

Kapitel 3

Angeregte Zustände der Kerne

3.1 Gammaspektroskopie

3.1.1 Zerfallsgesetz und seine Anwendungen

Aus der zeitabhängigen Störungsrechnung leitet man **Fermi's goldene Regel** ab, die die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit angibt

$$\frac{d\omega}{dt} = \lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{H}_{WW} | i \rangle|^2 \rho(E_F) ,$$

dabei sind mit den richtigen Dimensionen

Ψ (initial,final)	$[cm^{-3/2}]$	Wellenfunktion
$\langle f \hat{H}_{WW} i \rangle$	$[eV cm^{-3} cm^3]$	Matrixelement
ρ	$[eV^{-1}]$	Zustandsdichte pro Energieintervall

Die Wahrscheinlichkeit, in der Zeit t nicht zu zerfallen, sei $p = p(t)$. Die Wahrscheinlichkeit, in der Zeit $t+t_o$ nicht zu zerfallen, ist $p = p(t+t_o) = p(t)p(t_o)$. Dieser Faktorisierungsansatz gilt, weil es sich um einen statistischen Prozeß handelt, bei dem das „Überleben“ des Kerns während des Zeitintervalls t unabhängig von dem während des Zeitintervalls t_o ist. Die Zerfallswahrscheinlichkeit hängt also nicht von der Vorgeschichte des Kerns ab.

Für ein festes t_o gilt dann:

$$\frac{dp(t+t_o)}{dt} = \frac{dp(t)}{dt} p(t_o) .$$

Teilt man nun beide Seiten jeweils durch $p(t+t_o) = p(t)p(t_o)$ so erhält man (wegen t_o fest)

$$\begin{aligned} \frac{dp(t+t_o)/dt}{p(t+t_o)} &= \frac{dp(t)/dt}{p(t)} = -\lambda = -\frac{dw}{dt} \\ &\rightarrow p(t) = e^{-\lambda t} . \end{aligned}$$

Stehen zur Zeit t $N(t)$ und zur Zeit $t = 0$ N_o Kerne zur Verfügung, so gilt

$$N(t) = N_o e^{-\lambda t}$$

Hierbei ist λ die Zerfallskonstante und $\tau = 1/\lambda$ die Lebensdauer ($t_{1/2} = (\ln 2)\tau \approx 0.69\tau$ die Halbwertszeit).

Während der Zeit $t = \tau$ (Lebensdauer) reduziert sich die Anzahl der Kerne bis auf das $1/e$ -fache des ursprünglichen Wertes. Während der Zeit $t = t_{1/2}$ halbiert sich die Anzahl der Kerne.

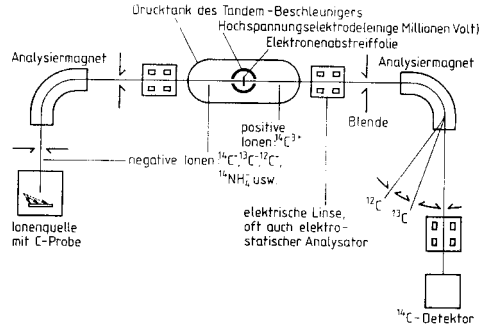
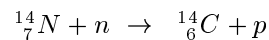


Abbildung 3.1: Apparatur zur Datierung von ^{14}C -Proben mit einem Alter bis zu 50 000 a

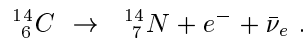
3.1.2 Anwendungsbeispiele [24, 25]

Die ^{14}C -Methode

Bei dieser Methode handelt es sich um eine Altersbestimmungsmethode für organische Materialien (Pflanzen; Tiere; viele Kunstgegenstände, die natürliche Fasern enthalten). In der Atmosphäre wird der Kern ^{14}C laufend durch die Reaktion von Neutronen der kosmischen Strahlung



gebildet. Er zerfällt mit einer Halbwertszeit von $t_{1/2} = (5730 \pm 40)a$. Mit der Zeit stellt sich in der Atmosphäre ein konstantes Gleichgewicht ein. ^{14}C wird während des Lebens eines Organismus, bedingt durch seinen Stoffwechsel mit der Umgebung, eingebaut und erreicht ein konstantes Verhältnis von etwa 10^{-12} für $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$. Nach dem Absterben des Organismus ändert sich dieses Verhältnis gemäß einem Exponentialgesetz für den Zerfall



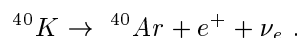
Es gilt

$$N(t = 1999) = \frac{\lambda N}{\lambda} = -\frac{dN}{dt} \tau .$$

Messen wir also die jetzige Zerfallsrate $\frac{dN}{dt}$, können wir das heutige Konzentrationsverhältnis mit dem zur Zeit des Absterbens vergleichen und somit das Alter der Probe bestimmen. Besser bestimmt man direkt die Anzahl der ^{14}C -Atome mit Hilfe eines Massenspektrographen für eine vorgegebene Stoffmenge. Erreichbar sind dadurch Altersbestimmungen bis zu 50 000 Jahre. 1 mg an Material genügt dabei. Siehe Abb.3.1. Weitere Details finden sich in [24, 26].

Die K/Ar -Methode

Diese Altersbestimmungsmethode dient zur Altersbestimmung von Gesteinen (Erd- und Mondgestein sowie von Meteoriten). Man geht davon aus, daß bei der Gesteinsbildung das Isotop ^{40}K eingebaut wurde und alles im Gestein eingeschlossene ^{40}Ar Gas nur durch den folgenden Zerfall entstehen kann ($t_{1/2} = 1.28 \cdot 10^9 a$ partielle Halbwertszeit):



Mißt man nun die Kaliumkonzentration (n -Aktivierung) und die Argonkonzentration (Massenspektrograph), kann der Zeitpunkt der Gesteinsbildung bestimmt werden.

Anwendungen dieser Methode:

- Bestimmung der Zeitpunkte der Umkehr des Erdmagnetfeldes aus Sedimentgestein (Ausrichtung der Magnetisierung im Gestein z. B. des mittellatlantischen Grabens),

- Datierung der Schichten, in denen Fossilien gefunden werden ($3 \cdot 10^6$ a),
- Bestimmung des Alters des Sonnensystems (Meteore untersuchen, $4.8 \cdot 10^9$ a).

Eine weitere Anwendung ist die **Aktivierung mit Neutronen** (Anfängerpraktikum V. 702). In diesem Versuch werden gleichzeitig Isotope durch Neutroneneinfang erzeugt und zerfallen. Es gilt also:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_+}{dt} - \frac{dN_-}{dt} = f\sigma N - \lambda N = P - \lambda N$$

$$\lambda N(t) = P(1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{mit } N(t=0) = 0 .$$

Für große Zeiten strebt die Zahl des erzeugten Isotops asymptotisch einem Sättigungswert entgegen. Es ist daher bei der Produktion kurzlebiger Isotope für die Medizin und die Materialforschung an Zyklotronen oder Reaktoren (Neutronenquellen) nicht sinnvoll, länger als einige Halbwertszeiten zu aktivieren. Auch die zu Beginn dieses Abschnitts diskutierte Produktion des ${}^{14}_6\text{C}$ erfüllt die obige Gesetzmäßigkeit.

3.1.3 Übergangswahrscheinlichkeiten für elektrische Dipolstrahlung

Wir haben bereits in Kap.1.1 an das klassische Resultat für die abgestrahlte Energie eines Hertzschens Dipols erinnert:

$$I_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{a}^2 = \frac{dw}{dt} E_\gamma \sim E_\gamma^4 \vec{d}^2 .$$

Dabei ist $E_\gamma = \hbar\omega$ die Energie des abgestrahlten Photons, \vec{d} das Dipolmoment des klassischen Hertzschens Dipols und $\frac{dw}{dt}$ die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. Dieses Resultat wird in der Quantenmechanik (Physik IV, HQM) übersetzt in (Faktor 2 aus Quantenelektrodynamik):

$$\frac{dw}{dt}(n_2 \rightarrow n_1) = \frac{4}{3} \underbrace{\frac{e^2}{\hbar c}}_\alpha \frac{1}{\hbar^3 c^2} \underbrace{(E_{n_2} - E_{n_1})^3}_{\sim \omega^3} \underbrace{|\langle n_2 | \vec{r} | n_1 \rangle|^2}_{\vec{d}^2} .$$

Der Störoperator ist

$$\hat{H} = -\frac{e}{mc} \hat{\vec{p}} \vec{A} = - \underbrace{e}_{\text{Kopplung}} \underbrace{\frac{\hat{\vec{p}}}{mc}}_{\text{Teilchen}} \underbrace{\vec{A}}_{\text{Photon}} .$$

Eine Dimensionsbetrachtung zeigt uns

$$\vec{A} \quad \left[\sqrt{\frac{\text{Energie}}{\text{Länge}}} \right], \quad \text{denn } u = \frac{\vec{B}^2}{4\pi} \quad \text{und } \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$e\vec{A} \quad \left[\sqrt{\frac{\text{Energie}}{\text{Länge}}} \sqrt{\text{Energie} \cdot \text{Länge}} \right]$$

$$u \quad \left[\frac{\text{Energie}}{\text{Länge}^3} \right]$$

Aus dem Übergangsmatrixelement folgt sofort die **Paritätsauswahlregel** (Laportesche Regel) für elektrische Dipolstrahlung

$$\langle n_2 | \vec{r} | n_1 \rangle = \int u_{n_2}^*(\vec{r}) \hat{P}^{-1} \hat{P} \vec{r} \hat{P}^{-1} \hat{P} u_{n_1}(\vec{r}) d^3 r$$

$$= \int u_{n_2}^*(-\vec{r}) \cdot (-\vec{r}) \cdot u_{n_1}(-\vec{r}) d^3 r = -\Pi_{n_1} \Pi_{n_2} \int u_{n_2}^*(\vec{r}) \vec{r} u_{n_1}(\vec{r}) d^3 r .$$

Falls Kernniveaus Zustände wohldefinierter Parität sind, gilt

$$u_n(\vec{r}) = \Pi_n u_n(-\vec{r}) \quad \Pi_n = \pm 1 \quad (\text{Parität des Zustands } n)$$

Dann folgt daraus die Auswahlregel:

$$\Pi_{n_1} = -\Pi_{n_2} .$$

Die weiteren Auswahlregeln ergeben sich aus:

$$\langle nlm | \vec{r} | n'l'm' \rangle = \int_0^\infty R_{nlm}^* R_{n'l'm'} r^3 dr \begin{pmatrix} \int \int \sin \theta e^{i\varphi} Y_{lm}^* Y_{l'm'} d \cos \theta d\varphi \\ \int \int \sin \theta e^{-i\varphi} Y_{lm}^* Y_{l'm'} d \cos \theta d\varphi \\ \int \int \cos \theta Y_{lm}^* Y_{l'm'} d \cos \theta d\varphi \end{pmatrix}$$

wobei

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x + iy \\ x - iy \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta e^{i\varphi} \\ r \sin \theta e^{-i\varphi} \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

als Koordinaten verwendet werden.

Wie man leicht sieht, müssen lm und $l'm'$ bestimmte Bedingungen erfüllen, damit das Matrixelement (mindestens eine Vektorkomponente) ungleich Null ist:

Die Integration über φ liefert uns die Bedingung:

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm i\varphi} e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{\pm i(m-m'\pm 1)\varphi} d\varphi \neq 0 \rightarrow m - m' = \pm 1$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{\pm i(m-m')\varphi} d\varphi \neq 0 \rightarrow m = m' .$$

Dies ergibt die Auswahlregeln:

$$\Delta m = 0, \pm 1 .$$

Die Integration über θ gibt eine weitere Bedingung

$$\int_{-1}^1 \cos \theta P_{lm}(\cos \theta) P_{l'm'}(\cos \theta) d \cos \theta \neq 0 \rightarrow l - l' = \pm 1 .$$

Daraus folgt die Auswahlregel:

$$\Delta l = \pm 1 .$$

Diese Auswahlregel ist in Übereinstimmung mit der Laporteschen Regel aber stärker. Weiter gilt

$$\frac{d\omega}{dt} \sim \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} ,$$

$\frac{d\omega}{dt}$ ist meßbar und hängt gleichzeitig mit dem Übergangsmatrixelement $\langle n'l'm' | \vec{r} | nlm \rangle$ zusammen, dessen Wert durch die Radialwellenfunktionen festgelegt ist. Der Vergleich zwischen Theorie und Experiment erlaubt also die Überprüfung der theoretischen Vorhersage für die Radialwellenfunktion. Dieser Test ist besonders empfindlich, weil Interferenzterme im Matrixelement der Radialwellenfunktionen auftreten.

3.1.4 Höhere Multipole

In der Kernphysik beobachtet man auch Übergänge, die sich um $\Delta l \neq \pm 1$ unterscheiden. In der Atomphysik werden diese Übergänge fast nie beobachtet, da die Atome gewöhnlich mit der Wand oder anderen Atomen ihrer Umgebung zusammenstoßen und dann strahlungslos ihre Energie abgeben. Bei Kernen ist dies nicht möglich, weil die Hülle den Kern von der Umgebung abschirmt. Diese Kernniveaus sind keineswegs stabil, sie zerfallen vielmehr durch Emission von Photonen. In diesem Fall ist die Dipolnäherung für die Ladungsverteilung nicht gut. Es müssen höhere Multipolmomente (Physik II) herangezogen werden.

Man kann zeigen, daß für höhere Multipole, bei denen das Photon den Drehimpuls davonträgt, gilt:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \omega \left(\frac{R_K}{\lambda} \right)^{2L} \cdot \text{stat. Faktor}(L) \cdot \left(\frac{v}{c} \right)^2 .$$

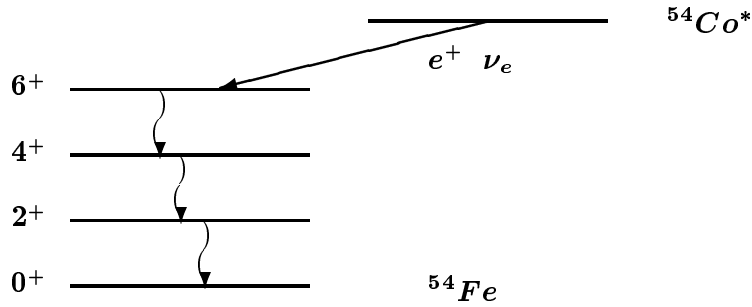


Abbildung 3.2: Kaskadenübergänge nach Beta-Zerfall von ^{54}Co zum Grundniveau von ^{54}Fe . Das γ -Spektrum ist in Abb.1.17 gezeigt.

