

Beiträge zu globalen Fragen in der NURBS-Technik

ILIJAS SELIMOVIC

Dissertation zur Erlangung
des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Universität Dortmund
am Fachbereich Mathematik

vorgelegt von
Ilijas Selimovic

unter der Betreuung von
Prof. Dr. Joachim Stöckler
Prof. Dr. Rolf Walter

Dortmund, April 2007

1. Gutachter:	Prof. Dr. Joachim Stöckler
2. Gutachter:	Prof. Dr. Rolf Walter
Vorsizender:	Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Tag der mündlichen Prüfung: 18.04.07

Vorwort

Vor Beginn des Promotionsvorhabens war es meine Aufgabe NURBS-Algorithmen für ISD Software und Systeme GmbH zu entwickeln. Im Laufe dieser Tätigkeit wurde mir bewusst, dass zu einigen algorithmischen Problemen keine wirklich zufriedenstellenden Ansätze bekannt waren. Aufgrund des erschöpften Forschungsinteresses und der Verlagerung zu neueren Gebieten, wie z.B. Unterteilungsflächen würden sich in kürzerer Zeit auch keine weiteren Lösungen ergeben. So habe ich mich dieser Aufgabe angenommen.

Es stimmt wahrscheinlich, dass im Zusammenhang mit NURBS keine Durchbrüche oder große Konzepte zu erwarten sind. Die Ergebnisse meiner Dissertation zeigen aber deutlich, dass nicht alles getan ist. Ich bin mir auch sicher, dass eine Vielzahl (aus praktischer Sicht) wichtiger Probleme auf ihre Lösungen warten.

Ich möchte ein herzliches Dankeschön an all die Personen richten, die an der Dissertation ideenreich, diskussionsbereit, motivierend oder tatkräftig beteiligt waren.

Mein erster Dank gilt Prof. Stöckler, ohne dessen Förderung ich die Arbeit nicht hätte schreiben können. Zu Beginn weil mir der arbeitszeitliche Rahmen fehlte, dann weil ich noch einige mathematische Fähigkeiten erlernen musste, und zuletzt durch Motivation und Ansporn. Seine Anregungen und Hinweise haben mich immer wieder auf den richtigen Weg geführt. Auch mein zweiter Betreuer, Prof. Walter, hat entscheidend zur Qualität der Arbeit beigetragen und mich in zahlreichen Diskussionen Anteil an seinem Wissen haben lassen. Auch ihm möchte ich hiermit größten Dank aussprechen.

Ich möchte auch ISD und meinen Arbeitskollegen danken. Besonders Peter Kohlmann, der mir immer wieder handfeste Hilfen bot und freundschaftlich in zahlreichen Diskussionen gegenüber stand. Herrn Flassig möchte für den Ansporn und den arbeitszeitlichen Rahmen danken. Ich danke auch Markus Grunwald, Göran Schild und allen anderen Mitarbeitern der Kernentwicklung.

Ich danke auch Günter Skoruppa, Maria Charina und Michael Scharfschwerdt. Ihre Korrekturen, Diskussionen und ihr Interesse waren mir eine große Hilfe. Auch meiner Schwiegermutter Elsa möchte ich herzlich für die Rechtschreibkorrekturen danken.

Meiner Frau Wibke schulde ich meinen besonderen Dank für ihre Geduld, den Rückhalt und all die Liebe der letzten Jahre.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	v
Einleitung	vi
1 Grundlagen	1
2 Konstruktion und Einsatz von Tangentialkegeln	13
2.1 Definitionen und bekannte Resultate	13
2.2 Konstruktion von Tangentialkegeln für NURBS-Kurven	15
2.3 Konstruktion von Tangentialkegeln für NURBS-Flächen	20
2.4 Einheitliche Darstellung globaler Eindeutigkeitsaussagen	22
2.4.1 Anwendung auf Selbstschnitte von NURBS-Flächen	24
2.4.2 Anwendung auf die Lösung polynomialer Gleichungssysteme in Bernstein-Bézier Form	26
3 Einführung zu Projektionen von Punkten auf NURBS-Kurven und -Flächen	27
3.1 Problemstellung	27
3.2 Anwendungsbeispiele	28
3.3 Bekannte Algorithmen	29
4 3D-Algorithmus für die Projektion von Punkten auf NURBS-Kurven und -Flächen	33
4.1 Ideenskizze für den Algorithmus	34
4.2 Eliminationskriterien	35
4.2.1 Ausschlusskriterien für Kurven	36
4.2.2 Ausschlusskriterien für Flächen	37
4.2.3 Weitere Ausschlusskriterien für Flächen	37
4.3 Numerische Ergebnisse	39

