1, \dots, \frac{N_k}{2}\}$. Die Berechnung ist mit Hilfe zweier diskreter Fouriertransformationen

$$I(\omega_j, k) = \frac{1}{N_k} \left| \sum_t x_t (\psi_k^+(t))^* e^{-i\omega_j t} + \sum_t x_t (\psi_k^-(t))^* e^{i\omega_j t} \right|^2$$

relativ einfach. Zur Berechnung des k -ten SLEX-Periodogramms werden die Beobachtungen zu den Zeitpunkten $\alpha_k - \epsilon_k, \alpha_k - \epsilon_k + 1, \dots, \alpha_{k+1} + \epsilon_{k+1} - 1$ verwendet. Das heißt, die

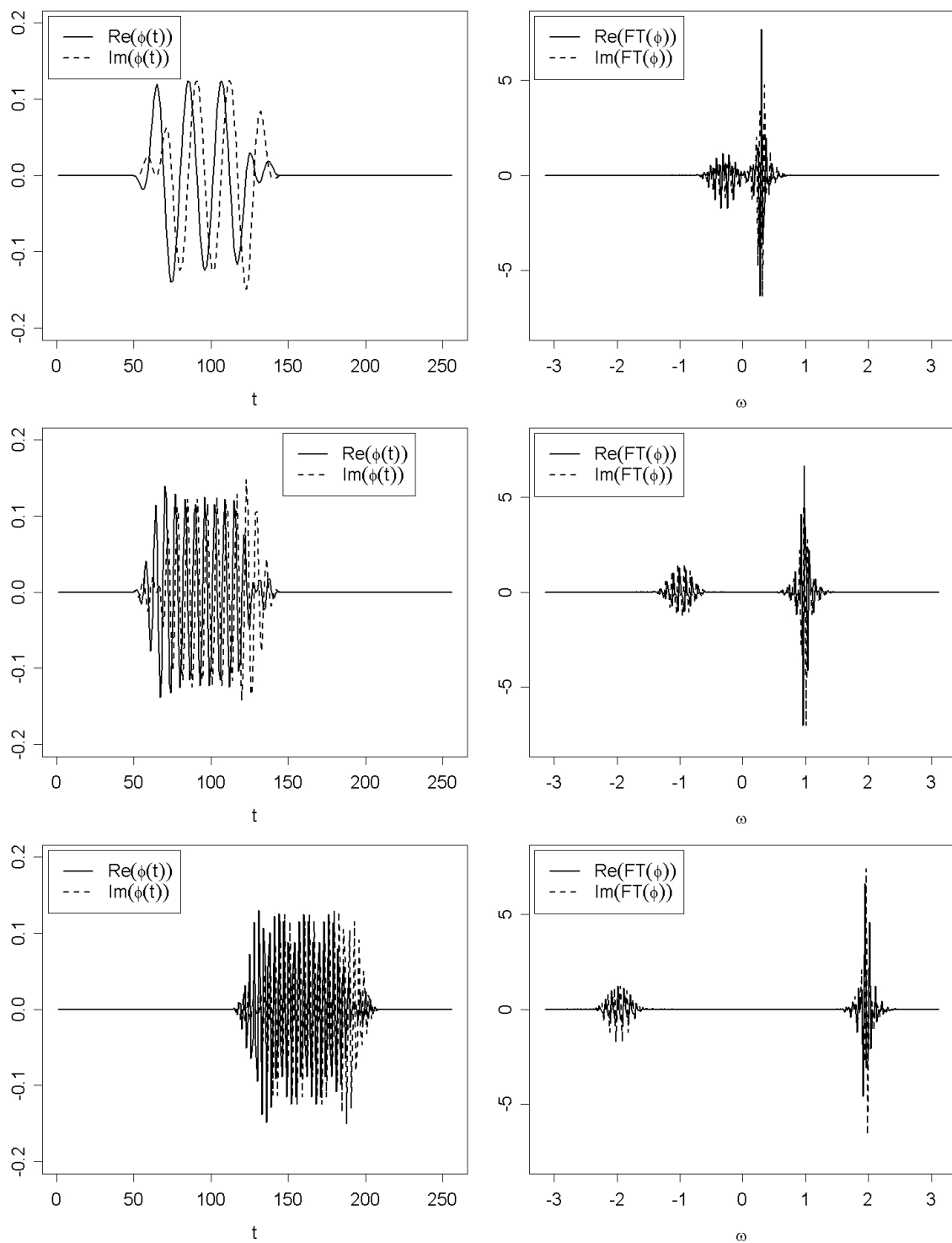


Abbildung 2.4: SLEX-Funktionen $\phi_{3,2}(t)$, $\phi_{10,2}(t)$ und $\phi_{20,3}(t)$ (von oben nach unten) und deren Fouriertransformierte (rechts daneben) mit $r = r_{(1)}$ und $\varepsilon = 16$.
 Oben: $S_2 = \{64, \dots, 127\}$, $\omega_3 = \frac{2\pi 3}{64}$.
 Mitte: $S_2 = \{64, \dots, 127\}$, $\omega_{10} = \frac{2\pi 10}{64}$.
 Unten: $S_3 = \{128, \dots, 191\}$, $\omega_{20} = \frac{2\pi 20}{64}$.

Zeitreihensegmente für die Berechnung von $I(\omega_j, k)$ und $I(\omega_j, k+1)$ überschneiden sich mit $2\epsilon_{k+1}$ Zeitpunkten. Obwohl für die Berechnung dieser SLEX-Periodogrammwerte teilweise die gleichen Daten verwendet werden, sind sie asymptotisch unkorreliert.

Satz 2.2 *Sei $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stationärer Gauß-Prozess, also ein Prozess bei dem alle multivariaten Randverteilungen einer Normalverteilung genügen, mit Spektraldichte $f(\omega) = f(-\omega)$, wobei die Kovarianzfunktion den relativ starken Konvergenzbedingungen aus Brillinger (1981, (4.3.10) S. 92) genügt. Sei außerdem $I(\omega_j, k)$ das SLEX-Periodogramm auf dem k -ten Segment mit $N = N_k$ für alle k und ω_j die j -te Fourierfrequenz bezüglich N , dann gilt*

$$\text{Cov}(I(\omega_j, k), I(\omega_j, h)) = O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad \forall k \neq h \quad \text{und} \quad \forall j$$

und

$$\text{Cov}(I(\omega_j, k), I(\omega_i, k)) = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \forall i \neq j \quad \text{und} \quad \forall k.$$

Beweis siehe Anhang A.

Wie oben erwähnt, ist für $\epsilon_k, \varepsilon_k \rightarrow 0$ für alle k der Einfluss von $\sum_t x_t (\psi_k^-(t))^* e^{i\omega_j t}$ auf das Periodogramm sehr gering, wodurch Konsistenz- und asymptotische Erwartungswerteigenschaften der einzelnen SLEX-Periodogramme als Schätzer für die Spektraldichte wie bei getaperten Periodogrammen gelten (Ombao u. a., 2001).

Bemerkung 2.1 *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.2 gegeben. Sei außerdem $I(\omega, k)$ das SLEX-Periodogramm auf dem k -ten Segment des Prozesses, wenn dieser ab dem Zeitpunkt Null beobachtet wird, mit $N = N_k$ für alle $k \in \{1, \dots, K\}$ mit $K \in \mathbb{N}$. Ein Schätzer für $f(\omega)$, der durch Mittelwertbildung der SLEX-Periodogramme in benachbarten Segmenten entsteht, ist gegeben durch*

$$\tilde{f}(\omega, k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I(\omega, k).$$

Eine rekursive Schätzfunktion für $f(\omega)$ kann als

$$\check{f}(\omega, k) = \lambda I(\omega, k) + (1 - \lambda)\check{f}(\omega, k - 1)$$

definiert werden, wobei $\lambda \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ und $\check{f}(\omega, 0) = 0$.

Nach Theorem 2 in [Ombao u. a. \(2001\)](#) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I(\omega, k)) &= f(\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right) + o\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{und,} \\ \text{Var}(I(\omega, k)) &= f^2(\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Somit gilt auch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\tilde{f}(\omega, k)\right) &= \mathbb{E}\left(\check{f}(\omega, k)\right) = f(\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right) + o\left(\frac{1}{N}\right), \\ \text{Var}\left(\tilde{f}(\omega, K)\right) &= \frac{1}{K}f^2(\omega) + \frac{1}{K}O\left(\frac{1}{N}\right) + \frac{K-1}{2K}O\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ &\rightarrow \frac{1}{2}O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad K \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\check{f}(\omega, K)\right) &= \text{Var}\left(\lambda \sum_{k=1}^K (1-\lambda)^{K-k} I(\omega, k)\right) \\ &= \lambda^2 \sum_{k=1}^K (1-\lambda)^{2(K-k)} \text{Var}(I(\omega, k)) \\ &\quad + \lambda^2 \sum_{k \neq l} \sum_{k \neq l} (1-\lambda)^{K-k} (1-\lambda)^{K-l} \text{Cov}(I(\omega, k), I(\omega, l)) \\ &= \left(f^2(\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \lambda^2 \sum_{k=1}^K (1-\lambda)^{2(K-k)} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \left(\lambda \sum_{k=1}^K (1-\lambda)^{K-k}\right)^2 - O\left(\frac{1}{N^2}\right) \lambda^2 \sum_{k=1}^K (1-\lambda)^{2(K-k)} \\ &= \left(f^2(\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right) - O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) \frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2K}) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{N^2}\right) (1 - (1-\lambda)^K)^2 \\ &\rightarrow \frac{\lambda}{2-\lambda} \left(f^2(\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right) - O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad K \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

[Ombao u. a. \(2001\)](#) und [Ombao u. a. \(2005\)](#) entwickeln die SLEX-Periodogramme insbesondere im Hinblick auf multivariate Zeitreihen. Im Gegensatz zu anderen Ansätzen, die das Balian-Low-Phänomen umgehen, indem sie z. B. statt der Exponentialfunktion die Cosinusfunktion verwenden, kann mit Hilfe von SLEX-Funktionen Phase und Kohärenz dargestellt werden.

Wahl der Basis

Zur Erzeugung der Segmente S_k wird in [Ombao u. a. \(2001\)](#) eine dyadische Aufteilung empfohlen, in der die Zeitreihe der Länge $n = 2^\delta$ sukzessiv halbiert wird in 2^d Segmente der Länge $n/2^d$ für $d \in \{0, 1, \dots, D\}$ mit $D < \delta$. Dann kann unter allen möglichen Kombinationsmöglichkeiten eine „beste Basis“ gesucht werden. Dieses Verfahren basiert auf der Annahme, dass sich das Spektrum nicht abrupt über die Zeit verändert. Die Schätzeigenschaften für diese komplette Spektraldichteschätzung für eine nichtstationäre Zeitreihe werden in [Ombao u. a. \(2002\)](#) in Bezug auf ein zugehöriges theoretisches Konstrukt des SLEX-Spektrums erforscht. Das Verfahren von [Adak \(1998\)](#) zur Darstellung nichtstationärer Zeitreihen ist sowohl für abrupte Veränderungen, als auch für graduelle Veränderungen im Spektrum entwickelt worden. Die Autorin nimmt an, dass die graduellen Veränderungen hinreichend genau durch stückweise stationäre Prozesse beschrieben werden können (siehe Definition [2.10](#)). Die Methode basiert ebenfalls auf sukzessiver Zweiteilung der Zeitreihe in Baumform, so dass approximativ stationäre Intervalle entstehen. Die Wahl der Aufteilung stützt sich auf den Vergleich geschätzter Spektren in diesen Intervallen mit spektralen Abweichungsmaßen. Im Unterschied zu dem Vorgehen mit SLEX entsteht hierbei jedoch keine Basis.

Ein adaptives Vorgehen, das sich unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Veränderungen im Spektrum anpasst, ist bei großer Datenmenge jedoch relativ rechen- und speicherplatzintensiv. Beim Übergang von einer freien Wahl der Sprungstellen zu einer Beschränkung auf eine dyadische Aufteilung reduziert sich die Rechenzeit. Allerdings werden unter Umständen bei der Festlegung auf eine Zweiteilung ungünstig gelegene Sprungstellen oder Stellen mit Veränderungen sehr schlecht dargestellt. Außerdem können graduelle Veränderung und Sprünge nicht unterschieden werden. Für unterschiedliche Fensterbreiten entstehen zudem unterschiedliche Frequenzauflösungen.

Im Gegensatz dazu werden bei der Einteilung der Zeitreihe in kurze gleich große Abschnitte Sprünge geglättet und kleinere Schwankungen stärker dargestellt. Um Fehlinterpretationen zu vermeiden, müssen in diesem Fall evtl. verschiedene Fensterbreiten betrachtet werden.

2.4 Spektrale Abweichungen

Im Folgenden werden Abstands- bzw. Abweichungsmaße für Spektraldichten f und g oder für spektrale Verteilungsfunktionen F und G bzw. deren Schätzer vorgestellt. Diese Größen werden benötigt, um Veränderungen in einem stochastischen Prozess bezüglich der zweiten Momente zu erfassen und werden in den Kontrollkarten in Kapitel 5 verwendet. In Abschnitt 3.5 erfolgt ein empirischer Vergleich der vorgestellten Maße anhand der vorliegenden Daten.

2.4.1 Abweichungsmaße für zwei Spektraldichten

Zunächst wird die Itakura-Saito-Abweichung hergeleitet, die ein spektrales Abweichungsmaß darstellt. Die getroffenen Annahmen sind im Allgemeinen recht eng gefasst, können aber gelockert werden.

Definition 2.14 (*Kullback und Leibler, 1951*)

Die Kullback-Leibler-Information zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsdichten p und q ist gegeben durch

$$K(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) p(x) dx.$$

Die Kullback-Leibler-Information $K(p, q)$, auch relative Entropie genannt, ist ein Abweichungsmaß zwischen zwei Verteilungen. Sie misst, wie ineffizient die Annahme einer Verteilung mit Dichte q ist, wenn die wahre Verteilung die Dichte p besitzt. Mit $x = (x_1, \dots, x_n)'$ lässt sich $K(p, q)$ analog für n -dimensionale Zufallsvektoren definieren. Ein spektrales Abweichungsmaß, das aus der Kullback-Leibler-Information abgeleitet werden kann, ist die Itakura-Saito-Abweichung.

Definition 2.15 (*Gray u. a., 1980*)

Die Itakura-Saito-Abweichung zwischen den beiden beschränkten Spektraldichten f und g , mit $0 < c_1 \leq f(\omega) \leq c_2 < \infty$ und $0 < c_3 \leq g(\omega) \leq c_4 < \infty$, ist gegeben durch

$$d_{IS}(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(\omega)}{g(\omega)} - \ln \frac{f(\omega)}{g(\omega)} - 1 \right) d\omega. \quad (2.29)$$

Die Itakura-Saito-Abweichung $d_{IS}(f, g)$ misst den Unterschied zwischen zwei Spektraldichten. Sie ist jedoch asymmetrisch bezüglich der Vertauschung der Spektraldichten.

Betrachte im Folgenden einen stationären Gauß-Prozess, also einen Prozess, bei dem alle multivariaten Randverteilungen einer Normalverteilung genügen, und dessen Abhängigkeitsstruktur durch die Autokovarianzfunktion oder gleichbedeutend durch das Spektrum vollständig bestimmt ist.

Definition 2.16 (*Parzen, 1992*)

Seien zwei stationäre Gauß-Prozesse $\{X_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$ und $\{Y_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$, die also stationär bzgl. ihrer gesamten Verteilung sind, mit den gemeinsamen n -dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichten $p^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ und $q^{(n)}(y_1, \dots, y_n)$ gegeben. Die asymptotische Kullback-Leibler-Information zwischen zwei stochastischen Prozessen $\{X_t\}$ und $\{Y_t\}$ mit den Randwahrscheinlichkeitsdichten p und q ist definiert als

$$K_a(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K(p^{(n)}, q^{(n)}) .$$

Ishii u. a. (1979) beweisen, dass für stationäre Gauß-Prozesse mit Erwartungswert 0 und rationalen Spektraldichten f und g die Itakura-Saito-Abweichung genau dem Doppelten der asymptotischen Kullback-Leibler-Information

$$K_a(p, q) = \frac{1}{2} d_{\text{IS}}(f, g) \tag{2.30}$$

für die zugehörigen Randwahrscheinlichkeitsdichten p und q entspricht. Als Konsequenz ist die in Basseville (1989) definierte Kullback-Divergenz

$$J(p, q) := K_a(p, q) + K_a(q, p)$$

gleich der symmetrisierten Itakura-Saito-Abweichung

$$d_{\text{IS}}^{(1)}(f, g) = \frac{1}{2} (d_{\text{IS}}(f, g) + d_{\text{IS}}(g, f)) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(\omega)}{g(\omega)} + \frac{g(\omega)}{f(\omega)} \right) d\omega - 1 . \tag{2.31}$$

Gray und Markel (1976), Gray u. a. (1980) und Basseville (1989) beschreiben und vergleichen verschiedene spektrale Abstands- und Abweichungsmaße, die vor allem zur Spracherkennung entwickelt wurden. Dabei werden ausschließlich normierte Spektraldichten wie in (2.13) verwendet. In der vorliegenden Arbeit interessiert uns jedoch die Entwicklung der einzelnen Frequenzbänder über die Zeit und nicht nur die allgemeine Verteilung auf die Frequenzen. Deshalb ist es bei der Untersuchung der vorliegenden Daten sinnvoll, das nicht normierte Spektrum (2.2) zu betrachten, auf das die vorgestellten Abweichungsmaße ebenfalls angewendet werden können.

In den genannten Arbeiten wird unter anderem die in Definition 2.15 vorgestellte Itakura-Saito-Abweichung d_{IS} aus (2.29) empfohlen, bzw. deren symmetrisierte Version $d_{\text{IS}}^{(1)}$ aus (2.31). Diese beiden Abweichungsmaße sind keine Metriken, weil außer der Symmetrie im Falle von d_{IS} auch die Dreiecksungleichung $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ für drei beliebige Spektraldichten f, g und h im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

Weitere naheliegende Abweichungsmaße sind Metriken, die aus der L_p -Norm der Differenz zweier logarithmierter Spektraldichten konstruiert werden können. Also

$$\begin{aligned} d_{L,p}(f, g) &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\ln(f(\omega)) - \ln(g(\omega))|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\ln(f(\omega)) - \ln(g(\omega))\|_p = \left\| \ln \frac{f(\omega)}{g(\omega)} \right\|_p, \end{aligned} \quad (2.32)$$

für $p \in \mathbb{N}$ und $d_{L,\infty}(f, g) = \sup_{\omega \in (-\pi, \pi)} |\ln(f(\omega)) - \ln(g(\omega))|$.

Je größer p , desto stärker werden größere Abweichungen der logarithmierten Spektren gegenüber kleineren Abweichungen gewichtet, bis schließlich für $p \rightarrow \infty$ nur noch der maximale Abstand betrachtet wird.

Alle zuvor vorgeschlagenen Distanzmaße sind Funktionen des Quotienten der Spektraldichten, so dass $d(f, g) = d(\frac{f}{g}, 1) = d(1, \frac{g}{f})$ gilt. Somit sind diese Maße skaleninvariant, in dem Sinne, dass $d(f(\omega), g(\omega)) = d(a(\omega)f(\omega), a(\omega)g(\omega))$ für eine beliebige Funktion $a : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Zur Veranschaulichung vergleichen wir in Abbildung 2.5 die Sensibilität der Abweichungsmaße $d_{L,1}$, $d_{L,2}$, $d_{L,3}$, $d_{L,4}$, d_{IS} und $d_{\text{IS}}^{(1)}$. Dafür werden die Funktionen innerhalb der Integrale in Abhängigkeit von $x = \frac{f}{g}$ betrachtet, also $|\ln(x)|^p$, für $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x - \ln x - 1$ und $(x + \frac{1}{x} - 2)/2$. Die drei Grafiken in Abbildung 2.5 verdeutlichen in drei unterschiedlich großen Ausschnitten der x-Achse, wie die Abweichungsmaße verschieden große Unterschiede der Spektraldichten gewichten.

Die Funktionen $d_{L,p}$, $p \in \mathbb{N}$ haben bezogen auf die logarithmische x-Achse bekanntes polynomisches Aussehen und werden im Intervall $(\frac{1}{e}, e)$ mit wachsendem p kleiner und außerhalb des Intervalls mit wachsendem p größer. Die Werte der Itakura-Saito-Abweichung liegen für $f > g$ und $\frac{f}{g}$ nahe 1, zwischen den Werten für $d_{L,2}$ und $d_{L,3}$. Um den Wert e sind die Funktionswerte noch kleiner als die Werte für $d_{L,p}$ und bezogen auf den wachsenden Quotienten $\frac{f}{g}$ beschleunigen die Werte schneller als $d_{L,p}$ für alle p . Für $\frac{f}{g} \rightarrow 0$ nähert sich d_{IS} von unten der

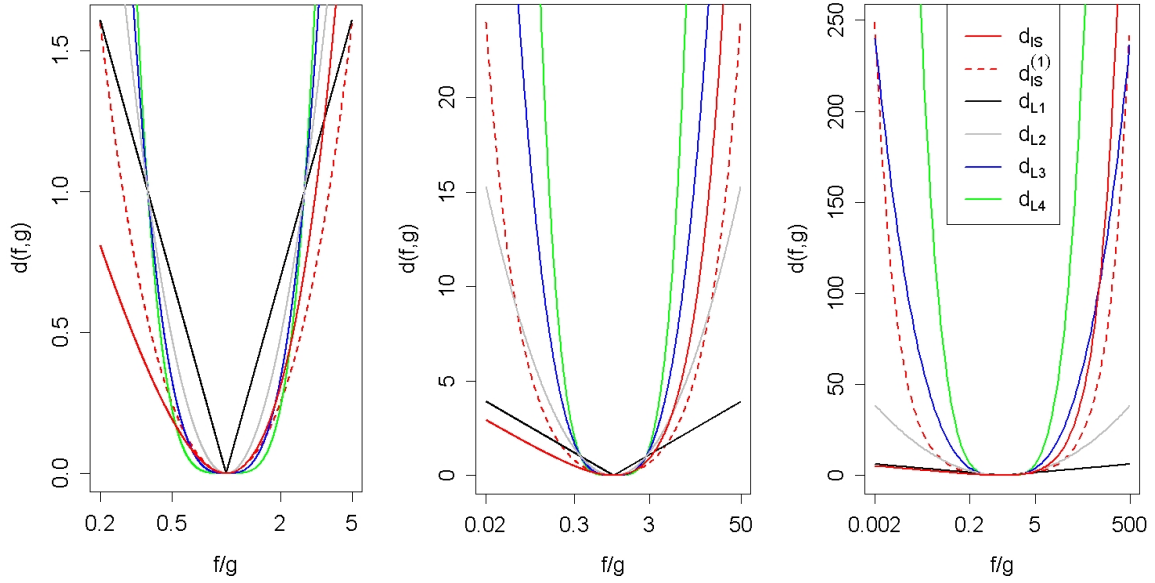


Abbildung 2.5: Entwicklungen der Abweichungsmaße $d_{IS}^{(1)}(f, g)$, $d_{IS}(f, g)$, $d_{L,1}(f, g)$, $d_{L,2}(f, g)$ und $d_{L,3}(f, g)$ bezüglich $\frac{f}{g}$, wenn f und g konstant sind. Es sind verschieden große Ausschnitte der gleichen Graphik dargestellt. Die x-Achse besitzt eine logarithmische Skala.

Funktion $d_{L,1}$ an. Die symmetrisierte Itakura-Saïto-Abweichung $d_{IS}^{(1)}$ verhält sich ähnlich wie d_{IS} , ist aber wegen der Symmetrisierung für $f > g$ etwas kleiner und für $f < g$ wesentlich größer als diese.

Aus der Ähnlichkeit des Spektrums eines Prozesses mit Varianz 1 zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ergeben sich auch Parallelen in der Betrachtung der Abstände. Allerdings ist es für nicht normierte Spektren nicht zwingend, die spektrale Verteilungsfunktion (oder das integrierte Spektrum) $F : (-\pi, \pi) \rightarrow [0, \sigma^2]$ als Verteilung anzusehen, sondern naheliegender F als beschränkte Funktion zu interpretieren. Trotzdem werden typische Maße des Abstands von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wie die Kolmogorov-Metrik

$$d_{KS}(F, G) = \sup_{\omega} |F(\omega) - G(\omega)| \tag{2.33}$$

oder die Cramér-von-Mises-Metrik

$$d_{CM}(F, G) = \|F(\omega) - G(\omega)\|_2$$

auch für den Vergleich zweier nicht normierter Spektren z. B. von [Adak \(1998\)](#) verwendet. Verallgemeinert können wir eine L_p -Norm der Differenzen der spektralen Verteilungsfunktionen

$$d_{\text{VL},p}(F, G) = \|F(\omega) - G(\omega)\|_p$$

betrachten. Diese Metriken benutzen die spektrale Verteilungsfunktion anstelle der Spektraldichte. Sie können somit auch dann berechnet werden, wenn die Dichte nicht existiert. Wesentliche Unterschiede zu den zuvor betrachteten Abständen sind zum Einen, dass $d_{\text{VL},p}$ nicht als Funktion des logarithmierten Spektrums ausgedrückt werden kann. Zum Anderen heben sich durch die Nutzung der Verteilungsfunktion positive und negative Unterschiede in benachbarten Frequenzen gegenseitig viel stärker auf, als gegensätzliche Unterschiede, die in Blöcken nacheinander auftreten.

In der Praxis sind für Vergleiche der Autokovarianzstruktur zweier Zeitreihen unterschiedliche Vorgehensweisen denkbar. Die vorgestellten Abweichungsmaße können ohne Änderung basierend auf den parametrischen Spektraldichteschätzern der Zeitreihe (siehe Abschnitt 2.2.3) verwendet werden. Wie in [Gray und Markel \(1976\)](#) und den darauf basierenden Artikeln von [Gray u. a. \(1980\)](#) und [Basseville \(1989\)](#) beschrieben, sind die Abweichungsmaße zwar über den Spektralbereich definiert, werden aber meistens ohne dessen Verwendung berechnet, weil auf Parameterwerte eines Modells oder Autokorrelationen zurückgegriffen werden kann. Da man so die Berechnung von zwei Fouriertransformationen samt Logarithmierung und Summierung umgehen kann, werden hierfür weniger rechenintensive Verfahren benötigt. Allerdings sollte das Modell die Daten hinreichend gut approximieren, da ansonsten wichtige Eigenschaften nicht berücksichtigt werden.

In dieser Arbeit werden vornehmlich nichtparametrische Vergleiche betrachtet, die in Abschnitt 2.4.2 besprochen werden. Hierbei könnte man sich vorstellen, in den Ausdrücken für die Abweichungsmaße aus diesem Abschnitt statt der Spektraldichte das Periodogramm oder eine modifizierte Version des Periodogramms einzusetzen. Dadurch würden allerdings sehr viele redundante Informationen benutzt, weil die Werte an den Fourierfrequenzen schon alle Informationen enthalten. Deshalb ist es sinnvoller, statt über alle Frequenzen zu integrieren, Summen über die Fourierfrequenzen zu benutzen.

2.4.2 Nichtparametrische spektrale Abweichungsmaße

Statt die Abweichungsmaße wie im vorigen Abschnitt auf Spektraldichten f und g anzuwenden, werden diese nun durch Periodogramme I und J aus Gleichung (2.7) bzw. durch Tapern und Glätten verbesserte Spektraldichteschätzer \hat{f} und \hat{g} ersetzt. Einen Abstand zwischen zwei empirischen Spektraldichten zu bestimmen ist einfach, wenn die gleiche Frequenzauflösung vorhanden ist, also Periodogramme an den Fourierfrequenzen zweier Signale gleicher Länge verglichen werden. In diesem Fall betrachten wir den Abstand zweier Vektoren, wobei jedes Element einen Periodogrammwert zu den Fourierfrequenzen $\omega_j = 2\pi \frac{j}{n}$ mit $j \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ oder $j \in \{-\frac{n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2}\}$ darstellt. Dabei wird angenommen, dass n gerade ist und dass $f(0) = 0$ ist wegen $E(X_t) = 0$. Bei ungleicher Frequenzauflösung müssen die Periodogramme als Histogramme aufgefasst werden, die einen Wert über Intervalle gleicher Länge mit Mittelpunkt der Fourierfrequenz annehmen. In den hier vorliegenden Anwendungen kann durch Auswahl gleicher Segmentlänge oder durch Mittelwertschätzer der Spektraldichte (2.11) eine gleiche Frequenzauflösung erreicht werden. Das heißt, die empirischen Versionen der oben vorgestellten spektralen Abweichungen werden folgendermaßen geschrieben:

$$d_{L,p}(\hat{f}, \hat{g}) = \left(\frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \left| \ln \frac{\hat{f}(\omega_j)}{\hat{g}(\omega_j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.34)$$

$$d_{\text{IS}}(\hat{f}, \hat{g}) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\hat{f}(\omega_j)}{\hat{g}(\omega_j)} - \ln \frac{\hat{f}(\omega_j)}{\hat{g}(\omega_j)} - 1 \right), \quad (2.35)$$

$$d_{\text{IS}}^{(1)}(\hat{f}, \hat{g}) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\hat{f}(\omega_j)}{\hat{g}(\omega_j)} + \frac{\hat{g}(\omega_j)}{\hat{f}(\omega_j)} - 2 \right). \quad (2.36)$$

Abbildung 2.6 verdeutlicht, wie diese Periodogramm-basierten Abweichungsmaße die Abweichungen in einzelnen Fourierfrequenzen gegenüber Abweichungen in mehreren Fourierfrequenzen gewichten. Bei den spektralen Abweichungsmaßen ist es gleichgültig, ob bei zwei benachbarten oder zwei sehr weit voneinander entfernten Frequenzen Unterschiede vorliegen. Wir betrachten hier daher nur zwei Frequenzen und die zugehörigen Werte der Spektraldichteschätzer $\hat{f} = (\hat{f}(\omega_1), \hat{f}(\omega_2))'$ im Vergleich zu $\hat{g} = (\hat{g}(\omega_1), \hat{g}(\omega_2))'$ mit dem Abweichungsmaß $d(\hat{f}, \hat{g}) = d((\hat{f}(\omega_1), \hat{f}(\omega_2))', (\hat{g}(\omega_1), \hat{g}(\omega_2))') = d\left(\left(\frac{\hat{f}(\omega_1)}{\hat{g}(\omega_1)}, \frac{\hat{f}(\omega_2)}{\hat{g}(\omega_2)}\right)', (1, 1)'\right)$. In den Höhenlinien-Graphiken in Abbildung 2.6 wird $d(\hat{f}, \hat{g})$ als Höhenlinie auf der z-Achse gegen $\frac{\hat{f}(\omega_1)}{\hat{g}(\omega_1)}$ auf der x-Achse und $\frac{\hat{f}(\omega_2)}{\hat{g}(\omega_2)}$ auf der y-Achse abgetragen. Der Schnittpunkt einer

horizontalen und einer vertikalen Gerade kennzeichnen den Punkt $(1, 1)$, an dem der Wert der Abstände jeweils 0 ist. Je weiter man sich von diesem Punkt entfernt, desto größer wird auch der Wert von $d(\hat{f}, \hat{g})$. Jede neue Höhenlinie repräsentiert den Anstieg um eine Einheit. Beim Plot für $d_{L,1}(\hat{f}, \hat{g})$ ist anhand der Form der Höhenlinien zu erkennen, dass sich der Wert von $d_{L,1}(\hat{f}, \hat{g})$ sehr wenig verändert, wenn nur eine Veränderung in *einer* Frequenz stattfindet, während die Linien eine Veränderung zweier Spektraldichte-Schätzwerte in die gleiche Richtung wesentlich stärker widerspiegeln. Mit wachsendem p in $d_{L,p}(\hat{f}, \hat{g})$ wird dieser Effekt schwächer, bis schließlich bei $p = \infty$ nur noch der größte Unterschied bei einer Frequenz beachtet wird. Die Abweichungsmaße $d_{IS}(\hat{f}, \hat{g})$ und $d_{IS}^{(1)}(\hat{f}, \hat{g})$ sind in dieser Untersuchung zwischen $d_{L,2}(\hat{f}, \hat{g})$ und $d_{L,3}(\hat{f}, \hat{g})$ anzuordnen. Sie unterscheiden sich vor allem durch ihr Verhalten, wenn für mindestens eine Frequenz ω gilt, dass $\hat{f}(\omega) < \hat{g}(\omega)$. Dann ist $d_{IS}(\hat{f}, \hat{g})$ wegen der Asymmetrie kleiner als $d_{IS}^{(1)}(\hat{f}, \hat{g})$.

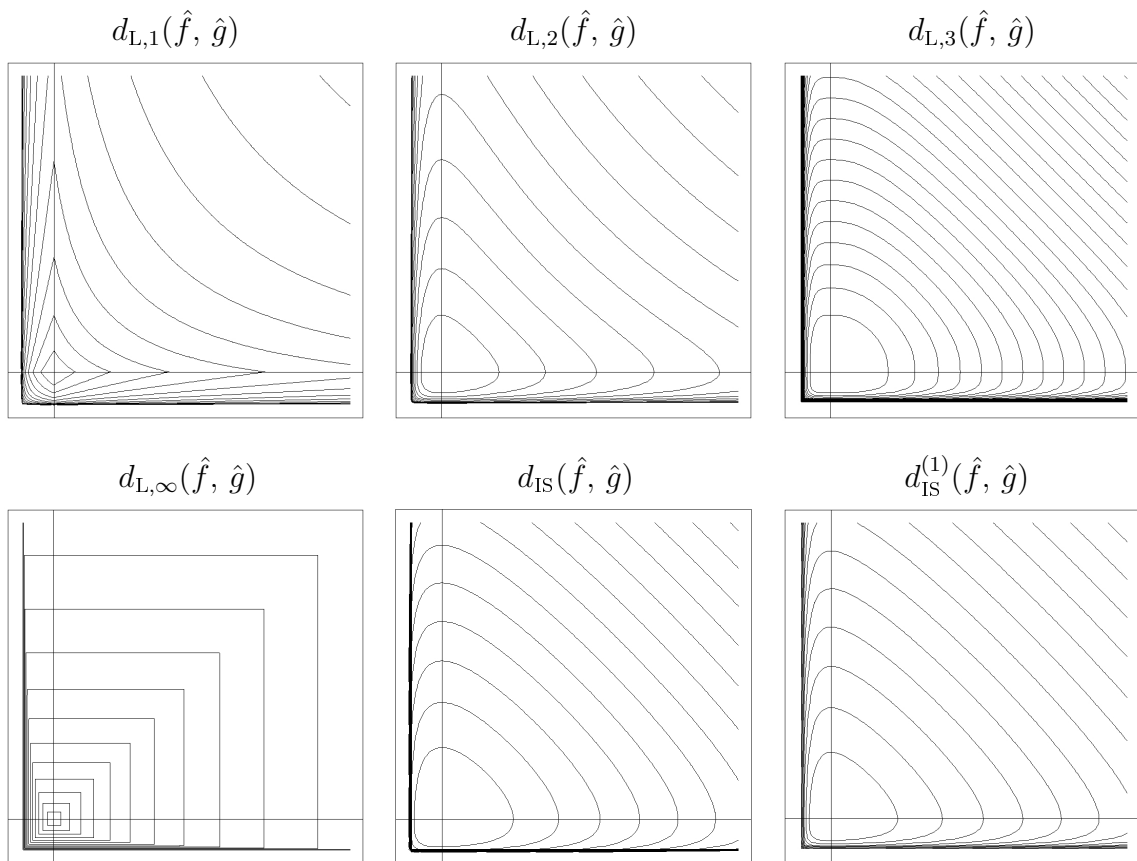


Abbildung 2.6: Konturplots zum Vergleich der Abstandsmaße zwischen Periodogrammen. Die verschiedenen Abweichungsmaße $d(\hat{f}, \hat{g})$ sind als Höhenlinie gegen $\frac{\hat{f}(\omega_1)}{\hat{g}(\omega_1)}$ auf der x-Achse und $\frac{\hat{f}(\omega_2)}{\hat{g}(\omega_2)}$ auf der y-Achse abgetragen.

Analog zum vorherigen Abschnitt kann ein Vergleich des empirischen Spektrums auch über die empirische spektrale Verteilungsfunktion mit der L_p -Norm ihrer Differenzen geschehen. Die empirische Version für zwei Zeitreihenausschnitte der Länge n mit Periodogrammen I und J und geschätzten integrierten Spektren \hat{F} und \hat{G} aus (2.15) ist für $p \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$d_{\text{eVL},p}(\hat{F}, \hat{G}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=-\frac{n}{2}+1}^{\frac{n}{2}} \left| \hat{F}(\omega_j) - \hat{G}(\omega_j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.37)$$

Die entsprechende Metrik für $p \rightarrow \infty$ ist die Kolmogorov-Metrik der empirischen integrierten Spektren,

$$d_{\text{K}}(\hat{F}_+, \hat{G}_+) = \max_{j \in \{-\frac{n}{2}+1, \dots, \frac{n}{2}\}} \left| \hat{F}_+(\omega_j) - \hat{G}_+(\omega_j) \right| \quad (2.38)$$

$$= \frac{4\pi}{n} \max_{j \in \{-\frac{n}{2}+1, \dots, \frac{n}{2}\}} \left| \sum_{k=-\frac{n}{2}+1}^j I(\omega_k) - \sum_{k=-\frac{n}{2}+1}^j J(\omega_k) \right|, \quad (2.39)$$

wobei für reelle Prozesse $I(\omega_{-k}) = I(\omega_k)$ und $J(\omega_{-k}) = J(\omega_k)$ gilt. Im Gegensatz zu den Abweichungsmaßen (2.34), (2.35) und (2.36) werden bei den auf der spektralen Verteilungsfunktion basierenden Abstandsmaßen gleichgerichtete Abweichungen über ein breites spektrales Band stärker gewichtet als viele einzelne Abweichungen in verschiedenen Frequenzregionen. Außerdem sind die absolute Differenz der empirischen Varianzen, mit $s^2 \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} I(\omega_j)$, und die absolute Differenz der Summen von logarithmierten Spektraldichteschätzern,

$$d_{\text{DII}}(\hat{f}, \hat{g}) = \left| \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \ln(\hat{f}(\omega_j)) - \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \ln(\hat{g}(\omega_j)) \right| = \left| \frac{2\pi}{n} \ln \left(\prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\hat{f}(\omega_j)}{\hat{g}(\omega_j)} \right) \right|, \quad (2.40)$$

als Abweichungsmaße vorstellbar. Sie verwenden nicht die gesamte mögliche spektrale Information, um einen Abstand zu messen, sondern fassen Information zusammen, bevor ein Vergleich stattfindet.