Dabei kann man sich den Faktor $\frac{v}{c}$ (tritt nur für magnetische Multipolstrahlung auf) wie folgt plausibel machen:

$$\begin{aligned} \vec{E}_E &\sim \frac{eR}{r} \omega^2 \sim \frac{eR}{r} \frac{1}{\lambda^2} \\ \vec{E}_M &\sim \frac{e\hbar}{mc} \frac{1}{r} \frac{1}{\lambda^2} \\ \text{mit } R \cdot mv &= \hbar \\ \Rightarrow \vec{E}_E &\sim \frac{e}{r} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\hbar}{mv} \end{aligned}$$

und damit ist

$$\frac{\vec{E}_M}{\vec{E}_E} = \frac{mv}{mc} = \frac{v}{c} \ll 1 \quad \text{für nicht rel. Quelle (Kern, Atom).}$$

Dabei ist L die Multipolarität der Strahlung. Es gelten die Auswahlregeln

Elektrischer Dipol	$L = 1$	$\Delta J = \pm 1$	$\Pi_1 \Pi_2 = -1$	E1-Strahlung
Elektrischer Quadrupol	$L = 2$	$\Delta J = \pm 2$	$\Pi_1 \Pi_2 = +1$	E2-Strahlung
Elektrischer Multipol	L	$\Delta J = \pm L$	$\Pi_1 \Pi_2 = (-1)^L$	EL-Strahlung

Ist die Quelle der Strahlung ein Strom (oder ein umklappendes magnetisches Moment (NMR)), dann tritt magnetische Multipolstrahlung auf mit den Auswahlregeln

Magnetische Dipol	$\Delta J = \pm 1$	$\Pi_1 \Pi_2 = +1$	M1-Strahlung
Magnetische Quadrupol	$\Delta J = \pm 2$	$\Pi_1 \Pi_2 = -1$	M2-Strahlung
Magnetische Multipol	$\Delta J = \pm L$	$\Pi_1 \Pi_2 = (-1)^{L+1}$	ML-Strahlung

Da im Kern $\frac{v}{c} \ll 1$, folgt daraus:

$$\frac{dw}{dt}(EL) \gg \frac{dw}{dt}(ML) .$$

Es tritt nur die kleinste erlaubte Multipolarität auf (Faktor $\frac{R_k}{\lambda} \ll 1$), allerdings können ML und E(L+1) konkurrieren.

Des weiteren sei bemerkt, daß elektromagnetische Strahlung einen Drehimpuls trägt, was in einem Experiment mit einer Drehmühle nachgewiesen werden kann. In Abb.3.2 dominiert E2-Strahlung.

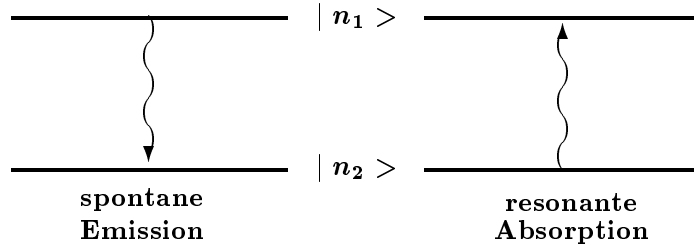


Abbildung 3.3: Kernresonanzfluoreszenz

3.1.5 Kernresonanzfluoreszenz, Mößbauereffekt

LITERATUR: [27, 28, 29]

Der Mößbauereffekt nutzt die **Kernresonanzfluoreszenz** aus (siehe Abb.3.3). Seine Bedeutung liegt darin, daß er extrem präzise Messungen sehr hoher Frequenzen gestattet. Er hat zahlreiche Anwendungen in der Festkörperphysik, Materialforschung, Biologie, Chemie etc. ...

Die Grundbedingung für die Resonanzabsorption (Na-D-Linie, Frauenhoferlinien in der Atomphysik) ist

$$\Delta E = |E_{n_1} - E_{n_2}| = E_\gamma .$$

Diese Bedingung ist aber an bestimmte Randbedingungen geknüpft:

- Die Auswahlregeln müssen erfüllt sein,
- die Kinematik der Emission und der Absorption ist zu beachten (Dopplereffekt).

Der vor der Emission ruhende Kern hat wegen der Impulserhaltung einen dem ausgesandten Photon entgegengesetzten Impuls, und dieses hat wegen der Energieerhaltung eine kleinere Energie E_γ als die zur Verfügung stehende Energie ΔE der Kernniveaus.

$$\vec{p}_\gamma = -\vec{p}_K \quad , \quad \Delta E = E_\gamma + E_K = E_\gamma + \frac{p_K^2 c^2}{2m_K c^2} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m_K c^2} .$$

Andererseits nimmt der vor der Absorption ruhende Kern den Impuls des Photons auf, welches aus Impuls- und Energieerhaltungsgründen eine größere Energie haben muß als die zur Anregung nötige, denn:

$$\vec{p}'_\gamma = \vec{p}_K \quad , \quad E'_\gamma = \Delta E + \frac{p_K^2}{2m_K} = \Delta E + \frac{E'_\gamma{}^2}{2m_K c^2} .$$

Setzen wir näherungsweise

$$\frac{E_\gamma^2}{2m_K c^2} \approx \frac{E'_\gamma{}^2}{2m_K c^2} \approx \frac{\Delta E^2}{2m_K c^2} \ll 1 ,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_K c^2}\right) \\ E'_\gamma &= \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2m_K c^2}\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt $E_\gamma \neq E'_\gamma$, d.h. das Photon kann nicht von freien Atomen emittiert und von anderen freien wieder absorbiert werden, es sei denn, die Niveaus haben eine hinreichende Breite. Die Kernniveaus haben aber eine endliche Lebensdauer $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma(E)}$ und damit eine endliche Breite $\Gamma(E)$. Solange also $E_\gamma - E'_\gamma < \Gamma(E)$ bleibt, ist Resonanzabsorption möglich.

In der Atomphysik haben wir typische Lebensdauern von $\tau = 10^{-9}s$ daraus ergibt sich eine Energiebreite von

$$\Gamma(E) = \frac{\hbar c}{\tau c} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-15} \text{ m eV}}{10^{-9}s \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1 \text{ } \mu\text{eV}$$

$$\frac{\Delta E^2}{2m_K c^2} = \frac{(1\text{eV})^2}{10^{11}\text{eV}} = 10 \text{ peV}$$

$$\Rightarrow E'_\gamma - E_\gamma \approx 10^{-11}\text{eV} \ll 1 \text{ } \mu\text{eV} \rightarrow \text{Resonanzabsorption ist m\u00f6glich,}$$

w\u00e4hrend wir in der Kernphysik u.a. typische Lebensdauern von $\tau = 10^{-7}s$ (3/2 Niveau bei ^{57}Fe) haben:

$$\Gamma(E) = \frac{\hbar c}{\tau c} = \frac{200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-15} \text{ m eV}}{10^{-7}s \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6 \text{ neV}$$

$$\frac{\Delta E^2}{2m_K c^2} = \frac{(14,4 \cdot 10^3 \text{eV})^2}{57 \cdot 10^9 \text{eV}} = 4 \text{ meV}$$

$$\Rightarrow E'_\gamma - E_\gamma \approx 4 \text{ meV} \gg 6 \text{ neV} \rightarrow \text{keine Resonanzabsorption.}$$

Man erwartet also in der Atomphysik Resonanzabsorption, w\u00e4hrend man in der Kernphysik weitere experimentelle Tricks anwenden mu\u00df, um sie zu erhalten.

Durch geeignete Ma\u00dfnahmen (Temperaturerh\u00f6hung, Kernr\u00fccksto\u00df (Goldhaber–Grodzins-Experiment, siehe Kap.3.2.8), Zentrifuge ...) f\u00fchrt man dem Kern gezielt Energie der Gr\u00f6\u00dfenordnung 8 meV zu. Die Energieverschiebung beim Dopplereffekt ist (v = Geschwindigkeit der Quelle):

$$E_\gamma^D = E_\gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Damit $E_\gamma = \Delta E$ mu\u00df gelten

$$E_\gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2m_K c^2} \cdot 2\right).$$

Wir erhalten also die Resonanzbedingung

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta E}{m_K c^2}.$$

Als Zahlenbeispiel sei der Kern ^{152}Eu angegeben (siehe Kap.3.2.8):

$$\frac{\Delta E}{m_K c^2} = \frac{1 \text{ MeV}}{152 \cdot 938 \text{ MeV}} = 10^{-5} = \frac{v}{c} \rightarrow v = 1000 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Diese Geschwindigkeiten sind so hoch, da\u00df man sie nur unter speziellen Bedingungen realisieren kann (Kernr\u00fccksto\u00df, Zentrifuge). Man spricht von Kernresonanzfluoreszenz-Experimenten. Durch Variation von v kann mit ihrer Hilfe $\Gamma(E)$ gemessen werden.

M\u00f6\u00dfbauereffekt

Eine Alternative besteht darin, die Masse m_K effektiv zu vergr\u00f6\u00dfern, indem man den Kern in einen Kristall einbaut. Dann wird der Impuls auf den ganzen Kristall \u00fcbertragen und $\frac{\Delta E^2}{2m_K c^2}$ geht gegen Null (M\u00f6\u00dfbauereffekt).

Mit einem kleinen Kristall reichen bereits Geschwindigkeiten von $v = \frac{1 \text{ cm}}{\text{s}} \dots \frac{1 \text{ mm}}{\text{Woche}}$ aus, um die Resonanzbedingung zu erf\u00fcllen. Man erreicht dabei ein Aufl\u00f6sungsverm\u00f6gen von $\frac{v}{c} \leq \frac{\Gamma}{E_\gamma} = 3 \cdot 10^{-13}$ bei ^{57}Fe und von $\frac{v}{c} \leq \frac{\Gamma}{E_\gamma} = 3 \cdot 10^{-16}$ bei ^{67}Zn .

Nachdem bis jetzt die Kinematik des M\u00f6\u00dfbauereffekts besprochen wurde, wollen wir uns der **Dynamik** zuwenden. Dazu soll kurz auf die **Quantenmechanik** des M\u00f6\u00dfbauereffekts eingegangen werden. Wir beschreiben die Kristallbindung der Kerne im Rahmen des Einstein-Modells (harmonischer Oszillator)

$$\hat{H} = \hat{H}_K + \frac{m\omega_E^2}{2} \hat{x}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Eigenwerte:} & \quad E_{K,n} = E_K + \hbar\omega_E(n + \frac{1}{2}) \\ \text{Eigenzustände:} & \quad \Psi = \Psi_K(\vec{r})u_n(x) \end{aligned}$$

Dann ergibt sich die emittierte/absorbierte Energie zu ($\alpha = \text{Anfangs-}$, $\beta = \text{Endzustand}$)

$$E_\gamma = E_\alpha - E_\beta + \hbar\omega_E(n_\alpha - n_\beta) .$$

Bei der Emission des γ -Quants ändert sich der Impuls des Oszillators abrupt um (eindimensionales Modell!)

$$|\vec{q}| + \frac{E_\gamma}{c} \approx \frac{(E_\alpha - E_\beta)}{c} .$$

Die Impulsverteilung der im Gitter gebundenen Kerne im Zustand $n = 0$ des Kristalls ist

$$v_o(p) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} \int u_o(x) e^{ipx/\hbar} dx .$$

Kerne, die sich nach der Abstrahlung des γ -Quants weiterhin im Grundzustand $n = 0$ befinden, werden durch die Wellenfunktion $v_o(\vec{p} + \vec{q})$ beschrieben. In der Ortsdarstellung ist dann die Wellenfunktion

$$u_f(x) = \int v_o(p+q) e^{ipx/\hbar} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}} \int v_o(Q) e^{i(Q-q)x/\hbar} dQ = u_o(x) e^{-iqx/\hbar} .$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei der Emission keine Energie auf das Gitter übertragen wird ($n = 0 \rightarrow n = 0$), ist dann gegeben durch:

$$w_{o \rightarrow o} = \left| \int u_o(x) u_o^*(x) e^{iqx/\hbar} dx \right|^2 \underset{P_{h.IV}}{=} \left(\sqrt{\frac{m\omega_E}{\pi\hbar}} \right)^2 \left| \int e^{-\frac{m\omega_E x^2}{2\hbar}} e^{iqx/\hbar} dx \right|^2 = e^{-\frac{q^2}{2m} \frac{1}{\hbar\omega_E}}$$

Weiterhin zeigt die quantenmechanische Rechnung, daß

$$\sum_n w_{o \rightarrow n} = 1 - w_{o \rightarrow 0} \neq 0 ,$$

d.h. mit endlicher Wahrscheinlichkeit tritt auch „nicht rückstoßfreie Emission“ auf. Die kinematische Beschreibung zu Beginn des Abschnitts ist also nur eingeschränkt richtig. Der Mößbauer-effekt beruht auf der Quantenmechanik. Beschreibt man den Kristall realistischer mit Hilfe des Debye-Modells, dann berücksichtigt man auf diese Weise die verschiedenen Anregungszustände des Gitters und – da $T \neq 0$ – auch Zustände mit $n \neq 0$ vor der Emission. So erhält man für die rückstoßfreie Emission allgemein ($T \ll \theta_D$)

$$w_{o \rightarrow o} = f = \exp \left(-\frac{3E_\gamma^2}{2mc^2} \frac{1}{k\theta_D} \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi T}{\theta_D} \right)^2 \right) \right)$$

mit $\theta_D = \text{Debye-Temperatur}$. f nennt man den Debye-Waller-Faktor.

Beispiel ^{57}Fe : $\theta_D = 420\text{K}$, $E_\gamma = 14.4 \text{ keV}$, $\rightarrow f = 0.91$.

Nur für eine kleine Zahl von Kernen besteht die Chance, rückstoßfreie Emission zu beobachten. Dieser Effekt wurde 1958 von Mößbauer entdeckt, der für diese Leistung bereits 1960 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde.

