

Kapitel 6

Tiefinelastische Streuung

In Kap.5 haben wir **spektroskopische** Argumente besprochen, die zeigen, daß die „Elementarteilchen“

- $p, n, \Lambda, \Sigma, \Xi, \Omega, \dots$
- $\pi, \rho, K, K^*, \omega, \Phi, \Psi, \Upsilon, D^o, \Lambda_c, \dots$

aus Quarks zusammengesetzt sind. Wir haben dabei gebundene Zustände der Quarks als kohärente Überlagerung von Quark-Zuständen beschrieben. So konnten wir etwa die Wellenfunktion des Ψ -Mesons schreiben als:

$$|\hat{\Psi}\rangle = \phi_{l=0}(\vec{r}) \frac{1}{\sqrt{3}} (|\hat{c}_r \hat{c}_r\rangle + |\hat{c}_g \hat{c}_g\rangle + |\hat{c}_b \hat{c}_b\rangle) .$$

Wir haben also einen Spinfreiheitsgrad und drei Farbfreiheitsgrade (r, g, b). Die einzelnen Quarks wechselwirken dabei durch den Austausch von Gluonen (siehe Abb.6.1).

Wenn wir also mit einer Sonde hinreichend kurzer Wellenlänge ($\lambda \ll \tau_L c$) das Hadron untersuchen, dann sollte es möglich sein, einzelne Quarks im Hadron separat zu betrachten (Impuls- oder Stoßapproximation). Es handelt sich hierbei um eine bekannte Methode: in Abb.6.2 sind Beispiele für die Anwendung der Stoßapproximation in der Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik gegenübergestellt.

Die Momentaufnahme der Protonstruktur ist möglich, falls

- $\lambda_e \ll r_p \approx 10^{-13} \text{ cm}$
- $\tau_{WW} \ll \tau_L$

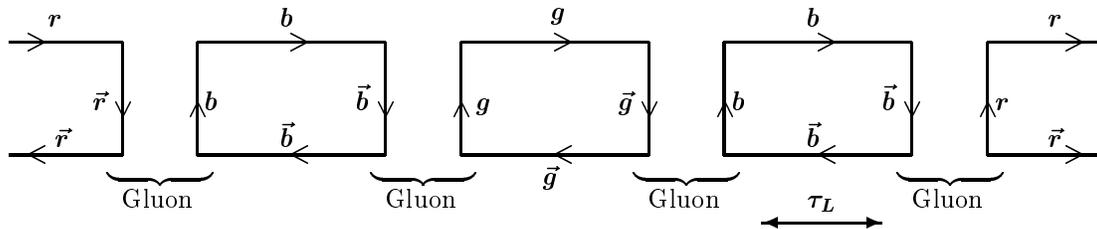


Abbildung 6.1: Grobes raum-zeitliches Bild der Mesonwellenfunktion, die den Austausch von Gluonen plausibel machen. r, b, g, \dots bezeichnen die Farbe eines Quarks/Antiquarks.

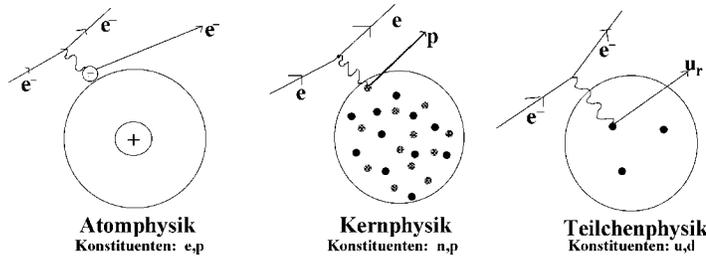


Abbildung 6.2: Nachweis der Konstituenten im Atom, Kern und Hadron durch tiefinelastische Elektronstreuung

wobei λ_e die Wellenlänge der Sonde, τ_L die Lebensdauer des untersuchten Zustandes und τ_{WW} die Wechselwirkungszeit ist. Folgende Prozesse sind besonders interessant.

Prozeß

$$eq \rightarrow eq$$

$$\nu_\mu q \rightarrow \mu^- q'$$

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$$

$$qq \rightarrow qq \text{ („Rutherfordstreuung“)}$$

$$qq \rightarrow qq \text{ („Comptonstreuung“)}$$

$$q\bar{q} \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^- \text{ (Drell-Yan-Prozeß)}$$

Experiment

$$ep \rightarrow e + X$$

$$\nu_\mu p \rightarrow \mu^- + X$$

$$e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$$

$$pp \rightarrow \pi, K + X, \text{ (} p_T(\pi, K) \text{ groß)}$$

$$pp \rightarrow \pi, K^- + X, \text{ (} p_T(\pi, K) \text{ groß)}$$

$$p\bar{p} \rightarrow \mu^+\mu^- + X, \dots$$

Was können wir aus diesen Reaktionen lernen? Zunächst möchte man durch zusätzliche (komplementäre) Experimente sicherstellen, daß die in Kap.5 entwickelten Vorstellungen über den Aufbau der Hadronen aus Quarks ein tragfähiges Modell liefern. Speziell möchte man zeigen:

Hypothese

Die Ladung der Quarks ist $Q = \pm 2/3e, 1/3e$

Der Spin der Quarks ist $J = \hbar/2$

Man möchte $\Phi(\vec{P}_q)$ messen

Die Anzahl der Quarks im Proton ist 3

Es gibt Gluonen

Quarks haben drei Farben r, g, b

Der Spin der Gluonen ist \hbar

Kraftgesetz zwischen Quarks

Experiment

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}, q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-,$$

$$\text{Vergleich } ep \rightarrow ex, \nu_\mu p \rightarrow \mu^- x$$

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \text{ Winkelverteilung}$$

$$eq \rightarrow eq, \nu_\mu q \rightarrow \mu^- q'$$

$$eq \rightarrow eq \text{ und } \nu_\mu q \rightarrow \mu^- q'$$

$$eq \rightarrow eqg \text{ und } \nu q \rightarrow \mu q'g, qq \rightarrow qq$$

$$e^-e^+ \rightarrow q\bar{q} \text{ mit } e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \text{ vergleichen}$$

$$eq \rightarrow eqg, \Upsilon(1S) \rightarrow 3g,$$

$$qq \rightarrow qq \text{ Winkelverteilungen}$$

$$qq \rightarrow qq, qq \rightarrow qq \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$$

Da die e^+e^- -Annihilation viele der obigen Fragen beantwortet und besonders einfach zu verstehen ist, soll sie als erstes behandelt werden.

6.1 Tiefinelastische e^+e^- -Reaktionen

mv LITERATUR: [96, 79, 98, 99]

Hinweis: Das Einheitensystem in diesem Paragraphen ist wie in der Elementarteilchenphysik üblich so gewählt, daß die Geschwindigkeiten dimensionslos sind und c auf eins normiert ist. Dann haben auch der Impuls und die Masse die Einheit der Energie, und die Rechnungen mit Vierervektoren vereinfachen sich erheblich.

6.1.1 Experimente

Zunächst wollen wir die experimentellen Bedingungen diskutieren. Um im Labor die Lebensdauer eines Zustands möglichst groß zu machen, muß gelten:

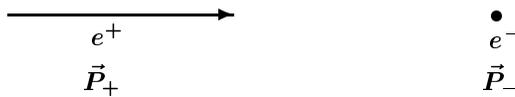
$$\tau_L = \frac{E_q}{m_q} \tau_L^* .$$

Dabei ist τ_L^* die Lebensdauer im Ruhssystem. τ_L ist groß, falls die Quark-Energie groß gegen die Quarkmasse ist. Um diese hohe Energie zu erreichen, nutzt man zweckmäßigerweise Speicherringe aus, weil dann keine Primärenergie in kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung umgewandelt wird. Die für die Teilchenerzeugung nutzbare Energie (zum Quadrat) s im Schwerpunktsystem beträgt:



$$s = (p_-^\mu + p_+^\mu)^2 = 2p_- p_+ + 2m^2 c^4 \approx 4E_+ E_- = 4E_+^2 ,$$

wogegen für ein ruhendes Elektron bei gleichem E_+ gilt:



$$s_R = (p_+ + p_-)^2 = 2E_+ m c^2 \ll s .$$

Typische Schwerpunktsenergien an verschiedenen e^+e^- -Speicherringen sind:

Speicherring	Energien [GeV]	Betrieb
SPEAR	3 – 7	1973 – 1983
DORIS	(4) 10	1973 – 1993
CESR	10	1980 –
PETRA	12 – 46	1979 – 1986
TRISTAN	50 – 65	1986 –
LEP	90 – 200	1989 – 1999

Einen typischen Detektor (ARGUS-Detektor am DORIS II-Speicherring) haben wir bereits in Kap.1.3 besprochen (siehe Abb.1.24). Die Speicherringanlage DORIS am DESY, Hamburg, ist in Abb.6.3 gezeigt.