2.4.3 Tests auf Unterschiede in den Spektraldichten

In diesem Abschnitt werden Tests vorgestellt, die die Nullhypothese $f(\omega) = g(\omega)$ gegenüber der Alternative $f(\omega) \neq g(\omega)$ prüfen. Die hier vorgestellten Teststatistiken können ebenfalls als spektrale Abweichungsmaße zweier Zeitreihen interpretiert werden.

Ein so genannter „transformierter CUSUM-Test“ wird von [Coates und Diggle \(1986\)](#) zum Vergleich zweier empirischer Spektren vorgeschlagen. Seien $\{X_t\}$ und $\{Y_t\}$ zwei lineare Prozesse mit stetigen Spektren, zugehörigen Spektraldichten $f_x(\omega)$ und $f_y(\omega)$ und seien $I_x(\omega)$ und $I_y(\omega)$ die Periodogramme zu Realisationen der Prozesse mit der Länge n . Dann sind $\frac{I_x(\omega_j)}{f_x(\omega_j)}$ und $\frac{I_y(\omega_j)}{f_y(\omega_j)}$ für die Fourierfrequenzen $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, mit $j \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$, approximativ unabhängige, exponential verteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1 (folgt aus [Priestley, 1981a](#), S. 466). Leicht zu zeigen ist dann, dass

$$Z_j := \ln \left(1 + \frac{I_y(\omega_j)}{I_x(\omega_j)} \right), \quad j \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right\}$$

unter der Annahme, dass $f_x(\omega) = f_y(\omega)$, auch approximativ unabhängige, exponential verteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1 sind.

In [Müller \(1991\)](#) ist nachzulesen, dass auf der Basis einer Folge unabhängiger, exponential verteilter Zufallsvariablen Z_j ein Poissonprozess $\{N_t\}_{t \in [0, \infty)}$ definiert werden kann, mit

$$N_t = \begin{cases} 0, & \text{falls } Z_1 \geq t, \\ \max\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{j=1}^k Z_j < t\}, & \text{falls } Z_1 < t. \end{cases}$$

N_t gibt an, wie viele „Ereignisse“ bis zu einem Zeitpunkt t eingetreten sind. Die Variablen Z_j beschreiben die Abstände zwischen diesen Ereignissen und $C_k := \sum_{j=1}^k Z_j$ sind die Zeitpunkte, zu denen ein Ereignis eintritt. Wird der Prozess nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt C_m , mit $N_{C_m} = m$ fest, betrachtet, dann können die Stoppzeiten C_k , $k \in \{1, \dots, m-1\}$, als eine geordnete, unabhängige Zufallsstichprobe einer auf $[0, C_m]$ gleich verteilten Zufallsvariable interpretiert werden. Genauso ist dann $S_k := \frac{C_k}{C_m}$, mit $k \in \{1, \dots, m-1\}$, eine Zufallsstichprobe aus der Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Hier ist

$$S_k = \frac{\sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{I_y(\omega_j)}{I_x(\omega_j)} \right)}{\sum_{j=1}^m \ln \left(1 + \frac{I_y(\omega_j)}{I_x(\omega_j)} \right)}, \quad k \in \{1, \dots, m-1\},$$

mit $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Außerdem sei $S_m \equiv 1$. Dann ist die Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik (siehe z. B. [Büning und Trenkler, 1994](#)) zur Überprüfung, ob die S_k , $k \in \{1, \dots, m\}$, einer Zufallsstichprobe aus einer Gleichverteilung entstammen, bzw. ob $f_x(\omega) = f_y(\omega)$, gegeben durch

$$\sup_{s \in [0, 1]} |F_R(s) - F_n(s)| = \max \left\{ \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \left| S_k - \frac{k}{m} \right|, \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \left| S_k - \frac{k-1}{m} \right| \right\}, \quad (2.41)$$

wobei

$$F_R(s) = \begin{cases} 0, & \text{falls } s < 0 \\ s, & \text{falls } 0 \leq s < 1 \\ 1, & \text{falls } s \geq 1. \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung und

$$F_n(s) = \begin{cases} 0, & \text{falls } s < S_1 \\ \frac{k}{m}, & \text{falls } S_k \leq s < S_{k+1} \\ 1, & \text{falls } s \geq 1. \end{cases}$$

die empirische Verteilungsfunktion bezeichnen.

Damit der Test eine große Power besitzt, sollte $\sigma_y^2 \geq \sigma_x^2$ gelten und generell sollte $\frac{I_y(\omega_k)}{I_x(\omega_k)}$ für wenige ω_j kleiner als 1 sein (siehe [Coates und Diggle, 1986](#)).

[Choi u. a. \(2004\)](#) schlagen darauf basierend einen modifizierten Test vor, der die symmetrische Teststatistik

$$T_S = \sum_{k=1}^{m-1} U_k, \quad \text{mit} \tag{2.42}$$

$$U_k = \max \left\{ \ln \left(1 + \frac{I_y(\omega_k)}{I_x(\omega_k)} \right), \ln \left(1 + \frac{I_x(\omega_k)}{I_y(\omega_k)} \right) \right\} - \ln 2$$

besitzt und von den Autoren als symmetrische Verhältnisstatistik bezeichnet wird. Da nicht nur die $Z_k = \ln \left(1 + \frac{I_y(\omega_k)}{I_x(\omega_k)} \right)$ sondern auch die Zufallsvariablen $\ln \left(1 + \frac{I_x(\omega_k)}{I_y(\omega_k)} \right)$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$ approximativ unabhängig, exponential verteilt mit Erwartungswert 1 sind, sind auch die U_k für alle k approximativ unabhängig und exponential verteilt mit Parameter 1. Damit folgt T_S einer Gammaverteilung mit Formparameter $\alpha = m - 1$ und Skalenparameter $\beta = 1$. Ein Test kann nun basierend auf dieser Verteilungsannahme durchgeführt werden.

Allerdings geht die Lage der spektralen Verteilung in beide beschriebenen Teststatistiken ein. So ist zum Beispiel der Abstand einer spektralen Verteilung zu einer anderen, die nur einen zusätzlichen Gipfel in der Nähe des Schwerpunktes der Verteilung hat, kleiner als der einer Verteilung, die einen zusätzlichen Gipfel nahe des Randes hat.

Kapitel 3

Datenanalyse

In diesem Kapitel werden die Daten einer Reihe von Einlippen-Tiefbohrversuchen beschrieben und analysiert. Nach einer Beschreibung der Bohrversuche folgt eine statistische Analyse der Körperschallsignale ausgewählter Bohrprozesse. Die Konzentration liegt dabei auf der Spektralanalyse der Zeitreihen, wobei die zeitveränderliche Spektraldichte geschätzt wird und eine Untersuchung auf versteckte Frequenzen folgt. Des Weiteren werden mögliche Ansätze zur Modellierung der Zeitreihen besprochen. Abschließend findet ein Vergleich der in Abschnitt 2.4 vorgestellten spektralen Abweichungsmaße bezüglich der vorliegenden Daten statt.

3.1 Experiment

Als Grundlage für die Untersuchungen dienen die Daten einer am Institut für Spanende Fertigung durchgeführten Testreihe, die aus 40 Durchgangsbohrungen mit verschiedenen Schnitt- und Vorschubgeschwindigkeiten besteht. Das verwendete Werkzeug hat einen Durchmesser von 7 mm und eine Gesamtlänge von 610 mm. Alle Bohrungen wurden in Testwerkstücken mit Tiefe 68 mm und mit der Stahlbezeichnung 34CrNiMo6 durchgeführt. Dabei wurden Schnittgeschwindigkeiten von 50, 60, 70 und 80 m/min bzw. gleichbedeutend mit ca. 2274, 2728, 3183, 3638 Umdrehungen (U) pro Minute verwendet. Die Vorschubgeschwindigkeiten waren 0.03, 0.035, 0.04, 0.045, 0.05 m/U. Es wurde ein vollständiger Versuchsplan mit zwei Experimenten pro Einstellungskombination verwendet. Dabei wurde darauf geachtet, dass

das Werkzeug keiner merklichen Abnutzung unterlag und die Bedingungen für die Versuche bzgl. des Werkstücks als auch der Umgebungssituation gleich blieben.

Die Sensoren messen die elektrische Spannung in Volt mit einer Abtastrate von 20 000 Hz. Diese Werte werden so transformiert, dass die Informationen über die Beschleunigung von Prallplatte und Körperschallsensor in m/s^2 und das Bohrmoment in Nm vorliegen. Die aufgenommenen Signale wurden nach einer analog/digital-Wandlung als Binärdateien gespeichert. Zu jedem Bohrversuch wurde vermerkt, in welchen Prozessabschnitten ein Beobachter Ratterschwingungen bemerkte und welche Auffälligkeiten, z. B. die Art der ausgestoßenen Späne, vorlagen. Ein mechanischer Tiefpassfilter sorgt dafür, dass alle Schwingungen herausgefiltert werden, die über der Nyquistfrequenz von 0.0001 U/s liegen, um zu verhindern, dass diese im digitalisierten Signal bei der Spektralanalyse anderen Frequenzen zugeordnet werden. Dieses Phänomen („Aliasing“) kann zu Fehlinterpretationen führen (siehe z. B. [Bloomfield, 2000](#)).

Die Zeitreihen der von den drei Sensoren aufgenommenen Signale werden beispielhaft für einen Bohrprozess in [Abbildung 3.1](#) gezeigt. Dieser Bohrprozess lief mit einer Schnittgeschwindigkeit von 50 m/min und einer Vorschubgeschwindigkeit von 0.04 m/U . Anhand des Mittelwerts der Reihe für das Bohrmoment des Einlippen-Tiefbohrers kann eine Unterteilung in die Prozessabschnitte vorgenommen werden. Zur Überwachung der Spannfrequenz muss die Reihe der Prallplattenbeschleunigung genauer untersucht werden. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich jedoch auf die Störung des Prozesses durch Ratterschwingungen, so dass auf die Prozessabschnittserkennung und die frühzeitige Erkennung von Spänestau nicht näher eingegangen wird.

Während des Bohrprozesses aus [Abbildung 3.1](#) identifizierte ein Beobachter ein leichtes Rattern während der zweiten Hälfte des Bohrprozesses, das sich nur an einer geringen Vergrößerung der Amplitude im Körperschallsignal und einem sehr leichten Anstieg im Bohrmoment erkennen lässt. Auffälligkeiten im besonders interessierenden Körperschallsignal sind außerdem in Form einer leicht vergrößerten Amplitude am Ende des Anbohrvorgangs und in Form einer kurzzeitig extrem vergrößerten Amplitude gegen Ende des statischen Bohrens zu erkennen. Wie in anderen Versuchen der Reihe zu sehen, ist in der Anbohrphase die Gefahr von Ratterschwingungen besonders groß. In diesem Fall jedoch stabilisierte sich der Bohrer direkt nach dem Anbohren wieder. Die sehr auffällige Ausreißergruppe in Gestalt einer

kurzfristig vergrößerten Amplitude im weiteren Verlauf der Zeitreihe ist eventuell auf eine externe Geräuschstörung zurückzuführen.

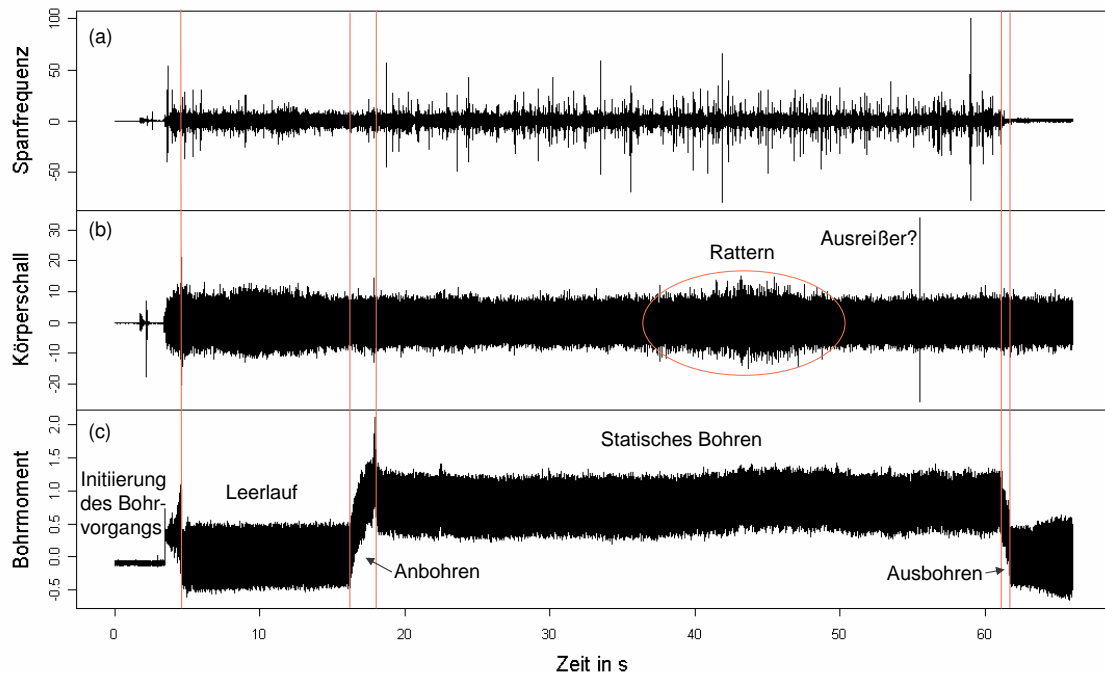


Abbildung 3.1: Zeitreihen (a) der Beschleunigung der Prallplatte, (b) der Beschleunigung des Körperschallsensors und (c) des Bohrmoments eines Bohrprozesses mit leichtem Rattern

Es werden im Folgenden ausschließlich die Körperschallsignale der Versuchsreihe betrachtet. Für diese Daten wird untersucht, wie sich die Zeitreihe des Körperschalls im Laufe eines Bohrprozesses und insbesondere beim Rattern verändert. In der Versuchsreihe wurden Bohrungen mit verschiedenen Schnitt- und Vorschubgeschwindigkeiten durchgeführt. In Tabelle 3.1 sind diese Einstellungen samt einer zugehörigen Codierung dargestellt, die angibt, ob eine Ratterschwingung festgestellt wurde. Es ist auffällig, dass ein Rattern immer auftritt, wenn sowohl Schnitt- als auch Vorschubgeschwindigkeit groß ist. Vor allem scheint ein schneller Vorschub zu Ratterschwingungen zu führen. Bei kleiner Vorschubgeschwindigkeit tritt häufig ein kurzes Rattern beim Anbohren auf, aber selbst bei großer Schnittgeschwindigkeit ist der Bohrprozess danach stabil. Da eine schnelle Bearbeitung wünschenswert ist, soll in der Praxis jedoch eine möglichst hohe Vorschubgeschwindigkeit erzielt werden. Sehr häufig, besonders bei hohen Vorschubgeschwindigkeiten, setzt schon beim Anbohren ein Rattern ein, das über

Schnittgeschw. in U/min	Vorschubgeschwindigkeit in mm/U				
	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05
50	1 1	0 0	1 2	1 1	2 1
60	1 1	1 1	1 1	2 2	3 3
70	1 1	1 1	1 1	3 3	3 3
80	1 1	1 1	3 3	3 3	3 3

Tabelle 3.1: Jeweils 2 Experimente für verschiedene Vorschub- und Schnittgeschwindigkeiten. Codierungen für das Rattern: 0: sehr ruhig, 1: ruhig, 2: leichtes Rattern, 3: starkes Rattern

den Prozess hinweg bestehen bleibt. Dieses Problem sollte in erster Linie mit Methoden der statistischen Versuchsplanung angegangen werden und wird hier nicht betrachtet.

Von Interesse sind hier insbesondere Ratterschwingungen, die erst im Laufe des Bohrprozesses auftreten. In diesem Kapitel wird beispielhaft an ausgewählten Versuchen eine explorative Analyse der Zeitreihen der Körperschallsignale durchgeführt. Ziel ist es zu erkennen, wie sich der Körperschall beim Rattern im Vergleich zu einem stabilen Prozessverlauf ändert und wie er sich über die Zeit bzw. die Bohrtiefe entwickelt. Die Bohrprozesse aus Tabelle 3.1 sind zeilenweise durchnummeriert (siehe Tabelle B.1 in Anhang B), so dass auf einzelne Bohrprozesse Bezug genommen werden kann.

3.2 Statistische Analyse

Wir betrachten jedes der aufgenommenen Signale als Realisation $\{x_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$ eines stochastischen Prozesses $\{X_t\}$ in diskreter Zeit. Es soll der zeitliche Verlauf von Lage, Streuung und Abhängigkeiten innerhalb der Zeitreihe untersucht werden. Beispielhaft werden sechs unterschiedliche Bohrprozesse zur genaueren Untersuchung ausgewählt. Die Bohrprozesse 2 und 5 wurden als nicht ratternd identifiziert. Bei Bohrprozess 6 wurde leichtes Rattern in der zweiten Hälfte des Prozesses und bei Bohrprozess 29 ein deutliches Rattern kurz nach Prozessbeginn zusätzlich mit einer „Frequenzänderung“ im späteren Prozessverlauf festgestellt. Bei Bohrprozess 30 wurde beginnend mit dem Anbohren ein Rattern identifiziert und in Bohrprozess 37 ein über den gesamten Prozess „quietschendes“ und „impulsartiges“ Rattern.

Man erwartet bei einer Messung einer Beschleunigung mittels eines fixen Beschleunigungsabnehmers ein Signal mit konstantem Mittelwert Null. Ein gleitendes Mittel (siehe Abbildung B.1 in Anhang B) liefert allerdings einen Mittelwert, der um den Wert -0.288 schwankt. Dies gilt sowohl bei Stillstand des Bohrers als auch im Leerlauf, im ruhigen Prozess und im leicht ratternden Prozess. Nur bei extrem starkem Rattern ist der Mittelwert der Signale größer, wobei sich dies erst in der dritten Nachkommastelle bemerkbar macht. Somit ist davon auszugehen, dass es sich um einen systematischen Messfehler handelt. Im Weiteren wird 0.288 zu den Reihen addiert, so dass für die stochastischen Prozesse ein konstanter Erwartungswert von Null angenommen werden kann.

Die Varianz $\text{Var}(X_t) = E(X_t^2)$ des Prozesses kann durch die empirische Varianz lokal in Fenstern geschätzt werden. Wenn der Erwartungswert von X_t Null ist, ist die empirische Varianz äquivalent zur physikalischen Leistung des Signals. In den Abbildungen 3.2, 3.4, 3.5 und 3.6 sind in den jeweils oberen Graphiken die Entwicklungen der Varianz für ausgewählte Zeitreihen dargestellt. Diese sind hier nicht in Abhängigkeit von der Zeit, sondern der Bohrtiefe angegeben, so dass sich auch für verschiedene Vorschubgeschwindigkeiten die gleiche Skala ergibt. Dazu wurde mit Hilfe der Zeitreihen des Bohrmoments Anbohr- und Ausbohrzeitpunkt festgelegt. Beim Rattern ist eine eindeutige Steigerung der Varianz zu erkennen, aber auch bei ruhigem Bohrprozess deutet die Variabilität der geschätzten Varianzen auf Nichtstationarität in den Prozessen hin.

In Abbildung 3.3 wird das geschätzte Spektrum eines Segments der Länge 1 s aus einem ruhigen Prozessausschnitt mit dem eines Segments aus einem leicht ratternden Prozessausschnitt verglichen. Man erkennt einen Anstieg der Periodogrammwerte insbesondere im Frequenzbereich um 1 700 Hz bzw. 0.53 rad und um 3 600 Hz bzw. 1.07 rad.

In den unteren Graphiken der Abbildungen 3.2, 3.4, 3.5 und 3.6 sind Spektrogramme dargestellt, die mit Hilfe der in Abschnitt 2.3.5 vorgestellten SLEX-Periodogramme berechnet wurden. Es wird hier nicht die von Ombao u. a. (2001) vorgeschlagene „beste Basis“ gewählt, mit der eine Einteilung der Zeitreihe in lokal stationäre Abschnitte erzielt werden soll. Das Software-Paket für MatLab, das auf der Homepage mit der URL <http://www.stat.uiuc.edu/~ombao/Datasets.html> eines der Autoren von Ombao u. a. (2001) zur Verfügung gestellt ist, eignet sich nicht für große Datenmengen. Eine nichtstationäre Spektraldichtedarstellung über die „beste“ dyadische SLEX-Basis eines Prozessausschnitts

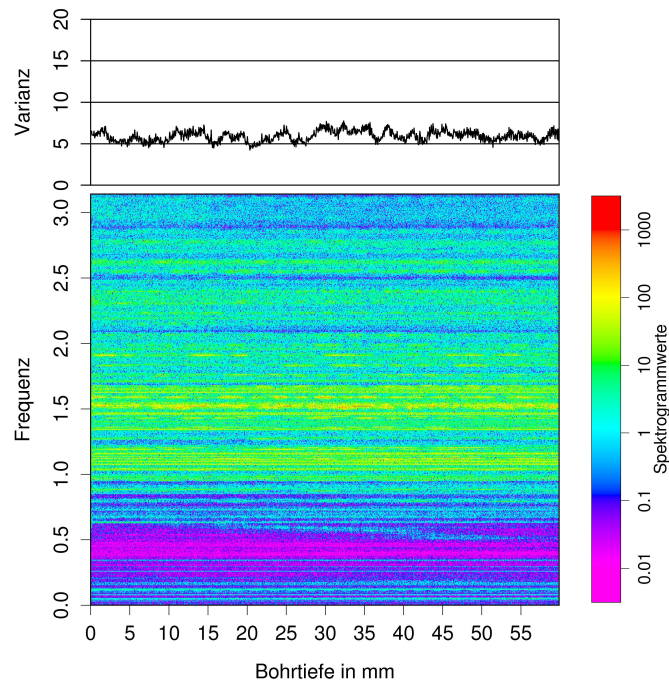


Abbildung 3.2: *Entwicklung von Varianz und Spektrum für Reihe 2*

schnitts von Reihe 29, in dem ein Rattern einsetzt, zeigt Abbildung B.2 in Anhang B. Die Darstellung bringt wegen der Einschränkung der Segmentierungspunkte keinen Vorteil, wenn es darum geht, einen Überblick darüber zu bekommen, welche Veränderungen an welchen Stellen stattfinden. Um einen Eindruck über die Veränderungen in den Prozessen zu bekommen, scheint eine einfachere Darstellung angemessen.

Die Spektrogramme in den Abbildungen 3.2, 3.4, 3.5 und 3.6 liefern eine Spektraldarstellung für nichtstationäre Zeitreihen, deren SLEX-Periodogramme bezüglich einer Basis berechnet wurden, die durch gleichmäßige Aufteilung der Zeitreihe in Blöcke der Größe 1024 Datenpunkte oder 0.0512 s entsteht. Damit kann die Veränderung des Spektrums über die Zeit, beziehungsweise über die Bohrtiefe, veranschaulicht werden. In diesen dreidimensionalen Gitterplots sind zu einem gleichmäßigen Zeit-Frequenz-Gitter die zugehörigen Spektrumswerte als Farben eingetragen.

Es ist zu sehen, dass die Verteilung der Leistung über die Frequenzen in einem ruhigen Bohrprozess im Wesentlichen gleich bleibt und sich nur in einigen Frequenzbereichen leichte Leistungsänderungen ergeben. Bei Rattern wird in einigen Frequenzbändern ein schnellerer und stärkerer Leistungsanstieg beobachtet. In den Zeitreihen mit leichtem Rattern geht diese Veränderung graduell vor sich und nähert sich immer mehr einer sprunghaften Veränderung an, je stärker das Rattern ist. Allerdings muss beachtet werden, dass abrupte Sprünge

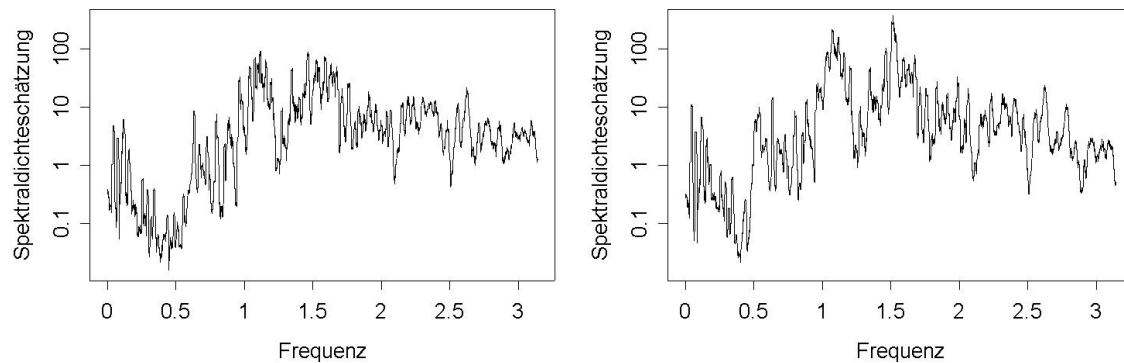


Abbildung 3.3: Periodogramm für Segmente aus ruhigem und ratterndem Prozessausschnitt, Bohrprozess 6: 26 bis 27 s (14.78 bis 16.29 mm) und 42 bis 43 s (39.03 bis 40.55 mm)

im Spektrogramm verwischt werden. Veränderungen, die auf Rattern hinweisen, sind zwar sichtbar, aber heben sich nicht sehr stark gegenüber anderen Schwankungen im Spektrum ab.

Das Frequenzband um 0.5 rad bzw. bei ungefähr 1 500 bis 2 000 Hz scheint für leichtes und gemäßigtes Rattern das interessanteste zu sein. Auffällig ist ein breiter Gipfel in diesem Bereich, der im Laufe des Prozesses einen Anstieg der Amplitude mit gleichzeitig abnehmendem Frequenzmittelpunkt erfährt. Dieses Muster erscheint in abgeschwächter Form auch bei Reihen, für die kein Rattern identifiziert wurde. Zwar sind die hohen Amplituden offensichtlich bei gleicher Bohrtiefe in den gleichen Frequenzbereichen vorhanden, ansonsten sind jedoch keine Hinweise darauf zu erkennen, dass das Einsetzen von Rattern mit der Bohrtiefe zusammenhängt. In Bohrprozessen mit starkem Rattern sind mehr Frequenzbereiche von Anstiegen der Leistung betroffen. So sind in [Abbildung 3.5](#) bei Bohrprozess 29 und 30 eindeutige durch Rattern verursachte Leistungsanstiege in Frequenzbändern um 0.55, 1.1 und 1.65 zu erkennen. Im Laufe des Ratterns sinken die Mittelpunkte der Frequenzbänder mit erhöhter Leistung zu Frequenzen um 0.5, 1 und 1.5. Bei Bohrtiefe 60 mm macht sich das Rattern mit Frequenzänderung im Körperschall dadurch bemerkbar, dass hohe Leistungen in Frequenzbändern um die 0.4, 0.75, 1.15 und 1.6 auftreten. Bei Bohrprozess 37 ([Abbildung 3.6](#)) sind kurze Leistungsanstiege bei allen Frequenzen vorhanden.

Betrachten wir nun die Entwicklung in einzelnen Fourierfrequenzen, indem für die Bohrprozesse 2, 5 und 6 aus den [Abbildungen 3.2](#) und [3.4](#) die Werte der Spektraldichteschätzer

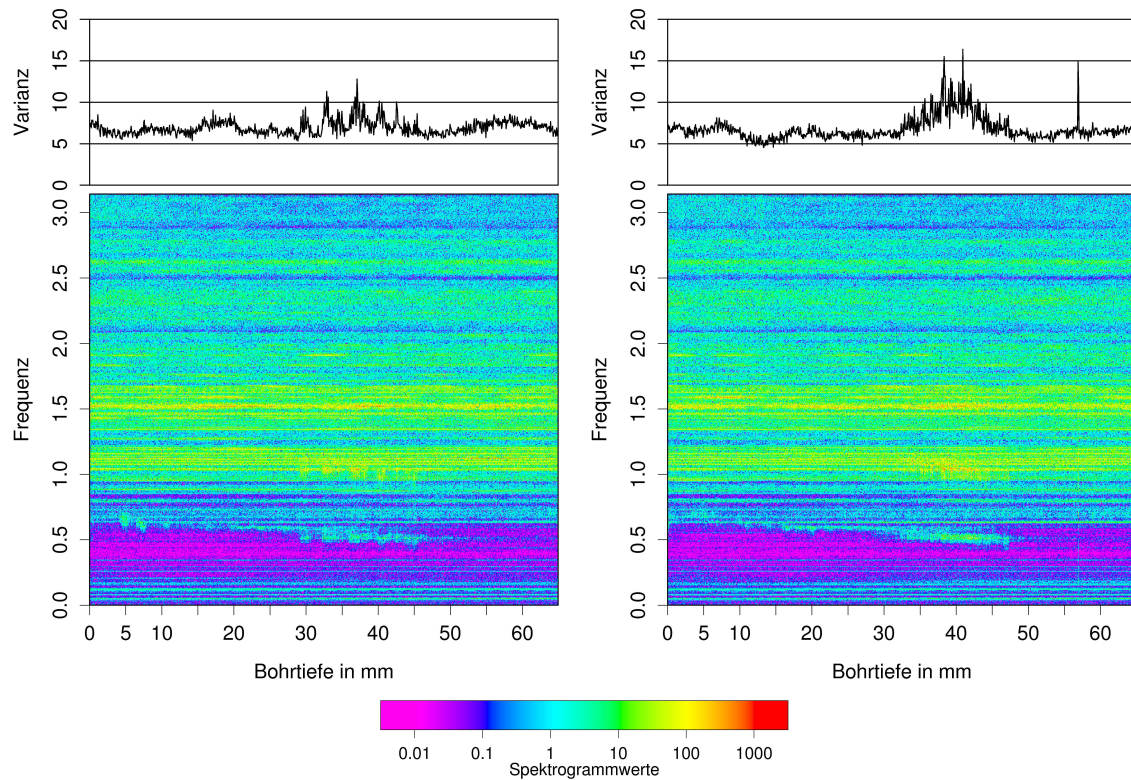


Abbildung 3.4: Entwicklung von Varianz und Spektrum für Reihen 5 und 6

für eine einzelne Frequenz extrahiert werden. Beispielfhaft ist in [Abbildung 3.7](#) für die Frequenz 1562.5 Hz für die drei Prozesse mit gleicher Schnittgeschwindigkeit die Entwicklung der Leistung dargestellt. Während die Amplitude für den Bohrprozess 6 einen trendhaften Anstieg mit Einsetzen des Ratterns bei einer Bohrtiefe von ca. 30 mm mit anschließenden Abfall bei ca. 48 mm zeigt, so ist ein vergleichsweise schwacher gleichmäßiger Trend über den gesamten Bohrprozess 2 zu erkennen. Obwohl dort kein Rattern erkannt wurde, ähnelt der Amplitudenverlauf von Bohrprozess 5 dem von Bohrprozess 6 für die ausgewählte Frequenz, wenn auch der Anstieg nicht so stark ausgeprägt ausfällt. Hierbei wird deutlich, dass es einen fließenden Übergang zwischen den Erscheinungsbildern des Körperschallsignals bei ratternden und ruhigen Bohrprozessen gibt. Eine wesentliche Herausforderung für eine automatische Prozessüberwachung ist es, ein leichtes Rattern wie in Versuch 6 von einem lediglich „unruhigen“ jedoch nicht ratternden Prozessausschnitt wie in Versuch 5 zu unterscheiden. Weitere Leistungsverläufe bei versteckten Frequenzen werden im nächsten Abschnitt betrachtet.

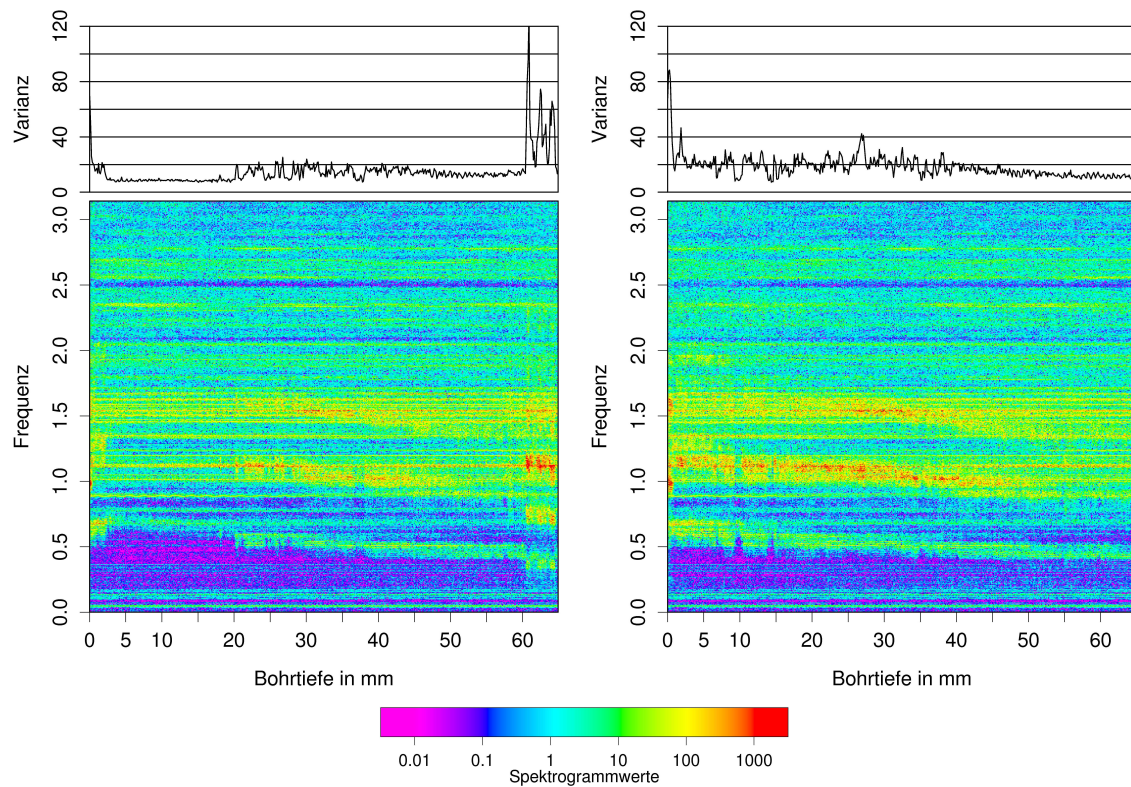


Abbildung 3.5: *Entwicklung von Varianz und Spektrum für Reihen 29 und 30*

In diesem Abschnitt haben wir gesehen, dass sich Rattern im Spektrum der Körperschallzeitreihen durch einen Leistungsanstieg bemerkbar macht, der auf einige variierende Frequenzbänder beschränkt bleibt. Auch bei ruhigen Prozessen sind Veränderungen in der Leistung und teilweise sogar dauerhafte Anstiege der Gesamtleistung zu erkennen. Der Leistungsanstieg bei Rattern ist relativ zu diesen Veränderungen in ruhigen Prozessen stärker und kann graduell bis abrupt verlaufen.

Die gleiche Information wie die Spektraldichte enthält auch die Autokovarianzfunktion. In Abbildung B.3 in Anhang B sind für die Bohrprozesse 6 und 29 die Verläufe der Autokovarianzen zu den Zeitdifferenzen 0 bis 50 abgebildet. Auch hier lassen sich durch das Rattern ausgelöste Veränderungen für die meisten abgebildeten Zeitdifferenzen beobachten. Allerdings sind diese Veränderungen durch die Bündelungen in den Frequenzbändern im Spektrogramm besser zu erkennen.

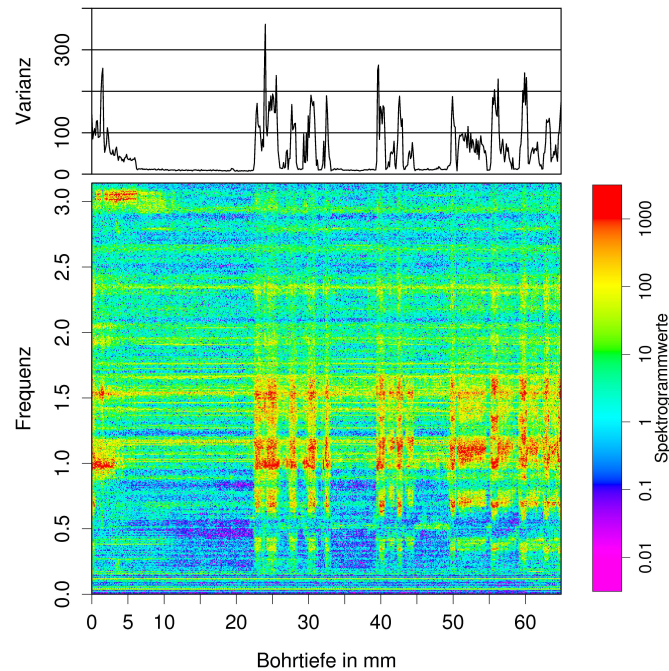


Abbildung 3.6: Entwicklung von Varianz und Spektrum für Reihe 37

3.3 Versteckte Frequenzen

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob die Signale des Körperschalls deterministische Anteile besitzen, also ob versteckte Frequenzen im Spektrum existieren. In Kapitel 2 wurde ein Verfahren vorgestellt, mit dem Frequenzen mit diskretem Spektrum in einem stationären Prozess identifiziert und die Leistung an diesen Frequenzen berechnet werden kann. Um den Verlauf über die gesamte nichtstationäre Zeitreihe hinweg betrachten zu können, wird im

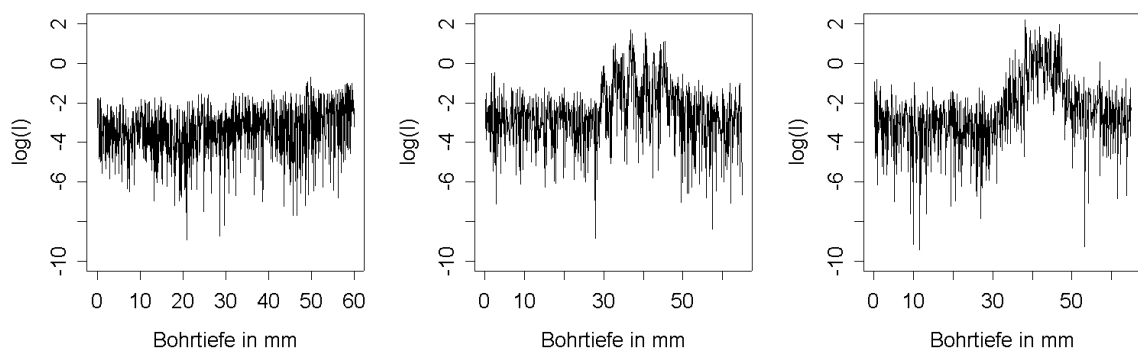


Abbildung 3.7: Entwicklung der Spektraldichteschätzung für Frequenz 1562.5 Hz (0.49 rad) in den Bohrprozessen 2, 5 und 6

Folgendes diese Berechnung in Blöcken der Größe 2048 durchgeführt. Verfeinerte Ansätze des „Frequency Line Trackings“ (Quinn und Hannan, 2001) stoßen schnell auf Rechenzeitprobleme, weswegen wir hier blockweise Berechnungen durchführen. Zunächst wird in jedem Block der robuste Spektraldichteschätzer gemäß Gleichung (2.12) berechnet und anschließend die versteckten Frequenzen, wie in Abschnitt 2.2.4 beschrieben, identifiziert. Bei der Berechnung der robusten Spektraldichteschätzung wird die Konstante der Huber-Funktion als $c = 1$ und die Bandbreite des Bartlett-Priestley-Kerns (siehe Beispiel 2.2) als $b = 0.05$ gewählt. Für die Auswahl der Frequenzen wurde $\epsilon = 0.02$ festgelegt.