Anwendungsbeispiele

Die Anwendungen in der Festkörperphysik, Chemie, Biologie etc. nutzen die hohe Energieauflösung des Mößbauereffekts aus:

$$\frac{\Gamma}{E} = 10^{-11} \dots 10^{-15} .$$

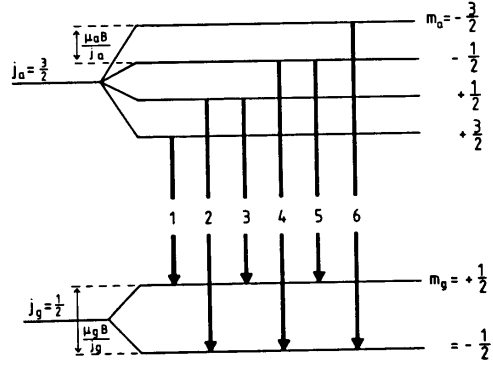
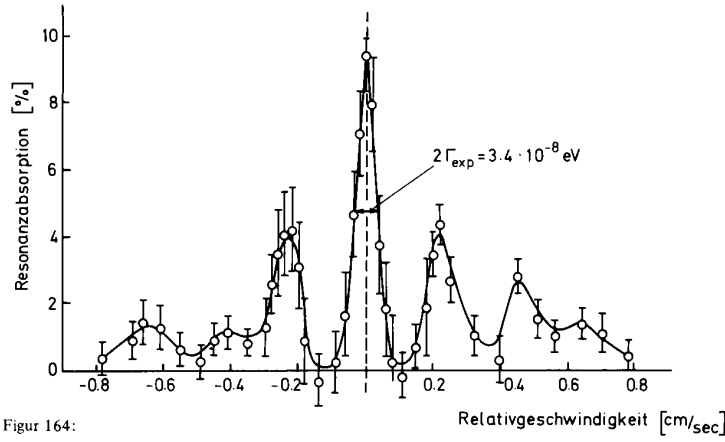


Abbildung 3.4: Linienaufspaltung durch Magnetfelder in ^{57}Fe



Figur 164:

Abbildung 3.5: Linienaufspaltung durch Magnetfelder in ^{57}Fe , experimentelle Ergebnisse

1. Messung lokaler Felder im Festkörper (siehe Diagramm zur Linienaufspaltung Abb.3.4). Man kann das komplexe Emissions- und Absorptionsspektrum messen (siehe Abb.3.5) und bestimmt so das Feld $|\vec{B}|$ am Kernort und die Aufspaltung durch inhomogene elektrische Felder (der $\frac{3}{2}^-$ -Zustand hat ein elektrisches Quadrupolmoment, an das der elektrische Feldgradient ankoppelt und eine Aufspaltung bewirkt).
2. Pound-Rebka-Experiment (siehe [30]). Der Ausgangspunkt ist die Frage, ob die schwere Masse der Photonen gleich der trägen Masse ist (Grundpostulat der allgemeinen Relativitätstheorie, siehe hierzu den experimentellen Aufbau Abb.3.6). Die Quelle und der Absorber müssen auf der gleichen Temperatur liegen (quadratischer Dopplereffekt). Die Änderung der potentiellen Energie des Photons mit schwerer Masse m_s ist dann

$$dE = m_s gh = m_s c^2 \frac{gh}{c^2} = m_t c^2 \frac{gh}{c^2} = E_\gamma \frac{gh}{c^2} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ eV}$$

$$\frac{dE}{E_\gamma} = \frac{m_s gh}{m_t c^2} = \frac{gh}{c^2} = 2.2 \cdot 10^{-15} .$$

Gemessen wird

$$\frac{m_s}{m_t} = 1.00 \pm 0.01 .$$

Damit ist das Grundpostulat der allgemeinen Relativitätstheorie für Photonen durch Experimente abgesichert.

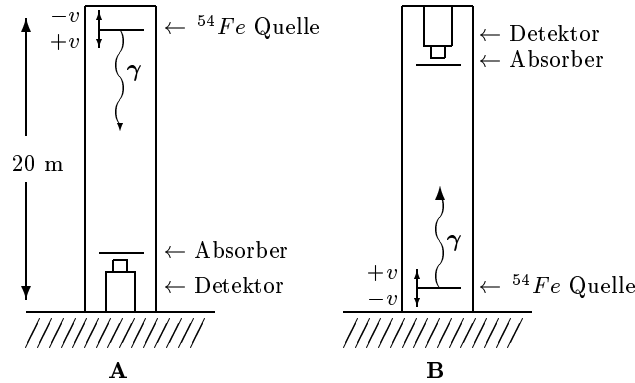


Abbildung 3.6: Schema des experimentellen Aufbaus des Pound–Rebka–Versuchs

*Zweifele an Allem wenigstens einmal,
und wäre es auch der Satz, daß $2 \times 2 = 4$.
G. C. Lichtenberg*

3.2 β -Zerfall

LITERATUR: [31, 32, 6]

In Kap.3.1, in dem der γ -Zerfall der Kerne untersucht wurde, konnten wir analog zu den Überlegungen der Atomphysik argumentieren. In diesem Paragraphen werden wir an die Überlegungen in Kap.3.1 anknüpfen: es wird jedoch eine neue Art von Strahlung und ein anderes Feldquant (siehe Kap.7.3) eine Rolle spielen.

Emittiert werden $(e^-, \bar{\nu}_e)$ - und (e^+, ν_e) -Paare, was zu Übergängen zwischen Isotopen führt (${}^A_Z K \rightarrow {}^A_{Z\pm 1} K$). In Kap.7.3 wird gezeigt, daß diese Paare an das W^\pm -Boson, das Feldquant der schwachen Wechselwirkung, koppeln.

3.2.1 Neutrinohypothese

Wir haben mehrere Beispiele kennengelernt, in denen Kerne nicht stabil sind, sondern vielmehr unter Strahlungsemission in energetisch tiefere Zustände übergehen.

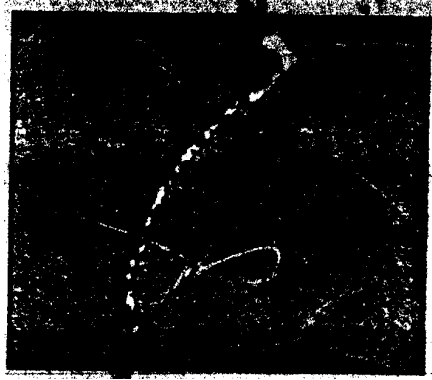
$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\hat{H}_{W^{\pm}}} |\beta\rangle + \gamma \quad (A = \text{const}, Z = \text{const})$$

Zwischen 1900 und 1940 wurde im Detail ein weiterer Strahlungsprozeß untersucht, bei dem sich die Ladung Z , aber nicht die Massenzahl A änderte.

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\hat{H}_{W^{\pm}}} |\beta\rangle + e^- + \bar{\nu}_e \quad (A = \text{const}, Z \rightarrow Z + 1).$$

Nachgewiesen wurden zunächst nur die Elektronen, im Vordergrund werden die (Anti)Neutrinos hier bereits berücksichtigt. Dabei beobachtete man, daß die emittierten Elektronen folgende Eigenschaft hatten:

- Das Energiespektrum der Elektronen ist kontinuierlich im Gegensatz zum diskreten Spektrum der Photonen (Abb.3.10).



← ${}^6\text{He}$ -Zerfallsort

Abbildung 3.7: Nachweis des Neutrinos durch den Kernrückstoß

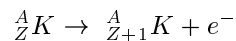
- Die Energie der höchstenergetischen Elektronen (Endpunkt des Spektrums) entspricht der Übergangsenergie ΔE :

$$\Delta E = E_\alpha - E_\beta = E_{e^- \text{ max}} .$$

- Kalorimetrische Messungen (L. Meitner) ergaben für die mittlere Energie der Elektronen:

$$\langle E_e \rangle \approx \frac{1}{3} \Delta E .$$

Schlußfolgerung: das naive Modell



versagt, da man bei Gültigkeit von Impuls- und Energiesatz ein Linienspektrum erwarten würde. Die Schwierigkeit, die diese Beobachtung bedeutete, wird deutlich, wenn man die Diskussion über eine mögliche Erklärung dieser Beobachtung unter Physikern verfolgt [33]. Pauli schlug zur Lösung des Problems vor, daß es ein weiteres unbeobachtetes, neutrales Teilchen gäbe (Neutrino) [34]. Folgende Informationen standen ihm für seine Hypothese zur Verfügung:

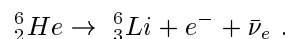
- das kontinuierliche Spektrum,
- die mittlere Energie der Elektronen von $\frac{1}{3} \Delta E$,
- aus der Drehimpulsbilanz:

$$\text{Spin} \quad \underbrace{{}^{54}\text{Co}}_0 \rightarrow \underbrace{{}^{54}\text{Fe}}_0 + \underbrace{e^-}_{1/2} + \underbrace{\bar{\nu}_e}_? \Rightarrow \bar{\nu}_e \text{ hat Spin } \frac{1}{2} .$$

Pauli's Postulat (1930–1932) lautete:

Beim β -Zerfall wird das **Paar** (e^- , $\bar{\nu}_e$) emittiert. Dabei hat das Neutrino folgende Eigenschaften: Es ist ein Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen, nahezu masselos und zeigt nahezu keine Wechselwirkung mit Materie (Hinweis: Im Vorgriff auf Kap.3.2.7 und 5.2 wird hier bereits zwischen Neutrino ν und Antineutrino $\bar{\nu}$ unterschieden).

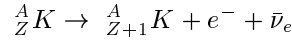
Bestätigt werden diese Vorstellungen durch Beobachtung des Kernrückstoßes (siehe Abb.3.7), zum Beispiel:



Daraus ist ersichtlich, daß an der Reaktion ein weiterer unbeobachteter (elektrisch neutraler) Partner beteiligt sein muß, um die Impulsbilanz zu erfüllen.

3.2.2 Energiebilanz

Wir wollen hier die Relation für die Masse der Kerne ableiten, die beim β -Zerfall beteiligt sind. Dabei diskutieren wir nur den Fall



im Detail. Weiterhin setzen wir voraus, daß $m_\nu = 0$.

Der β -Zerfall ist möglich, falls für die **Kernmassen** gilt:

$$N_Z \geq N_{Z+1} + m_e + \frac{1}{c^2} T_e \geq N_{Z+1} + m_e .$$

Die kinetische Energie der Kerne kann wegen

$$\frac{\vec{p}_K^2}{2M_K} \approx \frac{\vec{p}_e^2}{2M_K} \ll \frac{\vec{p}_e^2}{2M_e}$$

vernachlässigt werden.

Für die **Atommassen** gilt

$$\begin{aligned} M_z &= N_Z + Z \cdot m_e - \frac{b_z}{c^2} \\ M_{z+1} &= N_{z+1} + (Z+1) \cdot m_e - \frac{b_{z+1}}{c^2} \end{aligned}$$

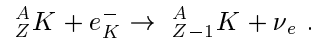
wobei b_z die Bindungsenergie der Elektronen im Atom ist. Nun substituiert man die Kernmassen durch die gefundene Beziehung zu den Atommassen in die schon aufgestellte Ungleichung. Unter Ausnutzung von $T_e \geq 0$ erhalten wir dann für Kerne, die unter Emission eines Elektrons zerfallen:

$$\begin{aligned} M_Z + \frac{b_Z}{c^2} &\geq M_{Z+1} + \frac{b_{Z+1}}{c^2} \\ M_Z &\geq M_{Z+1} + \frac{b_{Z+1} - b_Z}{c^2} . \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\begin{aligned} M_Z &\geq M_{Z+1} + 2m_e + \frac{b_{Z-1} - b_Z}{c^2} && (\beta^+-\text{Zerfall}) \\ M_Z &\geq M_{Z-1} + \frac{b_Z^e}{c^2} + \frac{b_{Z-1} - b_Z}{c^2} && (K\text{-Einfang}) \end{aligned}$$

Der K-Einfang ist die Umwandlung eines Protons in ein Neutron unter Einfang eines Elektrons einer inneren Schale (z.B. für ein K-Elektron):



Mit der Bindungsenergie des eingefangenen Elektrons in der K, L, M, \dots -Schale $b_{ZK}^e > b_{ZL}^e > b_{ZM}^e > \dots$

Wenn $M_Z - M_{Z-1}$ sehr klein ist, dann können nur Elektronen aus höheren Schalen eingefangen werden. In diesem Spezialfall ist die chemische Beeinflussung der Halbwertszeit eines Kerns möglich (Beispiel: ${}^{90}\text{Tc}$) Beim K-Einfang fliegen Kern und Neutrino wegen der Impulserhaltung in entgegengesetzte Richtung (siehe Kap.3.2.8 für eine Anwendung).

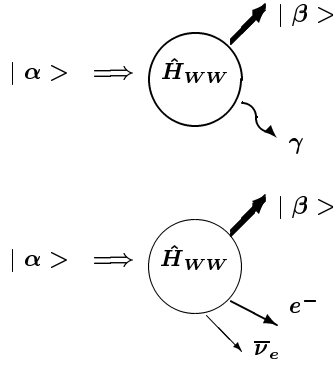


Abbildung 3.8: Analogie zwischen γ - und β -Zerfall

3.2.3 Fermi's Theorie des β -Zerfalls

Wir wollen einen quantitativen Ausdruck für das Energiespektrum der emittierten Elektronen und für die Übergangswahrscheinlichkeit $\frac{d\omega}{dt} = \lambda = \frac{1}{\tau}$ gewinnen. Ausgangspunkt dafür ist Fermi's goldene Regel

$$\tau^{-1} = \frac{2\pi}{\hbar} \underbrace{|\langle \beta | \hat{H}_{WW} | \alpha \rangle|^2}_{\text{Dynamik}} \underbrace{\frac{dN}{dE}}_{\text{Phasenraum}}$$

Fermi formulierte sein Modell in Analogie zum γ -Zerfall. (siehe Abb.3.8). Dabei macht er folgende Annahmen:

- Die β -Übergänge sind zurückführbar auf die Umwandlung der Kern-Bausteine

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad „ \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e “$$

Da

$$M_n c^2 - M_p c^2 = 1.2935 \text{ MeV},$$

ist die zweite Reaktion nur für gebundene Protonen möglich. Die anderen Nukleonen im Kern sind Zuschauer und wirken am Prozeß nicht mit (siehe Stoßapproximation Kap.1.2, 2.2). Diese Annahme impliziert Festlegungen über die Zeit der Umwandlung bzw. über die Reichweite der Wechselwirkung.