6.1.2 Eigenschaften der Quarks

Wir wollen zeigen, daß folgende Größen in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ gemessen werden können:

- Ladung der Quarks ($Q/e = \pm 2/3, \pm 1/3$)
 - Anzahl der Farbfreiheitsgrade (3)
 - Spin der Quarks ($\hbar/2$)
 - Masse der Quarks
 - Existenz der Feldquanten der starken Wechselwirkung: Gluonen
- Hinweis: in Kap.5.5 war die Existenz der Gluonen aus den Zerfällen

$$\Upsilon(1S) \rightarrow 3g \text{ und } \Upsilon(1S) \rightarrow \gamma 2g$$

erschlossen worden.

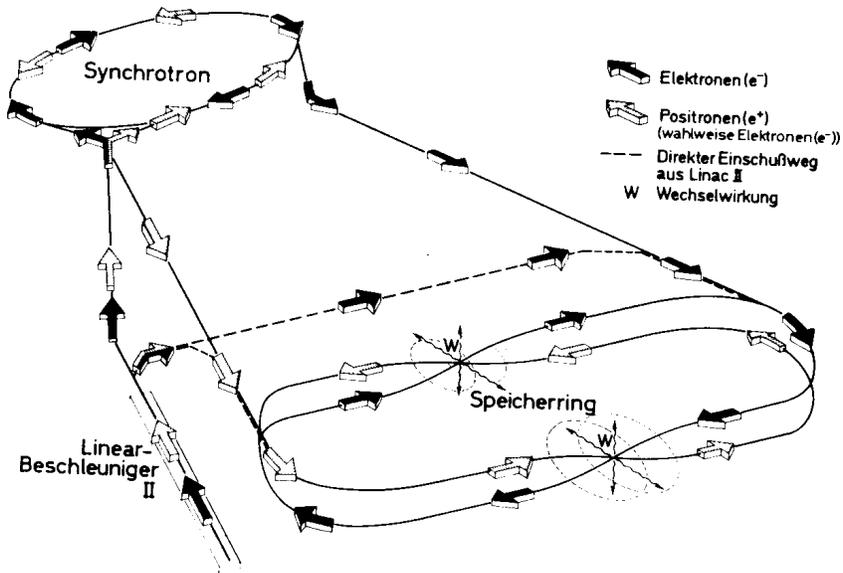


Abbildung 6.3: Speicherring DORIS

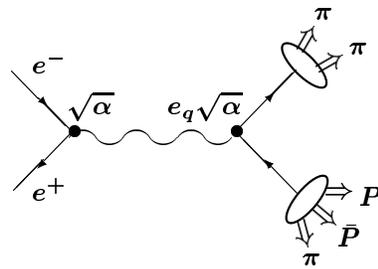


Abbildung 6.4: Reaktion $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow jets$

Ladung der Quarks und Farbfreiheitsgrade

Das Verhältnis $(Q/e)^2$ wird aus dem Wirkungsquerschnitt für die Reaktion

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$$

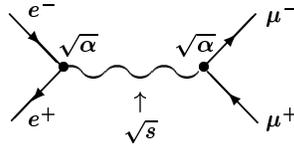
abgeleitet:

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}) .$$

Dabei wird angenommen, daß alle erzeugten Quarks sich in Hadronen verwandeln. Nach heutigem Wissen gibt es **keine** freien Quarks (siehe „confinement“, Kap.7.2).

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \sum_{q \text{ mit } \sqrt{s} > 2m_q} e_q^2 \sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{punktförm. Teilchen}) .$$

Es ist zweckmäßig, diese Reaktion mit der Paarerzeugung von Myonen zu vergleichen:



$$s = (p_+ + p_-)^2 = 4E_+^2 = m_\gamma^2 .$$

Die explizite Form des Wirkungsquerschnitts kann durch eine Dimensionsanalyse ermittelt werden. Myonen sind punktförmig und haben eine kleine Masse. Für

$$\sqrt{s} \gg 2m_\mu$$

existiert daher **keine** natürliche Längeneinheit und der Wirkungsquerschnitt hängt nur noch von zwei dimensionbehafteten Größen ab:

$$\sigma = \sigma(\hbar c, E_{sp}) .$$

Mit einer Dimensionsanalyse bestimmen wir die Exponenten a und b :

$$L^2(\text{änge}) = (\hbar c)^a E_{sp}^b = [LE]^a [E]^b .$$

Daraus folgt: $a = 2$, $a + b = 0 \rightarrow b = -2$, also gilt (bis auf Vorfaktoren):

$$\sigma \sim \left(\frac{\hbar c}{E_{sp}} \right)^2 .$$

Da die Feynman-Regeln besagen, daß $\sigma \sim \alpha^2$ gilt, folgt weiter

$$\sigma = \alpha^2 \frac{\hbar c}{s} \frac{4\pi}{3} = \frac{86.8nb \text{ GeV}^2}{E_{sp}^2} .$$

Für unser Problem heißt das, daß wir folgenden Quotienten messen:

$$R_{th} = \sum_{q \text{ mit } \sqrt{s} > 2m_q} \frac{\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{punktf.Teilchen})} = \sum e_q^2 .$$

Man erwartet (R_{th}) und mißt (R_{exp}):

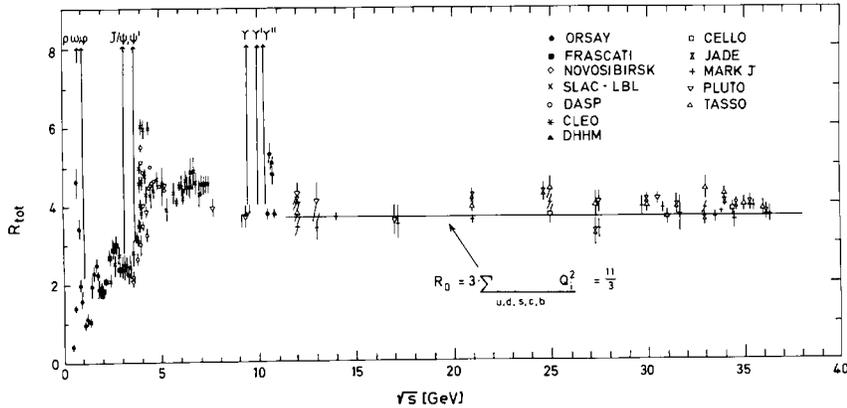
	$m_q c^2 [GeV]$	e_q^2	R_{th}	R_{exp}
u	0.15	4/9	-	-
d	0.15	1/9	5/9	-
s	0.5	1/9	6/9	2
c	1.5	4/9	10/9	10/3
b	4.5	1/9	11/9	11/3
t	175	4/9	15/9	?

Die gemessenen Verhältnisse R_{exp} sind in Abb.6.5 gezeigt. Man sieht:

$$R_{exp} = 3 \sum_q e_q^2 .$$

Erklärung für die Beobachtung:

Jede Quarkspezies besitzt 3 Farbfreiheitsgrade, d. h. man erzeugt **nicht** $q\bar{q}$ -Paare, sondern die 3 verschiedenen Paare $q_r\bar{q}_r$, $q_g\bar{q}_g$, $q_b\bar{q}_b$, während es nur ein $\mu^+\mu^-$ -Paar gibt. Daher tritt beim Vergleich der Quarkpaar- mit der Myonenpaarerzeugung ein zusätzlicher statistischer Faktor 3



R_{tot} the cross section for $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$, normalized to the point cross section $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, plotted versus c.m. energy. Only statistical errors are shown. The solid line indicates the quark model prediction for u, d, s, c and b quarks.