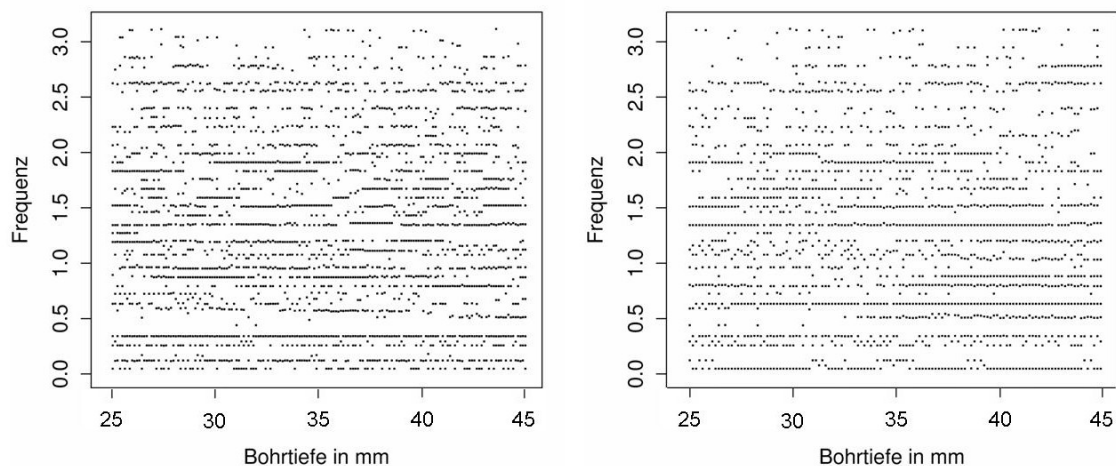


Abbildung 3.8: *Spektrallinien in Ausschnitten von Bohrprozessen 2 und 6*

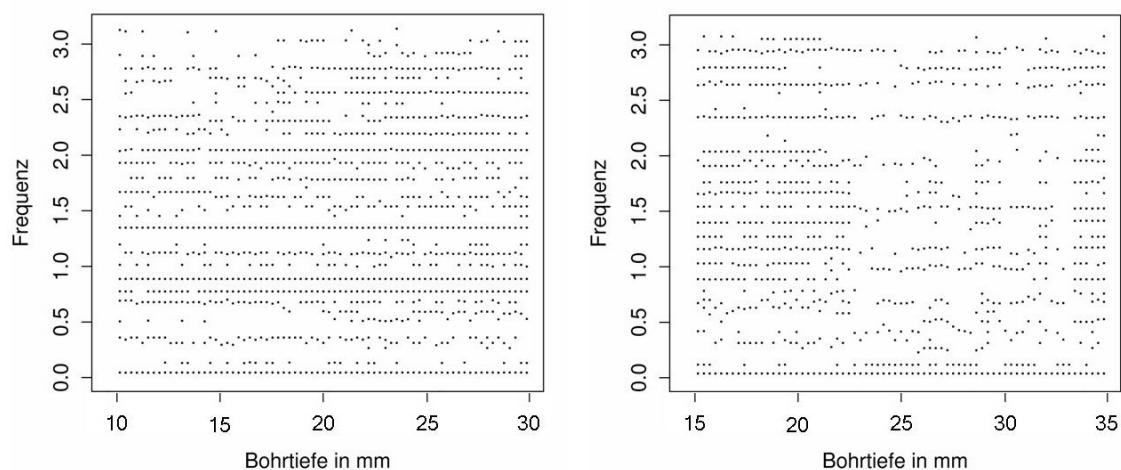


Abbildung 3.9: *Spektrallinien in Ausschnitten von Bohrprozessen 29 und 37*

In den Abbildungen 3.8 und 3.9 sind für die Bohrprozesse 2, 6, 29 und 37 die identifizierten versteckten Frequenzen gegen die Bohrtiefe abgetragen. Das Einsetzen des Ratters ist

mittels dieser Größen, außer bei den durch das impulshafte Rattern hervorgerufenen sehr starken Veränderungen in Bohrprozess 37, kaum zu erkennen. Die Spektrallinien, die sich innerhalb von Frequenzbändern mit hoher Amplitude befinden, bewegen sich beim Rattern auch mit diesen zusammen zu niedrigeren Frequenzen hin. Die Spektrallinie bei ca. 0.5 rad erscheint z. B. bei Bohrprozess 6 startend um die 32 mm und bei Bohrprozess 29 bei 20 mm Bohrtiefe im Zentrum des Leistungsgipfels, den man auch in den Abbildungen 3.4 und 3.5 erkennen kann. Einige der versteckten Frequenzen bleiben über den gesamten Prozess hinweg erhalten, wobei jedoch die meisten über kurze Abschnitte wiederholt nicht zu entdecken sind.

In Abbildung 3.10 werden Leistungsverläufe bei versteckten Frequenzen dargestellt, die über lange Zeit vorhanden sind. Diese sind kaum durch Rattern beeinflusst; nur bei der Frequenz 6 143 Hz aus Bohrprozess 29 ist ein Leistungsabfall bei dem spät einsetzenden starken Rattern bemerkbar. Die Frequenz 2 005 Hz bei Bohrprozess 6 hingegen erfährt fast über den gesamten und demnach auch schon im ruhigen Bohrprozess einen leichten Leistungsanstieg. Das periodische Verhalten von Bohrprozess 37 zur Frequenz 121 Hz kann man auch im rechten unteren Bild in Abbildung B.1 erkennen. Diese Frequenz entspricht in diesem Bohrversuch der doppelten Schnittgeschwindigkeit (80 m/min). Bei den anderen abgebildeten Prozessen ist ein solcher Zusammenhang nicht erkennbar.

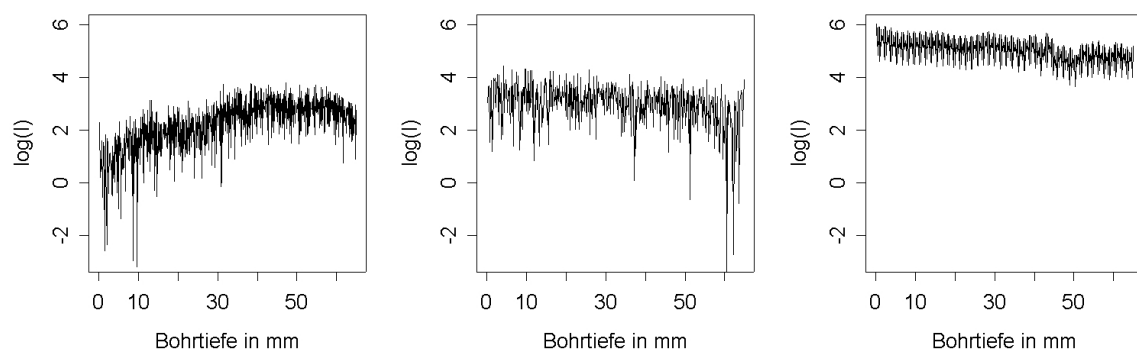


Abbildung 3.10: Entwicklung der Spektrallinien bei Frequenz 2 005 Hz (0.63 rad) in Bohrprozess 6, bei Frequenz 6 143 Hz (1.93 rad) in Bohrprozess 29 und bei Frequenz 121 Hz (0.038 rad) in Bohrprozess 37

Es ist mittels dieser Untersuchungen nicht zu erkennen, dass eine Resonanzfrequenz existiert, die erst beim Rattern angeregt wird, sondern das Rattern gibt sich durch eine Erhöhung

der Leistung in mehreren Frequenzbändern zu erkennen. Da die versteckten Frequenzen keinen hilfreichen Beitrag zur Erkennung des Ratterns liefern können, werden sie im Weiteren nicht mehr besonders beachtet. Werden die versteckten Frequenzen in den Zeitreihen eliminiert, ändert sich das Aussehen der Graphiken in Abschnitt 3.2 nur unwesentlich. Die hier durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass die Spektraldichte nicht existiert, weil deterministische Anteile in der Zeitreihe entdeckt wurden. Die in späteren Untersuchungen betrachteten „Spektraldichteschätzer“ dürfen deshalb im strengen Sinne nicht als solche bezeichnet werden. Für Vergleiche untereinander und explorative Untersuchungen können sie trotzdem ohne Einschränkung verwendet werden.

3.4 Modellierung

Ein phänomenologisch basiertes Modell der Kräfte im Bohrprozess oder des Körperschalls ist extrem komplex, weil eine komplizierte Zusammensetzung verschiedenartiger gedämpfter Schwingungen beschrieben werden muss. Stochastische Zeitreihenmodelle können eventuell eine Alternative zu physikalischen Modellen bieten. Es ist wünschenswert ein datengenerierendes Modell für die betrachteten Zeitreihen zu finden.

In [Theis u. a. \(2005\)](#) werden Bifurkationsmodelle als erfolgversprechende Kandidaten für Ratterphänomene beim BTA (**B**oring and **T**repanning **A**ssociation) - Tiefbohren diskutiert. Im Gegensatz zum Rattern beim Einlippen-Tiefbohren äußert sich das Rattern beim BTA-Tiefbohren als harmonische Oszillation in einzelnen Frequenzen in der Zeitreihe des Bohrmoments. So werden in [Theis u. a. \(2005\)](#) Modelle für die Entwicklung der Amplitude dieser Frequenzen vom ruhigen Bohrprozess bis zum Rattern aufgestellt, bei denen sich eine Veränderung schon lange vor dem eigentlichen Sprung der Amplitude beim Einsetzen des Ratterns ankündigt. In den in dieser Arbeit betrachteten Experimenten ist das Rattern jedoch als Veränderung im Bohrmoment kaum zu erkennen und in der Zeitreihe des Körperschalls reicht es nicht aus, einzelne Frequenzen zu betrachten, weil sich die Veränderungen in breiten Frequenzbändern äußern.

Phänomene, wie das Absinken der Frequenzwerte von Leistungsgipfeln und die gleichzeitige Vergrößerung der Amplituden, können laut [Ozaki \(1980\)](#) mit einem ARMA-Prozess mit zeitveränderlichen, Amplituden-abhängigen Parametern modelliert werden. In dem dort vor-

gestellten nichtlinearen exponentiellen AR-Modell steigt durch Vergrößerung der Amplitude der Wert des ersten AR-Parameters, wodurch ein sinkender Frequenzwert des Leistungsgipfels hervorgerufen wird. [Shi und Aoyama \(1997\)](#) und [Shi u. a. \(1998\)](#) wenden solche Modelle für Vibrationssignale erfolgreich zur Erkennung von Rattern an.

Die Frage ist, ob das Absenken des Frequenzwertes über ein herkömmliches nichtlineares Modell beschrieben werden kann. [Tong \(1990\)](#) entwickelt Methoden der deskriptiven Datenanalyse, durch die eine nichtlineare Struktur in den Daten aufgedeckt werden kann. Allerdings kann durch die Betrachtung von Phasendiagrammen, Kreuzautokorrelationen zwischen X_t und X_t^2 (auffällige Strukturen können auf bilineare Modelle hinweisen) oder (partiellen) Autokorrelationsfunktionen von X_t^2 und $|X_t|$ (auffällige Strukturen können auf ARCH-Modelle hinweisen), in den vorliegenden Zeitreihen der Körperschallsignale kein Hinweis auf eine nichtlineare Struktur entdeckt werden.

Für die Anwendung klassischer Verfahren zur Strukturbruchererkennung, die in Kapitel 4 zusammengefasst wird, muss jeweils ein stationäres Modell für den Zeitreihenabschnitt vor und nach der Veränderung weitestgehend bekannt sein. Eine realistische Annahme ist, dass ein Modell beschrieben werden kann, in dem eine Veränderung eines oder mehrerer Parameter das Einsetzen des Ratterns bedeutet. Ein einfacher Modellierungsansatz besteht darin, an die Zeitreihe ARMA-Modelle in kurzen stationären Ausschnitten anzupassen, nachdem zuvor die versteckten Frequenzen identifiziert wurden und deren spektraler Leistungsanteil aus den Zeitreihen entfernt wurde. Es zeigt sich, dass eine extrem hohe Anzahl an Parametern benötigt wird, um eine einigermaßen akzeptable Approximation der Zeitreihen über lineare Modelle zu erhalten. Dabei liefern verschiedene Modellwahlansätze, wie eine Wahl der Parameteranzahl mit Hilfe des AIC (**A**kaikes **I**nformation **C**riterion), des BIC (**B**ayesian **I**nformation **C**riterion) (siehe z. B. [Choi, 1992](#)), oder über Vergleiche der geschätzten und der durch das Modell gegebenen Spektraldichte, ähnliche Ergebnisse. Die Modelle werden daher nicht als vertrauenswürdige Möglichkeit gesehen, die die Daten in angemessener Weise beschreibt. Die Informationen in den Daten können besser durch ein rekursives ARMA-Schätzverfahren dargestellt werden, das hier allerdings kein Daten-generierendes Modell liefern kann. Wir konzentrieren uns auf wenige Parameter, deren Veränderung wir während des Ratterns betrachten. Eine detaillierte Ausführung ist in Anhang B zu finden. Die Veränderungen im Leistungsspektrum während des Rattern zeigen sich auch in den Parametern, wie von [Ozaki \(1980\)](#) beschrieben, vornehmlich in einer Vergrößerung des ersten AR-Parameters

und in einem Anstieg der Varianz der Zeitreihe. Verfahren zur Erkennung von Strukturbrüchen, die auf solchen rekursiven Schätzverfahren basieren, werden in Kapitel 5 diskutiert.

3.5 Vergleich spektraler Abweichungsmaße

In diesem Abschnitt wird ein empirischer Vergleich der in Abschnitt 2.4 vorgestellten spektralen Abweichungsmaße in Bezug auf die Fähigkeit angestrebt, Unterschiede im Körperschallsignal eines ratternden Prozessausschnitts gegenüber eines nicht ratternden Prozessausschnitts zu erfassen. Dazu betrachten wir Ausschnitte aus ruhigen und ratternden Segmenten von 3 Zeitreihen, in denen nach einer ruhigen Bohrphase ein Rattern einsetzte: Bohrprozess 6: 31.6 bis 37.5 s (entspricht ca. 20.69 bis 29.63 mm) und 39.8 bis 43 s (33.12 bis 37.97 mm), Bohrprozess 9: 20 bis 32 s (9.19 bis 31.93 mm) und 37.5 bis 41 s (42.35 bis 48.98 mm), Bohrprozess 29: 15 bis 19.35 s (6.50 bis 18.04 mm) und 20.15 bis 25 s (20.16 bis 33.02 mm). Es werden jeweils 50 Segmente aus den ruhigen Ausschnitten und jeweils 50 aus den ratternden Ausschnitten mit einer Länge von 512 Beobachtungspunkten (entspricht 0.0256 s) ausgewählt. Jeder ruhige Ausschnitt eines Bohrprozesses wird einerseits mit jedem anderen ruhigen Ausschnitt und andererseits mit jedem ratternden Ausschnitt des selben Prozesses verglichen, indem die verschiedenen Abweichungsmaße der entsprechenden Spektraldichteschätzer berechnet werden. Insgesamt ergeben sich $3 \times 1\,225 = 3\,675$ Vergleiche von jeweils zwei ruhigen Prozessausschnitten und $3 \times 2\,500 = 7\,500$ Vergleiche von einem ruhigen und einem ratternden Prozessausschnitt.

Wir wollen untersuchen, wie viele Veränderungen mit Hilfe einer Grenze für die Abweichungsmaße erkannt werden können, wenn diese Grenze so festgelegt wird, dass nur ein geringer Prozentsatz von Vergleichen zweier ruhiger Prozessausschnitte ein falsches Ergebnis liefert. Als Grenze wird das 90%-, 95%-, bzw. das 99%-Quantil der Werte des Abweichungsmaßes aus den 3675 Vergleichen definiert, bei denen die verglichenen Prozessausschnitte beide ruhig sind. Jeder Wert über einer Grenze signalisiert per Definition einen Unterschied zwischen den Zeitreihensegmenten bezüglich ihres Spektrums. Als Vergleichskriterium dient der Anteil der Werte der jeweiligen Abweichungsmaße aus dem Vergleich von ruhigen und ratternden Teilen, bei dem ein Unterschied festgestellt wird. Die festgelegten 90%, 95%, bzw. 99% kön-

nen als Spezifität und der gerade beschriebene Anteil als Sensitivität bezeichnet werden. Die Spezifität bezeichnet hier die geschätzte Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{kein Unterschied erkannt} | \text{beide Ausschnitte ruhig}),$$

dass kein Unterschied festgestellt wird, wenn zwei ruhige Prozessausschnitte verglichen werden. Genauso ist die Sensitivität die geschätzte Wahrscheinlichkeit

$$P(\text{Unterschied erkannt} | \text{Ausschnitte unterschiedlich}),$$

dass ein Unterschied festgestellt wird, wenn ein ruhiger mit einem ratternden Prozessausschnitt verglichen werden.

Für die Schätzung der Spektraldichte werden unterschiedliche Strategien gewählt:

- Es werden Schätzer ohne und mit Tapern verwendet, wobei β den Anteil des Zeitreihenausschnitts bezeichnet, der am Anfang und am Ende heruntergewichtet wird.
- Wenn geglättete Schätzer verwendet werden, so wird ein Daniellschätzer wie in Beispiel 2.2 mit dem Parameter d verwendet, wobei $2d + 1$ die Breite des Rechteckfensters ist.
- Alternativ werden Mittelwertschätzer aus Gleichung (2.11) (MW) betrachtet, die über 8 Periodogramme aus den geachtelten Ausschnitten gemittelt werden.
- Zusätzlich betrachten wir einen Spektraldichteschätzer aus einem autoregressiven (AR) Modell (2.1), wobei die Ordnung der AR-Modelle verwendet wird, die den Wert des AIC minimiert. Das AIC ist ein oft kritisierendes Modellwahlkriterium (siehe z.B. Choi, 1992), wird hier aber der Einfachheit halber verwendet, da schon ein implementiertes Schätzverfahren im Programmpaket R (R Development Core Team, 2004) existiert.
- Außerdem werden auch Schätzer untersucht, die aus SLEX-Periodogrammen (2.28) berechnet wurden. Der Parameter β ist in diesem Fall als $\beta = \frac{2\varepsilon}{N/2+\varepsilon}$ definiert.

Folgende spektrale Abweichungsmaße werden betrachtet:

IS Itakura-Saito-Abweichung (2.35)

ISs symmetrische Itakura-Saito-Abweichung (2.36)

ILp L_p -Norm der Differenz zweier logarithmierter Spektraldichteschätzer (2.34)

DII absolute Differenz der Summen von logarithmierten Spektraldichteschätzern (2.40)

KA Kolmogorov-Abstand (2.38)

Coa Teststatistik (2.41) nach Coates und Diggle (1986)

Cho Teststatistik (2.42) nach Choi u. a. (2004)

Von den jeweils zwei Möglichkeiten, die asymmetrischen Maße IS und Coa zu verwenden, wird die sensiblere gewählt. Die Entscheidung ist eindeutig, da in den meisten Frequenzen ein Anstieg der Leistung beim Rattern erwartet wird.

Spezifität	β	d	Typ	IS	ISs	IL1	IL2	IL6	DII	KA	Coa	Cho
90	0	0		16	14	46	47	16	48	61	46	48
95	0	0		7	7	34	35	7	36	54	33	35
99	0	0		1	1	18	19	1	20	34	14	19
90	0.1	0		43	22	51	55	27	62	60	59	53
95	0.1	0		25	9	39	45	11	49	52	48	41
99	0.1	0		3	2	21	27	3	29	32	23	23
90	0	4		89	84	70	81	88	64	61	63	74
95	0	4		83	77	57	73	81	52	53	49	62
99	0	4		65	60	35	54	67	30	32	24	40
90	0.1	4		93	90	75	88	92	69	60	71	79
95	0.1	4		89	85	64	80	89	59	52	59	69
99	0.1	4		76	71	40	61	75	34	31	33	47
90	0.2	-	MW	88	83	68	81	86	68	58	61	72
95	0.2	-	MW	83	78	58	74	80	56	52	48	63
99	0.2	-	MW	74	67	40	62	71	32	34	24	44
90	-	-	AR	85	80	72	79	81	65	61	64	75
95	-	-	AR	79	73	60	72	74	54	54	49	63
99	-	-	AR	65	58	33	54	64	30	34	27	39

Tabelle 3.2: Sensitivität in % der Abweichungsmaße aufgeteilt nach verschiedenen Spektraldichteschätzern

Spezifität	β	d	Typ	IS	ISs	IL1	IL2	IL6	DII	KA	Coa	Cho
90	1/8	4		91	87	74	84	89	68	44	62	78
95	1/8	4		86	82	66	78	85	56	38	50	70
99	1/8	4		74	71	46	64	73	33	30	25	51
90	1/2	-	MW	84	78	68	76	79	70	54	34	71
95	1/2	-	MW	78	72	58	69	72	60	47	20	61
99	1/2	-	MW	65	59	40	53	59	35	32	6	44

Tabelle 3.3: Sensitivität in % der Abweichungsmaße für SLEX-Periodogramme

Die aus den Daten berechneten Sensitivitäten sind in den Tabellen 3.2 und 3.3 (vollständige Ergebnisse: Tabellen B.2 bis B.5 in Anhang B) gegeben. Zum Vergleich sei genannt, dass für das Abweichungsmaß „Differenz der Varianzen“ zweier Zeitreihenausschnitte die Sensitivität durch 58%, 50% bzw. 31% bezüglich der jeweils zugehörigen Spezifität von 90%, 95% und 99% gegeben ist. Die Ergebnisse lassen erkennen, dass sich für die reinen Periodogramme in dieser Anwendung der Kolmogorov-Abstand eindeutig am besten eignet. Allerdings zeigt sich eine Sensibilisierung der auf der Spektraldichte basierenden Abweichungsmaße, sobald „bessere“ Schätzer der Spektraldichte, also getaperte, geglättete oder gemittelte Periodogramme oder über AR-Modelle berechnete Spektren, das Periodogramm ersetzen. Dann sind die IS-Abweichung und nur wenig schlechter die ILp-Abstände mit großem p deutlich überlegen. Es muss beachtet werden, dass die Teststatistiken „Cho“ und „Coa“ nur für einfache Periodogramme die in Abschnitt 2.4.3 genannten Verteilungseigenschaften einhalten. Allerdings weisen die mit diesen Teststatistiken durchgeführten Vergleiche in keiner Situation besonders hohe Sensitivitäten auf.

Abweichungsmaße, die auf SLEX-Periodogrammen basieren (siehe Tabelle 3.3), schneiden zwar bezüglich der Sensitivitäten etwas schlechter ab als die auf vergleichbaren „normalen“ Periodogrammen basierenden Maße. Sie besitzen jedoch den Vorteil, dass sie auch in weit überlappenden Fenstern noch asymptotisch unkorrelierte Werte liefern (siehe Satz 2.2).

Kapitel 4

Methoden zur Strukturbrucherkenennung

Die Aufgabe, eine Veränderung im zugrunde liegenden stochastischen Prozess einer beobachteten Zeitreihe zu erkennen, stellt sich in vielen Anwendungsbereichen der Ökonometrie, der Medizin und des Ingenieurwesens. Dazu wurden z. B. für Produktionsprozesse Kontrollkarten zur Erkennung von Mittelwert- und Varianzveränderungen in Beobachtungsreihen von Qualitätsmerkmalen ([Montgomery und Woodall, 1997](#); [Wetherill und Brown, 1991](#)), Verfahren zur Strukturbrucherkenennung in Wirtschaftsprozessen ([Broemeling und Tsurumi, 1987](#)) oder Methoden zur Erkennung von kritischen Situationen beim Online-Monitoring von Intensivpatienten ([Gather u. a., 2001](#)) entwickelt.

Für die vielen unterschiedlichen Situationen sind verschiedene Lösungsansätze und Methoden geeignet. Es lassen sich Situationen unterscheiden, in denen unabhängige Daten vorliegen oder in denen Zeitreihen abhängiger Beobachtungen betrachtet werden. Des Weiteren sind viele unterschiedliche Arten eines Strukturbruchs vorstellbar. Es kann sich um Veränderungen im Mittelwert, der Varianz, der Korrelationsstruktur oder sonstigen Parametern der Verteilung handeln. Diese Veränderungen können sich als abrupte Sprünge, graduelle Trends, Ausreißer oder andere spezielle Formen von Veränderungen der Parameter oder Charakteristika der Verteilung äußern.

Verfahren zur Entdeckung verschiedener Veränderungen sind dadurch charakterisiert, dass entweder individuelle Beobachtungen rekursiv in eine Kontrollstatistik einfließen oder dass in gleitenden sich überschneidenden Fenstern oder disjunkten Mengen der Beobachtungen zusammenfassende Statistiken erhoben werden. Online-Methoden versuchen eine Veränderung während der Datenerhebung zu entdecken, Offline-Methoden entdecken Veränderungen re-

trospektiv. Außerdem kann zwischen modellbasierten und nichtparametrischen/explorativen Verfahren unterschieden werden.

In diesem Kapitel werden Kontrollkarten als Methoden der Online-Strukturbrucherkennung beschrieben. Einige der beschriebenen Verfahren dienen als Grundlage der in Kapitel 5 entwickelten Verfahren zur Erkennung spektraler Veränderungen in Zeitreihen. Zunächst liegt die Konzentration auf Kontrollkarten für univariate, unabhängige Beobachtungen, die auf dem Likelihood-Quotienten basieren. Es folgen Ausführungen zu Kontrollkarten für multivariate und für korrelierte Beobachtungsreihen. Anschließend wird eine Übersicht über nichtparametrische Kontrollkarten gegeben.

4.1 Parametrische Kontrollkarten

Seien die gemessenen Signale $\{x_t\}$ Beobachtungen eines stochastischen Prozesses $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ in diskreter Zeit. Für den Bereich, in dem X_t durch einen stationären Prozess beschrieben werden kann, sei F_{θ} die Verteilung von X_t mit einem unbekanntem Parametervektor θ . Die bedingte Dichte von X_t gegeben die Vergangenheit des Prozesses bezüglich des gemeinsamen dominierenden Maßes ν wird mit $p_{\theta}(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)$ bezeichnet. Wir gehen hier zunächst von dem Ziel der Online-Erkennung einer abrupten Veränderung des Parameters θ aus. Im kontrollierten Zustand ist $\theta = \theta_0$. Sei dieser Zustand für $t < t_0$ mit einem unbekanntem Zeitpunkt t_0 gegeben. Für $t \geq t_0$ ändere sich der Prozess und es gelte $\theta = \theta_1$. Für diesen Fall wird der Prozess als außer Kontrolle bezeichnet. Die Annahme, dass θ_0 und θ_1 bekannt sind, ist in den meisten Anwendungen unrealistisch und wird später aufgegeben. Sie ist aber hilfreich zur Konstruktion der Methoden.

Eine Strukturbrucherkennung erfolgt mit Hilfe einer binären Entscheidungsregel mit Stoppzeit

$$T_a = \inf\{t \in \mathbb{N} : g_t(X_1, \dots, X_t) \geq h_t\},$$

mit $\inf\{\emptyset\} := \infty$, der Funktion $g_t : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}$ und der Kontrollgrenze $h_t \in \mathbb{R}$, die meistens konstant gewählt wird, also $h_t = h$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Eine Entdeckung einer Prozessveränderung mit einer solchen Entscheidungsregel wird als „Alarm“ bezeichnet. Eine Kontrollkarte in ihrer einseitigen Form bezeichnet eine Graphik, in der $g_t(X_1, \dots, X_t)$ gegen t abgetragen und eine horizontale Linie bei h eingetragen wird, welche die Kontrollgrenze visualisiert. Die

hier vorgenommene Beschränkung auf einseitige Kontrollprobleme kann leicht auf zweiseitige erweitert werden, oft indem der Betrag von g_t betrachtet wird.

Für die Konstruktion einer Kontrollkarte wird zunächst eine Funktion g_t gesucht, welche die interessierenden Veränderungen darstellen kann. Bei einem ruhigen Prozess ohne Veränderung ist $g_t(X_1, \dots, X_t)$ idealerweise nahe Null, während der Funktionswert signifikant größer als Null sein sollte, nachdem eine Veränderung der Struktur stattgefunden hat.

Viele Entscheidungsregeln basieren auf dem Likelihood-Quotienten (**L**ikelihood **R**atio)

$$LR_i^j(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1) = \frac{p_{\boldsymbol{\theta}_1}(x_i, \dots, x_j)}{p_{\boldsymbol{\theta}_0}(x_i, \dots, x_j)}$$

oder auf dessen natürlichem Logarithmus $L_i^j(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1) = \ln(LR_i^j(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1))$. Des Weiteren wird die Kontrollgrenze bzw. die Entscheidungsregel so gewählt, dass Veränderungen mit einer möglichst kleinen Verzögerung entdeckt, aber gleichzeitig möglichst selten fälschlicherweise Veränderungen angezeigt werden. Ein oft genutztes Gütekriterium für Kontrollkarten ist die mittlere Laufzeit (**A**verage **R**un **L**ength)

$$ARL(\boldsymbol{\theta}) = E_{\boldsymbol{\theta}}((T_a - t_0)^+),$$

mit $(x)^+ = \max\{0, x\}$. Die mittlere Laufzeit $ARL_0 = ARL(\boldsymbol{\theta}_0)$ eines Prozesses unter Kontrolle bezeichnet also die erwartete Zeit zwischen zwei falschen Alarmen, während die mittlere Laufzeit $ARL_1 = ARL(\boldsymbol{\theta}_1)$ eines Prozesses außer Kontrolle die erwartete Verzögerung zur Erkennung einer Veränderung bezeichnet. Üblicherweise wird eine Kontrollkarte aus einer Menge solcher Methoden mit gegebener ARL_0 ausgewählt, die minimale ARL_1 besitzt. Das bedeutet, dass Kontrollgrenzen und andere freie Parameter von festgelegten Kontrollkarten in Abhängigkeit von der ARL bestimmt werden. Verschiedene Methoden, um die ARL für die folgenden Kontrollkarten zu berechnen oder zu approximieren, sind in [Basseville und Nikiforov \(1993\)](#) gegeben. In vielen Artikeln, z. B. [Lucas und Saccucci \(1990\)](#) für EWMA-Karten und [Lowry u. a. \(1992\)](#) für MEWMA-Karten, sind die durch Simulationen bestimmten ARL_0 und ARL_1 angegeben.

ARL_0 und ARL_1 besitzen einen Zusammenhang mit den in Abschnitt 3.5 verwendeten Begriffen „Spezifität“ und „Sensibilität“. Bei der Wahl der Entscheidungsregel soll ein Kompromiss zwischen der Häufigkeit der zwei möglichen Fehlerarten, falscher Alarm (1 - Spezifität) und nicht Erkennen der Veränderung (1 - Sensibilität) gefunden werden. Zudem wird bei

der Definition der Gütekriterien für Kontrollkarten die Zeitabhängigkeit mit berücksichtigt. Außer der *ARL*-Funktion und den verwandten Falschalarmraten (z. B. [Frisén, 2003](#); [Gustafsson, 2000](#)) gibt es noch viele weitere Maße, die die Güte einer Kontrollkarte oder Methode zur Strukturbrucherkennung bewerten. [Frisén \(2003\)](#) kritisiert, dass in den meisten Untersuchungen nicht berücksichtigt wird, dass die Güte einer Kontrollkarte von dem Veränderungszeitpunkt t_0 abhängt. Daraufhin schlägt sie unter anderem Maße vor, die auf einer *a-priori* Verteilung von t_0 basieren. Eine verbreitete Kritik an der ausschließlichen Benutzung der *ARL* ist außerdem, dass allein der Erwartungswert wenig über die Verteilung der Laufzeit aussagt und weitere Verteilungscharakteristika berücksichtigt werden sollten.

4.2 Klassische Kontrollkarten

Klassische Kontrollkarten beruhen auf der Annahme, dass die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{t_0-1} unabhängig und identisch verteilt sind mit Dichte $p_{\theta_0}(x)$ und dass $X_{t_0}, X_{t_0+1}, \dots$ unabhängig und identisch verteilt sind mit Dichte $p_{\theta_1}(x)$. In [Rowlands und Wetherill \(1991\)](#) wird ein Überblick zu diesen Verfahren gegeben, die im Allgemeinen eine Normalverteilung der Beobachtungsvariablen voraussetzen und entweder eine Veränderung des Mittelwerts oder der Varianz betrachten. Im Folgenden werden, wie in den Ausführungen von [Basseville und Nikiforov \(1993\)](#), Kontrollkarten in möglichst allgemeiner Form auf dem Likelihood-Prinzip basierend beschrieben.

Die *Shewhart-Karte* basiert auf einem wiederholten Likelihood-Quotienten-Test mit der Hypothese $H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ gegen $H_1: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$ und Signifikanzniveau α . Für einen festen Teilstichprobenumfang n werden nacheinander die Mengen $\{X_1, \dots, X_n\}$, $\{X_{n+1}, \dots, X_{2n}\}$, usw. untersucht. Die Prozedur wird solange fortgeführt, bis es zur Ablehnung von H_0 kommt. Mit dieser Vorgehensweise erhält man die Stoppzeit

$$T_\alpha = n \cdot \min\{k \in \mathbb{N} : Y_k \geq h\},$$

mit

$$Y_k := L_{(k-1)n+1}^{kn}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1) = \sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} \ln \frac{p_{\boldsymbol{\theta}_1}(x_i)}{p_{\boldsymbol{\theta}_0}(x_i)}$$

oder einer anderen monotonen Funktion des Likelihood-Quotienten und dem Schwellenwert $h = h(\alpha)$. Für $n = 1$ werden mit $Y_k = \ln \frac{p_{\theta_0}(x_k)}{p_{\theta_1}(x_k)}$ individuelle Beobachtungen untersucht. Die mittlere Laufzeit ist in diesem Fall gegeben durch

$$ARL(\boldsymbol{\theta}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}}(T_a) = \frac{n}{\beta(\boldsymbol{\theta})},$$

wobei $\beta(\boldsymbol{\theta})$ die Gütefunktion des einzelnen Likelihood-Quotienten-Tests bei $\boldsymbol{\theta}$ und mit Niveau α darstellt. Die Kontrollgrenze h wird z. B. so gewählt, dass eine bestimmte ARL_0 erreicht wird.

Beispiel 4.1 Die \bar{X} -Kontrollkarte für unabhängige, $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen, mit $\theta = \mu = E(X_t)$ und bekannter Varianz σ^2 , stützt sich auf das Testproblem $H_0: \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \mu = \mu_1$ und benutzt die Kontrollstatistik

$$\bar{X}_{(k-1)n+1}^{kn} = \frac{1}{n} \sum_{t=(k-1)n+1}^{kn} X_t.$$

Es liegt ein monotoner Likelihood-Quotient vor, weshalb die Statistik nicht abhängig von μ_1 ist. Die Kontrollgrenze ist durch $h = \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ gegeben, mit dem $(1 - \alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung $z_{1-\alpha}$. Schließlich ist

$$ARL(\mu) = \frac{n}{1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma})} \quad \text{und} \quad ARL(\mu_0) = \frac{n}{1 - \Phi(z_{1-\alpha})} = \frac{n}{\alpha},$$

wobei $0 < \alpha \ll 1$ beliebig gewählt werden kann.

Die ARL der Shewhart-Karte kann bei kleinen Sprüngen des Parameters sehr groß sein. Für den Fall, dass insbesondere kleine Sprünge schnell erkannt werden sollen, wurden Kontrollkarten entwickelt, die gleitende Durchschnitte verwenden (siehe [Roberts, 1959](#)). Sie nutzen vergangene Werte der Kontrollstatistik, um ein gleitendes Mittel von $Y_k = L_{(k-1)n+1}^{kn}(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1)$, oder von $Y_k = \ln \frac{p_{\theta_0}(x_k)}{p_{\theta_1}(x_k)}$ bei individuellen Beobachtungen, als Kontrollstatistik zu verwenden:

$$Z_k = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i Y_{k-i}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Gewichte $\gamma_i \in [0, 1]$ werden für steigendes i kleiner. Wenn $\gamma_i = \lambda(1 - \lambda)^i$ mit $\lambda \in (0, 1]$ gilt, liegt eine *EWMA* (**E**xponentially **W**eighted **M**oving **A**verage) - Karte vor, die rekursiv formuliert werden kann als

$$\begin{aligned} Z_k &= (1 - \lambda)Z_{k-1} + \lambda Y_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad Z_0 = 0, \quad \text{und} \\ T_a &= \min\{k \in \mathbb{N} : Z_k \geq h\} \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Wahl der Kontrollgrenze h . Die Folge $\{Z_k\}$ entspricht einer exponentiellen Glättung der Folge $\{Y_k\}$ mit

$$Z_k = (1 - \lambda)Z_0 + \lambda \sum_{i=1}^k (1 - \lambda)^{k-i} Y_i \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für $\lambda = 1$ liegt eine Shewhart-Karte vor.

Beispiel 4.2 *Im Falle einer Veränderung des Mittelwerts μ bei einer unter Kontrolle unabhängigen, $N(\mu_0, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsfolge $\{X_k\}$, mit bekanntem σ^2 , ist die Kontrollstatistik gegeben durch*

$$Z_k = (1 - \lambda)Z_{k-1} + \lambda(X_k - \mu_0), \quad Z_0 = 0. \quad (4.1)$$

Ist der Prozess unter Kontrolle, so gilt für $k \in \{1, 2, \dots, t_0\}$

$$\begin{aligned} E(Z_k) &= 0 \quad \text{und} \\ \text{Var}(Z_k) &= \frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2k}) \sigma^2. \end{aligned}$$

Die Varianz der Kontrollstatistik konvergiert mit $k \rightarrow \infty$ gegen $\frac{\lambda}{2 - \lambda} \sigma^2$. Häufig werden dann die Kontrollgrenzen als $h = \mu_0 \pm c\sigma(Z_k)$ mit einer Konstanten $c > 0$ festgelegt ([Lucas und Saccucci, 1990](#)).