- Es muß ein Ansatz (Theorie) für den Wechselwirkungs-Operator gemacht werden. Am Ende der Vorlesung werden wir die moderne Theorie des β -Zerfalls (elektroschwaches Modell) besprechen, das aus Symmetrieargumenten einen Ansatz für die Wechselwirkung ableitet (siehe auch Kap.1 von Physik III). Wir setzen hier an für das Matrixelement (siehe Abb.3.9)

$$\langle \beta | \hat{H}_{WW} | \alpha \rangle = \int \int d^3 r_a d^3 r_b \phi_b^*(\vec{r}_b) \phi_a(\vec{r}_b) V(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \Psi_b^*(\vec{r}_a) \Psi_a(\vec{r}_a).$$

Die experimentellen Daten sind vereinbar mit der Annahme, daß die Reichweite der Wechselwirkung sehr kurz ist

$$V(\vec{r}_a - \vec{r}_b) = f \delta(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \hat{O}$$

$$\hat{O} | n \rangle = | p \rangle,$$

wobei \hat{O} ein Operator ist, der ein Neutron in ein Proton umwandelt (siehe Kap.5.3.3, wo dieser Operator explizit formuliert wird).

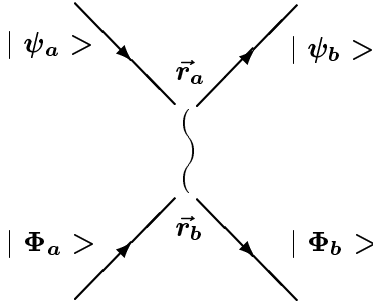


Abbildung 3.9: Feynmangraph einer Wechselwirkung

Mit Hilfe dieses Matrixelements können wir also die Übergangswahrscheinlichkeit berechnen.

$$\tilde{M} = f \int d^3r \phi_b^*(\vec{r}) \phi_a(\vec{r}) \hat{O} \Psi_b^*(\vec{r}) \Psi_a(\vec{r}) .$$

In unserem Beispiel haben wir die Reaktion

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

untersucht oder, was äquivalent ist (begründet durch die crossing-Symmetrie der relativistischen Quantenfeldtheorie)

$$n + \nu_e \rightarrow p + e^- .$$

Damit gilt

$$\tilde{M} = f \int_{Kern} d^3r \Psi_p^* \Psi_e^* \hat{O} \Psi_n \Psi_\nu .$$

Das ein- und auslaufende Neutrino bzw. Elektron wird durch ebene Wellen approximiert

$$\Psi_e \sim e^{i\vec{k}_e \vec{r}} \quad , \quad \Psi_\nu \sim e^{i\vec{k}_\nu \vec{r}} .$$

Mit den typischen Werten

$$\vec{k}_e \vec{r} \leq |\vec{k}_e| R_K = \frac{\vec{p}_e c}{\hbar c} R_K \approx \frac{1.5 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 3 \text{ fm}}{200 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot \text{fm}} = 10^{-2} \ll 1$$

gilt (die Leptonwellenfunktion ändert sich „nicht“ über das Kernvolumen)

$$\tilde{M} \approx f \int d^3r \Psi_p^* \hat{O} \Psi_n = \text{const} = G_F .$$

Diese Annahme erweist sich für viele leichte Kerne (Isobaren-Analogzustände) als gute Näherung. Die Wellenfunktionen Ψ_n, Ψ_p beschreiben die Nukleonen im Kern, ihre explizite Form ist nicht trivial (Kernphysik). In der Atomphysik kann man zur Einelektronennäherung übergehen und die Elektronenbewegung im konstanten äußeren (Coulomb-)Potential des Kerns beschreiben; die Wechselwirkung der Hüllenelektronen miteinander wird als Störung behandelt, während wir hier nur gegenseitige Wechselwirkung der Nukleonen kennen, den expliziten Ausdruck für die potentielle Energie aber erraten müssen (siehe Kap.3.3).

Kehren wir nun zu Fermi's goldener Regel zurück, so ist die Übergangswahrscheinlichkeit $\frac{d\omega}{dt}$ im wesentlichen durch den Phasenraumfaktor $\frac{dN}{dE_0}$ festgelegt.

Anmerkung: Analog zur elektromagnetischen Wechselwirkung (Physik III, HQM)

$$H_{WW}^{em} \sim j_\mu A^\mu \sim \bar{u} \gamma^\mu u \cdot \bar{u} \gamma^\mu u$$

können wir mit den Dirac-Spinoren u im Fall der schwachen Wechselwirkung ansetzen:

$$H_{WW}^{schw} \sim j_\mu J^\mu \sim \bar{u}_p \gamma^\mu u_n \cdot \bar{u}_\nu \gamma^\mu u_e .$$

3.2.4 Fermi's goldene Regel und Berechnung des Phasenraumvolumens

Nachdem das Matrixelement bekannt ist, bleibt die Aufgabe, für den Zerfall

$${}^A_Z K \rightarrow {}^A_{Z+1} K + e^- + \bar{\nu}_e$$

das Phasenvolumen zu berechnen. Für den Übergang steht die Energie E_o mit der Unschärfe dE_o zur Verfügung. Wir untersuchen den Zerfall im Ruhssystem des Mutterkerns. Dann gilt aufgrund der Impuls- und Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} \vec{p}_K + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu &= 0 \\ T_K + E_e + E_\nu &= E_o \approx E_e + E_\nu . \end{aligned}$$

Die kinetische Energie des Kerns kann vernachlässigt werden, denn es gilt:

$$T_K = \frac{p_K^2}{2M_K} \ll E_o .$$

Die Zahl der Phasenraumzustände des Elektrons bzw. des Neutrinos ist:

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} = V \int \frac{d\Omega p_e^2 dp_e}{h^3} \rightarrow \frac{dN}{dp_e} = \frac{4\pi V p_e^2}{h^3} \\ N &= \int \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} = V \int \frac{d\Omega p_\nu^2 dp_\nu}{h^3} \rightarrow \frac{dN}{dp_\nu} = \frac{4\pi V p_\nu^2}{h^3} . \end{aligned}$$

Wegen der Unschärferelation wird die Einheitszelle im 6-dimensionalen Phasenraum mit dem Volumen h^3 gewählt (Unschärferelation!). Wegen

$$\vec{p}_K = -(\vec{p}_e + \vec{p}_\nu)$$

ist das Phasenraumvolumen des Kerns festgelegt, wenn \vec{p}_e und \vec{p}_ν fixiert sind. Die Zahl der Endzustände ist damit insgesamt:

$$d^2 N = \frac{16\pi^2}{h^6} V^2 p_e^2 p_\nu^2 dp_e dp_\nu .$$

Da im Experiment üblicherweise nur das Elektronenspektrum gemessen wird, ist es sinnvoll, die Variablen des Neutrino zu eliminieren.

$$E_o - E_e = E_\nu = \sqrt{\vec{p}_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4} \approx |\vec{p}_\nu| c , \quad \frac{dE_\nu}{dp_\nu} = \frac{p_\nu c^2}{E_\nu}$$

mit $dE_\nu = dE_o$ bei festen E_e ergibt sich $dp_\nu = dE_o \frac{E_\nu}{p_\nu c^2}$, und die Substitution ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dE_o dp_e} &= \frac{16\pi^2}{h^6} V^2 \vec{p}_e^2 p_\nu^2 \frac{E_\nu}{p_\nu c^2} \\ &= \frac{16\pi^2}{h^6} \frac{V^2}{c^2} p_e^2 \frac{E_\nu}{c} \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \\ &= \frac{16\pi^2}{h^6} \frac{V^2}{c^3} p_e^2 E_\nu^2 \sqrt{1 - \frac{m_\nu^2 c^4}{E_\nu^2}} \end{aligned}$$

Die Wurzel wird gleich eins, wenn das Neutrino masselos ist. Ferner gilt $E_\nu = E_o - E_e$ und somit folgt:

$$\frac{d^2 N}{dE_o dp_e} = \frac{16\pi^2}{h^6} \frac{V^2}{c^3} p_e^2 (E_o - E_e)^2 \sqrt{1 - \frac{m_\nu^2 c^4}{E_\nu^2}} .$$

Durch diesen Ausdruck wird die Form des β -Spektrums festgelegt. Zweckmäßigerweise trägt man $\sqrt{\frac{d^2 N}{dE_o dp_e} \frac{1}{p_e^2} \frac{1}{F(Z, E_o)}}$ gegen $E_o - E_e$ auf (KURIE-Plot).

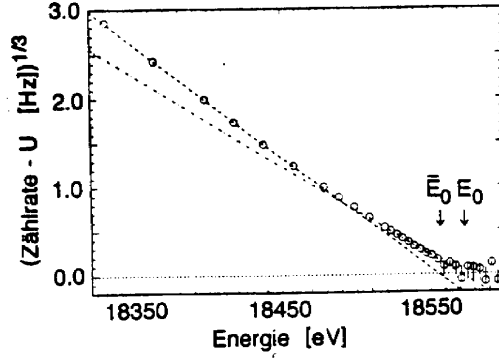


Abbildung 3.10: Kurie-Plot zur Bestimmung der Neutrinomasse. Die strichpunktlierte Linie ist im Bereich $E_0 - E < 50 \text{ eV}$ angepaßt, wo die Anregung des He^+ -Ions keine Rolle spielt.

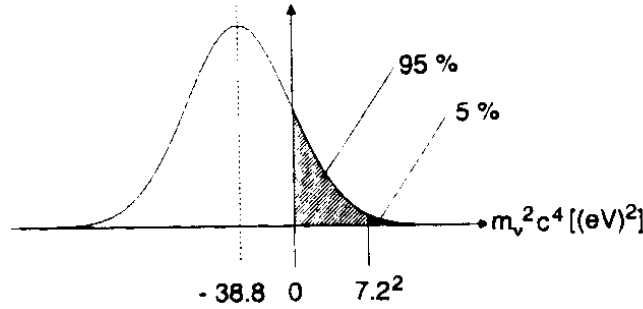


Abbildung 3.11: Confidence-Niveau für Grenzwerte für den Fall, daß $(m_\nu c^2)^2 = -38.8 \text{ eV}^2$ aus den Messungen folgte (siehe vorhergehende Abbildung des KURIE-Plots) [36, 37]

Dabei ist $F(Z, E_o)$ die **Fermifunktion**, die die Coulombwechselwirkung zwischen dem Elektron und dem Kern berücksichtigt und die wir in unserer Diskussion vernachlässigten (ebene Wellen für e^- anstelle der Coulombwellenfunktion). Sie liegt z. B. tabelliert vor in [35]. Dabei liefert der KURIE-Plot eine Gerade, falls die Neutrinomasse gleich Null ist. Man kann also durch den Kurvenverlauf nahe der Grenzenergie ($E_o - E_e \approx m_\nu c^2$) die Neutrinomasse bestimmen. Gemessen wurde sie in der Reaktion (Abb.3.10)



und man erhielt die Grenze (siehe Abb.3.11):

$$m_\nu c^2 < 2.8 \text{ eV} \quad (\text{mit } 95 \% \text{ CL}).$$

CL ist das Confidence-Niveau (Level) für Grenzwerte, siehe erläuternde Abb.3.11, [36, 37]. Durch Integration über das Energiespektrum erhält man die partielle Lebensdauer des Kerns für den β -Zerfall. Dabei müssen die Ψ_e, Ψ_ν geeignet normiert werden (Normierungsvolumen):

$$\Psi_{e,\nu} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_{e,\nu} \cdot \vec{r}}.$$

Dadurch hebt sich der Faktor V aus der Übergangswahrscheinlichkeit heraus

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi}{h} \frac{16\pi^2}{h^6 c^3} G_F^2 \int_0^{p_o} F(Z, p_e) \bar{p}_e^2 (E_o - E_e)^2 dp_e$$

$$= \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7} G_F^2 \frac{(mc)^3 (mc^2)^2}{c^3} \underbrace{\int_0^{\eta_0} F(Z, \eta) \eta^2 (\epsilon_o - \epsilon)^2 d\eta}_{f(Z, \eta_0)}$$

mit $\eta = \frac{p_e}{p_o}$ und $\epsilon = \frac{E_e}{E_o}$. Zusammengefaßt ergibt sich ($p_o = mc$, $E_o = mc^2$)

$$\tau f(\eta_o) = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m^5 c^4} \frac{1}{G_F^2}.$$

Aus Messungen von $O^+ \rightarrow O^+$ -Übergängen (superallowed transitions) hat man gefunden:

$$\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}.$$

Diese Größe ist ein Maß für die Stärke der schwachen Wechselwirkung, sie ist analog zu

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

bei der elektromagnetischen Wechselwirkung zu sehen.

Für Abschätzungen sei darauf hingewiesen, daß für große E_o gilt (siehe Übungsaufgabe):

$$c^3 \int_0^{p_o} \vec{p}_e^2 (E_e - E_o)^2 dp_e \approx \int_0^{E_o} E_e^2 (E_e - E_o)^2 dE \sim E_o^5.$$

Da e^- und $\bar{\nu}_e$ praktisch von einer Punktquelle emittiert werden ($R_K \ll \lambda$) tragen sie im allgemeinen keinen Bahndrehimpuls fort. Es können daher nur Übergänge zwischen Kernniveaus auftreten mit

$$\begin{array}{lll} \Delta I = 0 & \text{Spins } \uparrow_e \downarrow_\nu & \text{Fermi-Übergänge} \\ \Delta I = 0, \pm 1 & \text{Spins } \uparrow_e \uparrow_\nu & \text{Gamov-Teller-Übergänge} \end{array}$$

Im Fall des Gamov-Teller-Übergangs ist das Kernmatrizelement nicht 1, sondern 3 bei erlaubten Übergängen.

Es gibt empirisch die Klassifikation

$$\begin{array}{ll} \log f T_{1/2} = & 3 \text{ übererlaubte Übergänge (superallowed transitions)} \\ & \text{(Wellenfunktion von } n \text{ und } p \text{ gleich)} \\ & 6 \text{ erlaubte Übergänge} \\ & \text{(Wellenfunktion von } n \text{ und } p \text{ unterschiedlich)} \\ & > 9 \text{ verbotene Übergänge} \end{array}$$

Heute ist die Analyse der $\log f T_{1/2}$ -Werte wieder von großer Bedeutung, weil mit ihrer Hilfe die wichtige Kopplungskonstante (G_F) der schwachen Wechselwirkung gewonnen werden kann.