Abbildung 6.5: Gemessene Verhältnisse R_{th}

auf (der Gesamtphasenraum, der in Fermi's goldener Regel auftritt, setzt sich aus Orts-, Impuls- und Farbraum zusammen!).

Damit hat der Farbfreiheitsgrad, den wir in Kap.5.4 zur Rettung des Spin-Statistik-Theorems eingeführt haben, eine unabhängige experimentell zugängliche Bedeutung gewonnen.

Anmerkung (siehe auch Kap.7.3): Eine weitere experimentelle Methode zur Bestimmung der Zahl der Farbfreiheitsgrade besteht in der Untersuchung der τ - Zerfälle. Man erwartet

$$R_\tau = \frac{w(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{w(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + q_{rgb} \bar{q}_{rgb})} = \frac{1}{3}.$$

Man mißt $R_\tau = (1/3.3)$. Diese Abweichung kann man theoretisch verstehen. Aus den Messungen von R gewinnt man als weitere Information die Quarkmasse, die sich aus den Schwellen von R_{exp} ablesen läßt (siehe Abb.6.5). Man sollte betonen, daß für $\sqrt{s} \approx 2m_q$ die aus Kap.5.4 bekannten Quarkonium-Zustände auftreten.

Ausdehnung der Quarks

Man beobachtet

$$R = \frac{\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \approx const.$$

Daraus folgt, daß ein Quark den gleichen Formfaktor wie das Myon besitzt. Man leitet aus den Messungen ab:

$$r_q < 10^{-16} \text{ cm}.$$

Spin der Quarks

Die Winkelverteilung der Teilchen, die in e^+e^- -Reaktionen erzeugt werden, ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &\sim 1 + \cos^2\theta & J(\mu) &= \hbar/2 \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-, B^+B^-) &\sim \sin^2\theta & J(\pi, B) &= 0. \end{aligned}$$

Das Experiment ergibt (siehe auch Abb.6.6): $\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \cos^2\theta$ und daraus folgt:

$$\text{Quarks haben den Spin } \frac{\hbar}{2}.$$

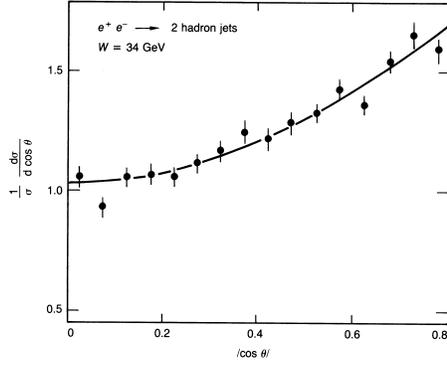


Abbildung 6.6: Winkelverteilung der Jets in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow 2$ Hadronen-Jets

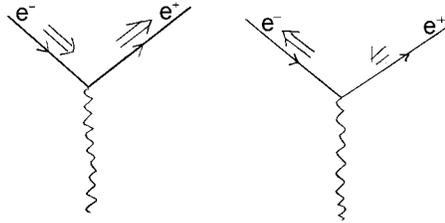
Wie kommt diese Winkelverteilung zustande? Es ist eine allgemeine Erfahrung (und folgt aus der Dirac-Gleichung), daß alle Wechselwirkungen, die durch den Austausch eines Spin 1-Teilchens vermittelt werden, am Vertex die Helizität erhalten, falls nur die Energie viel größer als die Ruhmasse der Spin 1/2-Teilchen ist. Man beobachtet daher bei hohen Energien:

$$\text{Helizität}(e^+) = -\text{Helizität}(e^-)$$

nicht aber (im Schwerpunktsystem !)

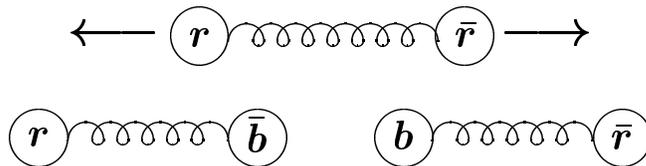
$$\text{Helizität}(e^+) = \text{Helizität}(e^-)$$

für die Elektronen und Positronen, die annihilieren.



Deshalb haben die sich vernichtenden (erzeugten) Spin 1/2-Teilchen im Schwerpunktsystem entgegengesetzte Helizität. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen:

Anfangszustand \rightarrow Endzustand: $J = 1, J_z = -1 \rightarrow J = 1, J_z = +1$



Nach Kap.5.4 ist die Amplitude für die Konfiguration $J'_z = -J_z$ proportional zur Rotationsmatrix

$$d_{1,-1}^1(\theta) = d_{-1,1}^1(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2} .$$

Andrerseits gilt für die Konfiguration mit $J'_z = +J_z$:

$$d_{1,1}^1(\theta) = d_{-1,-1}^1(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} .$$

Da die beiden Konfigurationen mit gleicher Häufigkeit auftreten (keine longitudinale Polarisation der e^\pm), folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right)^2 \sim 1 + \cos^2 \theta$$

in Übereinstimmung mit dem Experiment.

6.1.3 Umwandlungen von Quarks in Hadronen

Wir wollen zum Abschluß kurz die Frage behandeln, wie Quarks (Gluonen) sich in Hadronen umwandeln. In Kap.5.4 hatten wir bereits gesehen, daß für die Wechselwirkung zwischen Quarks der Potentialansatz

$$V(r) = \frac{\alpha_s}{r} + ar \quad a = 1 \frac{GeV}{fm}$$

die spektroskopischen Daten gut beschreibt. Für $r \gg 1 fm$ gilt also

$$V(r) = a r .$$

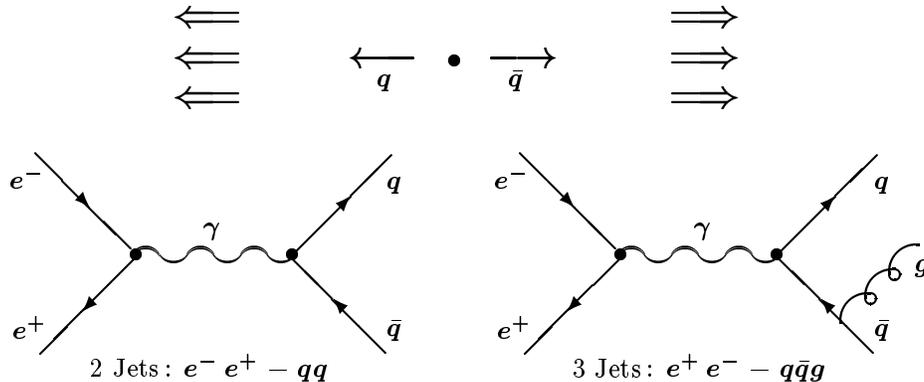
Dieses Potential gestattet es nicht, die Quarks beliebig weit voneinander zu entfernen. Als Beispiel untersuchen wir den Fall, daß die Quarks sich auf 1 cm entfernen. Dazu muß die Energie

$$\Delta E = \frac{1 GeV}{10^{-13} cm} 1 cm = 10^{13} GeV = 10^{22} eV = 1000 W s$$

aufgebracht werden. Diese Energie hat makroskopische Größenordnung. Sie reicht z. B. aus, 80 kg im Gravitationsfeld der Erde 3 m hochzuheben:

$$V_{pot} = mgh \approx 80 \cdot 9.81 \cdot 3 \frac{kg m m}{s^2} \cdot 10^{+19} \frac{eV}{J} \approx 10^{22} eV .$$

Quarks können sich sicherlich **nicht** so weit voneinander entfernen, da die Feldenergie sich vorher in Masse umwandeln wird und neue $q\bar{q}$ -Paare entstehen werden:



Als Resultat erhalten wir Jets von Teilchen. 2 Jets beobachtet man für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ (Abb.6.7a). Im Fall der $e^+e^- \rightarrow qqg$ -Reaktion erwartet man 3 Jets, die auch beobachtet wurden (Abb.6.7b). Die Entdeckung der Gluonen bei DESY gelang durch zwei Experimente:

DORIS 1978	$\Upsilon(1S)$	\rightarrow	$3g$	(Hinweise)
PETRA	e^+e^-	\rightarrow	qqg	(Nachweis)

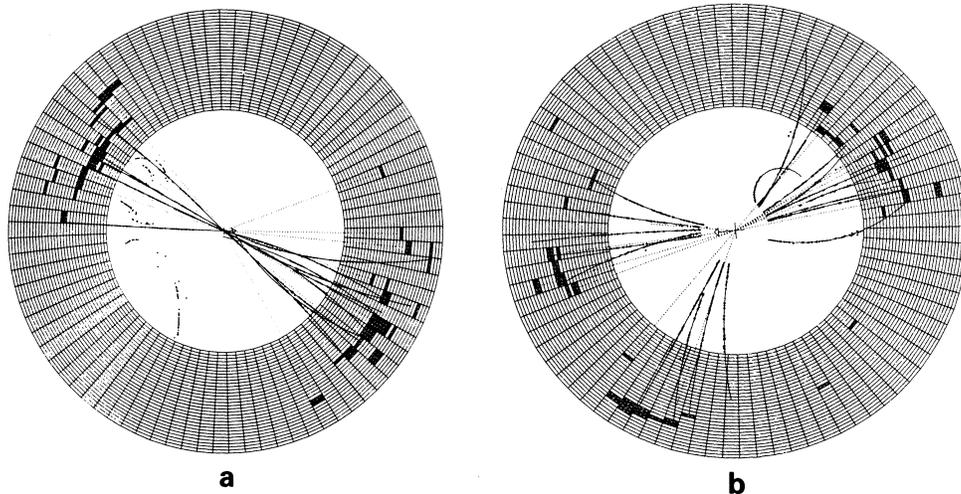


Abbildung 6.7: Beispiele für $q\bar{q}$ und $q\bar{q}g$ initiierte Jets [98]

6.2 Tiefinelastische Lepton–Hadron–Streuung

LITERATUR: [104, 105, 106]

In diesem Paragraphen sollen die Vorhersagen des Quark–Parton–Modells mit experimentellen Resultaten für die Reaktionen

$$e^- q \rightarrow e^- q$$

$$\mu^- q \rightarrow \mu^- q$$

$$\nu_\mu q \rightarrow \mu^- q'$$

verglichen werden. Diese Resultate wurden 1967–1971 in Stanford (und DESY) erzielt; die Pionierre Taylor, Kendall und Friedmann erhielten 1990 den Nobelpreis. Diese experimentellen Resultate etablierten neben der Quarkonium–Spektroskopie das Quarkmodell der Elementarteilchen, das heute das Fundament für die Beschreibung der Elementarteilchen bildet.

6.2.1 Die elementaren Wirkungsquerschnitte

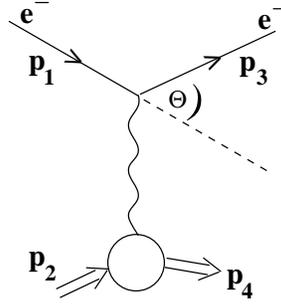
Da es nach heutigem Wissen keine freien Quarks gibt (siehe Kap.7.2) müssen wir für die Experimente im Nukleon gebundene Quarks verwenden, um die Reaktion

$$eq \rightarrow eq$$

zu beobachten. Um die 3 Valenzquarks im Proton **unabhängig** abtasten zu können, müssen wir Elektronen mit hinreichend kleiner Wellenlänge verwenden (tiefinelastische Streuung, siehe auch Abb.6.2)

$$\lambda_e \ll R_p \approx 0.83 \text{ fm} .$$

In einer relativistischen Theorie bedeutet dies, daß der Impulsübertrag q^2 groß sein muß:



$$-Q^2 = t = q^2 = (p_1 - p_3)^2 = -4E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0$$

$$q^2 = (q_0, \vec{q})^2 = -\vec{q}_B^2 = -(\hbar \vec{k}_B)^2$$

q ist eine Lorentzinvariante, sie kann also in einem speziellen Bezugssystem berechnet werden (Breit-System), in dem keine Energie übertragen wird. Das Breit-System („brickwall-system“) hat Eigenschaften analog zu einer Mauer beim Stoß eines Balls. Wegen der Lorentzinvarianz gibt es immer ein System, in dem das ausgetauschte (virtuelle) Photon ($m_\gamma^2 \neq 0!$) nur Impuls und keine Energie überträgt. Die Variable s , die in Kap.6.1.1 definiert wurde, und die Variable t nennt man Mandelstam-Variablen.

$|\vec{k}_b| = 2\pi/\lambda_B$ ist der Wellenzahlvektor im Breit-System. In diesem Bezugssystem kann auch für relativistische Teilchen der Formfaktor, der eine relativistische Invariante ist, und die dreidimensionale Ladungsverteilung durch eine dreidimensionale Fouriertransformation verknüpft werden (siehe Kap.2.1). Der Begriff der Ladungsverteilung des Protons ist vom Bezugssystem abhängig und daher mit Vorsicht zu verwenden.

Anmerkung:

Da die elektromagnetische Wechselwirkung des Protons durch zwei Momente (Ladung, magnetisches Moment) beschrieben wird, müssen zur Beschreibung der elastischen $e - p$ -Streuung zwei Formfaktoren eingeführt werden, die vom Viererimpulsübertrag abhängen. Man kann zeigen, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Prozeß

$$ep \rightarrow ep$$

durch die Rosenbluth-Formel gegeben ist:

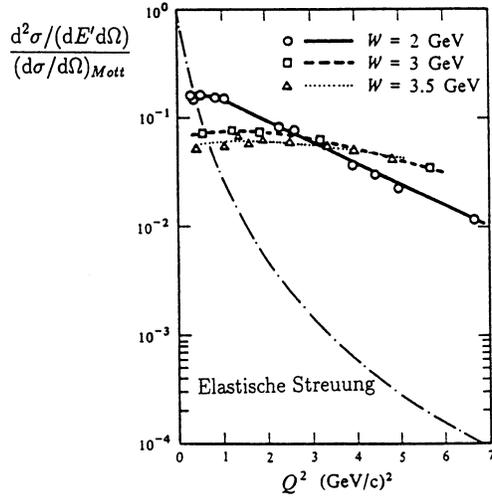
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \left(\frac{G_E^2(q^2) + q^2/(4 m_p^2) \cdot G_M^2(q^2)}{1 + q^2/(4 m_p^2)} + \frac{q^2}{4 m_p^2} 2 G_M^2(q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

mit

$$G_E^p(0) = 1, \quad G_M^p(0) = 2.79$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{\alpha^2}{4 E_0^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\frac{\cos^2 \theta/2}{1 + 2 E_0/m_p \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right),$$

E_0 = Primärenergie des Elektrons, m_p = Protonenmasse. Der Mott-Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}_{Mott}$ beschreibt die Streuung an einem punktförmigen geladenen Teilchen mit dem Spin 0. Der zweite Faktor berücksichtigt, daß die Quelle des Coulombpotentials eine endliche Masse m_p hat (Rückstoßterm). Die SLAC-MIT Gruppe beobachtete folgendes Verhalten bei der elastischen ($ep \rightarrow ep$) und der tiefinelastischen ($ep \rightarrow e + x$) Streuung.



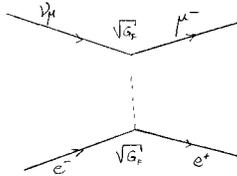
Feynman (1968) interpretierte dies Resultat. Er vermutete, daß für kleine λ_e und $W = \sqrt{p_4^2}$ groß Streuung am punktförmigen System beobachtet wird (Formfaktor (q^2) = 1). Er nannte die punktförmigen Systeme Partonen.