Außerdem gilt $Z_k = \tilde{Z}_k - \mu_0$ mit $\tilde{Z}_k = (1 - \lambda)\tilde{Z}_{k-1} + \lambda X_k$ und $\tilde{Z}_0 = \mu_0$.

Beispiel 4.3 *Im Falle einer Veränderung der Varianz σ^2 bei unter Kontrolle unabhängigen, $N(\mu, \sigma_0^2)$ -verteilten Zufallsvariablen, mit bekanntem Erwartungswert μ , ist die Kontrollstatistik gegeben durch*

$$Z_k = (1 - \lambda)Z_{k-1} + \lambda(X_k - \mu)^2, \quad Z_0 = \sigma_0^2.$$

Die Kontrollgrenzen dieser so genannten EWMV (**E**xponentially **W**eighted **M**oving **V**ariance) - Kontrollkarte werden in [MacGregor und Harris \(1993\)](#) diskutiert.

Die im Folgenden beschriebene CUSUM (**C**umulative **S**um) - Karte nutzt in ähnlicher Weise vergangene Beobachtungen. Dabei konzentrieren wir uns hier auf den Fall von individuellen Beobachtungen mit $Y_t = \ln \frac{p_{\theta_1}(x_t)}{p_{\theta_0}(x_t)}$. Die Kontrollstatistik der CUSUM-Karte ist durch

$$Z_t = (Z_{t-1} + Y_t)^+ = \max_{1 \leq j \leq t} L_j^t(\theta_0, \theta_1), \quad Z_0 = 0 \quad (4.2)$$

und die Stoppzeit durch

$$T_a = \min\{t \in \mathbb{N} : Z_t \geq h\} \quad (4.3)$$

gegeben, wobei h eine geeignet gewählte Kontrollgrenze darstellt.

Die CUSUM-Kontrollkarte kann aus einem offline angewendeten generalisierten Likelihood-Quotienten (**G**eneralized **L**ikelihood **R**atio) - Test bezüglich einer Beobachtungsreihe X_1, \dots, X_t mit der Hypothese

$$H_0 : p_{\theta}(x_i) = p_{\theta_0}(x_i) \quad \text{für } 1 \leq i \leq t$$

gegen die Alternativ-Hypothesen, mit $1 \leq j \leq t$,

$$H_1^j : p_{\theta}(x_i) = p_{\theta_0}(x_i) \quad \text{für } 1 \leq i \leq j-1 \quad \text{und} \quad p_{\theta}(x_i) = p_{\theta_1}(x_i) \quad \text{für } j \leq i \leq t$$

abgeleitet werden, wobei j mit $1 \leq j \leq t$ den unbekanntem Zeitpunkt der Veränderung bezeichnet ([Basseville und Nikiforov, 1993](#)). Der Likelihood-Quotient und sein Logarithmus für dieses Problem sind gegeben durch

$$LR_1^t(j) = \frac{\prod_{i=1}^{j-1} p_{\theta_0}(x_i) \prod_{i=j}^t p_{\theta_1}(x_i)}{\prod_{i=1}^t p_{\theta_0}(x_i)}, \quad L_j^t = \sum_{i=j}^t \ln \frac{p_{\theta_1}(x_i)}{p_{\theta_0}(x_i)}.$$

Wenn der unbekanntem Zeitpunkt der Veränderung mit Hilfe des Maximum-Likelihood-Schätzers bestimmt wird, ist die Teststatistik gegeben durch

$$Z_t = \max_{1 \leq j \leq t} \sum_{i=j}^t L_j^t,$$

und führt damit zum Verfahren (4.2).

Es gilt folgende Minimax-Optimalitätseigenschaft, die [Moustakides \(1986\)](#) beweisen konnte. Die Stoppzeit T_a (4.3) der CUSUM-Karte minimiert die erwartete Laufzeit unter allen Stoppzeiten einer Klasse von Methoden, für die die Kontrollgrenze so gewählt ist, dass die $ARL(\theta_0)$ größer ist als ein gegebenes $\epsilon > 0$, wenn die ungünstigste Stichprobe und der ungünstigste Zeitpunkt t_0 verwendet werden, um die Strukturveränderung zu erkennen.

Beispiel 4.4 Die von [Page \(1961\)](#) entwickelte CUSUM-Karte hat das Ziel einen Anstieg des Mittelwerts unter Normalverteilungsannahme zu entdecken. Sie besitzt die Form (4.2), wobei $Y_t = X_t - \mu_0 - c$ ist und $c = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2}$, für $t \in \mathbb{N}$.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass θ_1 unbekannt ist. Diese Generalisierung erzeugt bei der Shewhart-Karte mit einem in θ_1 monotonen Likelihood-Quotienten keine Probleme,

weil θ_1 für die Berechnung der Kontrollstatistik nicht benötigt wird. Der Parameter λ der EWMA-Karte kann abhängig von θ_1 gewählt werden, indem λ kleiner gewählt wird, je kleiner der vermutete Sprung von θ_0 nach θ_1 ist. Bei der CUSUM-Karte hingegen basiert die Entscheidungsregel auf θ_1 . Ist θ_1 unbekannt, kann der Logarithmus des generalisierten Likelihood-Quotienten

$$GLR_j^t(\theta_0) = \frac{\sup_{\theta_1} p_{\theta_1}(x_j, \dots, x_t)}{p_{\theta_0}(x_j, \dots, x_t)}$$

statt $LR_j^t(\theta_0, \theta_1)$ in der CUSUM-Statistik $\max_{1 \leq j \leq t} L_j^t(\theta_0, \theta_1) = \max_{1 \leq j \leq t} \ln(LR_j^t(\theta_0, \theta_1))$ benutzt werden.

Ist θ_0 unbekannt, so muss dieser Wert geschätzt werden. Die Verwendung des Maximum-Likelihood-Schätzers ist äquivalent zur Benutzung des GLR mit Bildung des Supremums auch im Nenner. Im Allgemeinen basiert ein solcher Schätzer auf einer Vorstudie mit Daten, die unter Kontrolle sind. In der Kontrollkarten-Terminologie wird eine Untersuchung, die zum Ziel hat, die unbekannt Parameter zu schätzen, Phase 1 genannt. Die eigentliche Kontrolle mit Hilfe der in Phase 1 geschätzten Parameter nennt man Phase 2. Es ist jedoch auch möglich, ein gleitendes oder wachsendes Fenster zusätzlich zum Monitor-Fenster zu benutzen, in dem die unbekannt Parameter adaptiv geschätzt werden ([Basseville und Nikiforov, 1993](#)). Die Laufzeiten der meisten Kontrollkarten reagieren sehr sensibel in Bezug auf die Parameterschätzung, wie in [Quesenberry \(1993\)](#) und [Kramer und Schmid \(2000\)](#) beschrieben wird. Diese Autoren untersuchen insbesondere den Einfluss der Parameterschätzung auf die Shewhart-Karte für den Mittelwert. Eine erhöhte Unsicherheit muss bei Festlegung der Kontrollgrenze einkalkuliert werden, da sich die Verteilungseigenschaften der Kontrollstatistiken mit der Schätzung von Parametern ändern.

4.3 Multivariate Kontrollkarten

Seien $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ p -dimensionale Zufallsvektoren, die eine Beobachtung von p Qualitätsmerkmalen über die Zeit beschreiben. Angenommen, die Zufallsvektoren \mathbf{X}_t sind für $t \in \mathbb{N}$ unabhängige, multivariat normal verteilte Zufallsvektoren mit Mittelwertvektor $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$ für $t \in \{1, 2, \dots, t_0\}$, und $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathbb{R}^p$ für $t \in \{t_0 + 1, t_0 + 2, \dots\}$, mit einem unbekannt Zeitpunkt t_0 . Sei die Kovarianzmatrix Σ der \mathbf{X}_t unter Kontrolle bekannt und fest.

Hotellings multivariate Kontrollkarte erzeugt einen Alarm, sobald

$$\chi_t^2 = (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)$$

größer ist als das $(1-\alpha)$ -Quantil der χ^2 -Verteilung mit p Freiheitsgraden. Der Parameter α ist dabei so gewählt, dass eine bestimmte ARL_0 eingehalten wird. Diese Karte entspricht einer multivariaten Verallgemeinerung der Shewhart-Karte. Die entsprechende Karte mit einem aus Phase 1 geschätzten $\boldsymbol{\Sigma}$ wird Hotellings T^2 -Karte genannt (Lowry und Montgomery, 1995).

Es gibt verschiedene Arten von multivariaten CUSUM-Karten, die die CUSUM-Karte (4.2) auf unterschiedliche Weise verallgemeinern (siehe z. B. Runger und Testik, 2004). Wir wollen uns hier jedoch auf die Verallgemeinerung der EWMA-Karte konzentrieren.

In der von Lowry u. a. (1992) vorgestellten multivariaten EWMA-Karte werden zunächst wie im univariaten Fall die einzelnen Beobachtungsreihen exponentiell geglättet

$$\mathbf{Z}_t = (1 - \lambda)\mathbf{Z}_{t-1} + \lambda(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0), \quad t \in \mathbb{N},$$

wobei $\mathbf{Z}_0 = (0, 0, \dots, 0)'$ und $0 < \lambda \leq 1$. Die MEWMA (Multivariate Exponentially Weighted Moving Average) - Kontrollstatistik lautet dann

$$T_t^2 = \mathbf{Z}_t' \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_t}^{-1} \mathbf{Z}_t. \quad (4.4)$$

Für $\lambda = 1$ ergibt sich Hotellings multivariate Kontrollkarte. Die Kovarianzmatrix von \mathbf{Z}_t ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_t} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2t}) \boldsymbol{\Sigma}$$

und konvergiert mit wachsendem t und bei nicht allzu kleinem λ schnell gegen $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}_t} \approx \frac{\lambda}{2 - \lambda} \boldsymbol{\Sigma}$. Ein Alarm wird bei $T_t^2 > h$ gegeben, wobei die Kontrollgrenze $h > 0$ z. B. auf Basis von Simulationen (Lowry u. a., 1992) so gewählt ist, dass eine bestimmte ARL_0 eingehalten wird.

Alle Voraussetzungen – multivariate Normalverteilung, konstante und bekannte Mittelwertvektoren und Kovarianzmatrizen – sind in der Praxis selten erfüllt. Stoumbos und Sullivan (2002) zeigen jedoch, dass bei kleinem λ die MEWMA-Kontrollkarte auch für schiefe Verteilungen und Verteilungen mit schweren Rändern noch zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Außerdem sind Erwartungswert und Varianz in der Praxis nicht bekannt und müssen geschätzt werden, wodurch sich die Verteilung der Kontrollstatistik stark verändern kann.

Die vorgestellten Methoden und auch viele multivariate CUSUM-Karten sind richtungsinvariant ([Lowry und Montgomery, 1995](#); [Pignatiello Jr. und Runger, 1990](#)). Das bedeutet, dass die Größe der Kontrollstatistiken von der Distanz zwischen $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\mu}_0$ abhängt, nicht aber von der Richtung der Veränderung. Mit Distanz ist hier die Mahalanobis-Distanz gemeint, die durch die Quadratwurzel des so genannten Nichtzentralitätsparameters

$$\lambda^2(\boldsymbol{\mu}) = (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

ausgedrückt werden kann. Auch die Kontrollstatistik χ_t^2 ist eine Mahalanobis-Distanz von \mathbf{X}_t und $\boldsymbol{\mu}_0$. Die Kontrollstatistik T_t^2 kann als Mahalanobis-Distanz eines exponentiell gewichteten Mittels der \mathbf{X}_j für $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ und $\boldsymbol{\mu}_0$ interpretiert werden, weil

$$\mathbf{Z}_t = \lambda \sum_{j=1}^t (1 - \lambda)^{t-j} \mathbf{X}_j - \lambda \sum_{j=1}^t (1 - \lambda)^{t-j} \boldsymbol{\mu}_0$$

gilt und $\lambda \sum_{j=1}^t (1 - \lambda)^{t-j} = (1 - (1 - \lambda)^t)$ für wachsendes t gegen 1 konvergiert. [Tsui und Woodall \(1993\)](#) schlagen eine Verallgemeinerung der MEWMA-Karte vor, indem sie die Inverse der Kovarianzmatrix durch eine beliebige positiv definite Gewichtsmatrix ersetzen. Damit betrachten die Autoren alternative quadratische Distanzmaße, so dass die resultierende Kontrollkarte nicht mehr rotationsinvariant ist. In [Abschnitt 5.2.2](#) wird eine weitere Modifikation einer multivariaten Kontrollkarte vorgeschlagen, die sich auf die Werte von Spektraldichteschätzern stützt und deswegen alternative Abweichungsmaße verwendet.

4.4 Kontrollkarten für Zeitreihen

Die in den [Abschnitten 4.2](#) und [4.3](#) beschriebenen Methoden wurden unter der Annahme entwickelt, dass die beobachteten Variablen zu verschiedenen Zeitpunkten unabhängig sind. In diesem Abschnitt werden Ansätze beschrieben, in denen für univariate Beobachtungen das Vorkommen von Abhängigkeiten zwischen den Variablen beachtet wird.

So genannte modifizierte Kontrollkarten für autokorrelierte Beobachtungen berücksichtigen die Korrelationen zwischen den Beobachtungen. Zudem beeinflussen diese die Verteilungen der Kontrollstatistiken und die *ARL*. Dementsprechend werden die Kontrollgrenzen an die Korrelationsstruktur angepasst. In [Vasilopoulos und Stamboulis \(1978\)](#), [Kramer und Schmid \(1997a\)](#), [Schmid \(1995\)](#) und [Schmid \(1997\)](#) werden solche Verfahren für Shewhart-, EWMA-

und CUSUM-Karten bei Lokationsänderungen entwickelt. [MacGregor und Harris \(1993\)](#) stellen Kontrollkarten für abhängige Daten vor, die von der EWMS (Exponentially Weighted Moving Square) - Kontrollkarte und der EWMV-Kontrollkarte (siehe [Beispiel 4.3](#)) abgeleitet sind. Sie leiten eine approximative χ^2 -Verteilung für die Kontrollstatistik her, deren Freiheitsgrade von den Autokorrelationen der Zeitreihe bis zu einer bestimmten Zeitdifferenz abhängen. [Kramer und Schmid \(1997b\)](#) beschreiben Modifikationen der MEWMA-Karten für die Untersuchung von abhängigen Beobachtungen. Verallgemeinerungen der MEWMA-Karte werden auch in [Rosolowski und Schmid \(2003\)](#) verwendet, um Veränderungen in der Autokovarianz bis zu einer bestimmten Zeitdifferenz zu erkennen.

Die EWMA-Statistik in [\(4.1\)](#) ist eine exponentielle Glättung der Beobachtungsreihe, die als solche in der Zeitreihenanalyse Verwendung für einfache Vorhersagemethoden findet ([Cox, 1961](#)). In [Schack \(1996\)](#) werden Statistiken dieser Art als adaptive Schätzfolgen zur Untersuchung nichtstationärer Signale empfohlen, weil sie einen Kompromiss zwischen guter Schätzung und guter Adaption an Veränderungen in den Daten liefern. Sei Z_t eine adaptive Schätzfolge für den Erwartungswert von $\{X_t\}$, die durch die Rekursionsformel

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t(X_t - Z_{t-1}), \quad t \in \mathbb{N}$$

und einem Startwert Z_0 definiert ist. Die Konsistenz des Schätzers bei Vorliegen eines stationären Prozesses ist gewährleistet, falls die Folge a_t gegen 0 konvergiert. Durch Z_t mit $Z_0 = 0$ und $a_t = \frac{1}{t}$ ist z. B. das erwartungstreue und konsistente arithmetische Mittel der X_1, \dots, X_t für jeden Zeitpunkt t gegeben. Da für eine Anpassung an die Veränderungen in einer nichtstationären Zeitreihe das Verschwinden des Korrekturterms $a_t(X_t - Z_{t-1})$ nicht erwünscht ist, wird die Gewichtungsfolge $a_t = \lambda \in (0, 1)$ konstant gewählt, womit eine exponentielle Glättung wie bei der EWMA-Karte in [Beispiel 4.2](#) gegeben ist.

[Basseville und Nikiforov \(1993\)](#) unterscheiden zwischen additiven und spektralen Strukturbrüchen. Additive Veränderungen bleiben additiv, wenn Beobachtungen eines linearen Prozesses $\{X_t\}$ mit bekanntem Modell zu den unabhängigen Innovationen $\epsilon_t = X_t - \hat{X}_t$ transformiert werden. \hat{X}_t bezeichnet dabei die Einschnitt-Vorhersage über das bekannte Modell. Kontrollkarten für unabhängige Beobachtungen können also bei additiven Veränderungen auf die Zeitreihe der Innovationen (bzw. der Residuen, im Falle von beobachteten Werten) angewandt werden ([Adams und Tseng, 1998](#); [Alwan und Roberts, 1988](#); [Kramer und Schmid, 1997a,b](#)). Allerdings kann die Form der Veränderung beim Filtern einer Zeitreihe

transformiert werden, so dass sich ein zuvor abrupter Sprung in den Residuen z. B. zu einem oszillierenden Einschwingen auf ein neues Niveau ändern kann. [Apley und Shi \(1999\)](#) schlagen eine CUSUM-ähnliche GLR-Karte vor, die sich an eine Modifikation des Strukturbruchs anpasst.

In der Nomenklatur von [Chu \(1995\)](#) und [Gustafsson \(2000\)](#) werden Verfahren, die wie oben beschrieben auf den Innovationen aus einem gegebenen Modell basieren, als „Ein-Modell-Verfahren“ bezeichnet. [Gustafsson \(2000\)](#) beschreibt außerdem noch Verfahren, die auf zwei Modellen, eins vor und eins nach dem Strukturbruch, basieren. Diese beurteilen die Zugehörigkeit der Beobachtungen zu den Modellen mit θ_0 oder θ_1 über die Größe der Residuen der beiden Filter.

Liegen spektrale, also nicht additive, Strukturbrüche wie Veränderungen in der Korrelationsstruktur einer Zeitreihe vor, so sind die zuvor beschriebenen, auf Residuen basierenden Verfahren im Allgemeinen nicht geeignet, weil sich die Veränderung nicht stark genug im Mittelwert der Residuen bemerkbar macht. [Basseville und Nikiforov \(1993\)](#) schlagen eine Erweiterung der CUSUM-Karte auf Zeitreihen mit abhängigen Beobachtungen vor, mit denen spektrale Veränderungen erkannt werden können. Sie besteht darin, den Likelihood-Quotienten der bedingten Dichten statt der Randdichten zu verwenden, so dass

$$Z_t = (Z_{t-1} + Y_t)^+, \quad Y_t = \ln \left(\frac{p_{\theta_1}(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1)}{p_{\theta_0}(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1)} \right), \quad Z_0 = 0. \quad (4.5)$$

Beispiel 4.5 *Wird eine Veränderung in den Parametern eines ARMA-Prozesses von $\theta_0 = (\phi_1^0, \dots, \phi_p^0, \theta_0^0, \dots, \theta_q^0, \sigma_0)$ zu $\theta_1 = (\phi_1^1, \dots, \phi_p^1, \theta_0^1, \dots, \theta_q^1, \sigma_1)$ untersucht, so ergibt sich*

$$Y_t = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\epsilon_t^0)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(\epsilon_t^1)^2}{2\sigma_1^2} \quad \text{mit} \quad \epsilon_t^j = X_t - \sum_{i=1}^p \phi_i^j X_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i^j \epsilon_{t-i} \quad \text{für} \quad j \in \{0, 1\}.$$

Ist θ_1 unbekannt, verwendet man den generalisierten Likelihood-Quotienten

$$Z_t = \max_{1 \leq j \leq t} \sup_{\theta_1} \sum_{i=j}^t \ln \left(\frac{p_{\theta_1}(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1)}{p_{\theta_0}(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1)} \right). \quad (4.6)$$

Das Optimalitätskriterium aus [Moustakides \(1986\)](#) für die CUSUM-Karte hängt stark von der Annahme unabhängiger, identisch verteilter Beobachtungen ab. [Lai \(1998\)](#) und [Siegmond und Venkatraman \(1995\)](#) können jedoch ähnliche asymptotische Eigenschaften für die Kontrollkarten (4.5) und (4.6) beweisen.

Die Lösung des Maximierungsproblems in (4.6) kann nicht in geschlossener rekursiver Form geschrieben werden. Daher ist die Berechnung sehr speicher- und rechenzeitintensiv. Lai (1995) schlägt daher vor, die Menge, über die maximiert wird, auf ein kürzeres Zeitfenster als $[1, t]$ zu beschränken.

Basseville und Nikiforov (1993) empfehlen einen lokalen Ansatz unter Verwendung verschiedenen *a priori*-Wissens über den Parameter θ_1 . Es wird z. B. eine Vereinfachung des Verfahrens beschrieben, für die der Betrag einer abrupten Veränderung bekannt sein muss. Eine andere Methode setzt die Richtung der Veränderung als bekannt voraus.

4.5 Nichtparametrische Strukturbrucherkenkung

Die zuvor beschriebenen Verfahren basieren auf starken Annahmen. Sind die Modelle vor und nach dem Strukturbruch nicht bekannt und ist auch die Annahme eines approximativen Modelles unangebracht, sollte auf nichtparametrische Verfahren zurückgegriffen werden. Bei nichtparametrischen Methoden werden nicht mehr Veränderungen in Parametern eines Verteilungsmodells sondern allgemeiner Lokations- oder Skalenänderungen bzw. Veränderungen in Charakteristika der Verteilung betrachtet, die nicht explizit ein Modell spezifizieren. Solche Methoden basieren z. B. auf Vorzeichen, sequentiellen Rängen (z. B. Hackl und Ledolter, 1992) oder Quantilen der Beobachtungen. Einen umfassenden Überblick über diverse nichtparametrische Kontrollkarten für Lokations- und Skalenveränderungen geben Chakraborti u. a. (2001). Beispielsweise werden dort Methoden beschrieben, die eine Lokationsänderung erkennen, indem der Median oder, gerade bei schiefen Verteilungen, andere Quantile betrachtet werden. Eine Veränderung der Verteilung insgesamt betrachten Grimshaw und Alt (1997), indem sie mehrere Quantile der Beobachtungsreihe in einer modifizierten multivariaten Kontrollkarte untersuchen. Eine ähnliche Idee, Charakteristika einer eindimensionalen Zeitreihe als multivariate Zeitreihe zu betrachten, wird in Abschnitt 5.2.2 mit den Periodogrammordinaten zu den Fourier-Frequenzen angewendet. Solche Methoden, die auf einer nichtparametrischen Spektraldichteschätzung aus Periodogrammen basieren, zählen ebenfalls zu den nichtparametrischen Verfahren.

Viele nichtparametrische Verfahren sind verteilungsfrei, das heißt, die Verteilung der Kontrollstatistik und damit auch die Eigenschaften wie *ARL* oder alternative Gütemaße hängen

nicht von der Verteilung der Daten ab. Meist werden aber Voraussetzungen wie die Unabhängigkeit der Beobachtungsreihe gefordert.

Wegen der Einfachheit der Anwendung werden oft auch robuste Versionen bekannter parametrischer Methoden verwendet, die selbst dann noch günstige Eigenschaften besitzen, obwohl Abweichungen von Standardannahmen existieren. Ein Beispiel ist die in [Stoumbos und Sullivan \(2002\)](#) beschriebene Robustheit der MEWMA-Karte gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung. [Brodsky und Darkhovsky \(1993\)](#) untersuchen unter anderem einfache EWMA- und CUSUM-Karten zur Erkennung von Mittelwertänderungen, wenn wenig Annahmen über das zugrunde liegende Modell gemacht werden. Sie beweisen asymptotische Eigenschaften, die auch ohne starke Annahmen bezüglich der Verteilung gelten. Das rechtfertigt den Einsatz dieser Verfahren auch bei nicht normal verteilten und teilweise sogar bei abhängigen Daten, hilft aber nicht bei der Wahl der Kontrollgrenze, die dann in jedem Fall empirisch oder heuristisch bestimmt werden muss. Durch die Wahl der Kontrollgrenze ohne die Ausnutzung von Verteilungsannahmen, kann dann von einer nichtparametrischen Kontrollkarte gesprochen werden.

[Willemain und Runger \(1996\)](#) schlagen vor, Kontrollgrenzen einer Kontrollkarte mit unabhängigen Kontrollstatistiken empirisch aus Referenzdaten zu bestimmen. Seien Z_1, \dots, Z_m unabhängige, identisch verteilte Stichprobenvariablen der zu untersuchenden Kontrollstatistik, die aus Daten eines unter Kontrolle befindlichen Prozesses berechnet wird. Seien $Z_{(1)}, \dots, Z_{(m)}$ die Ordnungsstatistiken, dann kann die Kontrollgrenze einer einseitigen Kontrollkarte als $Z_{(b)}$ festgelegt werden, mit $1 \leq b \leq m$. Mit einer solchen Wahl sind Erwartungswert und Varianz der mittleren Laufzeit unter Kontrolle gegeben durch

$$E(ARL_0) = \frac{m}{m-b} \quad \text{und} \quad \text{Var}(ARL_0) = \frac{bm}{(m-b)^2(m-1-b)}.$$

Wenn $\frac{b}{m}$ konstant gehalten wird, strebt die Varianz mit $m \rightarrow \infty$ gegen 0. Daraus folgt, dass b nicht zu groß und mindestens $b < m - 1$ sein sollte, um die Varianz zu kontrollieren, und dass mindestens $2E(ARL_0)$ Werte beobachtet werden müssen, um eine bestimmte erwartete mittlere Laufzeit $E(ARL_0)$ zu erreichen.

Die adaptive Kontrollgrenze nach [Schack \(1996\)](#) passt sich der Zeitreihe der Kontrollstatistiken langsam an. Sie ist dazu ausgelegt, dass mit ihrer Hilfe schnelle und abrupte Veränderungen erkannt werden. Die Idee basiert auf der Ausreißeridentifizierung ([Emerson und Strenio, 1983](#)), wenn ein Wert größer als $q_{1-\frac{\alpha}{2}} + 1.5 k_\alpha$ oder kleiner als $q_{\frac{\alpha}{2}} - 1.5 k_\alpha$ ist, wobei q_α

das α -Quantil und $k_\alpha = q_{1-\frac{\alpha}{2}} - q_{\frac{\alpha}{2}}$ einen Quantilsabstand der zu untersuchenden Stichprobe darstellt. Für eine adaptive Identifizierung dieser Art werden die Quantile nach [Grießbach und Schack \(1993\)](#) adaptiv geschätzt. Sie ist aufgrund ihrer Konstruktion nur in der Lage große Ausreißer und Sprünge in der Reihe der Kontrollstatistiken zu erkennen. Jeglicher trendähnlichen Veränderung passt sich die Grenze schnell an, so dass kein Alarm ausgelöst wird.

Unter idealisierten Voraussetzungen kann eine empirische Kontrollgrenze über eine Risiko-Minimierung festgelegt werden. Solche Voraussetzungen sind für unser Beispiel dann gegeben, wenn sehr viele Probebohrungen durchgeführt werden können, der Zeitpunkt des Einsetzens der Störung exakt bestimmbar ist und es möglich ist, Verlustfunktionen für die Fehlerquellen der Kontrollkarte zu definieren. Das heißt, es müssen die Kosten für einen falschen Alarm und für unentdecktes Rattern pro Zeiteinheit bekannt sein. Mit einer Menge von Bohrprozessen, bei denen der Zeitpunkt des Ratterns exakt bekannt ist, kann dann über die Variierung der Kontrollgrenze der mittlere erwartete Verlust minimiert werden.

Kapitel 5

Entdeckung spektraler Veränderungen

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass sich bei Rattern die Varianz, das Spektrum und die Autokovarianzfunktion des Körperschallsignals ändern. In diesem Kapitel werden spezielle Verfahren vorgestellt, die sich explizit für die Anwendung auf vorliegende Daten eignen. Es werden zunächst Offline-Verfahren beschrieben, über die retrospektiv spektrale Veränderungen einer Zeitreihe entdeckt werden können. Anschließend werden Methoden entwickelt, mit denen eine Veränderung in der Datenstruktur schon während der Datenerhebung (online) festgestellt werden kann.

5.1 Offline-Strukturbruchererkennung

Mit den im Folgenden beschriebenen Verfahren können Strukturbrüche in den zweiten Momenten einer Zeitreihe entweder im Spektral- oder im Zeitbereich offline erkannt werden.

Ähnlich zu einem Likelihood-Quotienten-Test auf einen Strukturbruch in einem Zeitreihenmodell (Basseville und Nikiforov, 1993) kann mit Hilfe der Verfahren, die in Lee u. a. (2003) und Picard (1985) vorgestellt werden, ein Strukturbruch bezüglich der Autokovarianzfunktion bis zur Zeitdifferenz m bzw. in der spektralen Verteilungsfunktion aufgedeckt werden. Dazu wird die Zeitreihe in zwei Segmente aufgeteilt. Nun werden entweder die beiden disjunkten Teile miteinander oder die gesamte Zeitreihe mit einem der Segmente verglichen, um unter allen möglichen Trennpunkten den maximalen Abstand zwischen den Eigenschaften der beiden gewählten Fenster zu suchen. Das Verfahren von Picard (1985), das in Abschnitt 5.1.1 beschrieben wird, misst Abstände der Zeitreihensegmente über die Kolmogorov-Metrik.

Der in [Lee u. a. \(2003\)](#) beschriebene Test auf Strukturbruch in der Autokovarianzstruktur nutzt Vergleiche der gesamten Zeitreihe mit einzelnen Segmenten über ein dem Mahalanobis-Abstand ähnlichen Maß bezüglich der Autokovarianzfunktionen bis zu einer bestimmten Zeitdifferenz.

Ein Verfahren von [Subba Rao \(1981\)](#), das auf der Theorie der evolutionären Spektraldichten basiert und mit einfachen Mitteln zu einem Online-Verfahren modifiziert werden kann, wird in Abschnitt [5.1.2](#) vorgestellt.

Weitere Offline-Verfahren, besonders für die Entdeckung multipler Strukturbrüche, stellen die schon in Abschnitt [2.3](#) erwähnten Verfahren von [Adak \(1998\)](#) und [Ombao u. a. \(2001\)](#) dar. In erster Linie sind diese Verfahren entwickelt worden, um über eine Teilung der Zeitreihe in näherungsweise stationäre Segmente eine Daten-adaptive Schätzung der zeitveränderlichen Spektraldichte zu erzeugen. Wegen der Einschränkung auf eine dyadische Aufteilung sind die Trennpunkte nicht darauf ausgelegt, die Zeitpunkte der Strukturbrüche oder der Stellen der Veränderungen zu schätzen.

Ähnlich wie in den zuvor erwähnten Verfahren wird in [Lavielle und Ludeña \(2000\)](#) und [Ahmada u. a. \(2004\)](#) eine Aufteilung der Zeitreihe auch in mehr als zwei Teile gesucht, für die bezüglich unterschiedlicher Maße die größte Heterogenität zwischen den einzelnen Segmenten festgestellt werden kann. Mit der Einführung eines Strafterms wird ein zu häufiges Teilen verhindert. Auf diese Verfahren der multiplen Strukturbruchererkennung wird hier nicht weiter eingegangen, weil der Fokus auf einer Online-Erkennung liegt, bei der nach einer Veränderung der Prozessstruktur ein Eingriff erforderlich ist. Die nachfolgenden Beschreibungen für Offline-Verfahren dienen als Grundlage für die Entwicklung passender sequentieller Methoden.

5.1.1 Strukturbruchererkennung mit spektraler Verteilungsfunktion

[Picard \(1985\)](#) beschreibt einen Test zur Strukturbruchererkennung mit dem Kolmogorov-Abstand von Schätzern des positiven integrierten Spektrums $F^+(\omega) = \int_0^\omega f(\lambda) d\lambda$ aus Gleichung [\(2.4\)](#). Die Nullhypothese ist, dass $\{X_t\}$ ein stationärer Prozess mit Mittelwert Null und stetigem Spektrum mit positiver spektraler Verteilungsfunktion $F_0^+(\omega)$ für alle $t \in \{1, \dots, n\}$ ist. Die Alternativhypothese beinhaltet, dass die positive spektrale Verteilungsfunktion von

X_t für $1 \leq t \leq [ns]$ durch $F_0^+(\omega)$ und für $[ns] < t \leq n$ durch $F_1^+(\omega)$ gegeben ist, wobei $s \in [0, 1)$ und $\omega \in [0, \pi]$. Die Teststatistik

$$\sup_{(s,\omega) \in [\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}] \times [0, \pi]} \sqrt{n} \frac{[ns]}{n} \frac{n - [ns]}{n} \left| \tilde{F}_1^{[ns]}(\omega) - \tilde{F}_{[ns]+1}^n(\omega) \right|$$

vergleicht die geschätzten spektralen Verteilungsfunktionen aus zwei disjunkten Segmenten der Zeitreihe. Dabei ist $\tilde{F}_i^j(\omega)$ mit $i \leq j$ der Schätzer (2.16) der positiven spektralen Verteilungsfunktion basierend auf den Beobachtungen x_i, x_{i+1}, \dots, x_j .

Picard (1985) untersucht die Eigenschaften des Tests für Gauß-Prozesse. Darauf aufbauend untersuchen Giraitis und Leipus (1991) asymptotische Eigenschaften des Tests unter der Annahme, dass ein linearer Prozess vorliegt, und Giraitis und Leipus (1992) Eigenschaften unter speziellen Alternativhypothesen. Außerdem beschäftigt sich Rozenholc (2001) mit ähnlichen Tests, bei denen die Daten vor der Berechnung der Periodogramme getapert werden.

In Abschnitt 5.2.2 nutzen wir die hier formulierte Idee, Ausschnitte einer Zeitreihe mit einem spektralen Abstandsmaß zu vergleichen, um Veränderungen in einer Zeitreihe zu entdecken, mit dem Ziel ein auf die vorliegende Datensituation zugeschnittenes Verfahren zu entwickeln.

5.1.2 CUSUM-Karte für die evolutionäre Spektraldichte

Subba Rao (1981) schlägt eine Kontrollkarte zur Entdeckung von Veränderungen in der Varianz-Kovarianzstruktur einer Zeitreihe vor, die auf der Theorie der evolutionären Spektraldichte von Priestley (1981b) und dem Test auf Stationarität in Priestley und Rao (1969) basiert. Sei $\hat{f}_{t_i}(\omega_j)$ ein nach Priestley (1988) wie in Gleichung (2.27) geschätztes evolutionäres Spektrum von $\{X_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$. Die Paare (t_i, ω_j) , mit $i \in \{1, \dots, I\}$ und $j \in \{1, \dots, J\}$, beschreiben ein Gitter mit genügend großen Abständen, so dass die approximative Unkorreliertheit von $\hat{f}_{t_i}(\omega_j)$ und $\hat{f}_{t_{\check{i}}}(\omega_{\check{j}})$ für alle Fälle, in denen nicht gleichzeitig $i = \check{i}$ und $j = \check{j}$ gilt, garantiert werden kann. Das ist dann der Fall, wenn die Abstände wesentlich größer gewählt werden als die im Schätzer verwendeten Bandbreiten des Bandpassfilters und des Zeit-Fensters. Priestley und Rao (1969) nutzen diese Unkorreliertheit aus, indem sie ein lineares Modell für $Y_{ij} := \ln(\hat{f}_{t_i}(\omega_j))$ aufstellen, das im Zusammenhang mit einem Test auf Nichtstationarität von Zeitreihen genutzt wird. Es ist gegeben durch

$$Y_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad j \in \{1, \dots, J\} \quad \text{und} \quad i \in \{1, \dots, I\}.$$

Dabei sind α_i , β_j und γ_{ij} Konstanten, die Veränderungen über die Zeit, über die Frequenz und deren Wechselwirkungen im logarithmierten Spektrum beschreiben. Wenn der Prozess $\{X_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$ stationär ist und seine Spektraldichte $f(\omega)$ existiert, dann gilt $\alpha_i = 0$, $\gamma_{ij} = 0$ und $\beta_j = E(Y_{ij}) \approx \ln(f(\omega_j))$ für alle i und alle j . Eine Abweichung von der Stationaritätsannahme bei i äußert sich in einer Veränderung von α_i und/oder γ_{ij} , wobei eine genaue Zuordnung im vorliegenden Zusammenhang nicht von Interesse ist.

Die Aufgabenstellung, eine Veränderung in der Varianz-Kovarianzstruktur der Zeitreihe aufzudecken, wird dadurch in das Problem transformiert, für jedes j eine Veränderung in Y_{ij} zu entdecken. Statt diese Aufgabe für jede Frequenz einzeln zu betrachten und Y_{ij} für jedes j mit dem Referenzwert β_j zu vergleichen, konzentriert sich [Subba Rao \(1981\)](#) auf die über die Frequenzen gemittelten Werte $\bar{Y}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{ij}$, für $i \in \{1, \dots, I\}$. Eine darauf basierende CUSUM-Karte, die von einer Normalverteilung der \bar{Y}_i ausgeht, verwendet die Kontrollstatistik

$$Z_i = \left(Z_{i-1} + \bar{Y}_i - \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \beta_j - k \right)^+, \quad i \in \{1, 2, \dots, I\},$$

mit einem geeigneten Startwert Z_0 und einer Konstanten k , die im optimalen Fall die Hälfte der erwarteten Veränderung angibt (siehe [Beispiel 4.4](#)).