3.2.5 Direkter Nachweis der Neutrinos

LITERATUR: [39]

Wir haben gesehen, daß die postulierte Existenz des Neutrinos durch Pauli die Grundlage für Fermi's Theorie des β -Zerfalls ist. Dabei haben die Neutrinos die folgenden Eigenschaften:

- Spin $\frac{1}{2}$ (wegen $O^+ \rightarrow O^+ + e^- + \bar{\nu}$),
- $m_\nu \ll m_e$ (Form des β -Spektrums nahe E_o),

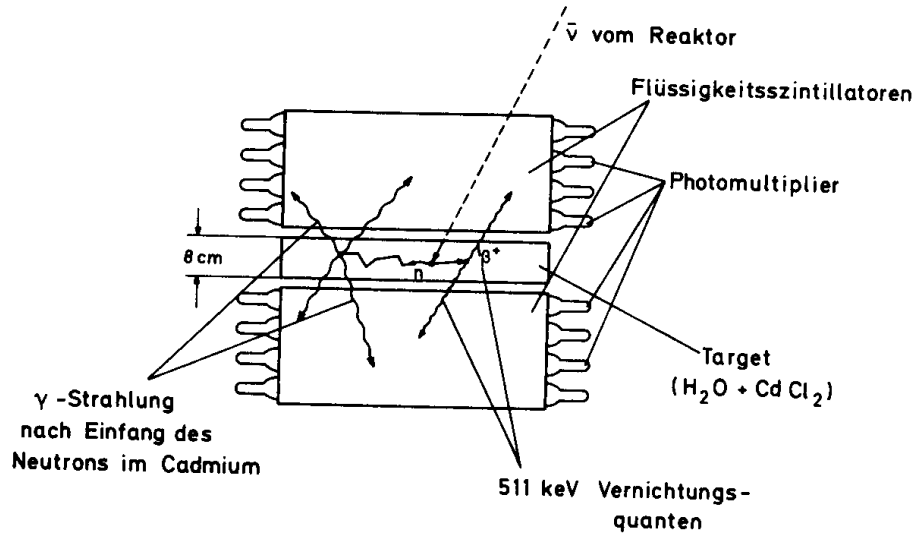
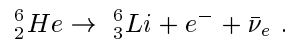


Abbildung 3.12: Experimenteller Aufbau zum Nachweis von Neutrinos

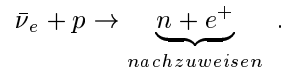
- Es zeigt nahezu keine Wechselwirkung mit Materie.

Ein indirekter Nachweis ist die Beobachtung des Kernrückstoßes bei der Reaktion (Abb.3.7)



Der direkte Nachweis der ν_e beruht auf folgendem Gedankengang:

Das Neutrino entsteht (im „Zuschauermodell“) durch die Reaktion $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Bei genügend hohen Energien muß auch die Umkehrreaktion existieren:



Um ein Gefühl für die Schwierigkeit des Experiments zu vermitteln, wollen wir die mittlere freie Weglänge von Neutrinos in Materie berechnen. Die Fermi-Theorie des β -Zerfalls kann man auf diese Reaktion anwenden und erhält als Wirkungsquerschnitt

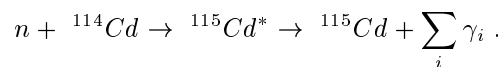
$$\sigma \approx 10^{-43} \text{cm}^2$$

und daraus die freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{\frac{L\rho}{A}\sigma} = \underbrace{\frac{H_2O}{6 \cdot 10^{23} \cdot 1}}_{\approx 1} 10^{43} = 3 \cdot 10^{20} \text{cm} = 5 \cdot 10^{11} R_{Erde} .$$

Der Experimentaufbau ist in Abb.3.12 dargestellt.

Einerseits wird das Positron durch eine $\gamma - \gamma$ -Koinzidenzmessung der $e^+ - e^-$ -Vernichtung nachgewiesen. Das Positron wird innerhalb von 1 cm abgebremst, legt also diese Strecke in einer maximalen Zeit von $\frac{1 \text{ cm}}{c} = \frac{1 \text{ cm}}{3 \cdot 10^8 \text{ cm/s}} = 10^{-10} \text{ s}$ zurück. Die Neutronen werden durch elastische Stöße mit Protonen innerhalb von $\tau \approx 10^{-6} \text{ s}$ abgebremst (thermalisiert) (siehe Kap.4.2) und schließlich von geeigneten Kernen eingefangen; zum Beispiel in der Reaktion:

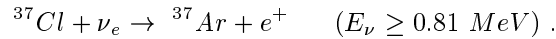


Die durch Kaskadenzerfälle entstandenen γ -Quanten, die der angeregte Kern aussendet, um in den Grundzustand überzugehen, werden nachgewiesen. Dieses Signal ist gegenüber der Elektron-Positronvernichtung zeitlich verzögert. Mit heutigen Detektoren (CDHS) erreicht man eine Ereignisrate von mehr als 10 pro Sekunde (siehe Kap.6).

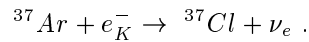
Eine andere Möglichkeit des Neutrinonachweises (GALLEX-Experiment) wird als Übungsaufgabe gestellt und soll dort detailliert untersucht werden.

3.2.6 Sonnenneutrinos [40]

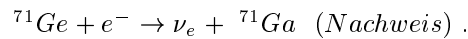
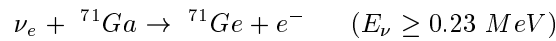
Hier sei auf eine spezifische Neutrinoreaktion hingewiesen (siehe auch Kap.4.3). Sie dient zum Nachweis von Neutrinos, die in der Sonne bei der Kernfusion erzeugt werden. Es handelt sich dabei um den Einfang eines Neutrinos durch ein ^{37}Cl -Atom (Davis-Experiment)



Dabei wird das entstandene Argon nachgewiesen durch die charakteristische Strahlung des K-Einfangs der umgekehrten Reaktion:



Es werden etwa 1–3 Atome pro Monat in einem 500 Tonnen Detektor produziert (Davis-Experiment). Im Gran Sasso Tunnel läuft seit einigen Jahren ein Experiment (GALLEX), das die Reaktionskette ausnutzt:



Es ist viel empfindlicher als das erstgenannte, weil es auch niederenergetische Neutrinos nachweisen kann, wie sie in der Sonne bevorzugt produziert werden (Kap.4.3).

Es werden jedoch im Davis-Experiment nur ein Drittel der theoretisch vorhergesagten Neutrinos nachgewiesen; im GALLEX-Experiment nur etwa 60 %. Folgende Ursachen könnten für die Diskrepanz verantwortlich sein:

- Das Sonnenmodell ist nicht richtig verstanden (zum Beispiel die Temperatur im Sonneninneren).
- Das Neutrinomodell ist nicht richtig ($m_\nu \neq 0$, ν_e Oszillationen zu ν_μ und ν_τ , siehe Kap.7.3.6).

WEITERE LITERATUR: [41, 42, 43]

*Die Mythen der Physiker,
man sollte sie untersuchen.
G. C. Lichtenberg*

3.2.7 Helizität des Neutrinos

LITERATUR: [44]

Wir haben in diesem Paragraphen mehrfach zwischen ν_e und $\bar{\nu}_e$ unterschieden in Analogie zum Elektron und Positron. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Unterscheidung sinnvoll ist, obwohl das Neutrino keine Ladung hat und nach Kap.3.2.1 vermutlich auch keine Masse besitzt. Die Unterscheidung beruht auf einer Beobachtung (1956), die die Physiker zwang, die Grundannahmen der Quantenmechanik neu zu überdenken. Wir wollen diese Änderung eines physikalischen Paradigmas – nämlich der Paritätsverletzung – an einem einfachen Beispiel diskutieren.

Es ist dazu sinnvoll, den Begriff der Helizität einzuführen. Wir wollen zunächst versuchen, eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen, später werden wir dies dann mit Hilfe der Dirac-Spinoren

formulieren. Wir gehen dazu (siehe [45]) von der Transformationsformel für den Drehimpuls vom Ruhssystem (\vec{L}_o) in ein Bezugssystem, in dem sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{v}{c} \hat{z}$$

bewegt. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} L_x &= L_{xo} \sqrt{1 - \beta^2} \\ L_y &= L_{yo} \sqrt{1 - \beta^2} \\ L_z &= L_{zo} \\ \vec{L}^2 &= (1 - \beta^2) L_o^2 + \beta^2 L_{zo}^2 . \end{aligned}$$

Für ein masseloses Teilchen ist also nur die Komponente des Drehimpulses **in** Flugrichtung ungleich Null. Diese projizierte Drehimpuls(Spin-)Komponente nennt man die **Helizität**; sie ist definiert durch

$$\mathcal{H} = \langle \hat{S} \hat{p} \rangle = \pm 1 .$$

Im Prinzip kann die Helizität für ein Neutrino die Werte ± 1 annehmen. Das Experiment ergibt

$$\mathcal{H}_\nu = -1 \quad \mathcal{H}_{\bar{\nu}} = +1 ,$$

beobachtet werden also Antineutrinos mit parallel ausgerichtetem Spin und Impuls sowie Neutrinos mit antiparallel ausgerichtetem Spin. Nicht beobachtet werden Antineutrinos mit antiparallelem \vec{S} und \vec{p} und Neutrinos, deren Spin und Impuls parallel sind.

Eine anschauliche Interpretation dieses Resultates ist, daß die Spiegelung am Ursprung (Paritätsoperation) ein Neutrino in ein Antineutrino überführt (siehe Abb.3.13).

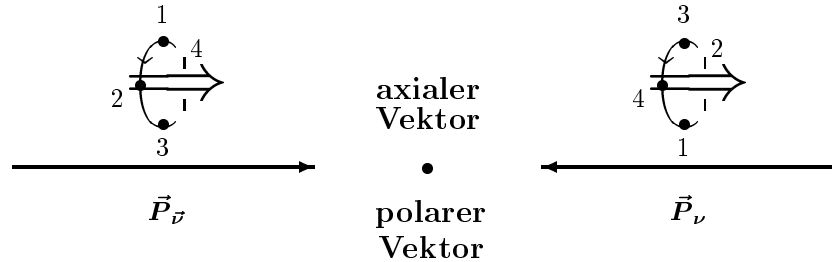


Abbildung 3.13: Spiegelung am Ursprung führt Neutrino in Antineutrino über

Wenn beim β -Zerfall die Parität erhalten wäre, dann sollten in der Natur **beide** Konfigurationen gleich häufig auftreten:

$$\langle \hat{S} \hat{p} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{S} \hat{p} \rangle_{\uparrow\uparrow} + \frac{1}{2} \langle \hat{S} \hat{p} \rangle_{\uparrow\downarrow} = 0 .$$

Man beobachtet jedoch

$$\langle \hat{S} \hat{p} \rangle_{\nu, \nu_e} \neq 0 .$$

Die Parität ist für die schwache Wechselwirkung keine „gute“ Quantenzahl; im Gegensatz zur elektromagnetischen Wechselwirkung ist der Wechselwirkungsoperator nicht invariant gegen Paritätsoperation. Der Hamilton-Operator für die elektromagnetische Wechselwirkung

$$\hat{H}_{WW} = -\frac{e^2}{|\vec{r}|} = -\frac{e^2}{|-\vec{r}|} = -\frac{e^2}{r}$$

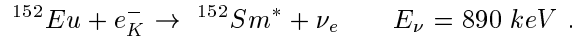
ändert sich nicht bei Spiegelung. Man spricht von Paritätsverletzung, wenn der Hamiltonoperator bei Spiegelung sein Vorzeichen ändert (T. D. Lee und C. N. Yang). In der Natur sind spiegelsymmetrische Konfigurationen nicht immer gleichberechtigt.

Wir wollen abschließend am Beispiel zweier klassischer Experimente zeigen, welche Erfindungskraft notwendig war, um die Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung experimentell zu verifizieren. Experimentalphysik ist eine Kunst, und es bereitet großes Vergnügen, Tricks zu ersinnen, um die Natur zu überlisten!

3.2.8 Experimenteller Nachweis der Paritätsverletzung, Experiment von Goldhaber

Das erste Experiment zur direkten Messung der Helizität des ν_e wurde von Goldhaber–Grodzins–Sunyar durchgeführt.

Dabei wurde der β -Zerfall (K-Einfang) von ^{152}Eu betrachtet, um den Spin, Impulsbetrag und die Impulsrichtung des Neutrinos zu messen



Dabei wird die Flugrichtung des Neutrinos durch die Rückstoßrichtung des Sm^* -Kerns festgelegt. Diese kann durch Kernresonanzfluoreszenz der γ -Quanten bestimmt werden. Die Resonanzbedingung aus Kap.3.1 ist nur erfüllt, wenn der Sm^* -Kern in Richtung des Absorbers fliegt (Abbremszeit \gg Lebensdauer des angeregten Kerns); diese Bedingung ist erfüllbar aufgrund des glücklichen Zufalls, daß der γ -Impuls und der ν_e -Impuls fast gleich groß sind und somit die Dopplerverschiebung ausreicht, um die Absorptionsbedingung zu erfüllen ($\vec{p}_\gamma = \vec{p}_{\text{Sm}^*} = -\vec{p}_\nu$).

Der Spin des Neutrinos wird nach den folgenden Überlegungen festgelegt:

	^{152}Eu	$+e_K^-$	\rightarrow	$^{152}\text{Sm}^*$	$+ \nu_e$	
I	0	1/2		1	1/2	
m_I	0	1/2		1	-1/2	
	(0	1/2		0	1/2)	(siehe unten)
	0	-1/2		-1	1/2	
	(0	-1/2		0	-1/2)	

Daraus folgt für den Spin des Neutrinos

$$\vec{I}_\nu = -\vec{I}_{\text{Sm}^*} .$$

Berücksichtigt man, daß Photonen transversal polarisiert sind (nur $I_{z\gamma} = \pm \hbar$ tritt auf), dann gilt bei anschließendem γ -Zerfall des angeregten Sm^* -Kerns weiterhin

	$^{152}\text{Sm}^*$	\rightarrow	^{152}Sm	$+\gamma$	
I	1^-		0^+	+1 (E1-Strahlung)	
m_I	1		0	1	
	(0		0	± 1)	verboten
	-1		0	-1	

was zur Folge hat, daß:

$$\vec{I}_\gamma = \vec{I}_{\text{Sm}^*}$$

und damit ist die Helizität (Neutrino-Spin \cdot Neutrino-Impuls) festgelegt durch:

$$\text{sign } \mathcal{H}_\nu = \text{sign } \mathcal{H}(\text{Sm}^*) = \text{sign } \mathcal{H}(\gamma) .$$

Die Helizität der γ -Quanten mißt man in magnetisiertem Eisen, wo etwa $\frac{2}{26} = 8\%$ der Elektronen eine ausgezeichnete Spinrichtung haben. Da nach Kap.1.1.3 der Wirkungsquerschnitt σ für Compton-Streuung von der relativen Polarisation des Elektrons und Photons abhängt, kann man die mittlere Polarisation der emittierten γ -Quanten messen. Durch Einschalten eines äußeren Magnetfeldes werden die Elektronen im Eisen ausgerichtet, das also als Filter für die Helizität der Photonen dienen kann. Nur γ -Quanten, die nicht mit den Eisenatomen wechselwirken, werden resonant von einem Sm_2O_3 -Absorber gestreut (siehe Versuchsaufbau Abb.3.14). Weitere Details des Experiments werden in einer Übungsaufgabe diskutiert.