Bjorken und Paschos identifizierten 1969 die Partonen mit den Quarks (Quark-Parton-Modell). Eine weitere Möglichkeit, Leptonen an Quarks, den Konstituenten der Materie zu streuen, besteht in der Untersuchung der Reaktion:

$$\nu_\mu + d \rightarrow \mu^- + u$$

$$\bar{\nu}_\mu + u \rightarrow \mu^+ + d .$$

Folgender Feynmangraph beschreibt den Prozeß:



Da bei hinreichend hohen Energien für Neutrinoreaktionen keine natürliche Skala für Energie und Längen existieren (r_p, m_p oder ähnliche), ist die Skala durch

- $s = (p_\nu + p_l)^2 = p_\nu^2 + p_l^2 + 2p_\nu p_l = 2m_e E_\nu$
- $\hbar c$
- $G_f \approx 10^{-5} (\hbar c)^3 / (m_p^2 c^4)$ (siehe Kap.3.2)

festgelegt. Eine Dimensionsanalyse ergibt:

$$\sigma = \sigma(s, \hbar c, G_F) = G_F^{2\alpha} s^\beta (\hbar c)^\gamma$$

$$L^2 = E^{2\beta} (EL)^\gamma (E^2 L^6)^\alpha$$

$$\text{mit } \left. \begin{array}{l} 2 = 6\alpha + \gamma \\ 0 = 2\alpha + 2\beta + \gamma \end{array} \right\} 2 = 6\alpha - 2\alpha - 2\beta = 4\alpha - 2\beta \rightarrow \beta = 2\alpha - 1 .$$

Wir haben 2 Vertizes, also gilt:

$$\sigma \sim G_F^2 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow \beta = 1, \gamma = -4$$

$$\sigma \sim \frac{G_F^2 s}{(\hbar c)^4}.$$

Die exakte Rechnung ergibt (Feynmangraphen):

$$\sigma = \frac{G_F^2 s}{\pi} \frac{1}{(\hbar c)^4} = \frac{G_F^2 s}{\pi},$$

falls man $\hbar = c = 1$ setzt. Charakteristisch für die Streuung von Neutrinos an punktförmigen Streuern (keine natürliche Längenskala) ist also wegen $s \sim E_\nu \cdot m$ (Target):

$$\sigma \sim E_\nu \quad \text{und} \quad \sigma \sim m \text{ (Target)}.$$

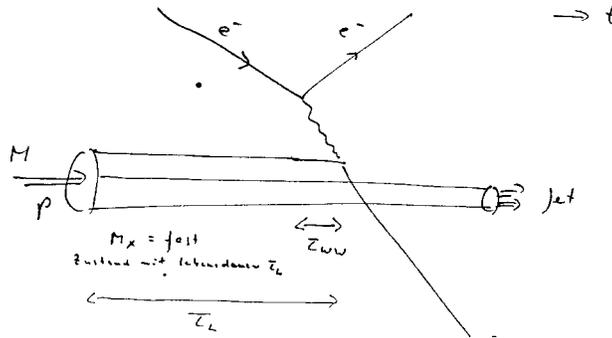
Daraus folgt:

$$\sigma(\nu e) \approx 10^{-41} \text{ cm}^2 \ll \sigma(\nu q) \approx 10^{-38} \text{ cm}^2,$$

wobei $E_\nu \gg m$ (Target) sein muß, damit die Formeln angewendet werden können ($m_e \ll m_q$!).

6.2.2 Das Quark-Parton-Modell (Feynman 1968)

Wir wollen zunächst überlegen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit man den Prozeß $eq \rightarrow eq$ beobachten kann. Dabei interessiert uns der folgende Streuprozeß:



τ_{WW} = Wechselwirkungszeit, τ_L = Lebensdauer eines bestimmten Protonzustandes.

Damit die Impulsapproximation anwendbar ist, muß gelten (siehe Kap.1.2 und 3.2):

$$\tau_{WW} \ll \tau_L.$$

Falls die Bedingung erfüllt ist, kann man den Streuprozeß $eq \rightarrow eq$ als eine Wechselwirkung an einem effektiv freien Quark interpretieren. Wir wollen jetzt untersuchen, welche kinematischen Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die Impuls(Stoß)approximation anwendbar ist.

Nach Physik IV gilt für die Lebensdauer eines Zustandes im Schwerpunktsystem der ep Wechselwirkung ($M = m_p$)

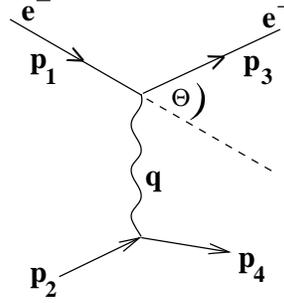
$$\tau_L^* = \frac{\hbar}{\Delta E^*}$$

$$\begin{aligned} \Delta E^* &= \sqrt{\vec{p}^{*2} c^2 + M_x^2 c^4} - \sqrt{\vec{p}^{*2} c^2 + M^2 c^4} \approx |\vec{p}^*| c + \frac{M_x^2 c^2}{2 |\vec{p}^*|} c - (|\vec{p}^*| c + \frac{M^2 c^2}{2 |\vec{p}^*|} c) \\ &= \frac{(M_x^2 - M^2) c^2}{2 |\vec{p}^*|} c. \end{aligned}$$

Also folgt für die Lebensdauer des Zustandes

$$\tau_L = \frac{\hbar}{(M_x - M)c^2} \underbrace{\frac{2|\vec{p}^*|}{(M_x + M)c}}_{\text{Zeitdilatation}} \rightarrow \infty \text{ für } |p^*| \rightarrow \infty .$$

Die Wechselwirkungszeit ist gegeben durch $\tau_{WW} = \hbar/q_o^*$. Wir nehmen an, daß das Proton im Laborsystem ruht.



(Feynmangraph)

$$p_1^2 = p_3^2 = 0, p_4^2 = M_x^2 c^4 .$$

Bei hohen Energien gilt im Schwerpunktsystem der $e - p$ -Wechselwirkung (setze $c=1$):

$$p_1 = (P^*, 0, 0, -P^*) \quad , \quad p_2 = (P^* + M^2/(2P^*), 0, 0, P^*)$$

$$0 \stackrel{!}{=} p_3^2 = (p_1 - q)^2 \approx q^2 - 2p_1 q = q^2 - 2P^*(q_o^* + q_3^*)$$

$$M_x^2 = p_4^2 = (p_2 + q)^2 \underset{\text{Labor}}{=} M^2 + q^2 + 2Mq_o \quad \underset{ep\text{-}SP\text{-}System}{=} q^2 + M^2 + 2P^*(q_o^* - q_3^*) .$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$q_o^* = \frac{2Mq_o + q^2}{4P^*}$$

$$q_3^* = \frac{q^2 - 2Mq_o}{4P^*} .$$

Die Gültigkeit der Impulsapproximation erfordert

$$\tau_{WW}^* = \frac{\hbar}{q_o^*} \ll \tau_L^* = \frac{\hbar}{\Delta E^*}$$

$$\frac{1}{q_o^*} = \frac{4P^*}{2Mq_o + q^2} \ll \frac{1}{\Delta E^*} = \frac{2P^*}{M_x^2 - M^2}$$

$$M_x^2 - M^2 \ll 2Mq_o + q^2 .$$

Da $q^2 = -4 E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ gilt, ist es sinnvoll, die Beziehung umzuschreiben in:

$$\frac{M_x^2 - M^2}{-q^2} \ll \frac{2Mq_o}{-q^2} - 1 .$$

Diese Bedingung ist erfüllt (Bjorken-Limes), falls

$$-q^2 \rightarrow \infty, q_o \rightarrow \infty$$

und gleichzeitig

$$0 \leq x =: -\frac{q^2}{2Mq_o} = \text{const} < 1 .$$

Man erwartet Skalenverhalten, d.h. die Anwendbarkeit der Stoßapproximation auf punktförmige Streuzentren in diesem Grenzfall. Es sei darauf hingewiesen, daß Bjorken diese Vorhersagen **vor** der Durchführung der Experimente gemacht hat.