Mit einer solchen Zusammenfassung der Frequenzen konzentriert man sich auf eine Veränderung in $\sum_{j=1}^J \ln(f(\omega_j))$ bzw. in $\varsigma := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(f(\omega)) d\omega$, mit der Spektraldichte $f(\omega)$ einer als stationär angenommenen Zeitreihe. Somit stützt sich das Verfahren auf das Abweichungsmaß d_{DII} aus [\(2.40\)](#). Über die nun folgenden Zusammenhänge kann die Verwendung dieses Maßes gerechtfertigt werden. Ein linearer, stationärer Prozess mit Erwartungswert Null und stetiger Spektraldichte auf $[-\pi, \pi]$ kann als ein unendlicher MA-Prozess mit

$$X_t = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_s \epsilon_{t-s} \tag{5.1}$$

geschrieben werden (siehe Wold-Zerlegung, [Brockwell und Davis, 1987](#), S. 180), wobei $\{\epsilon_t\}$ Weißes Rauschen mit identischer Verteilung, $E(\epsilon_t) = 0$ und $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$ für alle t ist und für die MA-Parameter gilt, dass $\theta_0 = 1$ und $\sum_{s=0}^{\infty} \theta_s^2 < \infty$. Da der erwartete quadratische Fehler einer Einschnitt-Vorhersage in Modell [\(5.1\)](#) durch $2\pi e^\varsigma = \sigma_\epsilon^2$ gegeben ist ([Brockwell und Davis, 1987](#), S. 176/184), erzeugt eine spektrale Veränderung in einer Zeitreihe, die durch Modell [\(5.1\)](#) beschrieben werden kann, auch eine Veränderung in $\hat{\epsilon}_t$ und kann damit auch durch die CUSUM-Karte erkannt werden.

Allerdings gibt es spektrale Veränderungen, die sich nicht in ς zeigen, weil sich Unterschiede zwischen einzelnen Frequenzen in der Summe wieder ausgleichen können. Ein zweiter Kritikpunkt ist, dass das angewendete Spektraldichtekonzept eine sehr rechenintensive Prozedur erfordert, weil wesentlich mehr einzelne Periodogramme berechnet als Beobachtungspunkte $i \in \{1, \dots, I\}$ in der Zeit ausgewählt werden. Zudem erfolgt der Aufwand eines zweifachen „Glättens“. Im Schätzverfahren der evolutionären Spektraldichte wird zunächst über die Zeit geglättet. Anschließend werden die Zeitpunkte weit auseinander liegend gewählt und die dadurch erhaltenen unkorrelierten Werte des Spektrums wieder in der CUSUM-Karte kumuliert.

Die verwendete CUSUM-Karte ist ein Online-Verfahren, wobei der beschriebene Schätzer aber nur offline verwendet werden kann. In Abschnitt 5.2.2 wird eine ähnliche Idee online angewendet. Dabei wird eine multivariate Sichtweise mit einem anderen spektralen Abweichungsmaß und eine auf multivariatem exponentiellen Glätten basierende Kontrollkarte genutzt. Durch eine exponentielle Glättung von unkorrelierten Periodogrammwerten kann eine Verbesserung der Spektraldichteschätzer erreicht und gleichzeitig verhindert werden, dass die Werte zweimal über die Zeit kumuliert werden müssen.

5.2 Online-Strukturbruchererkennung

In diesem Abschnitt werden Online-Verfahren zur Erkennung von spektralen Veränderungen, die parallel zur Datenerhebung arbeiten, vorgestellt und untersucht.

Zur Vereinfachung wird üblicherweise ein abrupter Wechsel in den Eigenschaften einer Beobachtungsreihe angenommen. In der vorliegenden Anwendung handelt es sich jedoch um verschiedene Formen von graduellen Veränderungen im Spektrum einer Zeitreihe, die wir möglichst schnell erkennen wollen. Obwohl die klassischen CUSUM- und EWMA-Kontrollkarten die Optimalitätseigenschaften bei einer abrupten Veränderung besitzen, sind sie auch sehr gut geeignet, um andere Formen monotoner Veränderungen zu erkennen (Elsayed, 2000).

Es soll eine Veränderung in der Kovarianzstruktur der Zeitreihe aufgedeckt werden. Dabei wird angenommen, dass sich diese Veränderung in der Autokovarianzfunktion bei verschiedenen Zeitdifferenzen, im Spektrum evtl. eingeschränkt auf Frequenzbänder oder in den die Kovarianzstruktur beschreibenden Parametern von Modellen stochastischer Prozes-

se ausdrückt. Um Veränderungen zu erkennen, werden die entsprechenden Charakteristika oder Parameter des Prozesses über den Verlauf der zu untersuchenden Zeitreihe geschätzt und müssen mit entsprechenden Zielwerten verglichen werden. Diese Zielwerte und weitere Parameter können, wie bei den klassischen Kontrollkarten, als Phase-1-Schätzer aus Referenzdaten bestimmt werden. Insgesamt wird eine binäre Entscheidungsregel mit Stoppzeit $T_a = \inf\{t \in \mathbb{N} : g_t(X_1, \dots, X_t) \geq h_t\}$ mit einer Kontrollstatistik g_t und einer Kontrollgrenze h_t gesucht. Mit der gesuchten Methode soll es möglich sein, eine Abweichung der Schätzfunktionen vom Zielwert zu erkennen, die nicht im Bereich üblicher Schwankungen liegt, die im Prozess unter statistischer Kontrolle vorkommen. Wir haben allerdings festgestellt, dass auch in einem ruhigen Bohrprozess Nichtstationaritäten in der Zeitreihe des Körperschalls vorhanden sind. Daher müssen in unserem Fall nicht nur wie bei klassischen Kontrollkarten Phase-1-Schätzer aus Referenzdaten bestimmt, sondern ständig Aktualisierungen der Schätzungen vorgenommen werden.

5.2.1 Übersicht über sequentielle Verfahren

Dieser Abschnitt liefert eine Übersicht über Online-Verfahren zur Erkennung spektraler Veränderungen in Zeitreihen. Da die meisten der Methoden sich in ihrer ursprünglichen Form nicht zur Bearbeitung des vorliegenden Problems eignen, wird in Abschnitt 5.2.2 ein eigens für die Datensituation zugeschnittenes Verfahren entwickelt.

Modifikation von Offline- zu Online-Verfahren

Betrachten wir zunächst, wie ein Offline-Verfahren zu einem Online-Verfahren modifiziert werden kann. Offline-Tests für eine Strukturbruchererkennung nutzen verschiedene Arten von Vergleichen. Naheliegender ist es, zwei disjunkte Fenster zu vergleichen, durch die eine Zweiteilung der Zeitreihe an der Stelle $t = k$ entsteht, wie in dem in Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Test für die Veränderung in der spektralen Verteilungsfunktion. Weniger Berechnungen sind erforderlich, wenn die gesamte Zeitreihe mit den k ersten oder den k letzten Werten verglichen wird, wie es z. B. in dem von Lee u. a. (2003) beschriebenen Test auf einen Strukturbruch in der Autokovarianzfunktion der Fall ist. Mit einer solchen Strategie ist es auch möglich, multiple Strukturbrüche zu entdecken. In allen Fällen wird der Zeitpunkt k mit dem maximalen Unterschied gesucht.

Diese Verfahren können zu Online-Verfahren modifiziert werden, indem der entsprechende Offline-Test für jeden Zeitpunkt t erneut angewendet wird. Eine ähnliche Herleitung existiert für die CUSUM-Karte für unabhängige Beobachtungsreihen (4.2) oder für spektrale Veränderungen in Gleichung (4.6) (Basseville und Nikiforov, 1993). Ist eine solche Maximierung zu jedem Zeitpunkt t nicht wie in Gleichung (4.2) rekursiv zu schreiben, stößt man möglicherweise auf Rechenzeitprobleme.

Für diesen Fall bestehen Lösungen in der Beschränkung der Maximierung über Zeitpunkte der jüngeren Vergangenheit oder in einer Einschränkung der Anzahl der berücksichtigten Beobachtungen. Solche Ansätze beschreiben Lai und Shan (1999) für GLR-Karten und Brodsky und Darkhovsky (1993) für eine Online-Variante eines einfachen nichtparametrischen Tests, der auf dem Vergleich arithmetischer Mittelwerte beruht. Eine alternative Möglichkeit die Rechenzeit von Offline-Tests zu jedem Zeitpunkt eines sequentiellen Verfahrens zu verringern, besteht darin, wie in Abschnitt 4.4 beschrieben, Vorwissen über die Art der Veränderung einfließen zu lassen. Bei den diversen Arten des Ratterns scheint das in dem vorliegenden Fall jedoch unrealistisch zu sein. Außerdem haben uns die Modellierungsversuche in Abschnitt 3.4 gezeigt, dass in dieser Anwendung Verfahren, die auf spezifizierten Modellen basieren, nicht angebracht sind.

Algorithmen für Online-Verfahren sollten, um die Rechenzeit gering zu halten, so konstruiert sein, dass unnötige Berechnungen, wie die wiederholte Nutzung von Werten aus vergangenen Fenstern der Zeitreihe, vermieden werden. Ist man nicht an der Schätzung des genauen Zeitpunktes des Strukturbruchs interessiert, reicht es für eine Erkennung von Veränderungen aus, die Maximierung über die möglichen Vergleiche zu einem Zeitpunkt durch einen einzigen Vergleich pro Zeitpunkt zu ersetzen. Benveniste u. a. (1990) modifizieren Offline-Verfahren, die auf adaptiven Schätzalgorithmen basieren, zu Online-Verfahren, indem eine Maximierung über viele Fenstervergleiche auf einen einzigen Fenstervergleich beschränkt wird. Als Grundlage der Verfahren könnten Algorithmen zur rekursiven Schätzung von ARMA-Parametern dienen. Solche werden z. B. in Rao und Peng (1990) und McDougall (1994) beschrieben, wobei letztere in Anhang B zur Anwendung kommen. Auch in der in Abschnitt 5.2.2 entwickelten Kontrollkarte konzentrieren wir uns auf einen einzigen Vergleich pro Untersuchungszeitpunkt und wählen zusätzlich Untersuchungszeitpunkte weiter auseinander liegend, um die Rechenzeit zu reduzieren.

Das Problem bei den sequentiellen, GLR-basierten Kontrollkarten, die in [Lai und Shan \(1999\)](#) und [Basseville und Nikiforov \(1993\)](#) vorgestellt werden, ist, dass die Berechnungen nicht rekursiv durchgeführt werden können. Das heißt, sie können nicht für jeden einzelnen Datenpunkt die Kontrollstatistik aktualisieren, ohne die gesamten einzelnen vergangenen Werte zu verwenden. Verfahren, die rekursive Berechnungen erlauben, werden im Folgenden vorgestellt.

Rekursive Verfahren

[Brodsky und Darkhovsky \(1993\)](#) stellen fest, dass jede Art der Veränderung in einer Beobachtungsreihe in ein Lokationsveränderungsproblem überführt werden kann. Angenommen, für eine Zeitreihe X_t mit $E(X_t) = 0$ soll ein Strukturbruch in der Autokovarianz $E(X_t X_{t-g})$ mit $g \in \mathbb{N}$ erkannt werden. Dieses Problem kann zu der einfacheren Aufgabe der Erkennung einer Mittelwertänderung der Zeitreihe $Y_t^{(g)} = X_t X_{t-g}$ transformiert werden. Die Autoren schlagen vor, Kontrollkarten für Mittelwertänderungen anzuwenden. Sie diskutieren kurz, welche Konsequenzen Abhängigkeiten in der Beobachtungsreihe nach sich ziehen, geben jedoch keine Lösungsmöglichkeit für das Problem, dass in der Reihe $Y_t^{(g)}$ künstlich Abhängigkeiten in den zu kontrollierenden Daten entstehen.

Auf dieses Problem gehen [Rosolowski und Schmid \(2003\)](#) ein und entwickeln für die multivariate Zeitreihe

$$\boldsymbol{\tau}_t = (X_t, (X_t - \mu)^2, (X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu), \dots, (X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu))', \quad t \in \mathbb{N}$$

zwei verschiedene, auf exponentieller Glättung basierende Kontrollkarten. Für die erste wird für jedes t der Mahalanobisabstand zwischen $\boldsymbol{\tau}_t$ und dem Vektor des Erwartungswertes und der Autokovarianzen $(\mu, \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)'$ eines vorgegebenen Modells für den Prozess unter Kontrolle gebildet. Dieser Abstand wird anschließend über die Zeit exponentiell geglättet. Als eine sensiblere und flexiblere Methode erweist sich die Anwendung einer MEWMA-Karte auf die multivariate Zeitreihe $\boldsymbol{\tau}_t$.

Diese Methoden sind hier allerdings nur eingeschränkt von Nutzen. Will man den Vergleich ständig aktualisieren, so dass mit den Verfahren kleine Änderungen nicht erkannt werden und nur bei größeren Veränderungen alarmiert wird, so muss auch die Kovarianzmatrix der zu vergleichenden Vektoren im Mahalanobisabstand ständig aktualisiert werden. Das Aktualisieren der Inversen der Kovarianzmatrix bei jedem Datenpunkt ist jedoch rechenzeittechnisch

schwer möglich. Gleiches gilt für die auf adaptiven Schätzalgorithmen basierende, sequentielle Methode von [Benveniste u. a. \(1990\)](#) und auch für eine Online-Modifikation der Methode von [Lee u. a. \(2003\)](#).

Wenn bekannt ist, dass sich eine Veränderung auf einen bestimmten Frequenzbereich konzentriert, bietet sich ein rekursives Verfahren von [Grießbach u. a. \(1994\)](#) an. Sie stellen einen adaptiven Algorithmus zum Schätzen der Bandleistung $\int_{\omega_1}^{\omega_2} dF(\omega)$ in einem Frequenzband $[\omega_1, \omega_2]$ vor. Diese so genannte adaptive Bandleistung ist zur Erkennung einer Strukturveränderung dann eine wesentlich sensiblere Charakteristik als die Varianz (Gesamtleistung über alle Frequenzen), wenn die relevanten Veränderungen bekanntermaßen nur in bestimmten Frequenzbereichen vorkommen. [Schack \(1996\)](#) schlägt die Verwendung von adaptiven Kontrollgrenzen auf Basis einer adaptiven Quantilwertschätzung vor, wie sie in Abschnitt 4.5 beschrieben wurden. Die adaptive Grenze eignet sich zur Erkennung von Ausreißern und ausgeprägten Sprüngen. Es lässt sich jedoch feststellen, dass die Grenze sich zu gut an die Zeitreihe anpasst, als dass damit auch Trends zu erkennen wären.

Es ist ein großer Vorteil, wenn die Kontrollstatistiken rekursiv berechnet werden können, so dass bei jedem neuen Datenpunkt die bisherige Statistik durch eine einfache Rechnung aktualisiert werden kann. Das erspart gegenüber der erneuten Nutzung der kompletten bisher verfügbaren Datenmenge zu jedem Zeitpunkt viel Zeit und Speicherplatz. Allerdings ist es bei einer Abtastrate von 20 000 Hz für eine schnelle Erkennung nicht nötig, und wegen eines zu hohen Datenflusses gar nicht möglich, für jede neue Beobachtung des Signals eine Aktualisierung vorzunehmen. Die im Folgenden beschriebenen Verfahren verwenden die Daten blockweise, wobei bzgl. der Originaldaten keine rekursiven Berechnungen vorgenommen werden.

Blockweise vergleichende Verfahren

Einen Online-Algorithmus zur Segmentierung einer Zeitreihe in stationäre Teile stellen [Ligges u. a. \(2002\)](#) vor. Dieser basiert auf einer ähnlichen, auf der Kolmogorov-Metrik basierenden Statistik, wie sie auch von [Picard \(1985\)](#) vorgeschlagen wird (siehe Abschnitt 5.1.1). [Ligges u. a. \(2002\)](#) beschränken sich auf drei Vergleiche pro Untersuchungszeitpunkt von kurzen disjunkten Fenstern, um eine abrupte Änderung zu erkennen. Da die Kolmogorov-Metrik für die vorliegenden Daten nicht angemessen scheint (siehe Abschnitt 3.5), werden ähnliche

Verfahren mit anderen Abweichungsmaßen in 5.2.2 vorgeschlagen. Wegen der blockweisen Verwendung der Daten ist es hier irrelevant, dass die Fourierreihe per FFT nicht rekursiv berechnet werden kann.

Takanami (1999) stellt ein modellgestütztes Online-Verfahren zur Aufteilung einer Zeitreihe in stückweise stationäre AR-Prozesse vor. Mit festgelegter Segmentgröße wird für jedes neue Datensegment mit Hilfe des AIC entschieden, ob der neueste Block mit den vorhergegangenen ein stationäres Segment bilden kann oder ob er abgetrennt werden soll. Ein ähnliches Verfahren, das allerdings das BIC verwendet, stellen Ombao u. a. (2004) vor.

Basierend auf dem in Abschnitt 2.4.3 beschriebenen „transformierten CUSUM-Test“ bzw. dem modifizierten Test mit der symmetrischen Verhältnis-Statistik schlagen Choi u. a. (2004) ein multiples sequentielles Testverfahren vor, mit dem multiple Strukturbrüche in einer Zeitreihe online erkannt werden können. Für das Verfahren wird die Zeitreihe in Blöcke gleicher Größe aufgeteilt. Um die Fragestellung zu beantworten, ob der k -te Block sich von den $(k - 1)$ vorhergehenden Blöcken unterscheidet, wird eines der vorgeschlagenen Testverfahren in einem multiplen Testproblem mit Bonferroni-Korrektur angewendet. Das Verfahren ist so konstruiert, dass auch leichte graduelle Veränderungen der Autokovarianzstruktur von Zeitreihen letztendlich zu der Erkennung eines Strukturbruchs führen. Damit ist es für die vorliegende Datenlage ungeeignet, weil es über den Bohrprozess langsam verändernde Charakteristika nicht übergehen kann.

Für die im nächsten Abschnitt eingeführten Kontrollkarten werden Spektraldichteschätzer in Blöcken fester Größe berechnet. In die Kontrollstatistiken fließen jedoch teilweise rekursive Berechnungen bzgl. der Werte der Spektraldichteschätzungen ein.

5.2.2 Kontrollkarten für die Veränderung des Spektrums

In diesem Abschnitt werden Kontrollkarten zur Erkennung von Veränderungen im Spektrum eines Prozesses entwickelt, die auf Periodogramm-basierte Spektraldichteschätzer zurückgreifen. Die Schätzer aus den einzelnen Testfenstern werden dazu online mit solchen aus Referenzsignalen oder Referenzfenstern verglichen. Dabei wird zwischen „gleitenden Fenstern“, in denen die Spektraldichte geschätzt wird, und „wachsenden Fenstern“, in denen die Spektraldichteschätzer mit stärkerer Gewichtung auf der jüngsten Vergangenheit gemittelt werden, unterschieden. Für den Vergleich zweier Spektraldichteschätzer können die in Abschnitt 2.4

beschriebenen Abweichungsmaße genutzt werden. Die Untersuchung in Abschnitt 3.5 zeigte eine Überlegenheit der Itakura-Saito-Abweichung bezüglich der vorliegenden Problemstellung auf.

Wir beschränken uns auf die SLEX-Periodogramme aus (2.28) als Spektraldichteschätzer, da sie den Vorteil haben, dass sie auch in stark überlappenden Fenstern noch asymptotisch unkorrelierte Schätzungen liefern (siehe Satz 2.2). Daher weisen Schätzer, die aus Mittelwerten dieser Periodogramme berechnet werden, eine geringere Varianz auf als die Periodogramme einzeln (siehe Bemerkung 2.1). Seien $I(\omega_j, k)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, mit $\omega_j = \frac{2\pi j}{N}$ und $j \in \{-\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}\}$, SLEX-Periodogramme einer Zeitreihe X_1, \dots, X_n auf gleich großen Segmenten der Länge N (gerade), mit konstant gleichen SLEX-Fenstern mit festem Parameter ε und Abschneidefunktion r . Die Periodogramme werden dann in Fenstern der Größe $N + 2\varepsilon$ berechnet, die sich an 2ε Zeitpunkten überschneiden.

Es lässt sich eine multivariate Zeitreihe $\{\mathbf{Y}_k\}$ mit $\mathbf{Y}_k = (Y_{1,k}, Y_{2,k}, \dots, Y_{m,k})'$ definieren, wobei $Y_{j,k} = I(\omega_j, k)$, $k \in \mathbb{N}$, und $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $m = N/2$. Sowohl $Y_{i,k}$ und $Y_{j,k}$ für alle k und alle $i \neq j$ als auch $Y_{j,h}$ und $Y_{j,k}$ für alle j und $h \neq k$ sind nach Satz 2.2 bezüglich wachsender Segmentgröße N asymptotisch unkorreliert.

Die folgenden fünf Strategien zur Wahl der zu vergleichenden Datensegmente, hier Fenster genannt, werden in den Abbildungen 5.1 und 5.2 visualisiert.

1. Vergleiche das geschätzte Spektrum eines gleitenden Fensters mit dem Spektrum eines Referenzsignals:

Die Kontrollstatistik ist damit gegeben durch

$$IS_k^{(1)} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{Y_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,0}} - \ln \left(\frac{Y_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,0}} \right) - 1 \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

mit einem Referenzvektor $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0$. Im Gegensatz zur Mahalanobis-Distanz wird hierbei nicht über die Kovarianzmatrix gewichtet. Das ist auch nicht nötig, weil die $Y_{j,k}$ für alle j asymptotisch unkorreliert sind. Allerdings kann eine Gewichtung durch die Varianzen vorgenommen werden. Eine solche könnte über eine Gewichtsfunktion $g(j)$ eingeführt werden, die aus vorangegangenen Werten geschätzt die Frequenzanteile herunter gewichtet, bei denen auch in ruhigen Bohrprozessen eine hohe Variabilität in der Amplitude herrscht.

2. Vergleiche ein aktualisiertes geschätztes Spektrum in einem wachsenden Fenster mit dem geschätzten Spektrum eines Referenzsignals:

Mit dem Ausdruck „wachsendes Fenster“ ist hier gemeint, dass bei jedem neu hinzukommenden Block der Größe N das exponentiell gewichtete Mittel der einzelnen Spektraldichteschätzer rekursiv berechnet wird. Dies ergibt eine exponentielle Glättung der multivariaten Zeitreihe $\{\mathbf{Y}_k\}$ in der Form

$$\mathbf{Z}_k = \lambda \mathbf{Y}_k + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{k-1} = \lambda \sum_{i=1}^k (1 - \lambda)^{k-i} \mathbf{Y}_i + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_0, \quad k \in \mathbb{N},$$

mit Gewichtsparameter $0 < \lambda \leq 1$ und einem geeigneten Startvektor \mathbf{Z}_0 .

Wenn die Zeitreihe $\{X_t\}$ stationär ist mit Spektraldichte $f(\omega)$, ist $\{Z_{j,k}\}$ eine bezüglich N asymptotisch erwartungstreue Schätzfolge für $f(\omega_j)$. Die Schätzfolge besitzt für große k und große N eine ungefähr um den Faktor $\frac{\lambda}{2-\lambda}$ geringere Varianz als die einzelnen Periodogramme (siehe Bemerkung 2.1). Damit stellt $\{\mathbf{Z}_k\}$ bei lokaler Stationarität nicht nur eine geglättete multivariate Zeitreihe, sondern als nichtstationäre Spektraldichteschätzung auch einen Kompromiss zwischen einem guten Schätzer und einer guten Anpassung an Veränderungen im Spektrum dar.

Eine Kontrollstatistik ist damit gegeben durch

$$IS_k^{(2)} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{Z_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,0}} - \ln \left(\frac{Z_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,0}} \right) - 1 \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

mit einem Referenzvektor $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0 = (\hat{\mu}_{1,0}, \dots, \hat{\mu}_{m,0})'$ und einem Startvektor $\mathbf{Z}_0 = (Z_{1,0}, \dots, Z_{m,0})'$, die beide SLEX-Periodogramme einer Referenzzeitreihe sein können.

3. Vergleiche das geschätzte Spektrum aus zwei gleitenden Fenstern:

Die Kontrollstatistik ist hier gegeben durch

$$IS_k^{(3)} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{Y_{j,k}}{Y_{j,k-a}} - \ln \left(\frac{Y_{j,k}}{Y_{j,k-a}} \right) - 1 \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $\mathbf{Y}_{-a}, \mathbf{Y}_{-a+1}, \dots, \mathbf{Y}_0$ die SLEX-Periodogramme aus einer Referenzreihe sind und der Parameter $a \in \mathbb{N}$ den Abstand bestimmt, den die Fenster voneinander haben. Für $a = 1$ überschneiden sie sich und für $a = 2$ haben sie den Abstand $N - 2\varepsilon$ (siehe Definition 2.13). Um auch graduelle Veränderungen erkennen zu können, müssen die beiden Fenster weiter auseinander liegend gewählt werden. Diese Idee wurde in Form der „delayed moving windows“ von [Daumer und Neiß \(1999\)](#) benutzt.

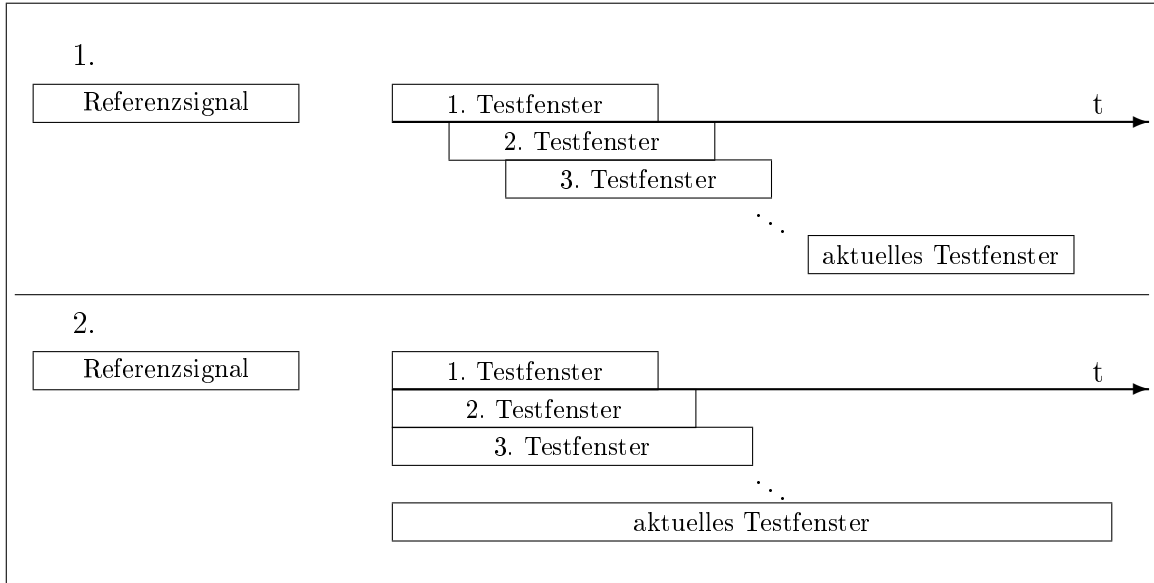


Abbildung 5.1: Fenster-Strategien mit Referenzsignal und gleitenden oder wachsenden Testfenstern

4. Vergleiche das geschätzte Spektrum eines gleitenden Fensters mit dem eines wachsenden Fensters:

Wenn verhindert werden soll, dass sich leichte Trends in der Zeitreihe der Periodogrammwerte bemerkbar machen, kann die Statistik aus 1. verändert werden, so dass

$$IS_k^{(4)} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{Y_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,k}} - \ln \left(\frac{Y_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,k}} \right) - 1 \right),$$

wobei $\hat{\mu}_k = (\hat{\mu}_{1,k}, \hat{\mu}_{2,k}, \dots, \hat{\mu}_{m,k})'$ ein aus gewichteten vergangenen Werten berechnetes Mittel ist, also

$$\hat{\mu}_k = \nu \mathbf{Y}_{k-a} + (1 - \nu) \hat{\mu}_{k-1},$$

mit geeigneten Startvektoren $\hat{\mu}_0$ und \mathbf{Z}_0 , einem Abstandswert a wie in 3., einem Gewichtsparameter ν mit $0 < \nu \leq 1$ und den SLEX-Periodogrammen $\mathbf{Y}_{-a}, \mathbf{Y}_{-a+1}, \dots, \mathbf{Y}_0$, die aus einer Referenzreihe stammen.

5. Vergleiche zwei wachsende Fenster, ein aktuelles, das die jüngste Vergangenheit stark gewichtet, mit einem Fenster, in dem sich der Spektraldichteschätzer langsam anpasst: Sollen die Eigenschaften der 2. und der 4. Strategie vereint werden, so kann folgende Kontrollstatistik

$$IS_k^{(5)} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{Z_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,k}} - \ln \left(\frac{Z_{j,k}}{\hat{\mu}_{j,k}} \right) - 1 \right), \quad k \in \mathbb{N}$$

mit

$$\mathbf{Z}_k = \lambda \mathbf{Y}_k + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{k-1}$$

und

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_k = \nu \mathbf{Y}_{k-a} + (1 - \nu) \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k-1}$$

gewählt werden. Dabei ist $0 < \nu \ll \lambda \leq 1$, \mathbf{Z}_0 und $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0$ sind geeignete Startvektoren, a ist ein Abstandswert wie in 3. und die SLEX-Periodogramme $\mathbf{Y}_{-a}, \mathbf{Y}_{-a+1}, \dots, \mathbf{Y}_0$ stammen aus einer Referenzreihe. Die Statistik $IS_k^{(5)}$ ist die Itakura-Saito-Abweichung der über die Zeit geglätteten Periodogrammwerte eines „hinterherschleichenden“ geglätteten Mittels.

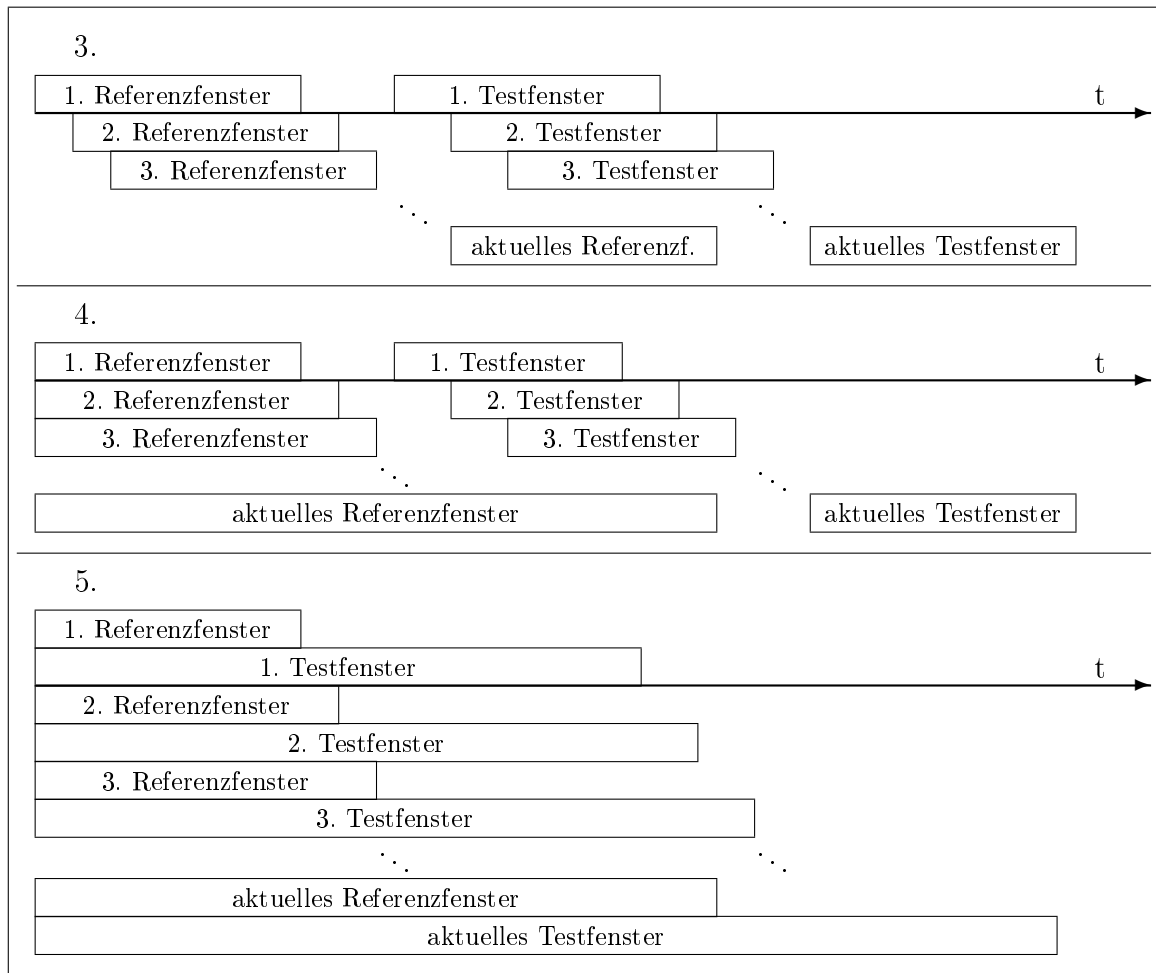


Abbildung 5.2: Fenster-Strategien mit gleitenden oder wachsenden Referenz- und Testfenstern

Die ersten vier Strategien können als Spezialfälle der fünften interpretiert werden mit einer Festlegung $\nu = 1$ und $\lambda = 1$ für Strategie 3 und $\lambda = 1$ für Strategie 4. Für den Vergleich mit

einem festen Referenzsignal erlauben wir in Strategie 5 die Zuweisung $\nu = 0$, damit sich als Spezialfälle Strategie 1 mit $\nu = 0$, $\lambda = 1$ und $a = 0$ und Strategie 2 mit $\nu = 0$ und $a = 0$ ergeben.

Ein Alarm wird jeweils für $IS_k^{(i)} > h^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, 5\}$, ausgelöst, mit geeignet gewählten Kontrollgrenzen $h^{(i)}$. Eine Möglichkeit, wie diese durch empirische Untersuchungen festgelegt werden kann, ist in Abschnitt 4.5 beschrieben.

Aus Abschnitt 3.5 ist bekannt, dass die Itakura-Saito-Abweichung nur dann sinnvoll ist, wenn die Varianz der verwendeten Spektraldichteschätzer mit Hilfe einer Glättung über die Frequenzen oder einer Mittelung über mehrere Zeitfenster verringert wurde. Deshalb müssen in den Fällen, in denen keine Glättung über die Zeit stattfindet (1. und 3.), die SLEX-Periodogramme über die Frequenzen geglättet werden.

Während die dritte Strategie den „delayed moving windows“ für eine Trenderkennung ähnelt, können für die anderen Strategien Parallelen bei multivariaten Kontrollkarten (siehe Abschnitt 4.3) für die Werte aus $\{\mathbf{Y}_k\}$ gefunden werden. Die erste Strategie entspricht der Vorgehensweise bei Hotellings multivariater Kontrollkarte, wobei allerdings die Mahalanobis-Distanz durch die Itakura-Saito-Abweichung aus Gleichung (2.29) ersetzt wird. Die zweite Strategie entspricht einer Modifikation der MEWMA-Karte mit einem anderen Abweichungsmaß, bei der die bezogen auf die Original-Zeitreihe $\{X_t\}$ wachsenden Fenster eine Glättung der Spektraldichteschätzer im Zeitbereich garantieren. Um eine Anpassung an die leichten Nichtstationaritäten in der Zeitreihe bei ruhigem Bohrprozess zu erhalten, werden in den Strategien vier und fünf die Referenzwerte adaptiv berechnet.

5.2.3 Vergleich der Strategien an simulierten Zeitreihen

Um die Unterschiede der verschiedenen Strategien zu demonstrieren und deren Eigenschaften zu verstehen, bemühen wir eine Simulationsstudie, in der wir eine Veränderung in vier simulierten Zeitreihen der Länge $n = 60\,000 \triangleq 3 \text{ sec}$ erkennen wollen. Die Parameterwerte der dazu verwendeten ARMA(2, 1)-Modelle sind so gewählt, dass Ausschnitte der simulierten Zeitreihe den Abschnitten aus der Körperschallzeitreihe des Bohrprozesses 6 ähneln, siehe dazu die rekursiven ARMA-Anpassungen in B.6. Die ersten zwei Sekunden repräsentieren jeweils einen Bohrprozess in Ruhe und die letzte Sekunde einen ratternden Prozess. Auch bei vielen der Prozesse in Ruhe werden Veränderungen entdeckt, die gegenüber den etwas

stärkeren oder schnelleren Veränderungen bei Einsetzen von Rattern als irrelevant angesehen werden. Rattern zeigt sich als starke Veränderung, die abrupt oder graduell ausfallen kann, gegenüber dem momentanen Zustand. Der Verlauf der Veränderungen in den Parametern ist idealisiert, so dass das unterschiedliche Verhalten der Strategien bei abrupten oder graduellen Sprüngen und die Anpassungsfähigkeit an leichte Nichtstationaritäten im ruhigen Bohrprozess verdeutlicht werden können.

- 1. Signal:** Der ruhige Prozess wird mit einem ARMA(2, 1)-Modell (2.1) mit AR-Parametern $\phi_{1,0} = 0.15$ und $\phi_{2,0} = -0.6$, MA-Parameter $\theta_0 = -0.67$ und $\sigma_{\epsilon,0} = 1.6$ simuliert. Der ratternde Prozess beginnt mit einem abrupten Wechsel zu einem ARMA(2, 1)-Modell mit Parametern $\phi_{1,2} = 0.45$, $\phi_{2,2} = -0.7$, $\theta_2 = -0.55$ und $\sigma_{\epsilon,2} = 2.1$.
- 2. Signal:** Im ruhigen Prozess, also über die ersten 2 Sekunden, findet eine lineare Veränderung mit kleiner Steigung der Parameter von $(\phi_{1,0}, \phi_{2,0}, \theta_0, \sigma_{\epsilon,0})'$ nach $(\phi_{1,1} = 0.25, \phi_{2,1} = -0.65, \theta_1 = -0.6, \sigma_{\epsilon,1} = 1.8)'$ statt. Es folgt, wie oben, ein abrupter Wechsel zu $(\phi_{1,2}, \phi_{2,2}, \theta_2, \sigma_{\epsilon,2})'$.
- 3. Signal:** Der Prozess in Ruhe wird wie für das 1. Signal erzeugt. Dann ändern sich die Parameter von $(\phi_{1,0}, \phi_{2,0}, \theta_0, \sigma_{\epsilon,0})'$ nach $(\phi_{1,2}, \phi_{2,2}, \theta_2, \sigma_{\epsilon,2})'$ linear innerhalb der letzten Sekunde.
- 4. Signal:** Im ruhigen Prozess findet wie für das 2. Signal eine lineare Veränderung der Parameter von $(\phi_{1,0}, \phi_{2,0}, \theta_0, \sigma_{\epsilon,0})'$ nach $(\phi_{1,1}, \phi_{2,1}, \theta_1, \sigma_{\epsilon,1})'$ statt. Der ratternde Prozessausschnitt wird durch eine lineare Veränderung von $(\phi_{1,1}, \phi_{2,1}, \theta_1, \sigma_{\epsilon,1})'$ nach $(\phi_{1,2}, \phi_{2,2}, \theta_2, \sigma_{\epsilon,2})'$ in der letzten Sekunde des Prozesses simuliert.