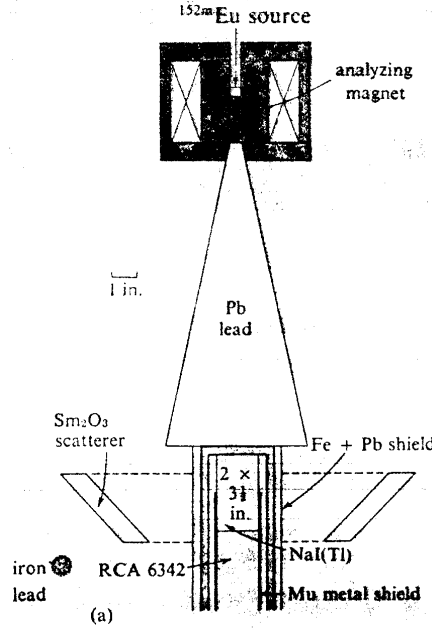


Abbildung 3.14: Versuchsaufbau im Goldhaber-Experiment

3.2.9 Experiment von Wu et al.

In diesem Experiment wurde die Paritätsverletzung beim β -Zerfall zum ersten Mal beobachtet. In weiteren Experimenten wurde gezeigt, daß für Elektronen aus dem β -Zerfall ebenfalls gilt:

$$\mathcal{H}(e^-) \neq \mathcal{H}(e^+) \neq 0.$$

Im Fall des Wu-Experiments mißt man die pseudoskalare Größe $\langle \hat{I} \hat{p}_e \rangle$, wobei \hat{I} der Kernspin ist.

Für das Experiment werden Kerne bei sehr tiefen Temperaturen polarisiert (siehe Abb.3.15), denn nach der Boltzmannstatistik gilt

$$\frac{n(m_I = -4)}{n(m_I = -5)} = e^{\frac{-g\mu_K B}{k_B T}}.$$

Ist $k_B T \ll g\mu_K B$ dann sind die verschiedenen magnetischen Unterzustände unterschiedlich bevölkert, die Kerne also polarisiert.

Man baut nun ^{60}Co -Kerne in die oberste Schicht (0.005 cm) eines CeMg -Nitrat-Kristalls ein, der einen stark antisymmetrischen g -Faktor der Elektronen ($g_2 \ll g_1$) besitzt.

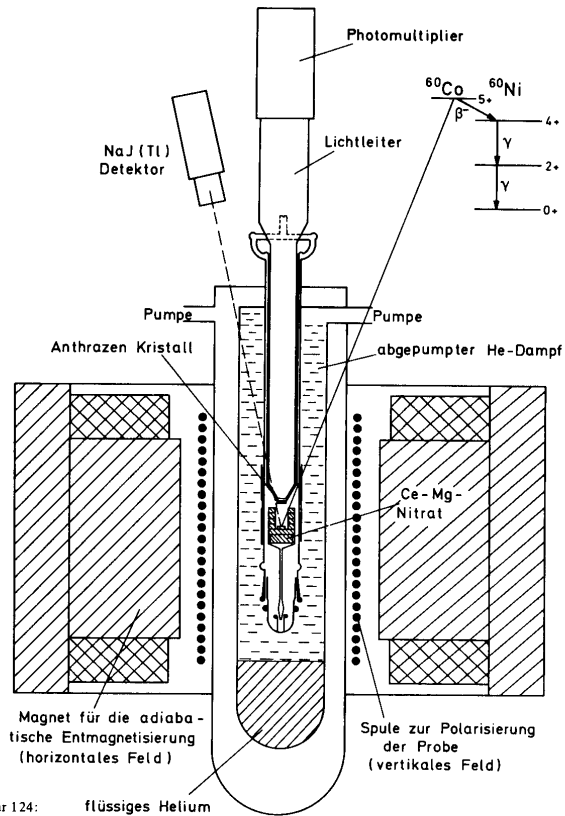
Bei $T = 1 \text{ K}$ haben wir dann

$$g\mu_B B = 10 \cdot 5.8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} \cdot 1\text{T} = 0.6 \text{ meV}$$

$$k_B T = 8.6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} \cdot 1\text{K} = 90 \text{ } \mu\text{eV}.$$

Daraus folgt, daß die Hüllenelektronen polarisiert werden, aber nicht die Kerne ($\mu_K \approx 10^{-3} \mu_B$). Nun entmagnetisiert man das Probenmaterial adiabatisch, d. h., daß bei

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\Delta E/k_B T} = \text{const}$$



Figur 124: flüssiges Helium
 Anordnung von Wu et al., Phys.Rev. 105, 1413 (1957) zur Beobachtung der Paritätsverletzung beim Beta-Zerfall.

Abbildung 3.15: Aufbau des Experiments von Wu et al. zur Messung der Paritätsverletzung

bei abnehmendem ΔE die Temperatur $K_B T$ kleiner werden muß. Dadurch erreicht man Temperaturen von $10^{-2} K$.

Legt man jetzt von außen ein schwaches Magnetfeld B_2 senkrecht zu $B_1 = 1 T$ an, wobei $g_2 \ll g_1$ gilt. In diesem Fall ist die Hülle noch hinreichend polarisiert. Das durch die Elektronenhülle erzeugte Feld am Kernort beträgt $B_K \approx 20 T$ und man erreicht gleichzeitig $T \approx 10^{-2} K$

$$g\mu_K B_K = 5 \cdot 2 \cdot 3.1 \cdot 10^{-8} \frac{eV}{T} \cdot 20 T = 0.3 \mu eV$$

$$k_B T = 8.6 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K} \cdot 10^{-2} K = 0.86 \mu eV$$

$$\frac{n(m_I = -4)}{n(m_I = -5)} = e^{-\frac{0.3 \mu eV}{0.86 \mu eV}} = 0.70 .$$

Man erhält so polarisierte Kerne. Daß die Kerne polarisiert sind, folgert man aus der Tatsache, daß die Zahl der Photonen, die parallel zu B_2 bzw. senkrecht zu B_2 emittiert werden, sich stark unterscheiden (Analogie: Hertzscher Dipol).

Das ^{60}Co zerfällt in ^{60}Ni unter Aussendung eines Elektrons. Wäre die Parität erhalten, so müßte

$$\langle \vec{I} \vec{p}_e \rangle = 0$$

gelten, das heißt, die Elektronen müßten gleich häufig **in Richtung** wie **entgegengesetzt** zum Kernspin \vec{I} emittiert werden. Dies ist aber nicht der Fall (siehe Abb.3.16).

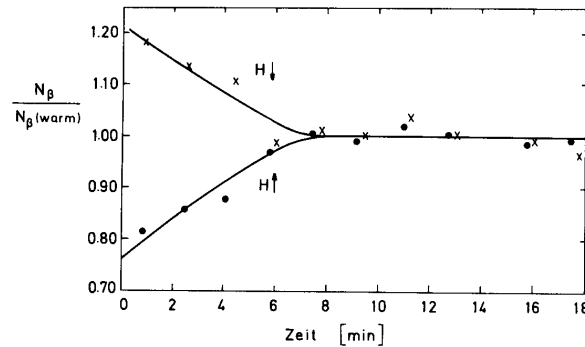


Abbildung 3.16: Experimentelles Resultat der Paritätsmessung von Wu (H_\uparrow und H_\downarrow entsprechen verschiedenen Kernpolarisationen)

Die genaue Analyse ergibt

$$\mathcal{H}(e^\pm) = \pm \frac{v}{c}$$

für erlaubte β -Übergänge. Wieder ist die Parität verletzt und Teilchen/Antiteilchen haben entgegengesetzte Helizität.

Viele Experimente bestätigen dagegen, daß die Parität bei starker und elektromagnetischer Wechselwirkung erhalten ist:

$$\hat{P} \hat{H}_{em/stark} \hat{P}^{-1} = H_{em/stark} \quad (\text{Physik IV}).$$

3.3 Kernmodelle

Ein Modell ähnelt einem österreichischen Fahrplan. Österreichische Züge treffen immer zu spät ein. Als daher ein preußischer Reisender einen österreichischen Schaffner fragt, warum Fahrpläne denn überhaupt gedruckt würden, lautet dessen Antwort: „Woher wüßten wir, daß der Zug verspätet ist, wenn wir keine Fahrpläne drucken.“

V. F. Weißkopf

In diesem Abschnitt sollen einige wesentliche Charakteristika der wichtigsten Kernmodelle skizziert werden. Das Schalenmodell, das viele Gemeinsamkeiten mit der Physik der Atomhülle aufweist, wird ein wenig detaillierter diskutiert, dann sollen einige Verallgemeinerungen besprochen werden.

LITERATUR: [75, 76]

3.3.1 Empirische Basis des Schalenmodells: Magische Zahlen

Wir wollen in Analogie zur Atomhülle vorgehen, wo wir in Physik IV das **Schalenmodell der Atomhülle** eingeführt haben, um die Phänomene des **Vielteilchensystems** Atomhülle zu ordnen.

Zustände mit vorgegebener Hauptquantenzahl n können nach dem Pauli-Prinzip mit einer maximalen Anzahl von Elektronen besetzt werden:

$n = 1$	2 Elektronen	
$n = 2$	8 Elektronen	
$n = 3$	18 Elektronen	
$n = 4$	32 Elektronen	usw.

Man spricht von abgeschlossenen Elektronenschalen.

Beim Erreichen dieser Konfigurationen sind die Atome besonders **stabil**, was sich u. a. in den folgenden Meßgrößen bemerkbar macht (siehe Physik IV):

- Edelgase sind chemisch inaktiv.
- Die Alkaliatome (1 Elektron außerhalb der abgeschlossenen Schale) und die Halogene (1 Elektron fehlt in der abgeschlossenen Schale) sind chemisch besonders aktiv.
- Die Atomvolumina (Atomgewicht/Dichte), die Ionisierungsenergien (Abb. 3.17) und viele andere physikalische Größen zeigen charakteristische Periodizitäten.

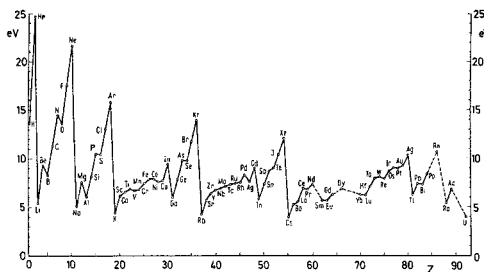


Abbildung 3.17: Ionisationsenergie als Funktion ihrer Kernladung

Es sollen jetzt eine Reihe von Beobachtungen zusammengestellt werden, die darauf hindeuten, daß analog im Fall des Vielteilchensystems Kern bestimmte Konfigurationszahlen der Nukleonen („**magische Zahlen**“) existieren, für die die Kerne besonders stabil sind.

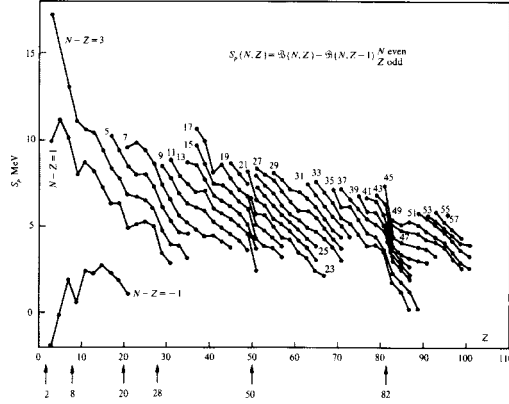


Abbildung 3.18: Separationsenergie gebundener Nucleonen als Funktion der Kernladung

- Die Energie, die zur Abtrennung des letzten gebundenen Nucleons notwendig ist („Separationsenergie“) ist für eine bestimmte Anzahl von Protonen (Neutronen) besonders groß (Abb.3.18):
 - $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ Protonen (Neutronen) sind besonders stabil gebunden.
 - Die Bindungsenergie ist besonders groß, wenn $N(Z)$ gerade und $I^\pi = 0^+$ (d. h. der Spin der Nucleonen ist entgegengesetzt und die Paarungsenergie beträgt ≈ 2 MeV).
- Kerne mit $N = 50, 82, 126$ binden besonders ungern ein weiteres Neutron (Abb.3.19): $\sigma \ll \langle \sigma \rangle$ für die Reaktion $\frac{A}{Z} \text{ Kern} + n \rightarrow \frac{A+1}{Z} \text{ Kern}$, falls $N = A - Z = 50, 82, 126$.
- Kerne mit $N, Z = 50, 82, 126$ treten in der Natur besonders häufig auf (Abb.3.22), dies ist ein Hinweis auf erhöhte Stabilität der Kerne und kann wie 2. erklärt werden (siehe Elementsynthese, Kap.4.3.3).
- Weitere Hinweise auf die erhöhte Stabilität der „magischen Kerne“ folgen aus der Untersuchung des β -Zerfalls, α -Zerfalls und der Kernreaktionen. Sie sollen hier nicht weiter diskutiert werden (Abb.3.23).

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, ein einfaches Modell zu entwickeln, das diese Beobachtungen zu erklären erlaubt (Goeppert-Mayer, Jensen + Haxel + Suess, 1948). Wir lassen uns dabei von den Erfahrungen der **Atomphysik** leiten, in der die Schalenstruktur durch folgende Modellannahmen erklärt werden kann:

- die Bewegung eines Elektrons kann beschrieben werden durch die Bewegung im Coulombfeld des Kerns und dem gemittelten Coulombpotential der anderen Elektronen. Wir machen also den Ansatz

$$\hat{H} = \sum \hat{H}_i$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2m} - \frac{Zc^2}{r_i} + \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \frac{\hat{p}_i^2}{2m} - \frac{Zc^2}{r_i} + \bar{V}(\vec{r}_i)$$

(Einteilchenmodell und Hartree-Fock-Methode).

- Schalenabschlüsse sind durch das Pauli-Prinzip festgelegt.