Im Laborsystem gilt:

$$\begin{aligned} -q^2 = Q^2 &= 4E_1 E_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ q_o &= E_1 - E_3 , \end{aligned}$$

q_o ist in diesem System also die Energie des ausgetauschten Photons. Beide Größen können beim Nachweis der gestreuten Leptonen gemessen werden. Man erwartet quasifreie Streuung von Leptonen an Quarks, falls

$$\begin{aligned} E_1, E_3 &\gg M_p c^2 \\ \theta &\text{ groß} \end{aligned}$$

Experimente dazu sind z. B. das CDHS- und das H1-Experiment, die folgende experimentelle Befunde lieferten: die Impulsnäherung gilt bereits in guter Näherung, falls

$$W > 2 \text{ GeV}, \quad -q^2 > 1 \text{ GeV}^2 \quad (\text{Skalenverhalten})$$

Physikalische Interpretation von x :

Wir haben gesehen, daß die Bjorken-Variable x direkt aus den Meßgrößen $(-q^2, q_o)$ abgeleitet werden kann. Wir wollen jetzt zeigen, daß sie die folgende physikalische Bedeutung besitzt:

x ist der Bruchteil des Protonimpulses, der vom gestreuten Quark (Parton) getragen wird (im ep -Schwerpunktsystem).

Die Streuung findet am quasifreien Parton statt, d. h. die Partonmasse ändert sich beim Stoß nicht:

$$P_c^2 = (P_c + q)^2 = P_c^2 + 2P_c q + q^2 \rightarrow q^2 + 2P_c q = 0 .$$

Im ep -Schwerpunktsystem gilt:

$$\vec{P}_c^* = \eta \vec{P}^* + \vec{k}_\perp^* ,$$

wobei $\eta \vec{P}^*$ die longitudinale Komponente des Parton-Impulses ist

$$\begin{aligned} 0 &= q^2 + 2P_c q = q^2 + 2q_o^* E_c^* - 2 | \vec{q}_\perp^* | | \vec{K}_\perp^* | - 2q_3 \eta P^* \\ &= q^2 + 2q_o^* \eta P^* \left(1 + \frac{M_c^2}{2(\eta P^*)^2} + \frac{\vec{k}_\perp^{*2}}{2(\eta P^*)^2} \right) - 2q_3 \eta P^* = \rightarrow \end{aligned}$$

dabei sind M_c, k_\perp^* klein, da $k_\perp^* \approx \hbar / \langle r_p \rangle = 0.3 \text{ GeV}/c$.

Im Grenzfall $P^* \rightarrow \infty$ ist dies dann

$$\begin{aligned} \rightarrow &= q^2 + 2 \frac{2Mq_o + q^2}{4P^*} \eta P^* - 2 \frac{q^2 - 2Mq_o}{4P^*} \eta P^* = q^2 + 2Mq_o \eta \\ &\Rightarrow \eta = -\frac{q^2}{2Mq_o} = x . \end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt:

- Die kinematischen Parameter des Experiments (E_1, E_3, θ) können so gewählt werden, daß im Bjorken–Limes ein quasifreier Lepton–Quark–Streuprozeß stattfindet

$$x = -\frac{q^2}{2Mq_o} = \text{fest} ; \quad q_o, -q^2 \rightarrow \infty .$$

- Die Größe x im $e-p$ -Schwerpunktsystem gibt den Bruchteil des Protonimpulses an, der von dem gestreuten Parton vor der Streuung getragen wird.

Nachdem damit die kinematischen Überlegungen abgeschlossen sind, wenden wir uns jetzt der Berechnung der Streuquerschnitte zu. Hierzu sind Wahrscheinlichkeitsüberlegungen notwendig, da in der Impulsnäherung Wahrscheinlichkeiten und nicht Amplituden addiert werden.

6.2.3 Quantitative Formulierung des Quark–Parton–Modells

Es sollen hier nur einige grundlegende Ergebnisse behandelt werden. Dabei machen wir folgende Annahmen:

- Das Proton besteht bei der Betrachtung mit einer Sonde sehr kurzer Reichweite nur aus Quarks mit der Strangeness $S = 0$

$$\begin{array}{ll} u - \text{Quark} & I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2} \quad Q = \frac{2}{3}e \\ d - \text{Quark} & I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \quad Q = -\frac{1}{3}e . \end{array}$$

Bei den spektroskopischen Untersuchungen (siehe Kap.5.3) hatte die Sonde eine Wellenlänge $\lambda > r_p$. In diesem Fall bestand das Proton aus 3 Valenzquarks

$$|p\rangle = |uud\rangle \quad |n\rangle = |udd\rangle .$$

Bei Streuexperimenten mit Impulsübertrag

$$-q^2 \gg 1 \frac{GeV^2}{c^2}$$

ist nach Kap.6.1 die Wechselwirkungszeit so kurz, daß kurzfristig auch „freie“ (virtuelle) $q\bar{q}$ -Paare (Seequarks) beobachtet werden können, die in den folgenden Überlegungen zu berücksichtigen sind.

- Wie nehmen an, daß wir im Fall der Impulsapproximation Wahrscheinlichkeiten und nicht Amplituden zu addieren haben. Wir definieren:

$u(x)$ = Zahl der u -Quarks mit fraktionellem Impuls zwischen x und $x + dx$ im Proton.

Welche Streuprozesse können wir nutzen?

Coulombwechselwirkung:

$$\begin{array}{ll} eu \rightarrow eu & e\bar{u} \rightarrow e\bar{u} \\ ed \rightarrow ed & e\bar{d} \rightarrow e\bar{d} \\ \frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} e_q^2 \end{array}$$

Schwache Wechselwirkung:

$$\left. \begin{array}{l} \nu_\mu d \rightarrow \mu^- u \\ \nu_\mu \bar{u} \rightarrow \mu^- \bar{d} \end{array} \right\} \sigma(\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u) = \frac{sG_F^2}{\pi}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d \\ \bar{\nu}_\mu \bar{d} \rightarrow \mu^+ \bar{u} \end{array} \right\} \sigma(\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d) = \frac{1}{3} \frac{sG_F^2}{\pi}$$

Die angegebenen Wirkungsquerschnitte kann man analog zu Kap.5.5 wieder durch eine Dimensionsanalyse ableiten. Wegen der Erhaltung der Leptonzahl und wegen der Ladungserhaltung sind alle anderen Prozesse verboten:

$$\nu_\mu u \rightarrow \mu^+ d \quad \text{verboten!}$$

Der Faktor 1/3 im Wirkungsquerschnitt der Reaktion $\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d$ kann wieder mit Hilfe der Rotationsmatrizen plausibel gemacht werden. In Kap.3.1 wurde gezeigt:

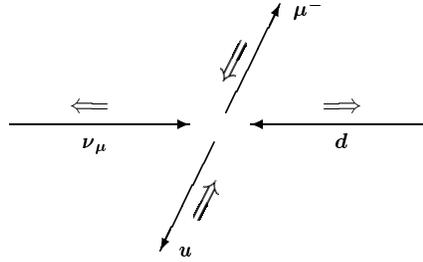
$$\kappa_\nu = \kappa_{e^-} = -1 \quad \kappa_{\bar{\nu}} = \kappa_{e^+} = +1 .$$

Wir postulieren eine Verallgemeinerung dieses Resultats für $E_q \gg m_q$:

$$\kappa_d = \kappa_u = -1$$

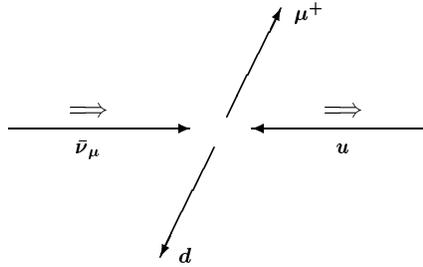
$$\kappa_{\bar{d}} = \kappa_{\bar{u}} = +1 .$$

Damit ergibt sich für die einzelnen Streuprozesse:



$J = 0 \rightarrow$ isotrope Winkelverteilung im Schwerpunktsystem $\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |d_{00}^0(\theta)|^2 \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = const$

$$\sigma \sim \int_{-1}^{+1} d \cos \theta = 2$$



$J = J_z \pm 1 \rightarrow$ anisotrope Winkelverteilung im Schwerpunktsystem $\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |d_{11}^1(\theta)|^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos \theta)^2$.