In den Graphiken der Abbildungen 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 und 5.7 sind für alle Kombinationen von Strategien und simulierten Signalen die Kontrollstatistiken gegen die Zeit abgetragen. Um in der Praxis mit einer konstanten Kontrollgrenze zu arbeiten, die empirisch festgelegt wird, ist ein Ziel, dass die Kontrollstatistik im ruhigen Bohrprozess möglichst klein und konstant ist und einen möglichst schnellen Anstieg dann erfährt, wenn das Rattern einsetzt, bzw. das Körperschallsignal sich zu stark verändert. Die Parameter der Kontrollkarten wurden hier so gewählt, dass sie diese Anforderungen so gut wie möglich einhalten. Dabei bezeichnet d den Parameter des Daniellschätzers aus Beispiel 2.2.

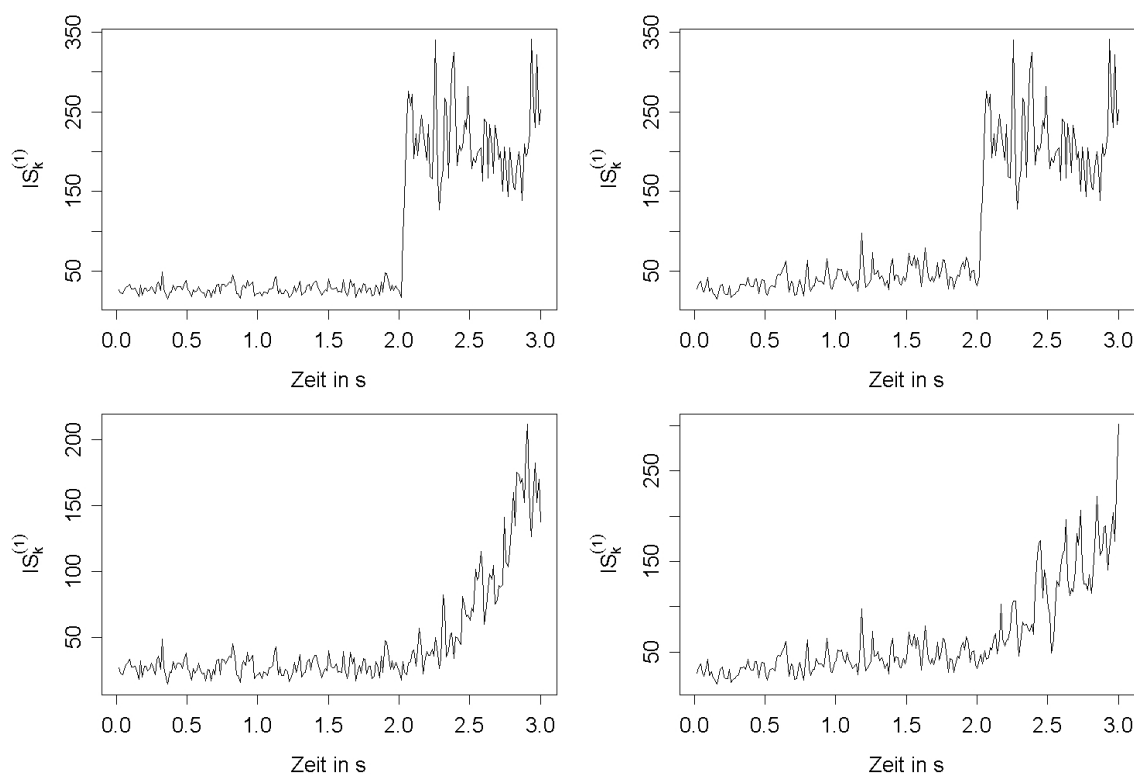


Abbildung 5.3: Kontrollstatistik von Strategie 1 für die simulierten Signale (von links nach rechts und oben nach unten: 1., 2., 3. und 4. Signal); Parametereinstellung: $N = 256$, $\varepsilon = 128$, $r = r_{(1)}$, $d = 4$ ($\nu = 0$, $\lambda = 1$, $a = 0$)

Bei der zweiten, vierten und fünften Strategie und bei der dritten nur bei den sich ändernden ruhigen Prozessen 2 und 4 (Abbildungen 5.4 bis 5.7) sind zu Beginn der Kontrollkarte erhöhte Werte zu erkennen. Diese stammen daher, dass vor allem für größere Abstände a die Abweichungen der Testsignale zum ersten Referenzsignal größer sind als zu dem aktualisierten Referenzsignal (für Strategie 3, 4 und 5). Außerdem erfordert die EWMA-Glättung eine gewisse Einlaufzeit, da erst für große k ein Schätzer mit geringer Varianz erzeugt wird.

Mit Hilfe der ersten beiden Strategien (Abbildungen 5.3 und 5.4) können alle Veränderungen recht gut wiedergegeben werden, auch unabhängig davon, an welcher Stelle im Verlauf des Prozesses sie stattfinden. Diese Strategien haben jedoch den Nachteil, dass nicht immer ein Referenzsignal zur Verfügung steht. Außerdem zeigen sie auch die kleinsten Veränderungen gegenüber dem Referenzsignal, wenn sich der Prozess unter Kontrolle leicht verändert. Damit kommt es zu Fehlalarmen, wenn von einer festen Kontrollgrenze ausgegangen wird.

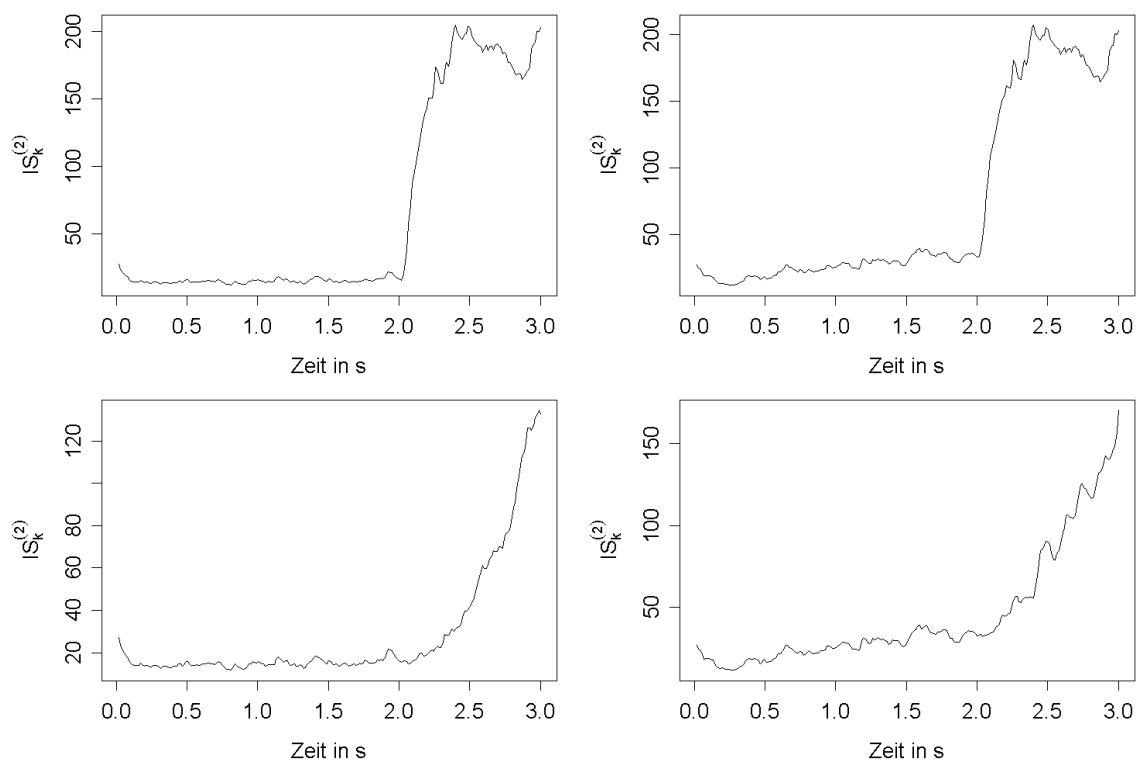


Abbildung 5.4: Kontrollstatistik von Strategie 2 für die simulierten Signale (von links nach rechts und oben nach unten: 1., 2., 3. und 4. Signal); Parametereinstellung: $N = 256$, $\varepsilon = 128$, $r = r_{(1)}$, $\lambda = 0.1$ ($\nu = 0$, $a = 0$, $d = 0$)

Mit der dritten Strategie (Abbildung 5.5) können abrupte Veränderungen erkannt werden. Um graduelle Veränderungen und Trends zu erkennen, muss je nach Steigung ein größerer Abstand der Fenster gewählt werden. Die Unterscheidung von Nichtstationaritäten im ruhigen Prozess von den Veränderungen, die Rattern darstellen, fällt allerdings schwer.

Mit den Strategien 4 und 5 (Abbildungen 5.6 und 5.7) werden beide Veränderungen deutlich sichtbar, und gegenüber kleinen Veränderungen im Signal sind diese Strategien robust. Bei der vierten Strategie wird es jedoch schwieriger, die starke graduelle Veränderung von der leichten zu unterscheiden.

Die zweite und fünfte Strategie wirken jeweils wie geglättete Versionen der Strategien 1 und 4. Im Unterschied zu einer Glättung der Kontrollstatistiken der Strategien 1 und 4, werden in Strategien 2 und 5 zunächst die Periodogramme über die Zeit geglättet und dann die Abstände gemessen. Ein Vergleich von zwei verschiedenen multivariaten EWMA-Strategien für Mittelwert und Autokovarianz einer Zeitreihe findet in Rosolowski und Schmid (2003) statt.

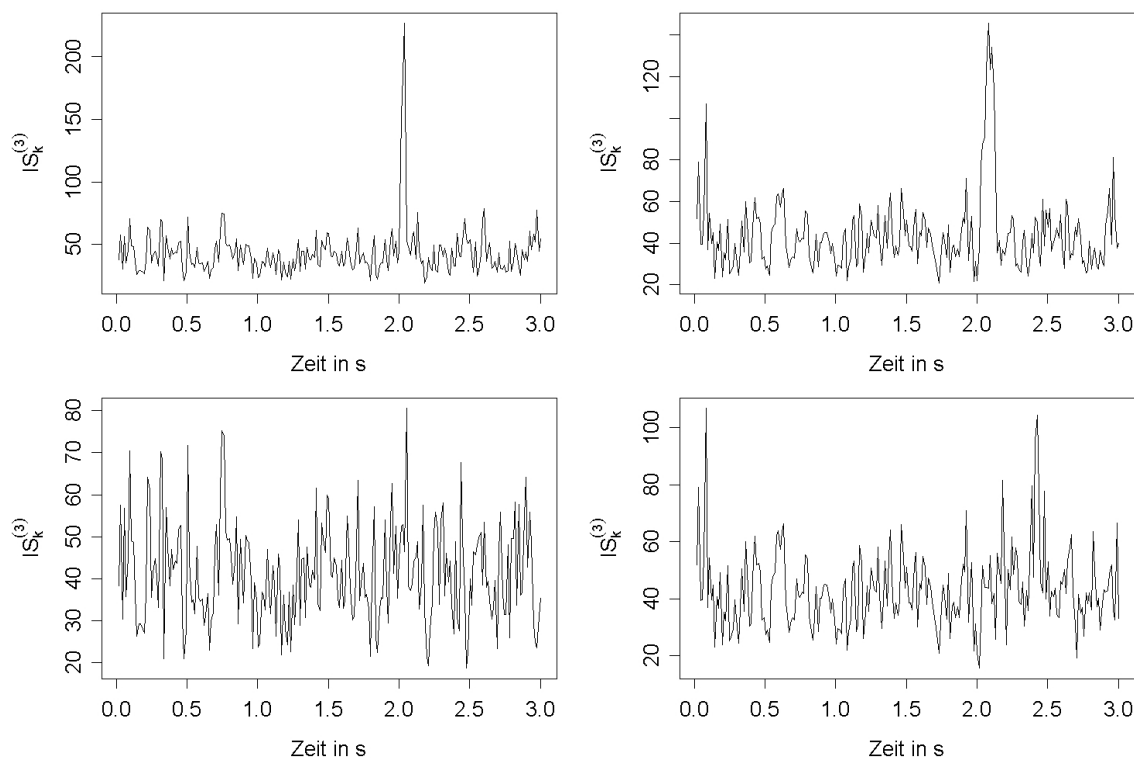


Abbildung 5.5: Kontrollstatistik von Strategie 3 für die simulierten Signale (von links nach rechts und oben nach unten: 1., 2., 3. und 4. Signal); Parametereinstellung: $N = 256$, $\varepsilon = 128$, $r = r_{(1)}$, $d = 4$, $a = 5$ für 1. und 2. Signal und $a = 10$ für 3. und 4. Signal ($\nu = 1$, $\lambda = 1$)

Dabei wird diejenige Variante als sensibler beschrieben, die erst glättet und dann die Werte in einer Kontrollstatistik zusammenfasst, gegenüber der Version, die zunächst die Abstände misst und dann diese Statistik über die Zeit glättet. Hier hat die Version, die erst glättet, den Vorteil, dass durch die Glättung der Periodogrammwerte über die Zeit verlässlichere Schätzer der Spektraldichte berechnet werden. Dadurch können sich Schwankungen, die nur über die Schätzung hervorgerufen werden, nicht so stark in größeren Abständen zwischen den Spektraldichteschätzern äußern. Wenn allerdings alle Frequenzen einen gleichmäßigen Leistungszuwachs erfahren, werden sich die Versionen kaum unterscheiden. Während sich Strategien 2 und 5 wegen der Glättung eher für die Erkennung von Trends eignen, sind Strategien 1 und 4 besser für die Erkennung abrupter oder schneller Veränderungen geeignet, da eine Glättung den Anstieg der Kontrollstatistik verringert.

Die fünfte Strategie, welche die allgemeinste und damit flexibelste Methode bildet, ist für die Erkennung des Ratterns im laufenden Bohrprozess am besten geeignet, weil sie die Fähigkeit

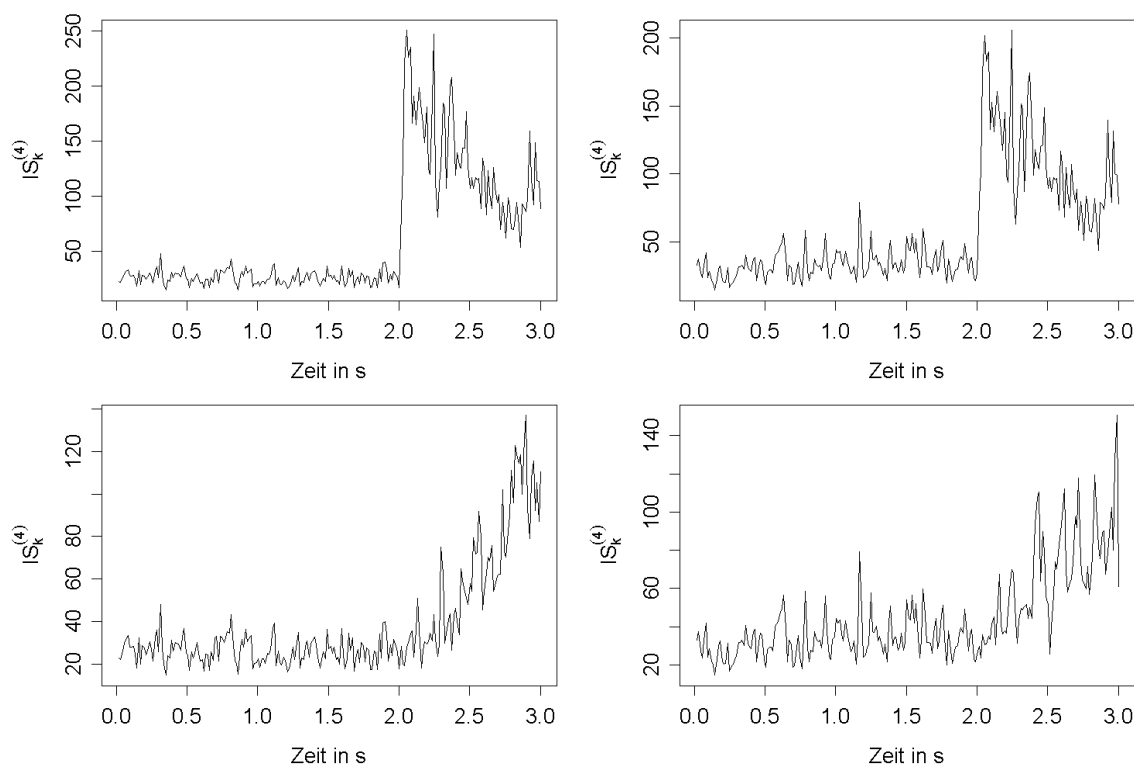


Abbildung 5.6: Kontrollstatistik von Strategie 4 für die simulierten Signale (von links nach rechts und oben nach unten: 1., 2., 3. und 4. Signal); Parametereinstellung: $N = 256$, $\varepsilon = 128$, $r = r_{(1)}$, $d = 4$, $\nu = 0.003$, $a = 3$ ($\lambda = 1$)

graduelle Prozessveränderungen zu erkennen mit der Eigenschaft kombiniert, bis zu einem gewissen Grad Nichtstationaritäten wegzuglätten.

5.2.4 Anwendung auf die Bohrdaten

Im Folgenden werden die in Abschnitt 5.2.2 entwickelten Kontrollkarten bei einigen der Versuchsreihen des Einlippen-Tiefbohrers angewendet. Es ist zu untersuchen, ob mit den Verfahren im laufenden Bohrprozess bzw. beim Anbohren eventuell auftretende Ratterschwingungen erkannt werden können.

Rattererkennung bei statischem Bohren

Für die Anwendung von Strategie 5 wird ein verlässliches Referenzsignal zur Bestimmung der Anfangswerte benötigt. Selbst bei sehr stabilen Bohrprozessen wird durch das Anbohren eine

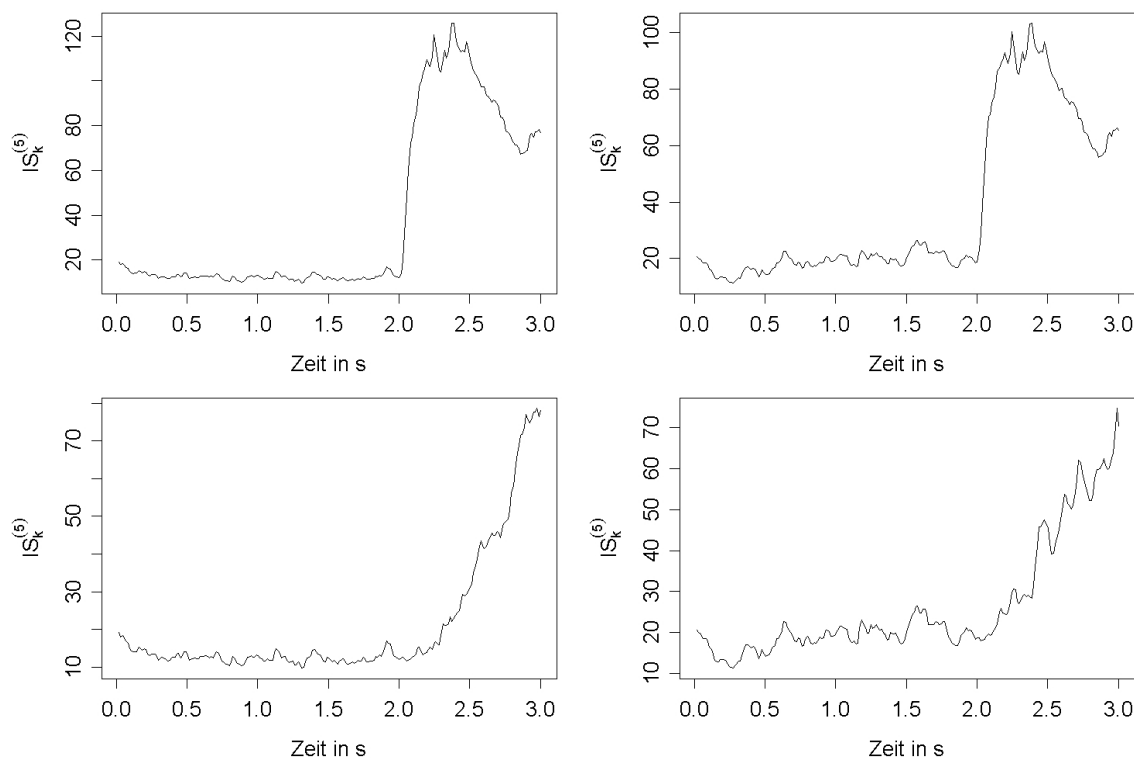


Abbildung 5.7: Kontrollstatistik von Strategie 5 für die simulierten Signale (von links nach rechts und oben nach unten: 1., 2., 3. und 4. Signal); Parametereinstellung: $N = 256$, $\varepsilon = 128$, $r = r_{(1)}$, $\lambda = 0.1$, $\nu = 0.003$, $a = 3$ ($d = 0$)

Veränderung im Körperschallsignal hervorgerufen. Deswegen starten die Kontrollkarten erst eine Weile nach dem Anbohrbeginn und die Anfangsphase wird als Referenzsignal verwendet. Leider sind für die vorliegenden Daten keine klaren Anfänge des Ratterns definiert, die eine Validierung der angewendeten Methoden erlauben. Für zukünftige Untersuchungen wäre eine retrospektive Identifizierung relevanter Rattervibrationen wünschenswert, die z. B. durch Rattermarken in der Oberfläche eines Bohrlochs umgesetzt werden kann. Weil Kenntnisse über den genauen Zeitpunkt des Ratterbeginns fehlen und eine empirische Festlegung der Kontrollgrenze und der weiteren Parameter deswegen nicht wie in 4.5 möglich ist, werden sie im Folgenden heuristisch bestimmt.

Die Wahl der Grenze h und weiterer Kontrollkartenparameter basiert auf der Untersuchung der beim statischen Bohren ruhigen Prozesse 1, 3, 4, 7, 8, 10 bis 16, 21 bis 26 und 32 bis 34. Die Parameter der Kontrollkarte werden mit $N = 256$, $\varepsilon = 128$, $r = r_{(1)}$, $a = 3$ festgelegt. Außerdem wurde der Parameter $\nu = 0.0005$ so gewählt, dass in allen ruhigen Fällen die

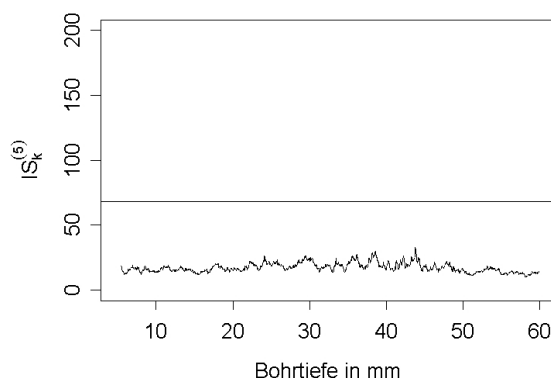


Abbildung 5.8: Kontrollkarte (Strategie 5) zur Erkennung des Ratterns für den ruhigen Bohrprozess 2

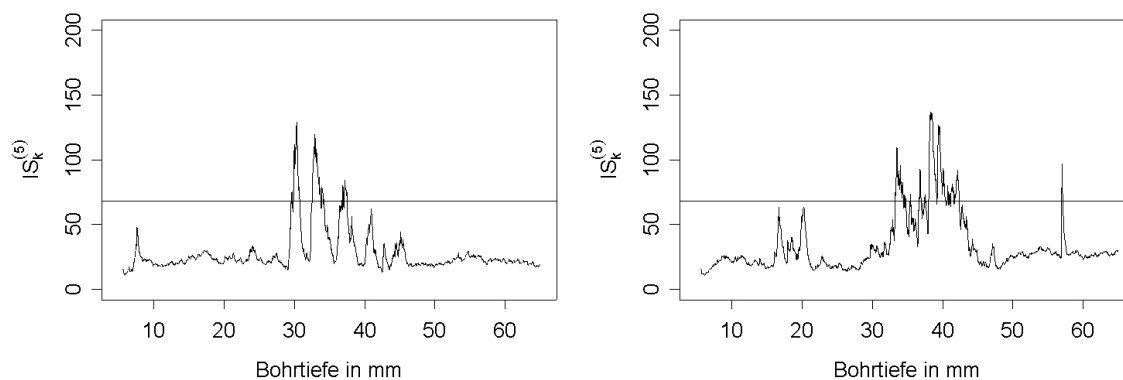


Abbildung 5.9: Kontrollkarte (Strategie 5) zur Erkennung des Ratterns für die Bohrprozesse 5 (ruhig) und 6 (leichtes Rattern in der zweiten Hälfte)

Statistik langfristig auf gleichem Niveau bleibt und $\lambda = 0.05$, so dass eine gewisse Sensibilität der Kontrollstatistik erreicht wird. Die Kontrollgrenze wird mit $h = 68$ so gewählt, dass nur extreme Ausschläge in der Kontrollkarte diesen Wert an Zeitpunkten überschreiten, an denen auch in den Spektrogrammen „Unruhe“ visuell erkannt wird.

Die Abbildungen 5.8, 5.9 und 5.10 zeigen, wie nun die verbliebenen Bohrprozesse 2, 5, 6, 9 und 29 von der Kontrollkarte bewertet werden. Die Karte reagiert sehr sensibel auf „unruhige“ Phasen, indem die Ausschläge der Kontrollstatistik bei Rattern hoch sind. Mit der vorgegebenen Kontrollgrenze werden die Ratterphasen erkannt (rechte Graphik in Abbildung 5.9 und beide Graphiken in Abbildung 5.10), aber auch ein „falscher Alarm“ bei Prozess 5 hervorgerufen (linke Graphik in Abbildung 5.9). Weitere Untersuchungen sind nötig, um zu klären, ob diese Unterschiede zwischen der erkannten Unruhe und dem erkannten Rattern

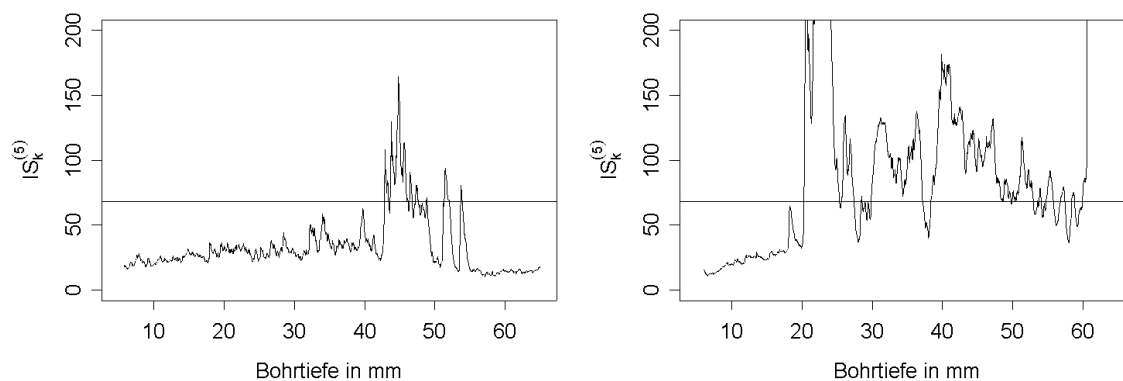


Abbildung 5.10: Kontrollkarte (Strategie 5) zur Erkennung des Ratterns für die Bohrprozesse 9 (leichtes Rattern in der zweiten Hälfte) und 29 (deutliches Rattern kurz nach Prozessbeginn)

existent sind oder ob die Vorklassifikation ungenau war. Denn auch die Untersuchungen in Kapitel 3 weisen darauf hin, dass hier von den Experten das Rattern überhört wurde.

Rattererkennung beim Anbohren

Um beim Anbohren die meist kurzen, abrupten Veränderungen zu erkennen und dabei die starken Veränderungen bei Rattern von der normalen Unruhe beim Anbohren zu unterscheiden, wird Strategie 1 aus Abschnitt 5.2.2 gewählt. Diese Kontrollkarte, auf den Beginn des Signals angewendet, kann zusätzlich zu der Rattererkennung beim Anbohren dazu dienen, den Beginn des statischen, durch das Anbohren ungestörten Bohrens zu erkennen. In der vorliegenden Situation kann der Leerlauf in der Initialisierungsphase eines Bohrprozesses als ideal ruhiger Prozess betrachtet werden und so als Referenzsignal dienen.

Abbildungen 5.11 und 5.13 zeigen, dass die Kontrollkarten im Allgemeinen die Unterschiede zwischen ruhigem Anbohren und Anbohren mit Rattern sehr deutlich darstellen. Bei den ruhig beginnenden Prozessen erreichen die Werte von $IS_k^{(1)}$ maximal Werte bis 1500, während die Kontrollstatistik bei Rattern meistens wesentlich höhere Werte annimmt. Allerdings ist auch hier keine eindeutige Trennung zu erreichen, wie Abbildung 5.12 zeigt. Hier ist der maximale Wert der Kontrollstatistik bei der als ruhig deklarierten Anbohrphase größer als bei der als ratternd eingestuft. Eine eingehendere Untersuchung würde sich lohnen, ob ein Rattern beim Anbohren überhört wurde. Für Prozess 30 in Abbildung 5.13 wird beim Vergleich mit den anderen Bohrprozessen deutlich, dass das Rattern nach der Anbohrphase

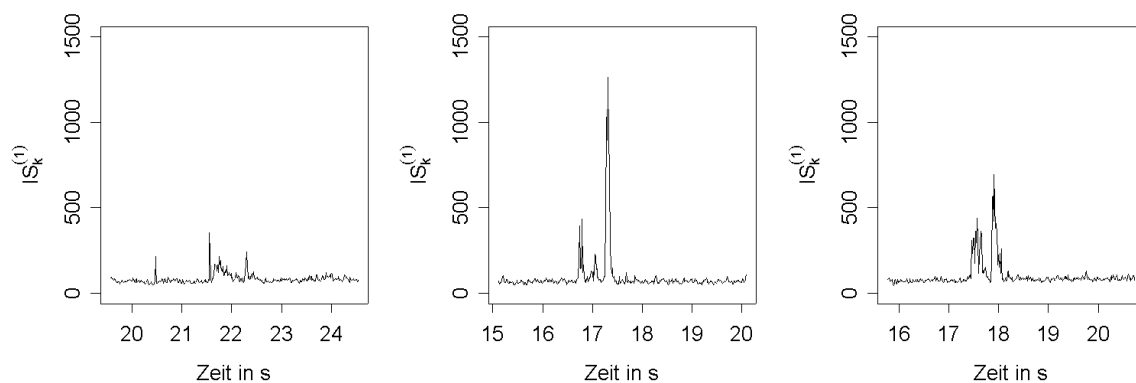


Abbildung 5.11: Kontrollkarte (Strategie 1) zur Erkennung des Ratterns beim Anbohren; am Beispiel der beim Anbohren ruhigen Bohrprozesse 2, 5 und 6

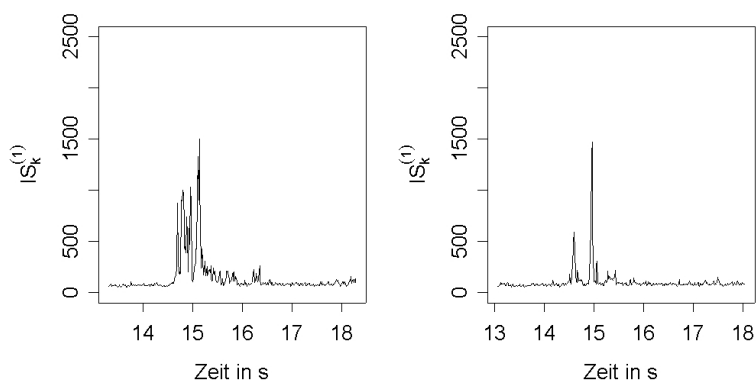


Abbildung 5.12: Kontrollkarte (Strategie 1) zur Erkennung des Ratterns beim Anbohren von Bohrprozess 9 (kein Rattern beim Anbohren) und 15 (kurzes Rattern beim Anbohren)

erhalten bleibt, also die großen Unterschieden zur idealen ruhigen Reihe des Leerlaufs nicht wesentlich geringer werden.

Es wird deutlich, dass es weitgehend möglich ist, mit den entwickelten Verfahren Rattern zu erkennen. In der Praxis kann eine Kombination aus den Strategien 1 und 5 angewendet werden, so dass zunächst mit Strategie 1 das Anbohrverhalten überwacht wird. Sobald eine Grenze dauerhaft unterschritten wird, kann der Bohrprozess als ruhig gewertet werden und Strategie 5 zur Überwachung des statischen Bohrens initiiert werden.

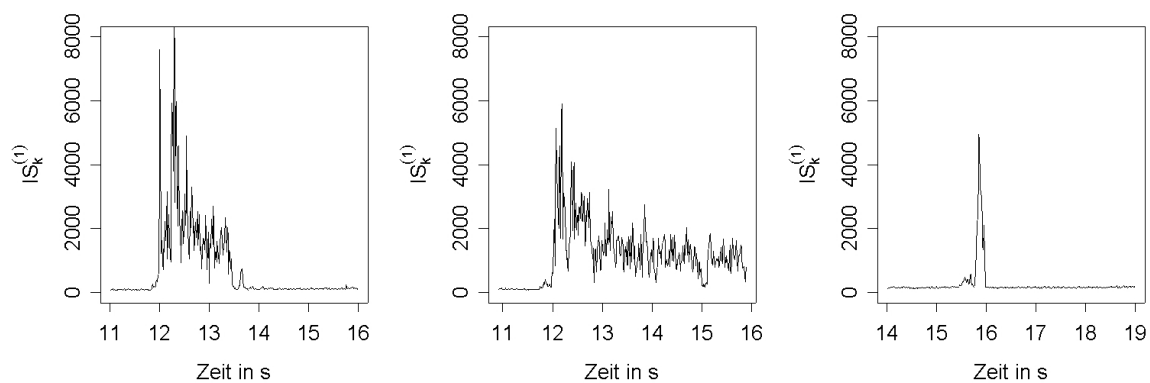


Abbildung 5.13: Kontrollkarte (Strategie 1) zur Erkennung des Ratterns beim Anbohren; am Beispiel der Bohrprozesse 29 (deutliches Rattern beim Anbohren), 30 (deutliches Rattern beim Anbohren) und 31 (kurzes Rattern beim Anbohren)

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Möglichkeiten zur Rattererkennung beim Einlippen-Tiefbohren untersucht. Aufgrund von Untersuchungen in [Weinert u. a. \(2001\)](#) lag der Fokus auf der Analyse des Körperschallsignals, das bei Rattern deutliche Veränderungen erfährt. So wurden die Struktur des Körperschallsignals und dessen Veränderung über die Zeit, sowohl in Gegenwart von Rattern als auch im ruhigen Bohrprozess untersucht. Schließlich konnte eine Kontrollkarte speziell für die Erkennung von den durch Rattern ausgelösten spektralen Veränderungen in der Zeitreihe des Körperschallsignals entwickelt werden.

Es wurde festgestellt, dass sich das Rattern als Veränderung in den zweiten Momenten der Zeitreihen von Körperschallsignalen widerspiegelt. Es äußert sich jedoch nicht, wie zu vermuten wäre, als eine Amplitudenvergrößerung einzelner harmonischer Schwingungen im Signal. Stattdessen sind mehrere Frequenzbänder bezüglich ihrer Amplitude und ihrer Lage von Veränderungen betroffen. Möglichkeiten, die Entwicklung der Varianz und der Korrelationsstruktur eines stochastischen Prozesses über die Zeit zu verfolgen, bieten sich mit der fensterweisen oder adaptiven Schätzung der Spektraldichte, der spektralen Verteilungsfunktion, der Autokovarianzfunktion oder der Parameter von ARMA-Modellen. Bei Rattern verändern sich diese Größen je nach Stärke der Störung graduell oder abrupt, aber auch im ruhigen Bohrprozess sind Veränderungen der entsprechenden Schätzwerte zu erkennen. Auf diesen Charakteristika basieren diverse in dieser Arbeit dargestellte Verfahren zur Erkennung spektraler Veränderungen in Zeitreihen.

Ein Großteil der Methoden zur Kontrolle des Spektralverhaltens setzt voraus, dass die Veränderungen sprunghaft und groß im Vergleich zum sonstigen Rauschen sind. Andere Verfahren,

die geeignet sind, kleinere oder graduelle Veränderungen zu erkennen, reagieren häufig sehr empfindlich auf kleine, irrelevante Schwankungen in den Charakteristika. Für die Überwachung des Körperschallsignals sind daher viele dieser Verfahren nicht empfehlenswert.

Einige der in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren können modifiziert werden. Die ansonsten in einem Prozess unter Kontrolle geschätzten Referenzparameter müssen dann so geändert werden, dass sie sich an die Zeitreihenentwicklung anpassen. Allerdings erweist sich die gesteigerte Rechenzeit dabei als problematisch. Eine Anwendung der adaptiven Bandleistung auf die Bohrdaten macht es möglich, Veränderungen im Körperschallsignal, die auf einen Frequenzbereich festgelegt sind, darzustellen. Allerdings ist eine adaptive Grenze für den Fall von graduellen Veränderungen zu entwickeln.

Der Fokus dieser Arbeit lag auf der Untersuchung der Spektraldichte und deren Schätzern. Das Periodogramm und Abwandlungen davon sind einfach zu interpretieren und erhalten die gesamte Information über die Autokovarianzstruktur der Zeitreihe. Bei Betrachtung des Periodogramms in Blöcken über die Zeit wird eine hochdimensionale Zeitreihe erzeugt. Es konnte gezeigt werden, dass es bei Verwendung des SLEX-Periodogramms (Ombao u. a., 2001) möglich ist, in sich überschneidenden Blöcken sowohl in Zeit- als auch in Frequenzrichtung mit wachsender Blockgröße asymptotisch unkorrelierte Werte zu erhalten. In einer umfangreichen Untersuchung stellte sich die Itakura-Saito-Abweichung als ein in diesem Zusammenhang besonders geeignetes spektrales Abweichungsmaß heraus, das genutzt werden sollte, um die spektralen Veränderungen über die Zeit zu quantifizieren. Im empirischen Vergleich mit Maßen wie der Kolmogorov-Metrik bezüglich der spektralen Verteilungsfunktion und insbesondere mit einer simplen Varianzdifferenz stellte sich die Itakura-Saito-Abweichung als ein wesentlich sensibleres Maß in Bezug auf die vorliegenden Daten heraus. Auf der Basis von SLEX-Periodogrammen und der Itakura-Saito-Abweichung wurde ein Konzept für eine Kontrollkarte erstellt, das sich auf Vorbilder von klassischen multivariaten Kontrollkarten stützt. Mit dem entwickelten Verfahren können graduelle Prozessveränderungen erkannt werden, wobei gleichzeitig bis zu einem gewissen Grad Nichtstationaritäten, die auch in ruhigen Prozessen vorkommen können, weggeglättet werden.