Die zusätzliche Problematik der Kernphysik verglichen mit der Atomphysik besteht darin, daß

- nur **phänomenologische Parametrisierungen des Potentials** zwischen zwei Nucleonen bekannt sind,

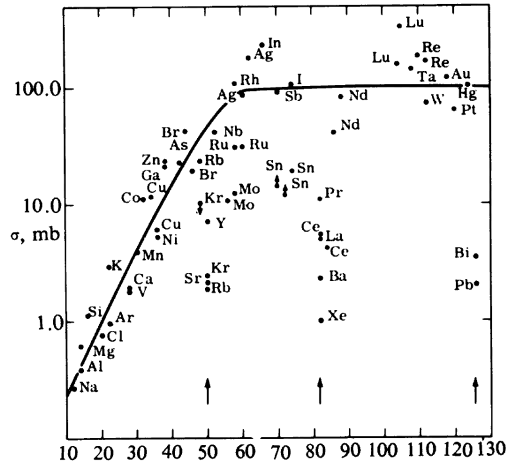


Abbildung 3.19: Einfangsquerschnitt für Neutronen als Funktion der Neutronenzahl der Kerne

- die Wechselwirkung zwischen zwei Nucleonen **groß** ist, was eine zusätzliche Schwierigkeit für die Näherung des gemittelten Potentials mit sich bringt,
- es in der Atomphysik den Kern als wohldefiniertes Zentrum gibt, was in der Kernphysik nicht der Fall ist.

Die Näherung, ein einzelnes Nucleon zu betrachten und die mittlere Wirkung der anderen Nucleonen zu berücksichtigen, scheint **trotz** der starken Wechselwirkung nicht **unplausibel**, weil das Vielteilchensystem Kern wie jedes quantenmechanische System diskrete Energiezustände besitzt und nicht jedes Zusammentreffen zweier Nucleonen zu einer echten Wechselwirkung führt, weil dazu der Energie-Übertrag zwischen den Nucleonen mit der Energiedifferenz zweier Nucleonzustände ($0(\Delta E) \approx 1 \text{ MeV}$) übereinstimmen muß und außerdem wegen des Pauli-Prinzips Übergänge in besetzte Zustände nicht möglich sind (Weißkopf und Feshbach).

3.3.2 Einteilchenschalenmodell und Schalenstruktur

Um zu einer quantitativen Beschreibung der Meßdaten zu gelangen, gehen wir schrittweise vor. Wir wollen uns zunächst der Frage widmen, welche Radialabhängigkeit das **mittlere** Potential besitzt, das das herausgegriffene Nucleon spürt.

1. Mittleres Potential

Für das Potential zwischen zwei Nucleonen ist aufgrund seiner kurzen Reichweite (Kap.2.3.2) die folgende Näherung möglich:

$$V_{12} = V_0 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \approx \tilde{V}_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Das gemittelte Potential, das ein Nucleon spürt, ist also proportional zur **Nucleonendichte** $\rho(\vec{r}_1)$ und nach Kap.2.1.3 damit in guter Näherung auch proportional zur Ladungsdichte, die aus der Untersuchung de μ -Atome und der Elektronenstreuung bekannt ist.

Um analytisch rechnen zu können, wird das realistische effektive Potential mittels eines Oszillator- bzw. Kastenpotentials angenähert (Abb.3.20). Das Niveauschema eines Kerns für das realistische Potential sollte zwischen diesen beiden Grenzfällen liegen (Abb.3.21). Dabei legen die in Abb.2.6 zusammengefaßten Resultate es nahe, daß für kleine A das Oszillator-, dagegen für große A das dreidimensionale Kastenpotential die bessere Approximation ist.

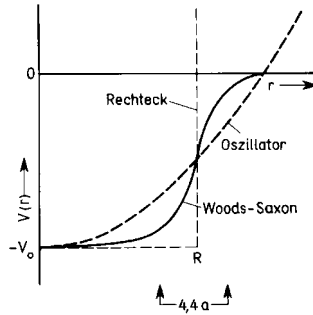


Abbildung 3.20: Kernpotentiale

Um qualitativ das Resultat zu interpretieren, sei zunächst an einige Eigenschaften der Lösungen des dreidimensionalen harmonischen Oszillators erinnert:

$$E_N = (N + 3/2)\hbar\omega_0 \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Die Hauptquantenzahl N hängt mit dem Bahndrehimpuls $l = 0, 1, 2, \dots$ und der Zahl der Nullstellen der Radialwellenfunktion $n_r = 1, 2, 3, \dots$ zusammen:

$$\begin{aligned} N &= 2(n_r - 1) + l \\ \pi_N &= (-1)^l = (-1)^N \quad \text{Parität.} \end{aligned}$$

Die höheren Zustände des dreidimensionalen harmonischen Oszillators sind daher entartet:

$$\begin{aligned} N = 0 & \quad n_r = 1, \quad l = 0 \\ N = 1 & \quad n_r = 1, \quad l = 1 \\ N = 2 & \quad n_r = 0, \quad l = 2; \quad n_r = 2, \quad l = 0 \end{aligned}$$

(allgemein: Zustände gleicher Parität sind entartet, sofern sich gleiches N ergibt)

Für das realistische Potential sind die Zustände zu gleichem N , aber unterschiedlichem l **nicht** entartet. Denn wegen des Verlaufs der Wellenfunktion reagieren Zustände mit höherem l auf das bei großem r gegenüber dem harmonischen Oszillator tiefere realistische Potential sensitiver (Abb.3.20).

Zustände mit höherem l sind im Vergleich zum harmonischen Oszillator abgesenkt (2 d - gegenüber 2 s -Zustand in Abb.3.21 als Beispiel). Die Gesamtzahl der besetzbaren Zustände ist wieder durch das Pauli-Prinzip festgelegt (siehe Abb.3.21: Zahlen in (Klammern)).

$$\begin{array}{l} \text{Beispiel } 2d \quad 2(2l+1) = 10 \text{ Zustände besetzbar} \\ \quad \quad 2s \quad 2(2l+1) = 2 \text{ Zustände besetzbar} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2d \\ 2s \end{array}} \right\} \text{ insgesamt 12 Zustände}$$

Wenn man – wie bei der Atomhülle – sukzessive die Zustände auffüllt, dann kommt man zu Besetzungszahlen der Schalen, die **nicht** mit den beobachteten Schalenabschlüssen („magischen Zahlen“ nach Kap.3.3.1) übereinstimmen. Versuche, Schalenabschlüsse durch eine **andere** Wahl von $V(\vec{r})$ zu erreichen, führten auch nicht zu konsistenten Resultaten. Daraus haben Goeppert-Mayer und Jensen geschlossen, daß ein **wesentlicher** Beitrag zum Potential in dem bislang diskutierten Ansatz fehlt.

2. Spin-Bahn-Kopplung

Die wesentliche Eigenschaft der Kernbausteine, das sie neben dem Bahndrehimpuls auch einen **Spin** besitzen, wurde bislang nicht ausgenutzt. Wir wollen zunächst wieder die Verhältnisse der **Atomhülle** untersuchen, um eine Vorstellung darüber zu erhalten, welche Effekte zum Wechselwirkungsanteil aufgrund dieser bislang nicht beachteten Eigenschaft der Nukleonen zu erwarten

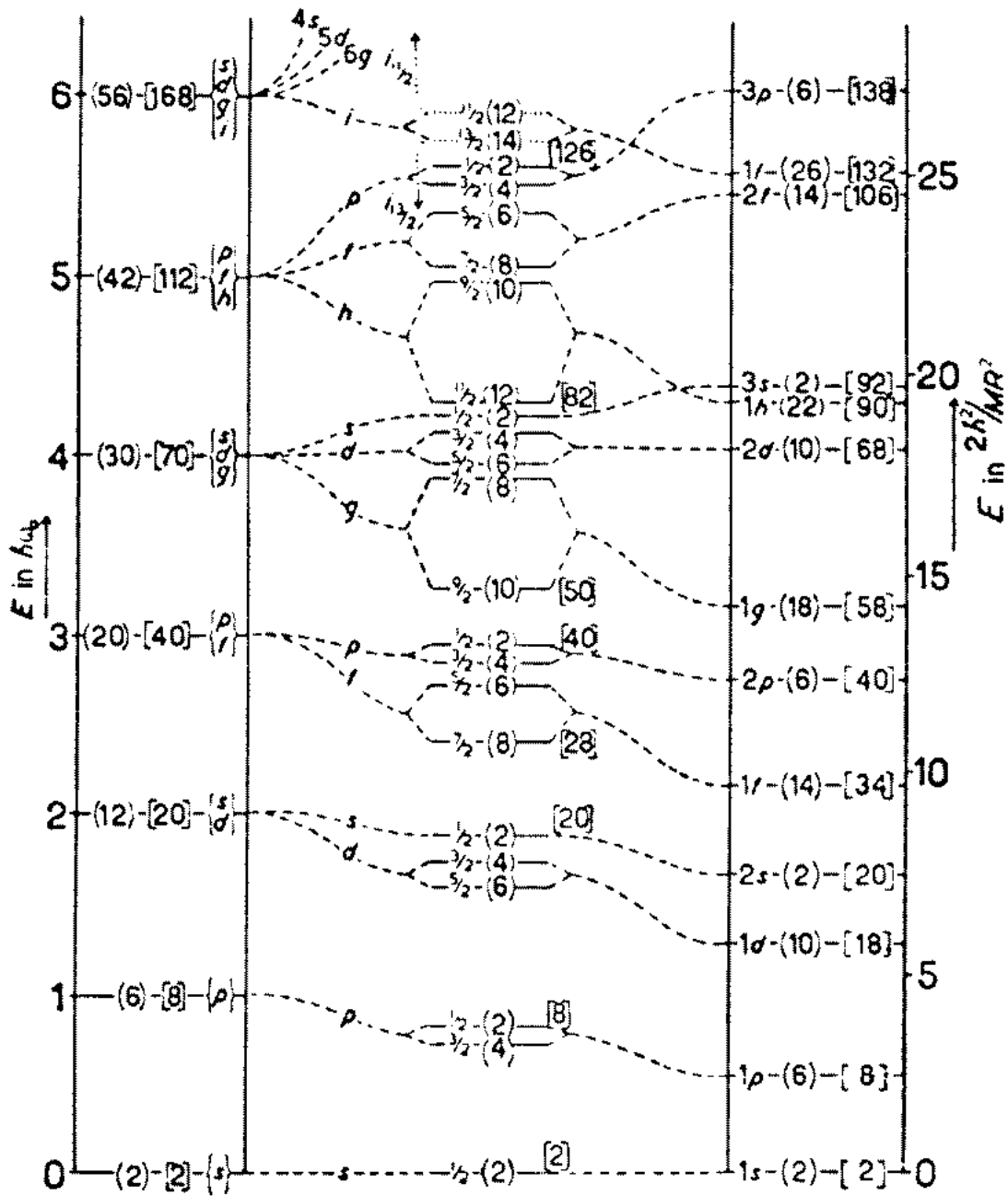


Abbildung 3.21: Niveauschema der Zustände der Kerne. Links Oszillator-, rechts Kernpotential, Mitte „realistisches“ Potential mit $\vec{L}\vec{S}$ -Kopplung. Die Zahl der Nukleonen eines Zustands ist durch (), die Gesamtzahl bei Besetzung aller tiefer liegenden Niveaus durch [] angedeutet

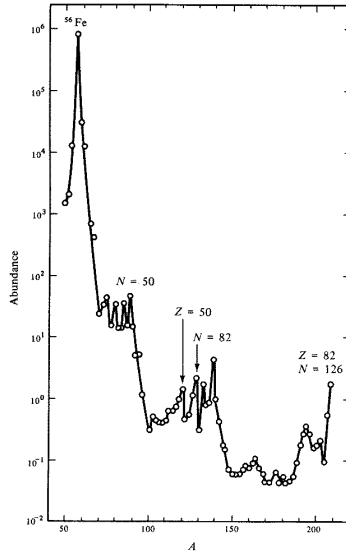


Abbildung 3.22: Häufigkeit der Kerne in der Natur als Funktion der Massenzahl

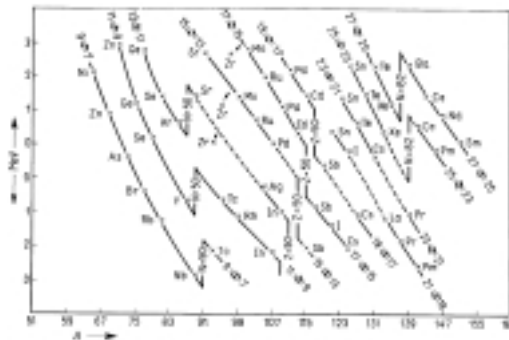


Abbildung 3.23: Umwandlungsenergien beim β -Zerfall beim Übergang eines gn -Kerns in einen ng -Kern. Kerne gleichen Neutronenüberschusses sind miteinander verbunden

sind. Durch den Umlauf des Kerns um das Elektron erzeugt dieser am Ort des Elektrons ein magnetisches Feld \vec{B} . In diesem richtet sich das magnetische Moment des Elektrons aus, was zu einer Energieaufspaltung führt (Feinstrukturaufspaltung):

$$\Delta E_{FS} = \Delta - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = -g \cdot \mu_B \frac{\vec{S} \cdot \vec{B}}{|\vec{S}|}$$

$$\vec{B} \sim \vec{L},$$

d. h. Niveaus mit \vec{L} parallel zu \vec{S} haben eine andere Energie als die mit \vec{L} antiparallel zu \vec{S} . Charakteristikum der Spin-Bahn-Wechselwirkung in der Atomphysik ist es, daß Zustände mit gleicher Hauptquantenzahl n und gleichem Bahndrehimpuls, aber unterschiedlichem Gesamtdrehimpuls j aufgespalten sind. Ein typisches Beispiel ist die Aufspaltung des $2 P_{1/2}$ - und des $2 P_{3/2}$ -Zustands im H -Atom. In der Atomphysik gilt

$$\Delta E_{FS} \ll (E_N - E_{N-1}).$$

Wie in der Atomphysik erweist es sich in der **Kernphysik** als notwendig, einen Spin–Bahn–Anteil in das Wechselwirkungspotential einzuführen:

$$V(\vec{r}_i) = V_o \rho(\vec{r}_i) + V_{LS} = V_o \rho(\vec{r}_i) + C_{LS} \vec{L}_i \vec{S}_i.$$

Drei wesentliche Unterschiede zwischen den Spin–Bahn–Anteilen des Potentials in der Atom– und Kernphysik müssen betont werden:

- Der physikalische Ursprung des Anteils in den beiden Gebieten ist völlig **unterschiedlich**. In der **Kernphysik** hat dieser Term zunächst eine rein phänomenologische Bedeutung und ist **nicht** auf eine elektromagnetische Wechselwirkung zurückzuführen.
- Die Stärke dieses Terms ist im folgenden Sinn unterschiedlich:

$$\begin{array}{ll} \text{Atomphysik:} & \Delta E_{LS} \ll (E_N - E_{N-1}) \\ \text{Kernphysik:} & \Delta E_{LS} \sim (E_N - E_{N-1}) \end{array}$$

- In der Atomphysik wirkt dieser Term **absenkend** $\sim j$, in der Kernphysik lockert dieser Term $\sim j$ (siehe auch Kap.5, Quarkonium–Spektroskopie).