Dies ist auch plausibel: Vorwärtsstreuung ist erlaubt und Rückwärtsstreuung ($\theta = \pi$) wegen der Drehimpulserhaltung verboten ($J_{zf} = -1$ für obiges Beispiel)

$$\sigma \sim \int_{-1}^{+1} |d_{11}^1(\theta)|^2 d \cos \theta = \frac{1}{4} \left(\cos \theta + \frac{2 \cos^2 \theta}{2} + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right)_{-1}^1 = \frac{8}{3} \frac{1}{4} = \frac{2}{3} .$$

Vergleich mit der $\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u$ -Streuung ergibt

$$\sigma (\bar{\nu}_\mu u \rightarrow \mu^+ d) = \frac{1}{3} \sigma (\nu_\mu d \rightarrow \mu^- u) .$$

Wir wollen jetzt den Streuprozeß näher analysieren. Nach Definition der Partondichten $u(x)$ gilt für das Proton gemäß der Definition von $q(x)$:

$$\int_0^1 (u(x) - \bar{u}(x)) dx = 2 \quad \int_0^1 (d(x) - \bar{d}(x)) dx = 1 .$$

Weiterhin folgt aus den vorhergehenden Überlegungen

$$\frac{d\sigma}{dx}(\nu_\mu p) = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left(d(x) + \frac{1}{3} \bar{u}(x) \right)$$

$$\frac{d\sigma}{dx}(\bar{\nu}_\mu p) = \frac{G_F^2 s}{\pi} \left(\bar{d}(x) + \frac{1}{3} u(x) \right) .$$

Mit der Schwerpunktsenergie s , die für die Reaktion zur Verfügung steht, gilt

$$s = (p_\nu + p_c)^2 = p_\nu^2 + 2p_\nu p_c + p_c^2 \approx 2p_\nu p_c \underbrace{=}_{Labor} 2x M E_\nu$$

mit der Protonmasse M und den Bjorken-Skalenvariablen $x = -\frac{q^2}{2Mq_0}$.
Im Laborsystem, in dem das Targetnukleon ruht, gilt also

$$\frac{d\sigma}{dx}(\nu_\mu p) = \frac{G_F^2 M E_\nu}{\pi} 2x \left(d(x) + \frac{1}{3} \bar{u}(x) \right)$$

$$\frac{d\sigma}{dx}(\bar{\nu}_\mu p) = \frac{G_F^2 M E_\nu}{\pi} 2x \left(\bar{d}(x) + \frac{1}{3} u(x) \right) .$$

Aus diesen Modellvorhersagen wollen wir physikalisch überprüfbare Relationen ableiten. Die schematische Darstellung des von der CERN–Dortmund–Heidelberg–Saclay (CDHS) Kollaboration benutzten Detektors ist in Abb.6.11 gezeigt.

- $\sigma_{tot}(\nu p) = \int_0^1 \frac{d\sigma}{dx} dx \sim E_\nu$. Die Experimente bestätigen diese Vorhersage in einem weiten Energiebereich.
- Llewellyn–Smith–Summenregel: Wir definieren den Zustand des Nukleons durch

$$| N \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| uud \rangle + | ddu \rangle) .$$

Ein solches Teilchen wird zum Beispiel durch die Kerne ${}^6_3\text{Li}$, ${}^2_1\text{H}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ... repräsentiert.
Wir messen die Größe

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{\pi}{G_F^2 M E_\nu} \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\frac{d\sigma(\nu N)}{dx} - \frac{d\sigma(\bar{\nu} N)}{dx} \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} d_p(x) + \frac{1}{2} \bar{u}_p(x) + \frac{3}{2} d_n(x) + \frac{1}{2} \bar{u}_n(x) - \frac{1}{2} u_p(x) - \frac{3}{2} \bar{d}_p(x) - \frac{1}{2} u_n(x) - \frac{3}{2} \bar{d}_n(x) \right) dx . \end{aligned}$$

Dabei ist auf Grund der Isospininvarianz (p und n werden durch starke Wechselwirkung zusammengehalten):

$$d_n = u_p = u(x) \quad u_n = d_p = d(x) .$$

Hinweis: das Experiment ergibt $u(x) \neq d(x)$. Man erwartet

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2} d(x) - \frac{1}{2} d(x) + \frac{3}{2} u(x) - \frac{1}{2} u(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x) \right) dx =$$

$$\int_0^1 (u(x) + d(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x)) dx = 3$$

Gemessen wird mit Hilfe des obigen Ausdrucks

$$\int_0^1 (u(x) + d(x) - \bar{u}(x) - \bar{d}(x)) dx = 2.79 \pm 0.19$$

→ Das Proton hat 3 Valenzquarks!

Hinweis: Neuerdings gibt es einige Ungereimtheiten, wenn man Streuexperimente an polarisierten Protonen unternimmt mit longitudinal polarisierten Myonen/Elektronen. Von Reya wurde gezeigt, daß diese Beobachtungen erklärt werden können, wenn man annimmt, daß der Protonspin vorwiegend von Gluonen getragen wird. Dies Resultat wurde intuitiv nicht erwartet.

- $\frac{d\sigma}{dx} \sim x \left(d(x) + \frac{1}{3} \bar{u}(x) \right) \sim F_2(x),$

$F_2(x)$ nennt man Strukturfunktion, sie hängt im einfachen Quark-Parton-Modell nur von x , nicht aber von $-q^2$ ab. In 1. Näherung ist diese Vorhersage richtig (Nobelpreis 1990). Präzisere Experimente (CDHS, H1) zeigen Abweichungen, denn man beobachtet mit $-q_2^2 < -q_1^2$

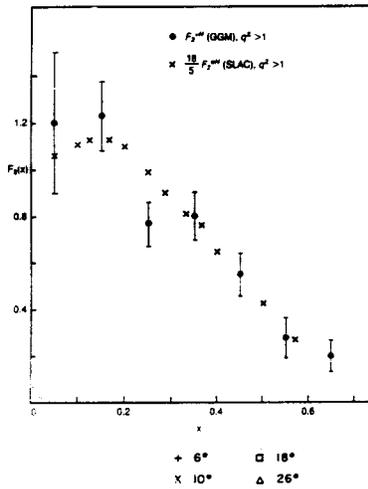
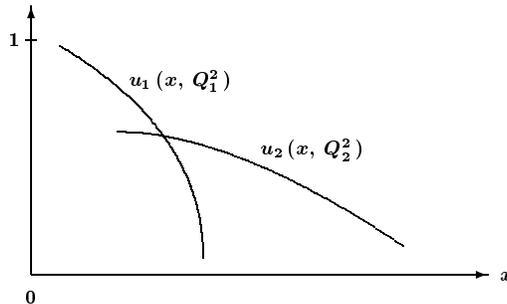


Abbildung 6.8: Vergleich der Strukturfunktion $F_2(x)$, gemessen in $e p$ - und νp -Reaktionen. Den Faktor $18/5$ erwartet man, falls Quarks drittelzahlige Ladung besitzen.