Es zeigte sich in den untersuchten Beispielen und Simulationen, dass die hier entwickelten Kontrollkarten geeignet sind, Rattern beim Anbohren und im laufenden Bohrprozess zu erkennen. Dazu wurden zunächst eine heuristische Wahl der Kontrollkartenparameter auf der

Basis von Lerndaten vorgenommen. Da Prozessausschnitte, in denen eine gewisse „Unruhe“ zu erkennen ist, teilweise nicht von Rattern zu unterscheiden sind, können Fehlalarme oder ein Übersehen von leichtem Rattern nicht ausgeschlossen werden. Eine Validierung der entwickelten Verfahren war aufgrund fehlender Daten in dieser Arbeit nicht möglich.

In zukünftigen Untersuchungen kann, mit Hilfe weiterer Messreihen mit genauer Information über den Beginn des Ratterns, durch eine geschickte Wahl der Kontrollgrenze und der weiteren Parameter der Kontrollkarte ein akzeptabler Kompromiss zwischen der Fehlalarmrate und der mittleren Laufzeit bis zur Erkennung der Veränderung gefunden werden (siehe Abschnitt 4.5). In weiterer Zukunft ist das Ziel, eine automatische Regelung zu konstruieren, die auf den vorgestellten Kontrollstatistiken basiert. Dazu muss festgestellt werden, aus welchen sinnvollen Gegenmaßnahmen ein Eingriff bei einem Ratteralarm besteht.

In dieser Arbeit wurden außer dem Körperschallsignal keine weiteren der aufgezeichneten Messungen (siehe Abbildung 3.1) verwendet. Die statistische Online-Erkennung der Bohrabchnitte – Leerlauf, Anbohren, statisches Bohren, Ausbohren – kann auf Basis des Bohrmoments durchgeführt werden. Dieses Signal ist insbesondere interessant, um bei Bohrungen, die zuvor angefertigte Bohrlöcher kreuzen, Aus- und Anbohren zu identifizieren. Verfahren, die eine Trenderkennung erlauben, werden z. B. von [Fried und Imhoff \(2004\)](#) vorgestellt. Außerdem ist eine Erkennung von Spänestau nötig, die mit der Betrachtung des Signals der Prallplattenschwingung vorgenommen werden kann. Einen ersten Ansatz liefern dazu [Weinert u. a. \(2002\)](#). Zunächst müssen die hohen Amplitudenausbrüche in dieser Zeitreihe erkannt werden, die einen Spantreffer auf der Platte darstellen. Schließlich kann ein Ausbleiben eines Spantreffers über eine gewisse Zeit als Anlass genommen werden, einen Spänestau zu vermuten.

Anhang A

Beweise

Beweis von Satz 2.1

Um Satz 2.1 zu beweisen, benötigen wir zunächst einige Definitionen und Voruntersuchungen.

Bezeichne im Folgenden $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$ das Skalarprodukt der Vektoren $a = (a_1, \dots, a_n)'$ und $b = (b_1, \dots, b_n)'$. Die Adjungierte U^* eines Operators U ist durch $\langle a, Ub \rangle = \langle U^*a, b \rangle$ definiert.

Definition A.1 (*Wickerhauser, 1993*)

Sei r eine Abschneidefunktion, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}$ Konstanten und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Ein Faltungsoperator ist gegeben durch

$$U(r, \alpha, \epsilon)f(t) = \begin{cases} r(\frac{t-\alpha}{\epsilon})f(t) + r(\frac{\alpha-t}{\epsilon})f(2\alpha - t), & \text{falls } \alpha \leq t < \alpha + \epsilon \\ r^*(\frac{\alpha-t}{\epsilon})f(t) - r^*(\frac{t-\alpha}{\epsilon})f(2\alpha - t), & \text{falls } \alpha - \epsilon \leq t < \alpha \\ f(t), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser besitzt den Aktionsbereich $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$. Die Adjungierte von U ist dann

$$U^*(r, \alpha, \epsilon)f(t) = \begin{cases} r^*(\frac{t-\alpha}{\epsilon})f(t) - r(\frac{\alpha-t}{\epsilon})f(2\alpha - t), & \text{falls } \alpha \leq t < \alpha + \epsilon \\ r(\frac{\alpha-t}{\epsilon})f(t) + r^*(\frac{t-\alpha}{\epsilon})f(2\alpha - t), & \text{falls } \alpha - \epsilon \leq t < \alpha \\ f(t), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem definieren wir den Restriktionsoperator \mathbb{I}_S durch

$$\mathbb{I}_S f(t) = \begin{cases} f(t), & \text{falls } t \in S \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei S eine Teilmenge aus \mathbb{N} ist.

Der so genannte periodisierte Faltungsoperator ist für $\alpha_0 < \alpha_1$ definiert als

$$W(r, \alpha_0, \alpha_1, \epsilon) f(t) = \begin{cases} r\left(\frac{t-\alpha_0}{\epsilon}\right)f(t) + r\left(\frac{\alpha_0-t}{\epsilon}\right)f(\alpha_0 + \alpha_1 - t), & \text{falls } \alpha_0 \leq t < \alpha_0 + \epsilon \\ r^*\left(\frac{\alpha_1-t}{\epsilon}\right)f(t) - r^*\left(\frac{t-\alpha_1}{\epsilon}\right)f(\alpha_0 + \alpha_1 - t), & \text{falls } \alpha_1 - \epsilon \leq t < \alpha_1 \\ f(t), & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit der Adjungierten

$$W^*(r, \alpha_0, \alpha_1, \epsilon) f(t) = \begin{cases} r^*\left(\frac{t-\alpha_0}{\epsilon}\right)f(t) - r\left(\frac{\alpha_0-t}{\epsilon}\right)f(\alpha_0 + \alpha_1 - t), & \text{falls } \alpha_0 \leq t < \alpha_0 + \epsilon \\ r\left(\frac{\alpha_1-t}{\epsilon}\right)f(t) + r^*\left(\frac{t-\alpha_1}{\epsilon}\right)f(\alpha_0 + \alpha_1 - t), & \text{falls } \alpha_1 - \epsilon \leq t < \alpha_1 \\ f(t), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $UU^* = U^*U = Id$ und $WW^* = W^*W = Id$, wobei $Id f(t) = f(t)$.

[Wickerhauser \(1993\)](#) zeigt, dass für eine m -periodische Funktion $f(t)$, die sich auf jedem der Segmente $\{1, 2, \dots, m\}$, $\{m+1, m+2, \dots, 2m\}$, etc. wiederholt, gilt

$$\mathbb{I}_{\{1, \dots, m\}} U(r, \alpha_0, \epsilon) U(r, \alpha_1, \epsilon) f(t) = W(r, \alpha_0, \alpha_1, \epsilon) \mathbb{I}_{\{1, \dots, m\}} f(t).$$

Satz A.1 *Es seien die Voraussetzungen von Definition 2.13 erfüllt. Seien zudem die Faltungsoperatoren $V_k = U(r_k, \alpha_k, \epsilon_k)$, $U_{0,k} = U(q_k, \alpha_k, \epsilon_k)$ und $U_{1,k} = U(q_k, \alpha_{k+1}, \epsilon_k)$ gemäß Definition A.1 gegeben, wobei $U_{0,1} := U_{0,K} := V_0 := V_{K+1} := Id$ die Identität darstellen. Seien $\epsilon_k + \epsilon_{k+1} \leq N_k$ und $2\epsilon_k \leq N_k$, so dass die Aktionsbereiche $\{\alpha_k - \epsilon_k, \alpha_k - \epsilon_k + 1, \dots, \alpha_k + \epsilon_k - 1\}$ der Operatoren V_k für verschiedene k disjunkt sind.*

Definiere $Q_k := V_k^* V_{k+1}^* \mathbb{I}_{S_k} U_{1,k} U_{0,k}$, so dass $Q_k^* = U_{1,k}^* U_{0,k}^* \mathbb{I}_{S_k} V_{k+1} V_k$.

Die Familie der Vektoren

$$\left\{ \left(Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} 1}, \dots, Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} n} \right), j \in \left\{ -\frac{N_k}{2} + 1, \dots, \frac{N_k}{2} \right\}, k \in \{1, \dots, K\} \right\}$$

bildet eine Orthonormalbasis in \mathbb{C}^n .

Beweis

1. Orthogonalität der Vektoren für benachbarte Segmente:

Der Operator V_k^\star ist mit V_{k+1} , V_{k+2} und $\mathbb{I}_{S_{k+1}}$ vertauschbar, weil sie disjunkte Aktionsbereiche haben. Gleiches gilt für V_{k+2} mit V_{k+1} , V_{k+1}^\star und \mathbb{I}_{S_k} . Es gilt für alle Faltungsoperatoren U , dass $UU^\star = U^\star U = Id$. Und es gilt, dass $\mathbb{I}_S \mathbb{I}_T = 0$, wenn S und T disjunkt sind. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1}^\star Q_k &= U_{1,k+1}^\star U_{0,k+1}^\star \mathbb{I}_{S_{k+1}} V_{k+2} V_{k+1} V_k^\star V_{k+1}^\star \mathbb{I}_{S_k} U_{1,k} U_{0,k} \\
 &= U_{1,k+1}^\star U_{0,k+1}^\star V_k^\star \mathbb{I}_{S_{k+1}} V_{k+2} V_{k+1} V_{k+1}^\star \mathbb{I}_{S_k} U_{1,k} U_{0,k} \\
 &= U_{1,k+1}^\star U_{0,k+1}^\star V_k^\star \mathbb{I}_{S_{k+1}} V_{k+1} V_{k+1}^\star \mathbb{I}_{S_k} V_{k+2} U_{1,k} U_{0,k} \\
 &= U_{1,k+1}^\star U_{0,k+1}^\star V_k^\star \mathbb{I}_{S_{k+1}} \mathbb{I}_{S_k} V_{k+2} U_{1,k} U_{0,k} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $t \in \{1, \dots, n\}$ und für beliebige $j, \hat{j} \in \{-\frac{N_k}{2} + 1, \dots, \frac{N_k}{2}\}$, dass

$$\left\langle Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} t}, Q_{k+1} \frac{1}{\sqrt{N_{k+1}}} e^{i\frac{2\pi \hat{j}}{N_{k+1}} t} \right\rangle = \left\langle Q_{k+1}^\star Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} t}, \frac{1}{\sqrt{N_{k+1}}} e^{i\frac{2\pi \hat{j}}{N_{k+1}} t} \right\rangle = 0.$$

2. Orthogonalität der Vektoren für nicht aneinander grenzende Segmente:

Für $h > k + 1$ sind die Aktionsbereiche aller Operatoren, aus denen sich Q_k zusammensetzt, disjunkt mit den Aktionsbereichen der Operatoren aus Q_h^\star . Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
 Q_h^\star Q_k &= U_{1,h}^\star U_{0,h}^\star \mathbb{I}_{S_h} V_{h+1} V_h V_k^\star V_{k+1}^\star \mathbb{I}_{S_k} U_{1,k} U_{0,k} \\
 &= U_{1,h}^\star U_{0,h}^\star V_k^\star V_{k+1}^\star \mathbb{I}_{S_h} \mathbb{I}_{S_k} V_{h+1} V_h U_{1,k} U_{0,k} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

und für alle $t \in \{1, \dots, n\}$ und für beliebige $j, \hat{j} \in \{-\frac{N_k}{2} + 1, \dots, \frac{N_k}{2}\}$, dass

$$\left\langle Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} t}, Q_h \frac{1}{\sqrt{N_h}} e^{i\frac{2\pi \hat{j}}{N_h} t} \right\rangle = \left\langle Q_h^\star Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} t}, \frac{1}{\sqrt{N_h}} e^{i\frac{2\pi \hat{j}}{N_h} t} \right\rangle = 0.$$

3. Orthonormalität der Vektoren in gleichen Segmenten:

Es gilt $\mathbb{I}_{S_k} U_{1,k} U_{0,k} \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} t} = W_k \mathbb{I}_{S_k} \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i\frac{2\pi j}{N_k} t}$ für alle $t \in \{1, \dots, n\}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
 & \left\langle Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i \frac{2\pi j}{N_k} t}, Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i \frac{2\pi \hat{j}}{N_k} t} \right\rangle \\
 &= \left\langle V_k^* V_{k+1}^* W_k \mathbb{I}_{S_k} \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i \frac{2\pi j}{N_k} t}, V_k^* V_{k+1}^* W_k \mathbb{I}_{S_k} \frac{1}{\sqrt{N_{k+1}}} e^{i \frac{2\pi \hat{j}}{N_{k+1}} t} \right\rangle \\
 &= \left\langle W_k^* V_{k+1} V_k V_k^* V_{k+1}^* W_k \mathbb{I}_{S_k} \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i \frac{2\pi j}{N_k} t}, \mathbb{I}_{S_k} \frac{1}{\sqrt{N_{k+1}}} e^{i \frac{2\pi \hat{j}}{N_{k+1}} t} \right\rangle \\
 &= \left\langle \mathbb{I}_{S_k} \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i \frac{2\pi j}{N_k} t}, \mathbb{I}_{S_k} \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i \frac{2\pi \hat{j}}{N_k} t} \right\rangle \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq \hat{j} \\ 1, & \text{falls } j = \hat{j} \end{cases}
 \end{aligned}$$

für alle $t \in \{1, \dots, n\}$. □

Jetzt sind alle Voraussetzungen vorhanden, um Satz 2.1 zu beweisen.

Beweis von Satz 2.1

Nach längerer Rechnung ergibt sich für eine beliebige Funktion f :

$$\begin{aligned}
 Q_k f(t) &= r_k^* \left(\frac{t - \alpha_k}{\epsilon_k} \right) r_{k+1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\epsilon_{k+1}} \right) \\
 &\quad \cdot \left[q_k \left(\frac{\alpha_k - t}{\epsilon_k} \right) f(2\alpha_k - t) + q_k \left(\frac{t - \alpha_k}{\epsilon_k} \right) q_k^* \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\epsilon_k} \right) f(t) \right. \\
 &\quad \left. - q_k^* \left(\frac{t - \alpha_{k+1}}{\epsilon_k} \right) f(2\alpha_{k+1} - t) \right].
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 & Q_k \frac{1}{\sqrt{N_k}} e^{i \frac{2\pi j}{N_k} t} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N_k}} r_k^* \left(\frac{t - \alpha_k}{\epsilon_k} \right) r_{k+1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\epsilon_{k+1}} \right) q_k \left(\frac{t - \alpha_k}{\epsilon_k} \right) q_k^* \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\epsilon_k} \right) e^{i \frac{2\pi j}{N_k} t} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{N_k}} \left[r_k^* \left(\frac{t - \alpha_k}{\epsilon_k} \right) q_k \left(\frac{\alpha_k - t}{\epsilon_k} \right) e^{i \frac{2\pi j}{N_k} 2\alpha_k} \right. \\
 &\quad \left. - r_{k+1} \left(\frac{\alpha_{k+1} - t}{\epsilon_{k+1}} \right) q_k^* \left(\frac{t - \alpha_{k+1}}{\epsilon_k} \right) e^{i \frac{2\pi j}{N_k} 2\alpha_{k+1}} \right] e^{-i \frac{2\pi j}{N_k} t} \\
 &= \phi_{j,k}(t),
 \end{aligned}$$

laut Definition 2.13. Unter Anwendung von Satz A.1 ist somit gezeigt, dass

$$\left\{ \phi_{j,k} = (\phi_{j,k,1}, \dots, \phi_{j,k,n})', j \in \left\{ -\frac{N_k}{2} + 1, \dots, \frac{N_k}{2} \right\}, k \in \{1, \dots, K\} \right\}$$

eine Orthonormalbasis in \mathbb{C}^n bildet. □

Beweis von Satz 2.2

Beweis

Zur Vereinfachung der Rechnung wird die Schreibweise der SLEX-Periodogramme umformuliert, so dass sie gegeben sind durch

$$I(\omega, k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{p=-m+1}^m X_{p+N_k+m} \varphi_{\omega}^*(p) \right|^2,$$

mit

$$\varphi_{\omega}(p) = \vartheta^+(p)e^{ip\omega} + \vartheta^-(p)e^{-ip\omega}$$

und $\vartheta^+(p)$ und $\vartheta^-(p)$ die entsprechenden reellen Fensterfunktionen mit Zentrum bei 0 und Träger $p \in \{-m+1, \dots, m\}$.

Wir beschränken uns auf den Beweis von $\text{Cov}(I(\omega_j, k), I(\omega_j, h)) = O(\frac{1}{N^2})$ für alle k mit $h = k + 1$ und alle j . Der Beweis kann leicht auf den Fall mit $h > k + 1$ erweitert werden.

Mit $E(X_1 X_2 X_3 X_4) = E(X_1 X_2)E(X_3 X_4) + E(X_1 X_3)E(X_2 X_4) + E(X_1 X_4)E(X_2 X_3)$ (siehe [Brillinger, 1981](#), S. 21) erhält man

$$E(I(\omega, k)I(\omega, k+1)) = \left(\frac{1}{N} \sum_{p=-m+1}^m \sum_{q=-m+1}^m \varphi_{\omega}^*(p)\varphi_{\omega}(q) \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)e^{i\lambda(p-q)} d\lambda \right)^2 \quad (\text{A.1})$$

$$+ \left| \frac{1}{N} \sum_{p=-m+1}^m \sum_{q=-m+1}^m \varphi_{\omega}(p)\varphi_{\omega}(q) \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)e^{i\lambda(p-q+N)} d\lambda \right|^2 \quad (\text{A.2})$$

$$+ \left| \frac{1}{N} \sum_{p=-m+1}^m \sum_{q=-m+1}^m \varphi_{\omega}^*(p)\varphi_{\omega}(q) \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)e^{i\lambda(p-q+N)} d\lambda \right|^2 \quad (\text{A.3})$$

Der erste Summand (A.1) ist nach Theorem 2 in [Ombao u. a. \(2001\)](#) gleich

$$E(I(\omega, k))^2 = \left(f(\omega) + O\left(\frac{1}{N}\right) + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)^2.$$

Für den zweiten Summanden (A.2) erhält man durch Vertauschung von Integration und Summation, mit Hilfe der Fouriertransformierten $\hat{\vartheta}^+$ und $\hat{\vartheta}^-$ von ϑ^+ und ϑ^- und durch Ausmultiplizieren den Term

$$\left| \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(-\omega - \lambda)\hat{\vartheta}^+(-\omega + \lambda)f(\lambda)e^{i\lambda N} d\lambda + \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^-(\omega - \lambda)\hat{\vartheta}^-(\omega + \lambda)f(\lambda)e^{i\lambda N} d\lambda \right. \\ \left. + \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(-\omega - \lambda)\hat{\vartheta}^-(\omega + \lambda)f(\lambda)e^{i\lambda N} d\lambda + \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(-\omega + \lambda)\hat{\vartheta}^-(\omega - \lambda)f(\lambda)e^{i\lambda N} d\lambda \right|^2.$$

Da $\hat{\vartheta}^+$ und $\hat{\vartheta}^-$ stark konzentriert um 0 sind, gilt für $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(-\omega - \lambda) \hat{\vartheta}^+(-\omega + \lambda) f(\lambda) e^{i\lambda N} d\lambda = o\left(\frac{1}{N}\right)$$

und

$$\frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^-(\omega - \lambda) \hat{\vartheta}^-(\omega + \lambda) f(\lambda) e^{i\lambda N} d\lambda = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Man kann zeigen, dass

$$\text{Cov} \left(\sum_t \vartheta^+(t) X_t e^{-i\lambda t}, \sum_t \vartheta^-(t) X_t e^{-i\lambda t} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(\lambda - \nu) \hat{\vartheta}^-(\nu - \lambda) f(\nu) d\nu.$$

Brillinger (1981, Theorem 4.3.2) beweist, dass

$$\text{Cov} \left(\sum_t \vartheta^+(t) X_t e^{-i\lambda t}, \sum_t \vartheta^-(t) X_t e^{-i\lambda t} \right) = \sum_t \vartheta^+(t) \vartheta^-(t) f(\lambda) + O(1) = O(1).$$

Damit ist

$$\left| \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(-\omega + \lambda) \hat{\vartheta}^-(\omega - \lambda) f(\lambda) e^{i\lambda N} d\lambda \right| \leq \left| \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(-\omega + \lambda) \hat{\vartheta}^-(\omega - \lambda) f(\lambda) d\lambda \right| = O(1).$$

Genauso ist

$$\left| \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\vartheta}^+(-\omega - \lambda) \hat{\vartheta}^-(\omega + \lambda) f(\lambda) e^{i\lambda N} d\lambda \right| = O(1).$$

Damit ist der zweite Summand (A.2) gleich $(2 o(\frac{1}{N}) + 2 O(\frac{1}{N}))^2$.

Unter der Voraussetzung, dass $f(\omega) = f(-\omega)$ hinreichend glatt ist, und weil die Fouriertransformierte Φ_ω von φ_ω stark konzentriert bei ω und $-\omega$ ist, lässt sich der dritte Summand (A.3)

als

$$f(\omega)^2 \left| \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_\omega(\lambda)|^2 e^{i\lambda N} d\lambda \right|^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_p \varphi_\omega^*(p) \varphi_\omega(p + N) \right)^2$$

schreiben. Letzteres ist nachzulesen in Groves und Hannan (1968, S. 138), wobei über alle p summiert wird, so dass sowohl $p \in \{-m+1, \dots, m\}$ als auch $p+N \in \{-m+1, \dots, m\}$. Weil $\sum_p \varphi_\omega^*(p) \varphi_\omega(p+N) = 0$ und aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der SLEX-Funktion, ist der dritte Summand (A.3) gleich 0.

Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(I(\omega, k), I(\omega, k+1)) &= \mathbb{E}(I(\omega, k)I(\omega, k+1)) - \mathbb{E}(I(\omega, k))\mathbb{E}(I(\omega, k+1)) \\ &= \mathbb{E}(I(\omega, k))^2 + \left(2o\left(\frac{1}{N}\right) + 2O\left(\frac{1}{N}\right)\right)^2 - \mathbb{E}(I(\omega, k))^2 \\ &= O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad \forall k.\end{aligned}$$

Die zweite Behauptung

$$\operatorname{Cov}(I(\omega_j, k), I(\omega_i, k)) = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad \forall i \neq j$$

kann wie in [Brillinger \(1981, Theorem 5.2.4\)](#) bewiesen werden. □

Anhang B

Datenanalyse

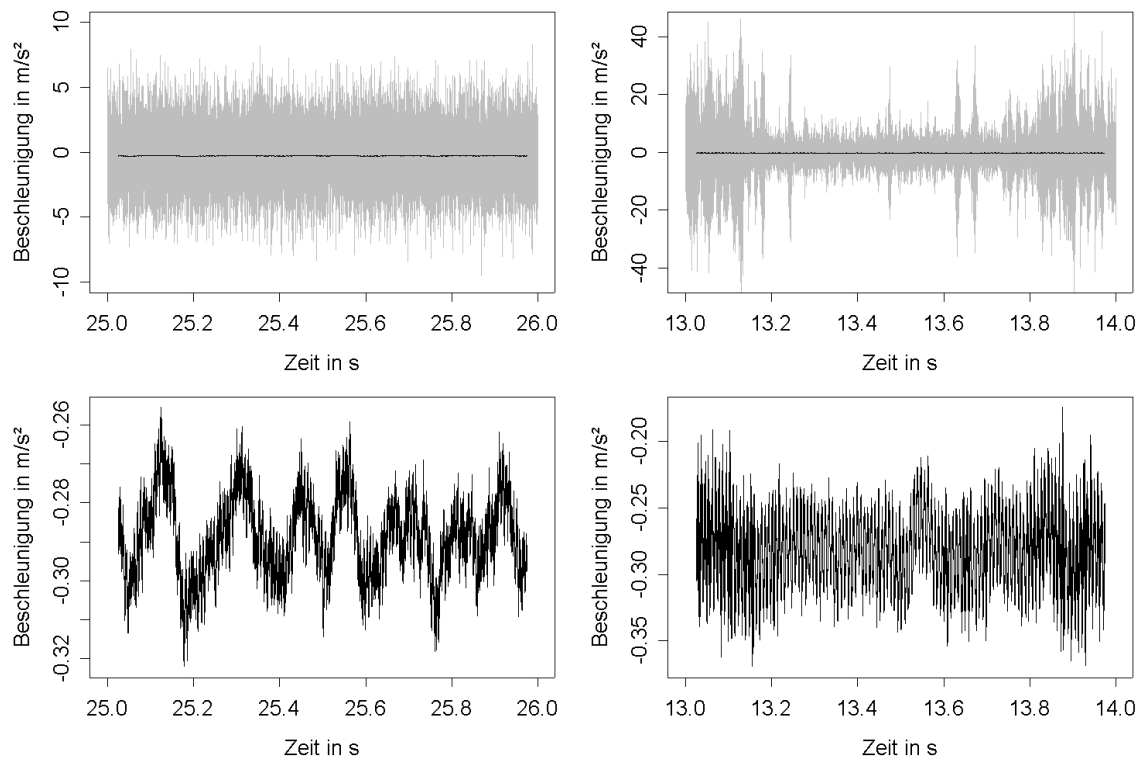


Abbildung B.1: Zeitreihenausschnitte (grau) mit gleitendem arithmetischem Mittel (schwarz) in Fenstern der Größe 1024 (0,0512 s) für die Zeitreihen des Körperschalls aus Bohrprozess 3 (links) und 37 (rechts); oben: Zeitreihe und gleitendes Mittel, unten: gleitendes Mittel alleine

Schnittgeschw. in U/min	Vorschubgeschwindigkeit in mm/U									
	0.03		0.035		0.04		0.045		0.05	
50	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
60	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
70	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
80	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Tabelle B.1: Bezeichnungen für die Bohrversuche

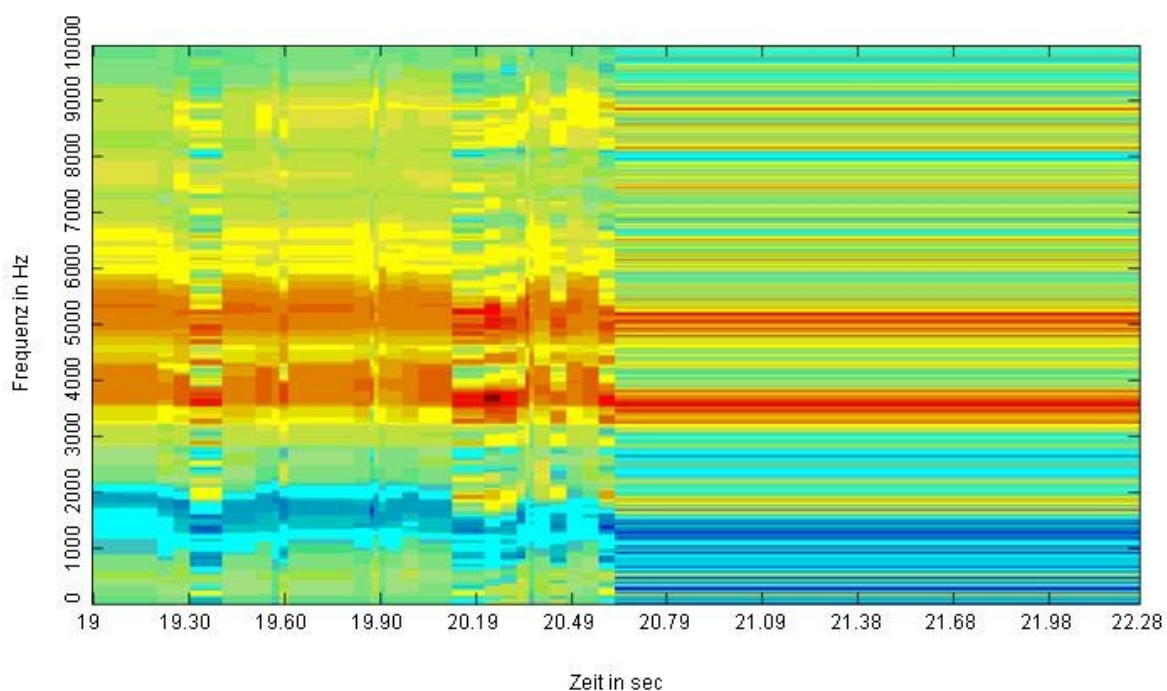


Abbildung B.2: SLEX-Spektrogramm mit Aufteilung durch beste Basis gemäß des automatischen Verfahrens aus *Ombao u. a. (2001)* für Zeitreihe 29. Die Bilder wurden mit der im Internet zur Verfügung gestellten Matlab-Programme erzeugt (<http://www.stat.uiuc.edu/~ombao/Datasets.html>).

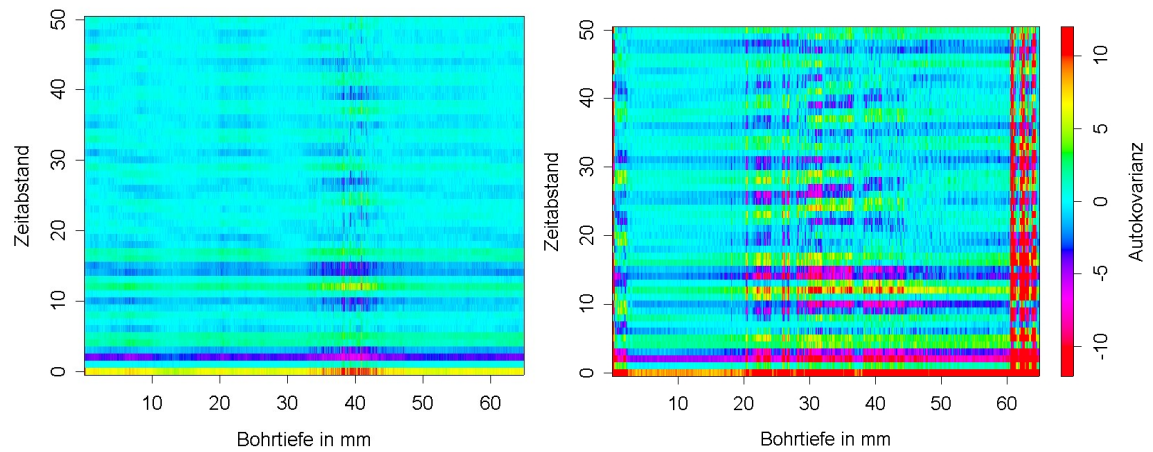


Abbildung B.3: Autokovarianz (Zeitdifferenz 0 bis 50) des Körperschalls bei Bohrprozess 6 (links) und Bohrprozess 29 (rechts), berechnet in leicht überlappenden Fenstern mit 1024 Datenpunkten

Modellierung

Die folgende rekursive Methode zur Schätzung von ARMA-Parametern wird von [McDougall \(1994\)](#) vorgeschlagen. Sei $\{x_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ein beobachtetes Signal, das von einem stationären, invertierbaren ARMA(p, q)-Prozess generiert wird. Dann kann das Signal über die Modellgleichung

$$x_t = \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t$$

beschrieben werden, mit einem unabhängigen und identisch verteilten Prozess ϵ_t mit symmetrischer Verteilung, Erwartungswert Null und $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2$ für alle t . Der hier vorgestellte Algorithmus ist als eine rekursive Schätzmethode für stationäre Prozesse definiert. Ebenso ist er in der Lage, langsame Veränderungen in den Parametern wiederzugeben und sich an Nichtstationaritäten im Signal anzupassen. Die Residuen sind definiert als $e_t = x_t - \boldsymbol{\theta}' \mathbf{z}_t$, mit $\boldsymbol{\theta} = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$ und $\mathbf{z}_t = (x_{t-1}, \dots, x_{t-p}, e_{t-1}, \dots, e_{t-q})'$. Bei der Suche nach den richtigen Parametern wird die Richtung des negativen Gradienten der Residuen eingeschlagen.

Bei einem rekursiven Kleinste-Quadrate-Algorithmus wird in jedem Schritt das Kriterium $C_t^{\text{LS}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} e_s^2$ minimiert. Der Parameter $\lambda < 1$ bezeichnet den Faktor des Vergessens, der die Gewichtung vergangener gegenüber den neu hinzugekommenen Werten kontrolliert. Je näher λ bei 1 liegt, desto stärker beeinflussen vergangene Werte das Ergebnis und desto langsamer ist die Anpassung an neue Strukturen. Dieser Algorithmus basiert auf einer robusten Version, so dass das Kriterium zunächst verallgemeinert wird zu

$$C_t(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} \rho\left(\frac{e_s}{\sigma}\right) \sigma^2,$$

wobei ρ eine Gewichtsfunktion mit Ableitung ψ darstellt. Anstelle der Funktion $\rho_{\text{LS}}(u) = \frac{u^2}{2}$, die das Kleinste-Quadrate-Kriterium definiert, verwendet [McDougall \(1994\)](#) die Huber-Funktion $\psi_{\text{H}}(u) = \min(c, \max(u, -c))$, mit der Konstanten $c > 0$, um deren Stammfunktion ρ festzulegen. Für c werden Werte zwischen 1.5 und 4 empfohlen. Weil bekannt ist, dass die Varianz in den Körperschallsignalen einer Veränderung unterliegt, ist es für die vorliegende Fragestellung sinnvoll auch die Varianz in dem Algorithmus rekursiv durch

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\tau_t \sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} e_s^2 w\left(\frac{e_s}{\hat{\sigma}_{s-1}}\right)^2}{\left(\sum_{s=1}^t \lambda^{t-s} \psi'\left(\frac{e_s}{\hat{\sigma}_{s-1}}\right)\right)^2}$$

zu schätzen, wobei $w(u) = \frac{\psi(u)}{u}$ und ψ' die Ableitung von ψ ist. Der vollständige Algorithmus ist in Abbildung B.4 gegeben.

Sei $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = \mathbf{0}$, $x_t = \hat{e}_t = \bar{e}_t = \tilde{\eta}_t = \tilde{\xi}_t = 0$ für $t \leq 0$ und $P_0 = I$, wobei I die $((p+q) \times (p+q))$ -Identitätsmatrix bezeichnet.

Für $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_t &= (\tilde{\eta}_{t-1}, \dots, \tilde{\eta}_{t-p}, \tilde{\xi}_{t-1}, \dots, \tilde{\xi}_{t-q})' \\ \hat{\mathbf{z}}_t &= (x_{t-1}, \dots, x_{t-p}, \bar{e}_{t-1}, \dots, \bar{e}_{t-q})' \\ \hat{e}_t &= x_t - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1}' \hat{\mathbf{z}}_t \\ q_t &= \lambda q_{t-1} + \psi' \left(\frac{\hat{e}_t}{\hat{\sigma}_{t-1}} \right), \quad \tau_t = \lambda \tau_{t-1} + 1 \\ \hat{\sigma}_t^2 &= \frac{\tau_t}{q_t^2} \left(\frac{\lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 q_{t-1}^2}{\tau_{t-1}} + \hat{e}_t^2 w \left(\frac{\hat{e}_t}{\hat{\sigma}_{t-1}} \right)^2 \right) \\ P_t &= \frac{1}{\lambda} \left(P_{t-1} - \frac{P_{t-1} \tilde{\mathbf{v}}_t \tilde{\mathbf{v}}_t' P_{t-1}}{\lambda + \tilde{\mathbf{v}}_t' P_{t-1} \tilde{\mathbf{v}}_t} \right) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_t &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{t-1} + P_t \tilde{\mathbf{v}}_t w \left(\frac{\hat{e}_t}{\hat{\sigma}_t} \right) \hat{e}_t \\ \bar{e}_t &= x_t - \hat{\boldsymbol{\theta}}_t' \hat{\mathbf{z}}_t, \quad r_t = w \left(\frac{\bar{e}_t}{\hat{\sigma}_t} \right) \bar{e}_t \\ \tilde{\eta}_t &= r_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \tilde{\eta}_{t-i}, \quad \tilde{\xi}_t = r_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \tilde{\xi}_{t-j}. \end{aligned}$$

Abbildung B.4: Algorithmus zur rekursiven ARMA-Schätzung nach [McDougall \(1994\)](#)

Abbildungen B.5 bis B.8 zeigen die Ergebnisse der Anwendung des Algorithmus auf Ausschnitte der Körperschall-Zeitreihen der Bohrprozesse 2, 6, 29 und 37 für ein ARMA(2, 1)-Modell mit $\lambda = 0.999$ und $c = 3$. Die konstante Modellordnung ist so gewählt, dass wesentliche Eigenschaften der Reihen mit möglichst geringer Anzahl Parameter durch die Modelle wiedergegeben werden. Hauptsächlich sind die Fehlervarianz (grau) und der erste autoregressive Parameter (schwarz) durch das Rattern beeinflusst.