3. Quantitative Formulierung

$$\begin{aligned} \hat{j} &= \hat{L} + \hat{S} \\ \hat{j}^2 &= \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{L} \cdot \hat{S} \\ \hat{L} \cdot \hat{S} &= \frac{1}{2} (\hat{j}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2). \end{aligned}$$

Damit folgt für einen Zustand, der durch die Quantenzahlen j, l, s charakterisiert ist

$$\begin{aligned} \hat{L} \cdot \hat{S} \Psi_{jls} &= \frac{1}{2} \hbar^2 (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \Psi_{jls} \\ j &= l \pm 1/2 \quad \text{in unserem Fall} \\ \hat{L} \cdot \hat{S} \Psi_{jls} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \hbar^2 l \Psi_{jls} & j = l + 1/2 \\ -\frac{1}{2} \hbar^2 (l+1) \Psi_{jls} & j = l - 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Daher sind Zustände mit gleichem N, l aber unterschiedlichem j aufgespalten um

$$\Delta E_{LS} = \langle \Psi_{jls} | C_{LS} \hat{L} \cdot \hat{S} | \Psi_{jls} \rangle = + C_{LS} \frac{\hbar^2}{2} (l + 1/2).$$

Man erhält ein mit den Daten der Kernphysik kompatibles Niveauschema, wenn man fordert:

$$C_{LS} < 0.$$

Bei der Berücksichtigung der Spin–Bahn–Kopplung ergeben sich die folgenden wesentlichen Abänderungen des Schalenmodells (siehe auch Abb.3.21):

1 $f_{7/2}$	– Zustand wird abgesenkt in die $N = 2$ Schale	: Schalenabschluß 28
1 $g_{9/2}$	– Zustand wird abgesenkt in die $N = 3$ Schale	: Schalenabschluß 50
1 $h_{11/2}$	– Zustand wird abgesenkt in die $N = 4$ Schale	: Schalenabschluß 82
1 $i_{13/2}$	– Zustand wird abgesenkt in die $N = 5$ Schale	: Schalenabschluß 126

Anmerkungen :

- Da für Nukleonen im Kerninnern $\langle \hat{L} \cdot \hat{S} \rangle = 0$, während näher an der Kernoberfläche $\langle \hat{L} \cdot \hat{S} \rangle_{Oberfl.} \neq 0$ gilt, ist der folgende Ansatz „plausibel“ (ρ = Dichte der Kernmaterie)

$$V_{LS}(\vec{r}) = C \cdot \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} \hat{L} \cdot \hat{S}.$$

- Die mittlere freie Weglänge für Nukleonen im Kern ist

$$\lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma} = \frac{1}{4 \cdot 10^{39} \text{cm}^{-3} \cdot 10^{-24} \text{cm}^2} = 10^{-14} \text{cm} \approx 0.1 R_{\text{Kern}}.$$

Man kann trotzdem von einer freien Nukleonbewegung im Kern reden, da zwei sich begegnende Nukleonen nur dann nach dem Pauli-Prinzip aneinander streuen, wenn der Endzustand nicht besetzt ist, d.h. genügend Energie übertragen wird.

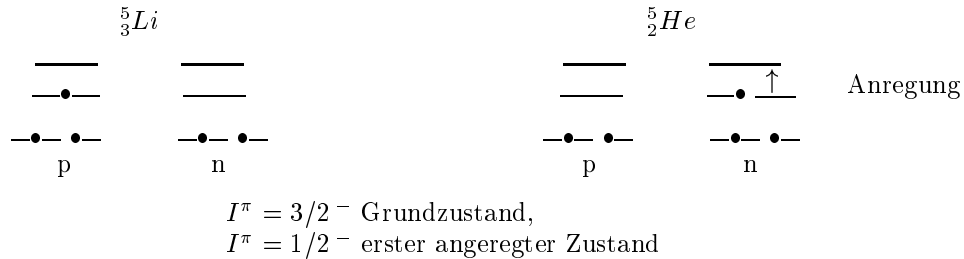
3.3.3 Vorhersagen und Vergleich mit Experimenten

Um zu experimentell überprüfaren Folgerungen aus dem Schalenmodell der Atomkerne zu gelangen, geht man wie beim Schalenmodell der Atomhülle vor:

- Die Nukleonen (Protonen und Neutronen separat!) besetzen unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips sukzessive die untersten freien Niveaus;
- Nukleonen sind bestrebt, ihre Spins abzusättigen (Paarungsenergie).

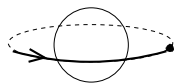
Neben den bereits in Kap.3.3.1 diskutierten Eigenschaften sollen hier noch einige weitere charakteristische Folgerungen des Schalenmodells der Atomkerne mit Meßdaten konfrontiert werden:

1. Niveauschema des ${}^5_2\text{He}$ und ${}^5_3\text{Li}$



in Übereinstimmung mit dem Experiment.

2. Zustände von ${}^{57}_{28}\text{Ni}$, ${}^{209}_{82}\text{Pb}$ (1 Neutron als „Leuchtnukleon“, siehe Abb.3.24) stimmen sehr gut mit den Modellvorhersagen überein.
3. Magnetische Momente und Quadrupolelemente können quantitativ vorhergesagt werden.



Der Kern mit Leuchtnukleon zeigt Abweichungen von der Kugelgestalt, das so berechnete Quadrupolmoment stimmt mit Daten überein.

4. Magische Zahlen (Abb.3.21) stimmen mit den Ergebnissen aus Kap.3.3.1 überein.
5. Ortsverteilung des Leuchtnukleons bzw. eines fehlenden Leuchtnukleons. Man vergleicht dazu die Ladungsverteilung von z.B. ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ mit der des ${}^{39}_{19}\text{K}$ (siehe Abb.3.25), wobei die Differenz gerade der Ladungsverteilung des fehlenden Protons in der $1d_{3/2}$ Schale entsprechen sollte.
6. Isomere Zustände (Abb.3.26). Es werden gleichzeitig Kerne mit $p_{1/2}$ und $g_{3/2}$ aufgefüllt (Folge der hier vernachlässigten Restwechselwirkung in Abb.3.21), d.h. der Grundzustand und der 1. angeregte Zustand unterscheiden sich um $\Delta j = 4$. Dabei tritt Strahlung hoher Multipolarität auf, was lange Lebensdauer der Zustände zur Folge hat (Kernisomere, Abb.3.26), siehe auch Kap.3.1.4.

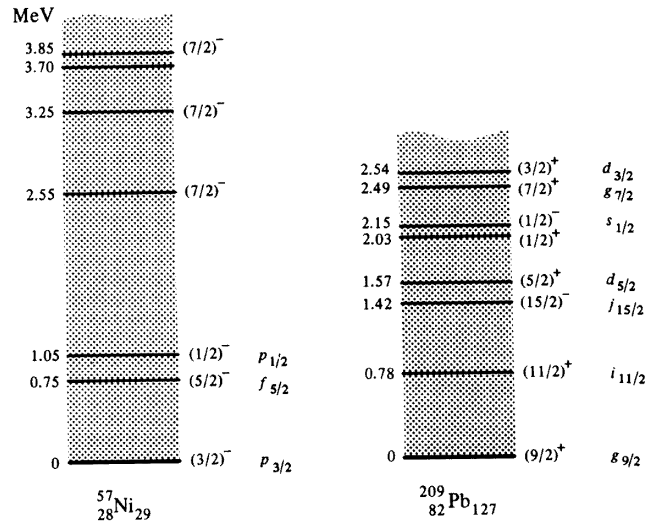


Abbildung 3.24: Zustände des ^{57}Ni und ^{209}Pb , die Schalenmodellkonfiguration sind mit den Meßdaten verglichen

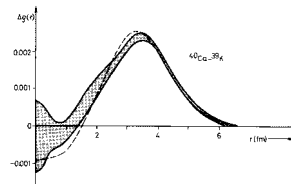


Abbildung 3.25: Gemessene Ortsverteilung der Nukleonen (Kap.2.1.2) im Vergleich zu den Schalenmodellvorhersagen

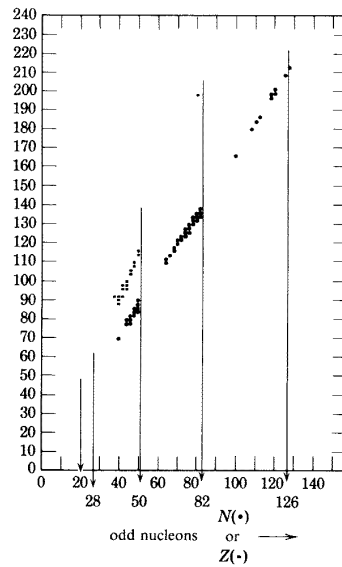


Abbildung 3.26: Isomereninseln

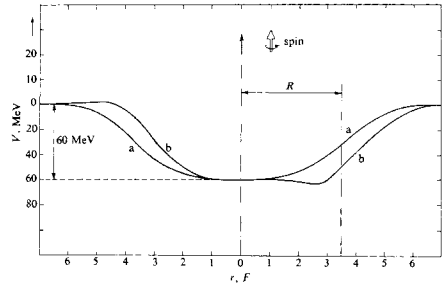
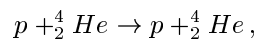


Abbildung 3.27: Einfluß der $\vec{L}\vec{S}$ -Kopplung auf das effektive Potential

7. Man kann die LS -Kopplung direkt im Doppelstreueperiment messen, z.B. in der Reaktion



dabei wird die Energie so gewählt, daß gerade das $j = 3/2$ Niveau angeregt wird, d.h. Bahndrehimpuls und Spin sind parallel ausgerichtet. Wegen $C_{LS} < 0$ muß die Wechselwirkung für ④ größer als ③ sein (Abb.3.27), deshalb ist die Streuintensität $I_{A,B}$ in ④ größer als in ③: $I_A > I_B$.

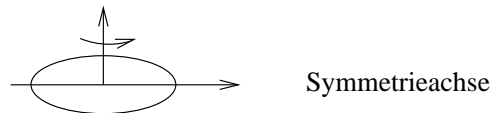
Moderne Anwendungen des Schalenmodells werden in [77] diskutiert.

3.3.4 Verbesserungen des Einteilchenschalenmodells

1. Das Schalenmodell, wie wir es bislang betrachtet haben, bewährt sich für $Z = Z_{mag}$, $N = N_{mag} \pm 1$ bzw. $Z = Z_{mag} \pm 1$. Für Kerne mit mehr als einem Nukleon muß man Kopplungsregeln formulieren, etwa für ${}^{42}_{21}\text{Sc}$, ${}^{54}_{27}\text{Fe}$, ... Hier muß man das Vektormodell anwenden, die Kopplungsregeln wurden wieder auf empirischer Basis abgeleitet (siehe Hundsche Regeln für Atomphysik).
2. Wenn viele Nukleonen außerhalb der abgeschlossenen Schale umlaufen, wird der Kern deformiert, man muß setzen

$$V(|\vec{r}|) \rightarrow V(\vec{r}) \quad \text{Nilsson-Modell}$$

3. Neben den Einteilchenbewegungen im deformierten Potential kann der Kern **kollektive** Bewegungen (Rotationen, Vibrationen) durchführen



Man beobachtet typische Rotations- und Schwingungsspektren (Abb.3.28).

Zusammengefaßt hat man eine Reihe von Ähnlichkeiten zwischen Atomen/Molekülen und Kernen:

Molekül	deformierter Kern
Elektronenanregung	Einteilchenbewegung
Vibrationen	Kern-Vibrationen
Rotationen	Kern-Rotationen

^{232}Th

<u>23⁻</u> 3617.3	<u>24⁺</u> 3619		
<u>21⁻</u> 3204.7	<u>22⁺</u> 3144	<u>20⁺</u> 3248	
<u>19⁻</u> 2813.9	<u>20⁺</u> 2691.4	<u>18⁺</u> 2831	<u>18⁺</u> 2766.1
<u>17⁻</u> 2445.7	<u>18⁺</u> 2262.4	<u>16⁺</u> 2440.3	<u>16⁺</u> 2445.3
<u>15⁻</u> 2102.0		<u>14⁺</u> 2080.3	<u>14⁺</u> 2117.1
<u>13⁻</u> 1784.9	<u>16⁺</u> 1858.7	<u>12⁺</u> 1754.7	<u>12⁺</u> 1801.4
<u>11⁻</u> 1498.8	<u>14⁺</u> 1482.5	<u>10⁺</u> 1467.5	<u>11⁺</u> ~1641
<u>9⁻</u> 1249.6	<u>12⁺</u> 1137.1	<u>8⁺</u> 1222.3	<u>10⁺</u> 1513.0
<u>7⁻</u> 1043.1		<u>6⁺</u> 1023.4	<u>9⁺</u> ~1371
<u>5⁻</u> 883.8	<u>10⁺</u> 826.8	<u>4⁺</u> 873.1	<u>8⁺</u> 1260.7
<u>3⁻</u> 774.5		<u>2⁺</u> 774.5	<u>7⁺</u> ~1142
<u>1⁻</u> 714.3	<u>8⁺</u> 556.9	<u>0⁺</u> 730.6	<u>6⁺</u> 1051.2
0^-	<u>6⁺</u> 333.2	0^+	<u>5⁺</u> 960.3
	<u>4⁺</u> 162.0		<u>4⁺</u> 890.5
	<u>2⁺</u> 49.4		<u>3⁺</u> 829.7
	<u>0⁺</u> 0		<u>2⁺</u> 785.5
		2^+	

Abbildung 3.28: Gemessenes Rotationsspektrum des ^{232}Th (2. Spalte). Die restlichen Rotationspektren bauen auf Vibrationszuständen auf