Erklärung: Gluon-Bremsstrahlung (logarithmische Korrektur)

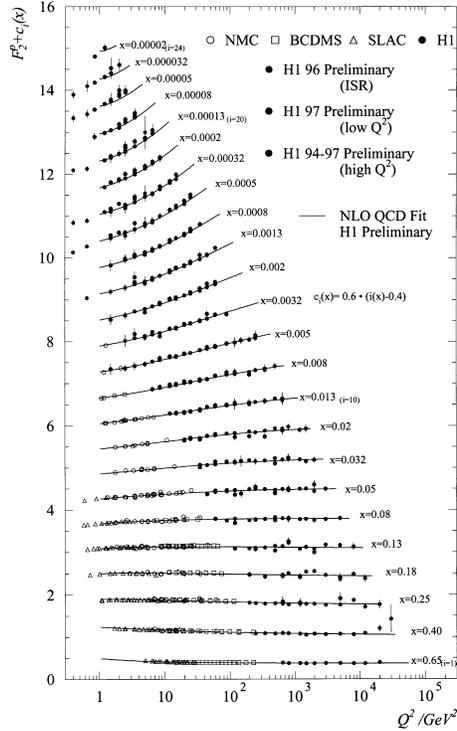
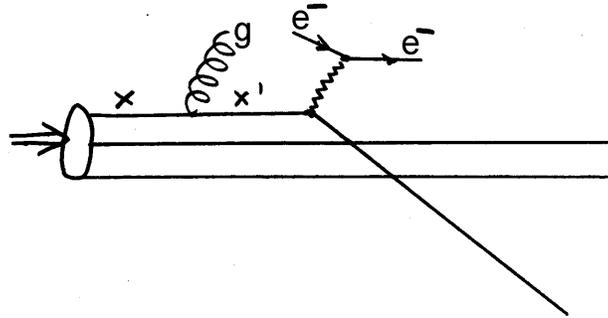


Abbildung 6.9: Gemessene Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$



Die Abweichungen werden mit Hilfe von Skalierungsgesetzen beschrieben: Altarelli–Parisi–Gleichungen. Bei der Quark–Beschleunigung treten Gluon–Bremsquanten auf. Mit wachsendem $-q^2$ löst man immer kleinere Raumbereiche auf ($\lambda \sim \frac{1}{\sqrt{-q^2}}$), d. h. für den Prozeß $q \rightarrow q' + g$ beobachtet man das Quark q' und seine Impulsverteilung. Deshalb muß $u(x)$ bei großem x mit wachsendem $-q^2$ kleiner werden und bei kleinem x mit wachsendem $-q^2$ steigen. Im obigen Bild ist $Q_1 > Q_2$. Direkt beobachtet man das Gluon, indem man diese Gluon–Bremsquanten wie in Abb.6.7 als 3. zusätzlichen Jet nachweist. Die gemessene Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$ ist in Abb.6.9 gezeigt. Für $x \approx 0.2$ beobachtet man keine Abhängigkeit von Q^2 , für $x < 0.05$ steigt F_2 mit wachsendem Q^2 an, für $x > 0.3$ nimmt sie dagegen mit wachsendem Q^2 ab. Einen der für die Messung von F_2 verwendeten Detektoren zeigt Abb.6.11.

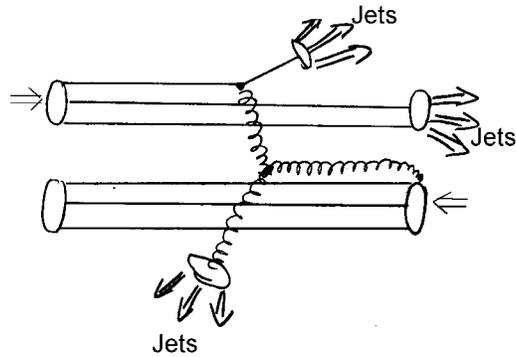


Abbildung 6.10: Beobachtung der Streuung von Quarks an Gluonen. Man beachte, daß man bei dieser Messung die Gluon-Selbstkopplung (siehe Kap.7.2) nachweisen kann.

- Mittlerer von Quarks getragener Impuls

$$\int_0^1 xq(x)dx = \frac{\pi}{G_F^2 M} \frac{\sigma_{tot}}{E_\nu} = \langle x \rangle .$$

Im Experiment beobachtet man $\langle x \rangle \simeq 0.5$. Die geladenen Bausteine (Quarks) im Proton besitzen nur etwa 50 % des gesamten Protonimpulses, der Rest wird von Gluonen getragen. Da die Gluonen weder mit e^- noch mit Neutrinos wechselwirken, muß man andere Experimente anstellen, um sie direkt nachzuweisen. Experimente dieser Art kann man an pp -Speicherringen durchführen.

Abb.6.10 zeigt qualitativ, wie man Gluonen direkt nachweisen kann [115, 116].

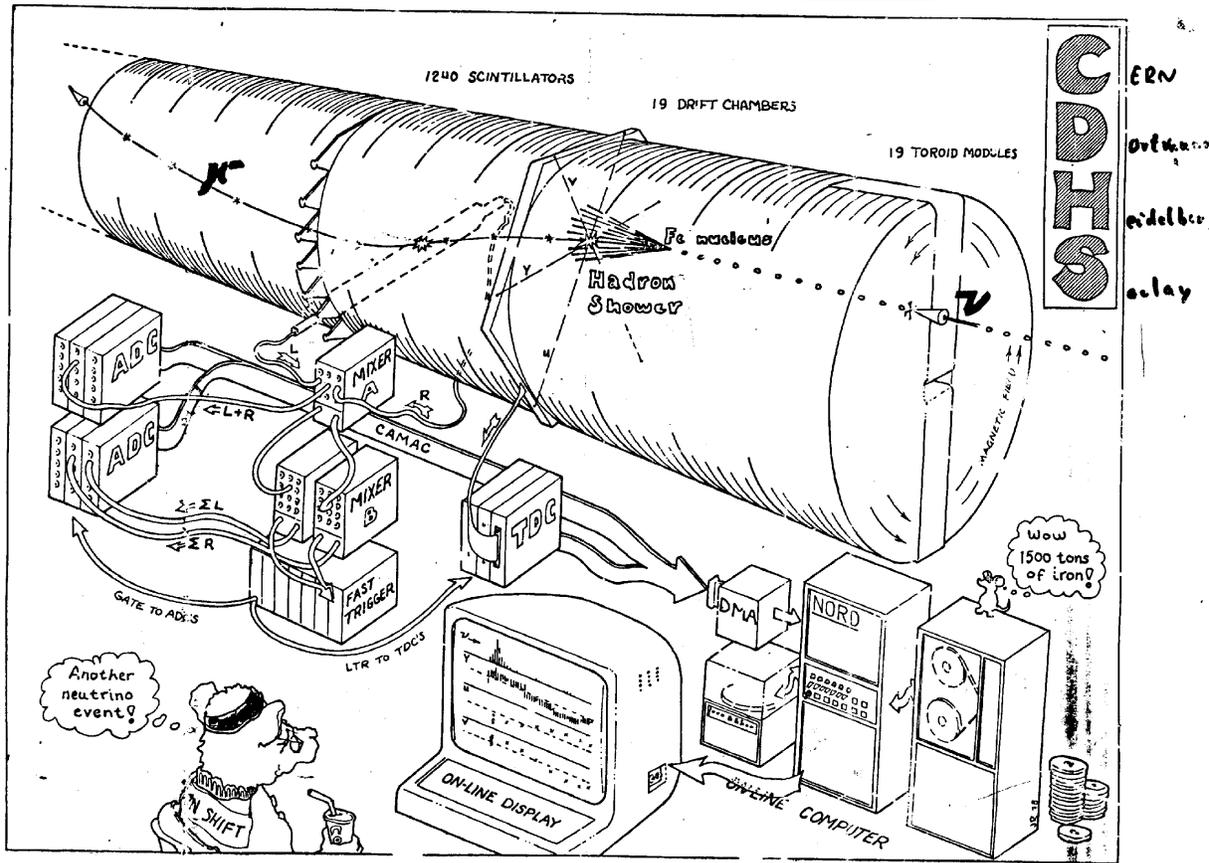


Abbildung 6.11: Schematische Darstellung des CDHS (CERN–Dortmund–Heidelberg–Saclay) ν -Detektors. Die ν wechselwirken mit den in Fe gebundenen Nukleonen. Die erzeugten Myonen werden in einem Toroidalfeld abgelenkt und die Bahnpunkte mit Driftkammern vermessen. Die Jets des gestreuten Quarks und des Zuschauerpartikels schauen im Eisen auf und werden mit Szintillationszählern nachgewiesen.