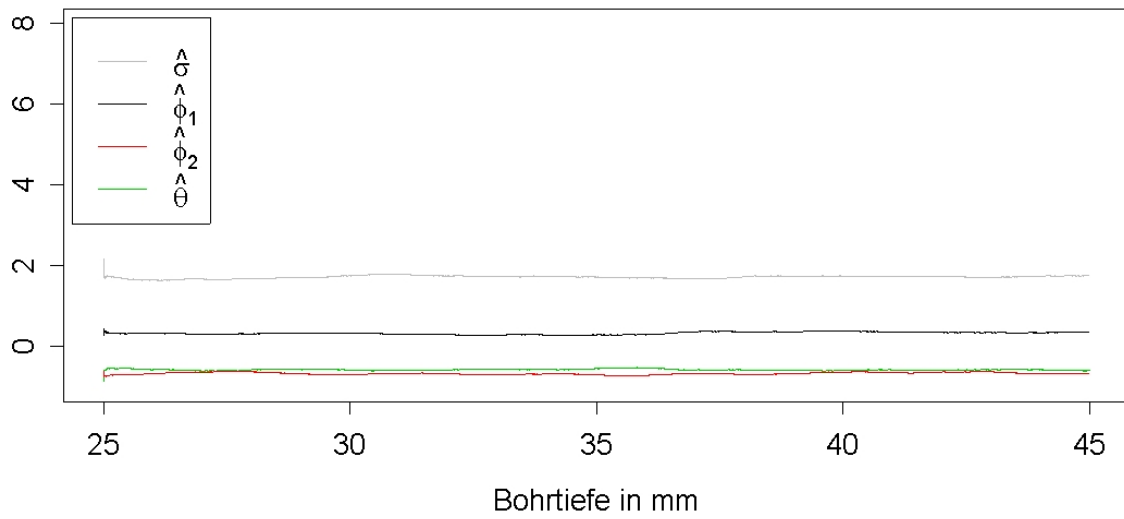


Abbildung B.5: Robuste rekursive Schätzung der ARMA-Parameter in einem Ausschnitt des Bohrprozesses 2

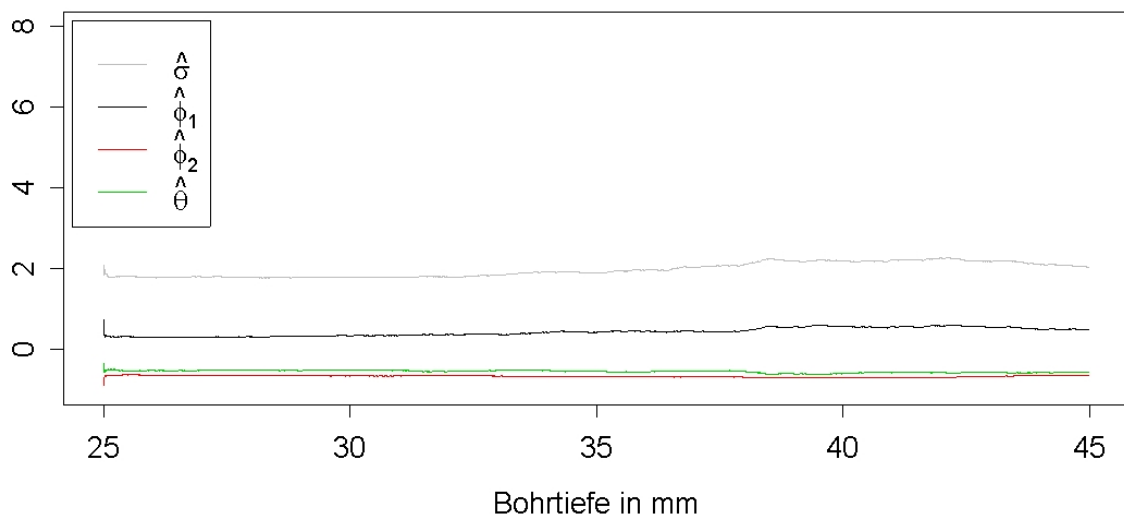


Abbildung B.6: Robuste rekursive Schätzung der ARMA-Parameter in einem Ausschnitt des Bohrprozesses 6

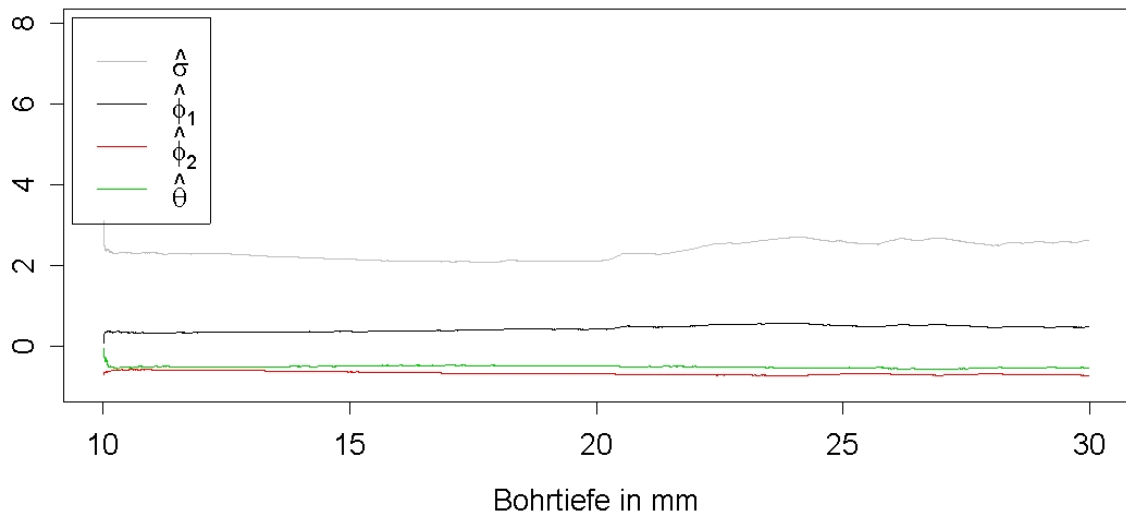


Abbildung B.7: Robuste rekursive Schätzung der ARMA-Parameter in einem Ausschnitt des Bohrprozesses 29

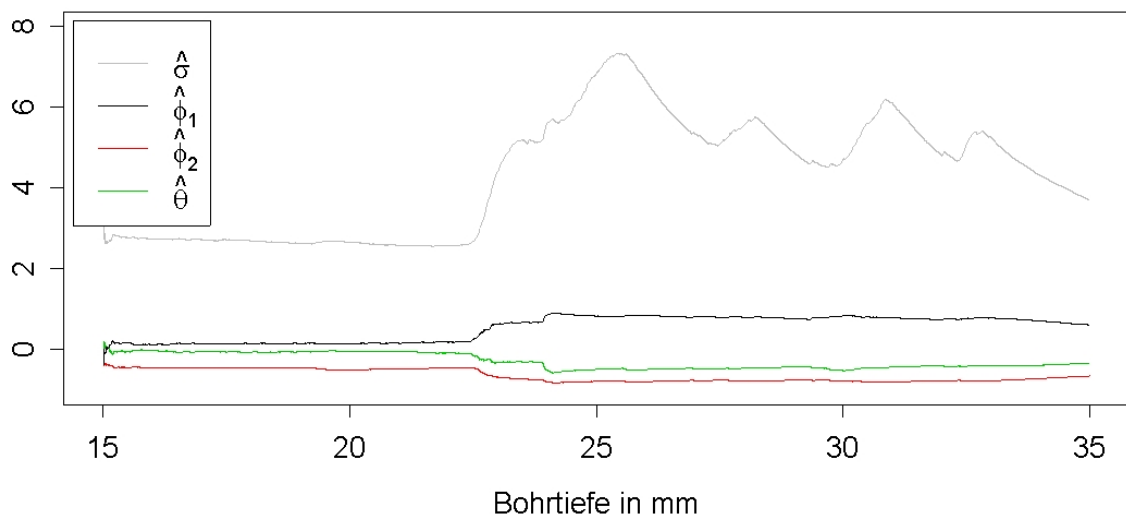


Abbildung B.8: Robuste rekursive Schätzung der ARMA-Parameter in einem Ausschnitt des Bohrprozesses 37

Empirischer Vergleich spektraler Abweichungsmaße

Spezif.	β	d	IS	ISs	IL1	IL2	IL3	IL4	IL5	IL6	IL7	DII	KA	IKA	Coa	Cho
90	0	0	16	14	46	47	38	26	19	16	14	48	61	46	46	48
95	0	0	7	7	34	35	24	14	9	7	7	36	54	34	33	35
99	0	0	1	1	18	19	6	1	1	1	1	20	34	17	14	19
90	0.1	0	43	22	51	55	50	40	31	27	22	62	60	61	59	53
95	0.1	0	25	9	39	45	38	24	15	11	10	49	52	47	48	41
99	0.1	0	3	2	21	27	16	8	3	3	2	29	32	24	23	23
90	0	4	89	84	70	81	86	87	88	88	88	64	61	61	63	74
95	0	4	83	77	57	73	79	81	82	81	81	52	53	50	49	62
99	0	4	65	60	35	54	62	64	66	67	67	30	32	27	24	40
90	0.1	4	93	90	75	88	91	92	92	92	92	69	60	69	71	79
95	0.1	4	89	85	64	80	86	88	89	89	89	59	52	58	59	69
99	0.1	4	76	71	40	61	72	74	75	75	74	34	31	34	33	47
90	0.2	4	92	88	72	85	89	90	90	91	91	66	56	66	69	76
95	0.2	4	87	83	61	77	84	86	87	87	87	55	48	52	56	66
99	0.2	4	73	68	36	59	69	72	72	72	71	28	30	27	34	41
90	0.1	5	93	90	74	87	91	92	92	92	92	71	60	69	70	79
95	0.1	5	89	84	64	80	86	88	89	89	88	59	52	59	58	69
99	0.1	5	76	69	40	62	71	73	74	74	73	35	31	35	32	47

Tabelle B.2: Sensitivität in % der Abweichungsmaße. Zusatz zu Tabelle 3.2; hier auch: Kolmogorov-Abstand der logarithmierten Spektraldichteschätzer (IKA) und Abstände bei weiteren Modifikationen der Spektraldichteschätzer.

Spez.	β	d	Typ	IS	ISs	IL1	IL2	IL3	IL4	IL5	IL6	IL7	DII	KA	IKA	Coa	Cho
90	0	-	MW	75	67	57	65	68	70	70	70	70	61	61	52	50	59
95	0	-	MW	66	58	47	56	60	62	62	62	62	48	54	41	37	49
99	0	-	MW	50	45	27	39	46	46	46	46	46	25	33	21	16	30
90	0.1	-	MW	86	81	67	79	82	83	83	83	83	70	58	65	60	71
95	0.1	-	MW	82	75	56	71	76	78	77	78	77	59	54	54	48	61
99	0.1	-	MW	72	62	40	57	64	66	66	65	65	37	35	37	27	44
90	0.2	-	MW	88	83	68	81	84	85	85	86	86	68	58	63	61	72
95	0.2	-	MW	83	78	58	74	80	80	80	80	80	56	52	52	48	63
99	0.2	-	MW	74	67	40	62	69	71	71	71	70	32	34	32	24	44
90	0.3	-	MW	86	81	67	79	82	83	83	83	83	65	57	61	58	71
95	0.3	-	MW	81	75	57	72	77	78	79	78	78	54	48	50	47	62
99	0.3	-	MW	71	64	38	57	65	68	70	71	71	30	33	29	23	42
90	0.1	-	geo	77	67	54	65	68	68	68	68	68	61	49	55	50	57
95	0.1	-	geo	67	58	44	43	59	58	59	59	58	48	40	42	34	46
99	0.1	-	geo	48	42	26	36	42	39	38	37	35	24	25	23	17	30
90	0.2	-	geo	80	73	55	69	74	75	74	74	74	57	49	53	51	60
95	0.2	-	geo	71	63	43	57	64	66	66	66	65	46	40	39	36	47
99	0.2	-	geo	46	40	25	37	41	39	37	36	35	19	24	18	16	27
90	-	-	AR	85	80	72	79	81	82	81	81	80	65	61	59	64	75
95	-	-	AR	79	73	60	72	74	75	74	74	75	54	54	48	49	63
99	-	-	AR	65	58	33	54	61	62	62	64	63	30	34	25	27	39

Tabelle B.3: Sensitivität in % der Abweichungsmaße (Fortsetzung). Zusatz zu Tabelle 3.2; hier auch: Kolmogorov-Abstand der logarithmierten Spektraldichteschätzer (IKA) und Abstände bei weiteren Modifikationen der Spektraldichteschätzer. So wird für „geo“ das geometrische Mittel von Periodogrammwerten statt des arithmetischen Mittels wie bei „MW“ verwendet.

Spez.	β	d	Typ	IS	ISs	IL1	IL2	IL3	IL4	IL5	IL6	IL7	DII	KA	IKA	Coa	Cho
90	1/8	-		43	30	59	62	56	47	41	36	32	64	43	42	43	61
95	1/8	-		25	16	48	51	45	36	27	22	18	51	38	32	32	49
99	1/8	-		6	4	29	32	28	22	14	10	6	26	30	14	17	30
90	1/8	4		91	87	74	84	87	88	89	89	89	68	44	50	62	78
95	1/8	4		86	82	66	78	83	85	85	85	85	56	38	40	50	70
99	1/8	4		74	71	46	64	72	73	73	73	72	33	30	22	25	51
90	1/2	4		94	89	76	86	90	91	91	91	91	72	52	51	52	79
95	1/2	4		89	83	66	80	85	86	87	87	86	59	43	36	37	71
99	1/2	4		72	68	37	58	69	71	72	71	69	19	31	10	12	42
90	1/8	5		91	86	74	83	87	88	89	89	89	68	44	50	61	77
95	1/8	5		85	81	65	78	82	84	85	85	85	56	38	41	50	69
99	1/8	5		73	70	45	64	71	72	71	71	71	34	30	22	26	51
90	1/8	-	MW	75	66	61	64	67	68	69	69	68	69	52	54	42	62
95	1/8	-	MW	66	50	50	56	59	60	60	60	60	57	44	43	30	52
99	1/8	-	MW	49	40	30	38	41	44	45	44	43	33	30	28	12	33
90	1/4	-	MW	80	72	64	70	74	74	74	74	73	72	50	54	41	66
95	1/4	-	MW	74	66	55	64	67	68	68	67	67	62	42	43	27	58
99	1/4	-	MW	58	51	37	48	53	55	55	55	54	41	30	23	9	41
90	1/2	-	MW	84	78	68	76	78	79	79	79	78	70	54	54	34	71
95	1/2	-	MW	78	72	58	69	73	73	73	72	72	60	47	43	20	61
99	1/2	-	MW	65	59	40	53	60	61	60	59	56	35	32	21	6	44

Tabelle B.4: Sensitivität in % der Abweichungsmaße (SLEX). Zusatz zu Tabelle 3.3; hier auch: Kolmogorov-Abstand der logarithmierten Spektraldichteschätzer (IKA) und Abstände bei weiteren Modifikationen der Spektraldichteschätzer

Spezif.	β		KA	L1	L2	L3	L4	IKA	IL1	IL2	IL3	IL4
90			60	58	59	59	59	40	39	42	43	43
95			52	51	51	51	52	30	29	32	32	33
99			32	31	32	32	32	14	13	16	16	16
90	1/2	SLEX	53	54	53	53	53	45	46	45	44	44
95	1/2	SLEX	44	45	46	46	46	32	32	31	31	30
99	1/2	SLEX	31	32	33	33	33	7	8	8	8	8
90		AR	60	59	60	60	60	52	50	54	55	55
95		AR	52	51	52	52	53	40	39	44	46	46
99		AR	32	32	32	33	33	22	21	26	27	28

Tabelle B.5: Sensitivität in % der Abweichungsmaße bzgl. des integrierten Spektrums. Die verwendeten Maße sind $d_{eVL,p}$ aus Gleichung (2.37) mit $p = \infty$ für KA, $p = 1$ für L1, $p = 2$ für L2, etc. und IKA, IL1, IL2, etc. entsprechen den L_p -Normen von $\ln(\hat{F}(\omega_j)) - \ln(\hat{G}(\omega_j))$.

Symbolverzeichnis

\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der positiven ganzen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der positiven ganzen Zahlen und Null
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}_+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	Menge der Vektoren mit n reellwertigen Elementen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{C}^n	Menge der Vektoren mit n komplexwertigen Elementen
\forall	für alle
\square	„womit das bewiesen wäre“
$a \ll b$	a ist sehr viel kleiner als b
Σ	Summenzeichen
\int	Integralzeichen
dx	Differential
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	Quadratwurzel aus x
$[x] = m$ mit $m \leq x < m + 1$ und $m \in \mathbb{N}$	Gauß-Klammer von $x \in \mathbb{R}$
$\mathbb{I}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$	Indikatorfunktion bezüglich einer Menge M
$(x)^+ = \max\{0, x\} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$	
$\min\{M\}$	Minimum einer Menge M

$\max\{M\}$	Maximum einer Menge M
$\inf\{M\}$	Infimum einer Menge M
$\sup\{M\}$	Supremum einer Menge M
\emptyset	leere Menge
$\sin(x)$	Sinus von x
$\cos(x)$	Cosinus von x
$\arctan(x)$	Arcus Tangens von x
e^x	Exponentialfunktion von x
$\ln(x)$	natürlicher Logarithmus von x
$\log_2(x)$	Logarithmus zur Basis 2 von x
i	imaginäre Einheit
z^*	komplex Konjugierte von z
$\vartheta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ mit $z = z (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$	Argument einer komplexen Zahl
$ z = \sqrt{z \cdot z^*}$	Absolutbetrag von z
$[a, b]$	geschlossenes Intervall von a bis b
(a, b)	offenes Intervall von a bis b
$(a, b]$ oder $[a, b)$	halboffenes Intervall von a bis b
$f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow \infty \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	kleines Landau-Symbol
$f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow \infty \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$	großes Landau-Symbol
$\ a\ _p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta) ^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$ und $\ a\ _{\infty} = \sup_{\theta \in (-\pi, \pi)} a(\theta) $	L_p -Norm der Funktion $a : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$
$\ a\ _p = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a(\theta_i) ^p \right)^{\frac{1}{p}}$ und $\ a\ _{\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} a(\theta_i) $	L_p -Norm der Fkt. a mit diskretem Träger mit n Ausprägungen
$\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$	stochastischer Prozess
$E(X_t) = \mu \forall t$	Erwartungswert eines stationären stochastischen Prozesses
$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \forall t$	Varianz eines stationären stochastischen Prozesses
$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \forall t$	Autokovarianzfunktion eines stationären stochastischen Proz.

$\text{cum}(X_1, \dots, X_k)$	gemeinsame Kumulante von X_1, \dots, X_k
$\{x_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$	Zeitreihe/Realisation eines stationären st. Pr. der Länge n
$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$	arithmetisches Mittel von $\{x_t\}_{t \in \{1, \dots, n\}}$
$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n- h } (x_t - \bar{x}_n)(x_{t+ h } - \bar{x}_n)$	Schätzer der Autokovarianzfunktion zum Zeitabstand h
$f(\omega)$ mit $\omega \in [-\pi, \pi]$	Spektraldichte eines stationären stochastischen Prozesses
$F(\omega)$ mit $\omega \in [-\pi, \pi]$	spektrale Verteilungsfunktion eines stationären stochast. Proz.
$I(\omega)$	Periodogramm einer Zeitreihe
$\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$	Fourierfrequenzen bezüglich einer Zeitreihe der Länge n
mit $j \in \{-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$	für komplexwertige Reihen
oder $j \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$	für reellwertige Reihen
$d(f, g)$	Abweichungsmaß zwischen zwei Spektraldichten f und g
θ	Parametervektor
$LR_i^j(\theta_0, \theta_1)$	Likelihood-Quotient
$L_i^j(\theta_0, \theta_1)$	Log-Likelihood-Quotient
ARL_0	erwartete Zeit zwischen zwei falschen Alarmen
ARL_1	erwartete Verzögerung zur Erkennung einer Veränderung
H_0	Nullhypothese
H_1	Alternativhypothese

Literaturverzeichnis

- Adak, S. (1998). Time-Dependent Spectral Analysis of Nonstationary Time Series. *Journal of the American Statistical Association* 93(444), S. 1488–1501. 29, 30, 41, 46, 86
- Adams, B. M. und I.-T. Tseng (1998). Robustness of Forecast-Based Monitoring Schemes. *Journal of Quality Technology* 30(4), S. 328–339. 80
- Ahamada, I., J. Jouini und M. Boutahar (2004). Detecting Multiple Breaks in Time Series Covariance Structure: A Non-Parametric Approach Based on the Evolutionary Spectrum. *Applied Economics* 36, S. 1095–1101. 86
- Alwan, L. C. und H. V. Roberts (1988). Time-Series Modeling for Statistical Process Control. *Journal of Business & Economic Statistics* 6(1), S. 87–95. 80
- Apley, D. W. und J. Shi (1999). The GLRT for Statistical Process Control of Autocorrelated Processes. *IIE Transactions* 31, S. 1123–1134. 81
- Basseville, M. (1989). Distance Measures for Signal Processing and Pattern Recognition. *Signal Processing* 18, S. 349–369. 43, 46
- Basseville, M. und I. V. Nikiforov (1993). *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall. Internet-Version (Februar 2003): <http://www.irisa.fr/sisthem/kniga/>. 72, 73, 76, 77, 80, 81, 82, 85, 91, 92
- Benedetto, J. J., W. Czaja und P. Gadziński (2003). The Balian-Low Theorem and Regularity of Gabor Systems. *The Journal of Geometric Analysis* 13(2), S. 239–254. 34
- Benveniste, A., M. Métivier und P. Priouret (1990). *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximation*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. 91, 93

- Bloomfield, P. (2000). *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction* (2. Aufl.). New York: John Wiley & Sons. [14](#), [15](#), [23](#), [53](#)
- Brillinger, D. R. (1981). *Time Series: Data Analysis and Theory*. San Francisco: Holden Day. [39](#), [117](#), [118](#), [119](#)
- Brockwell, P. J. und R. A. Davis (1987). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag. [11](#), [16](#), [20](#), [88](#)
- Brodsky, B. E. und B. S. Darkhovsky (1993). *Nonparametric Methods in Change-Point Problems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. [83](#), [91](#), [92](#)
- Broemeling, L. D. und H. Tsurumi (1987). *Econometrics and Structural Changes*. New York: Marcel Dekker, Inc. [70](#)
- Büning, H. und G. Trenkler (1994). *Nichtparametrische statistische Methoden* (2. Aufl.). Berlin: Walter de Gruyter. [50](#)
- Carmona, R., W.-L. Hwang und B. Torrésani (1998). *Practical Time-Frequency Analysis – Gabor and Wavelet Transforms with an Implementation in S*. San Diego: Academic Press. [33](#), [34](#)
- Chakraborti, S., P. van der Laan und S. T. Bakir (2001). Nonparametric Control Charts: An Overview and Some Results. *Journal of Quality Technology* *33*(3), S. 304–315. [82](#)
- Chen, Z.-G. (1988). Consistent Estimates for Hidden Frequencies in a Linear Process. *Advances in Applied Probability* *20*, S. 295–314. [22](#)
- Choi, B. (1992). *ARMA Model Identification*. New York: Springer-Verlag. [65](#), [67](#)
- Choi, H., H. Ombao und B. Ray (2004). Online Change-Point Detection Methods for Nonstationary Time. In: *ASA Proceedings of the Joint Statistical Meetings*, Alexandria, VA, S. 1998–2005. American Statistical Association. [51](#), [68](#), [94](#)
- Chu, C.-S. J. (1995). Time Series Segmentation: A Sliding Window Approach. *Information Sciences* *85*, S. 147–173. [81](#)
- Coates, D. S. und P. J. Diggle (1986). Tests for Comparing two Estimated Spectral Densities. *Journal of Time Series Analysis* *7*(1), S. 7–20. [50](#), [51](#), [68](#)

- Cohen, L. (1989). Time-Frequency Distributions – A Review. *Proceedings of the IEEE* 77(7), S. 941–981. [24](#)
- Cox, D. R. (1961). Prediction by Exponentially Weighted Moving Averages and Related Methods. *Journal of the Royal Statistical Society* 2, S. 414–422. [80](#)
- Dahlhaus, R. (1996). Asymptotic Statistical Inference for Nonstationary Processes with Evolutionary Spectra. In: *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis*, S. 145–159. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. [25](#), [27](#), [28](#), [31](#)
- Dahlhaus, R. (1997). Fitting Time Series Models to Nonstationary Processes. *The Annals of Statistics* 25(1), S. 1–37. [27](#), [28](#)
- Daubechies, I. (1994). *Ten Lectures on Wavelets* (3. Aufl.). Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics. [24](#), [25](#)
- Daumer, M. und A. Neiß (1999). Towards Improved Alarm Systems: Adaptive On-line Algorithms for Sequential Change-Point Detection. In: N. Victor, M. Blettner, und L. Edler (Hrsg.), *44th Annual Conference of the GMDS, Heidelberg, Sep. 13-16, 1999*, S. 190–193. München: Urban und Vogel. [96](#)
- Diggle, P. J. (1990). *Time Series: A Biostatistical Introduction*. Oxford: Oxford University Press. [20](#)
- Elsayed, E. A. (2000). Perspectives and Challenges for Research in Quality and Reliability Engineering. *International Journal of Production Research* 38(9), S. 1953–1976. [89](#)
- Emerson, J. D. und J. Strenio (1983). Boxplots and Batch Comparisons. In: D. C. Hoaglin, F. Mosteller, und J. W. Tukey (Hrsg.), *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, Chapter 3, S. 58–96. New York: John Wiley & Sons, Inc. [83](#)
- Fried, R. und M. Imhoff (2004). On the Online Detection of Monotonic Trends in Time Series. *Biometrical Journal* 46(1), S. 90–102. [112](#)
- Frisén, M. (2003). Statistical Surveillance. Optimality and Methods. *International Statistical Review* 71(2), S. 403–434. [73](#)
- Gather, U., R. Fried, V. Lanius und M. Imhoff (2001). Online Monitoring of High Dimensional Physiological Time Series – A Case Study. *Estadística* 53, S. 259–298. [70](#)

- Giraitis, L. und R. Leipus (1991). Functional CLT for Nonparametric Estimates of the Spectrum and Change-Point Problem for a Spectral Function. *Lithuanian Mathematical Journal* 30, S. 302–322. [87](#)
- Giraitis, L. und R. Leipus (1992). Testing and Estimating in the Change-Point Problem of the Spectral Function. *Lithuanian Mathematical Journal* 32(1), S. 15–29. [87](#)
- Gray, A. H. und J. D. Markel (1976). Distance Measures for Speech Processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing ASSP-24*(5), S. 380–391. [43](#), [46](#)
- Gray, R. M., A. Buzo, A. H. Gray und Y. Matsuyama (1980). Distortion Measures for Speech Processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing ASSP-28*(4), S. 367–376. [42](#), [43](#), [46](#)
- Grießbach, G. und B. Schack (1993). Adaptive Quantile Estimation and its Application in Analysis of Biological Signals. *Biometrical Journal* 35(2), S. 165–179. [84](#)
- Grießbach, G., B. Schack, P. Putsche, E. Bareshova und J. Bolten (1994). Dynamic Description of Stochastic Signal by Adaptive Momentary Power and Momentary Frequency Estimation and its Application in Analysis of Biological Signals. *Medical & Biological Engineering & Computing* 32(6), S. 632–637. [93](#)
- Grimshaw, S. D. und F. B. Alt (1997). Control Charts for Quantile Function Values. *Journal of Quality Technology* 29(1), S. 1–7. [82](#)
- Groves, G. W. und E. J. Hannan (1968). Time Series Regression of Sea Level on Weather. *Reviews of Geophysics* 6(2), S. 129–174. [19](#), [118](#)
- Gustafsson, F. (2000). *Adaptive Filtering and Change Detection*. Chichester: John Wiley & Sons. [73](#), [81](#)
- Hackl, P. und J. Ledolter (1992). A new Nonparametric Quality Control Technique. *Communications in Statistics – Simulation and Computation* 21(2), S. 423–443. [82](#)
- Ishii, N., A. Iwata und N. Suzumura (1979). Segmentation of Non-Stationary Time Series. *International Journal of Systems Science* 10(8), S. 883–894. [43](#)
- Jenkins, G. M. und D. G. Watts (1968). *Spectral Analysis and its Applications*. San Francisco: Holden-Day. [17](#)

- Koopmans, L. H. (1974). *The Spectral Analysis of Time Series*. New York: Academic Press. [18](#), [21](#)
- Kramer, H. und W. Schmid (1997a). Control Charts for Time Series. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* 30(7), S. 4007–4016. [79](#), [80](#)
- Kramer, H. und W. Schmid (1997b). EMWA Charts for Multivariate Time Series. *Sequential Analysis* 16(2), S. 131–154. [80](#)
- Kramer, H. und W. Schmid (2000). The Influence of Parameter Estimation on the ARL of Shewhart Type Charts for Time Series. *Statistical Papers* 41, S. 173–196. [77](#)
- Kullback, S. und R. A. Leibler (1951). On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics* 22, S. 79–86. [42](#)
- Lai, T. L. (1995). Sequential Change-point Detection in Quality Control and Dynamical Systems. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 57(4), S. 613–658. [82](#)
- Lai, T. L. (1998). Information Bounds and Quick Detection of Parameter Changes in Stochastic Systems. *IEEE Transactions on Information Theory* 44(7), S. 2917–2929. [81](#)
- Lai, T. L. und J. Z. Shan (1999). Efficient Recursive Algorithms for Detection of Abrupt Changes in Signals and Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44(5), S. 952–966. [91](#), [92](#)
- Lavielle, M. und C. Ludeña (2000). The Multiple Change-Points Problem for the Spectral Distribution. *Bernoulli* 6(5), S. 845–869. [86](#)
- Lee, S., J. Ha, O. Na und S. Na (2003). The CUSUM Test for Parameter Change in Time Series Models. *Scandinavian Journal of Statistics* 30, S. 781–796. [85](#), [86](#), [90](#), [93](#)
- Ligges, U., C. Weihs und P. Hasse-Becker (2002). Detection of Locally Stationary Segments in Time Series – Algorithms and Applications. Technical Report 11/2002, SFB 475, Universität Dortmund. [93](#)
- Lowry, C. A. und D. C. Montgomery (1995). A Review of Multivariate Control Charts. *IIE Transactions* 27, S. 800–810. [78](#), [79](#)

- Lowry, C. A., W. H. Woodall, C. W. Champ und S. E. Rigdon (1992). A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Technometrics* 34(1), S. 46–53. [72](#), [78](#)
- Lucas, J. M. und M. S. Saccucci (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements (with discussion). *Technometrics* 32(1), S. 1–29. [72](#), [75](#)
- MacGregor, J. F. und T. J. Harris (1993). The Exponentially Weighted Moving Average. *Journal of Quality Technology* 25(2), S. 106–118. [75](#), [80](#)
- McDougall, A. J. (1994). Robust Methods for Recursive Autoregressive Moving Average Estimation. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 56(1), S. 189–207. [91](#), [123](#), [124](#)
- Montgomery, D. C. und W. H. Woodall (1997). A Discussion on Statistically-Based Process Monitoring and Control. *Journal of Quality Technology* 29(2), S. 121–162. [70](#)
- Moustakides, G. V. (1986). Optimal Stopping Times for Detecting Changes in Distributions. *The Annals of Statistics* 14(4), S. 1379–1387. [76](#), [81](#)
- Müller, P. H. (1991). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik: Lexikon der Stochastik* (5. Aufl.). Berlin: Akademie Verlag. [50](#)
- Ombao, H., J. Heo und D. Stoffer (2004). Online Analysis of Seismic Signals. In: D. R. Brillinger, E. A. Robinson, und F. P. Schoenberg (Hrsg.), *Time Series Analysis and Applications to Geophysical Systems*, S. 53–71. New York: Springer-Verlag. [94](#)
- Ombao, H., R. von Sachs und W. Guo (2005). SLEX Analysis of Multivariate Nonstationary Time Series. *Journal of the American Statistical Association* 100(470), S. 519–531. [40](#)
- Ombao, H. C., J. A. Raz, R. von Sachs und W. Guo (2002). The SLEX Model of a Non-Stationary Random Process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 54(1), S. 171–200. [41](#)
- Ombao, H. C., J. A. Raz, R. von Sachs und B. A. Malow (2001). Automatic Statistical Analysis of Bivariate Nonstationary Time Series. *Journal of the American Statistical*

- Association – Theory and Methods* 96(454), S. 543–560. [6](#), [29](#), [30](#), [33](#), [34](#), [36](#), [39](#), [40](#), [41](#), [56](#), [86](#), [111](#), [117](#), [121](#)
- Ozaki, T. (1980). Non-Linear Time Series Models for Random Vibrations. *Journal of Applied Probability* 17, S. 84–93. [64](#), [65](#)
- Page, E. S. (1961). Cumulative Sum Charts. *Technometrics* 3, S. 1–9. [76](#)
- Parzen, E. (1992). Time Series, Statistics, and Information. In: D. R. Brillinger (Hrsg.), *New Directions in Time Series Analysis, Part I*, S. 265–286. New York: Springer-Verlag. [43](#)
- Picard, D. (1985). Testing and Estimating Change-Points in Time Series. *Advances in Applied Probability* 17, S. 841–867. [85](#), [86](#), [87](#), [93](#)
- Pignatiello Jr., J. J. und G. C. Runger (1990). Comparisons of Multivariate CUSUM Charts. *Journal of Quality Technology* 22, S. 173–186. [79](#)
- Priestley, M. B. (1968). Discussion of “On the Concept of the Spectrum for Non-stationary Processes”, by R. M. Loynes. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B: Methodological* 30, S. 1–30. [24](#)
- Priestley, M. B. (1981a). *Spectral Analysis and Time Series – 1: Univariate Series*. London: Academic Press. [9](#), [12](#), [15](#), [17](#), [21](#), [23](#), [25](#), [50](#)
- Priestley, M. B. (1981b). *Spectral Analysis and Time Series – 2: Multivariate Series, Prediction and Control*. London: Academic Press. [24](#), [25](#), [26](#), [32](#), [87](#)
- Priestley, M. B. (1988). *Non-Linear and Non-Stationary Time Series Analysis*. London: Academic Press. [13](#), [87](#)
- Priestley, M. B. und T. S. Rao (1969). A Test for Non-Stationarity of Time-Series. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 31(1), S. 140–149. [87](#)
- Quesenberry, C. P. (1993). The Effect of Sample Size on Estimated Limits for \bar{X} and X Control Charts. *Journal of Quality Technology* 25(4), S. 237–247. [77](#)
- Quinn, B. G. und E. J. Hannan (2001). *The Estimation and Tracking of Frequency*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. [22](#), [23](#), [62](#)

- R Development Core Team (2004). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Wien: R Foundation for Statistical Computing. <http://www.R-project.org>. 67
- Rao, B. D. und R. Peng (1990). Tracking Analysis of an ARMA Parameter Estimation Algorithm. *IEEE Transactions in Automatic Control* 35(2), S. 247–250. 91
- Roberts, S. W. (1959). Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics* 1(3), S. 239–250. 74
- Rosolowski, M. und W. Schmid (2003). EWMA Charts for Monitoring the Mean and the Autocovariances of Stationary Gaussian Processes. *Sequential Analysis* 22(4), S. 257–285. 80, 92, 102
- Rowlands, J. R. und G. B. Wetherill (1991). Quality Control. In: B. K. Ghosh und P. K. Sen (Hrsg.), *Handbook of Sequential Analysis*, S. 563–580. New York: Marcel Dekker. 73
- Rozenholc, Y. (2001). Nonparametric Tests of Change-Points with Tapered Data. *Journal of Time Series Analysis* 22(1), S. 13–43. 87
- Runger, G. C. und M. C. Testik (2004). Multivariate Extensions to Cumulative Sum Control Charts. *Quality and Reliability Engineering International* 20, S. 587–606. 78
- Schack, B. (1996). Adaptive Verfahren zur Spektralanalyse instationärer mehrdimensionaler biologischer Signale. Habilitationsschrift, Fakultät für Informatik und Automatisierung, Technische Hochschule Ilmenau. 80, 83, 93
- Schmid, W. (1995). On the Run Length of a Shewhart Chart for Correlated Data. *Statistical Papers* 36, S. 111–130. 79
- Schmid, W. (1997). CUSUM Control Schemes for Gaussian Processes. *Statistical Papers* 68, S. 191–217. 79
- Shi, Z. und H. Aoyama (1997). Feature Extraction of Machine Tool Chatter Using Exponential Autoregressive Model. *International Journal of the Japanese Society for Precision Engineering* 31(4), S. 257–262. 65
- Shi, Z., Y. Tamura und T. Ozaki (1998). A Study on Real-Time Detecting of Machine Tool Chatter. *International Journal of the Japanese Society for Precision Engineering* 32(3), S. 178–182. 65

- Siegmund, D. und E. S. Venkatraman (1995). Using the Generalized Likelihood Ratio Statistic for Sequential Detection of a Change-Point. *The Annals of Statistics* 23(1), S. 255–271. [81](#)
- Stoumbos, Z. G. und J. H. Sullivan (2002). Robustness to Non-Normality of the Multivariate EWMA Control Chart. *Journal of Quality Technology* 34(3), S. 260–276. [78](#), [83](#)
- Subba Rao, T. (1981). A Cumulative Sum Test for Detecting Change in Time Series. *International Journal of Control* 34(2), S. 285–293. [86](#), [87](#), [88](#)
- Takanami, T. (1999). High Precision Estimation of Seismic Wave Arrival Times. In: H. Akaike und G. Kitagawa (Hrsg.), *The Practice of Time Series Analysis*, Chapter 5, S. 79–94. New York: Springer-Verlag. [94](#)
- Theis, W., L. Davies und C. Weihs (2005). Two Connected Models for Varying Amplitudes in BTA-Deep-Hole-Drilling. Technical Report 36/2005, SFB 475, Universität Dortmund. [64](#)
- Tong, H. (1990). *Non-Linear Time Series – A Dynamical System Approach*. Oxford: Clarendon Press. [65](#)
- Tsui, K.-L. und W. H. Woodall (1993). Multivariate Control Charts Based on Loss Functions. *Sequential Analysis* 12(1), S. 79–92. [79](#)
- Vasilopoulos, A. V. und A. P. Stamboulis (1978). Modification of Control Chart Limits in the Presence of Data Correlation. *Journal of Quality Technology* 10(1), S. 20–30. [79](#)
- VDI-Verlag, Düsseldorf (1996). *VDI-Richtlinie 3208: Richtwerte für das Tiefbohren mit Einlippentiefbohrern*. VDI-Verlag, Düsseldorf. [4](#)
- Venables, W. N. und B. D. Ripley (2002). *Modern Applied Statistics with S* (4. Aufl.). New York: Springer-Verlag. [15](#)
- von Sachs, R. (1991). *Peak-Insensitive Nonparametric Spectrum Estimation*. Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg. [19](#), [22](#)
- von Sachs, R. (1994). Peak-Insensitive Nonparametric Spectrum Estimation. *Journal of Time Series Analysis* 15(4), S. 429–452. [19](#), [22](#)

- Wei, W. W. S. (1990). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. Reading, MA, Menlo Park, CA: Addison-Wesley Publishing Company Inc. [11](#)
- Weinert, K., C. Peters und J. Mehnen (2001). Analyse der Prozessdynamik beim Einlippen-Tiefbohren. *wt Werkstatttechnik* 91 (H. 8), S. 510–513. [110](#)
- Weinert, K., C. Peters und J. Mehnen (2002). Rechnerbasierte Prozess-Zustandserkennung beim Einlippen-Tiefbohren. *VDI-Z* 144(1/2), S. 48–51. [4](#), [112](#)
- Welch, P. D. (1967). The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* AU-15(2), S. 70–73. [19](#)
- Wetherill, G. B. und D. W. Brown (1991). *Statistical Quality Control – Theory and Practice*. London: Chapman and Hall. [70](#)
- Wickerhauser, M. V. (1993). *Adaptive Wavelet-Analyse – Theorie und Software*. Braunschweig, Wiesbaden: vieweg. [33](#), [34](#), [35](#), [36](#), [113](#), [114](#)
- Willemain, T. R. und G. C. Runger (1996). Designing Control Charts Using an Empirical Reference Distribution. *Journal of Quality Technology* 28(1), S. 31–38. [83](#)