5	Symbolisch–Numerischer Algorithmus für die Projektion von Punkten auf rationale Bézier–Kurven und –Flächen	43
5.1	Mathematische Grundlagen	44
5.1.1	Konvexität des Abstandsquadrates	44
5.1.2	Konvexität der Kontrollwerte konvexer Funktionen	45
5.1.3	Konvexität bivariater Funktionen	47
5.2	Projektion eines Punktes auf eine Kurve	49
5.3	Bivariate Fragestellungen	53
5.3.1	Minimum bivariater, rationaler Bézier–Funktionen	53
5.3.2	Projektion eines Punktes auf eine Fläche	58
5.3.3	Nächste Punkte zwischen zwei Kurven	60
5.3.4	Projektion auf getrimmte Flächen	63
5.3.5	Projektion auf Subdivisionsflächen	64
5.4	Vergleich	64
5.4.1	Vergleich mit anderen Umformungen des Problems	64
5.4.2	Vergleich mit 3D Algorithmen	66
6	Eindeutigkeit von Projektionen	67
6.1	Totalkrümmung und der Satz von Fenchel	67
6.2	Lotfußpunkte und Totalkrümmung	69
6.3	Das freie Rollen auf Raumkurven	74
6.4	Anwendung auf Hyperflächen	77
7	Totalkrümmung von NURBS–Kurven	81
7.1	Totalkrümmungsverminderung von NURBS Kurven	81
7.2	Konvergenz der Winkelsumme des Kontrollpolygons	82
7.2.1	Differentialgeometrische Hilfssätze	83
7.2.2	Konvergenz	87
7.3	Anwendungen	90
8	Geschwindigkeit rationaler Bézier–Kurven und –Flächen	95
8.1	Abschätzungen für Kurven	96
8.2	Abschätzungen für Flächen	99
	Literaturverzeichnis	103

Symbolverzeichnis

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt
\sphericalangle	Winkel zwischen 0 und π
\times	Vektorprodukt
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge oder gleich B
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm
$\ \cdot\ _\infty$	Maximumsnorm
$\binom{n}{i}$	$\frac{n!}{i!(n-i)!}$ (Binomialkoeffizient)
$[\cdot]$	Gauß-Klammer
ΔP_i	$P_{i+1} - P_i$
$\Delta^2 P_i$	$P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i$
$\Delta_{1,0} P_{i,j}$	$P_{i+1,j} - P_{i,j}$
$\Delta_{2,0} P_{i,j}$	$P_{i+2,j} - 2P_{i+1,j} + P_{i,j}$
$\Delta_{1,1} P_{i,j}$	$P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j} - P_{i,j+1} + P_{i,j}$
$\Delta_{0,1} P_{i,j}$	$P_{i,j+1} - P_{i,j}$
$\Delta_{0,2} P_{i,j}$	$P_{i,j+2} - 2P_{i,j+1} + P_{i,j}$
\overline{PQ}	Strecke zwischen P und Q
B_i^n	i -tes Bernsteinpolynom vom Grade n
$\text{conv}(A)$	Konvexe Hülle einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$\text{dist}(A, B)$	Abstand zwischen A und B
d	Differential
e_1, \dots, e_n	kanonische Basis des \mathbb{R}^n
$\text{grad}(f)$	Gradient der Funktion f
$\text{Hess}(f)$	Hessematrix der Funktion f
$\kappa(\gamma)$	Totalkrümmung der Kurve γ
$L(\gamma)$	Bogenlänge der Kurve γ
N_i^p	Normalisierter B-Spline der Ordnung p
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen (ohne die Null)

Einleitung

NURBS-Kurven und -Flächen sind ein weit verbreiteter Standard zur Darstellung von Geometrien in CAD-Systemen jeglicher Art. Sie bieten genügend Flexibilität, um beliebige Formen darzustellen zu können, haben aber trotzdem eine greifbare mathematische Darstellung. Sie werden über Kontrollpunkte und Gewichte beschrieben, welche die geometrische Ausprägung bestimmen und wiedergeben. Die Form der Kurven und Flächen spiegelt sich auf vielfältige Weise in den Kontrollpunkten, sodass wertvolle Einsichten in die geometrische Ausprägung gewonnen werden können. Beispielsweise liegen die Kurven oder Flächen stets in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.

Eine weitere Stärke von NURBS-Kurven und -Flächen ist die Möglichkeit Teile von ihnen eigenständig, d.h. durch neue Kontrollpunkte und Gewichte darzustellen, die wiederum die Geometrie dieser Teile widerspiegeln. Zusammen mit der Erkenntnis, dass die Koppelung der Kontrollpunkte mit der Form der Kurven oder Flächen um so stärker ist, je kleiner die betrachteten Teilsegmente sind, bietet sich schließlich die Möglichkeit die Figuren beliebig genau zu untersuchen.

Mit diesen Eigenschaften lassen sich besonders effiziente Algorithmen zur Berechnung von globalen Eigenschaften sowie von Schnittpunkten und Abständen für NURBS-Kurven und -Flächen entwickeln. Sie basieren typischerweise auf einer Divide and Conquer Strategie, die mit Hilfe der Teilungsfähigkeiten der NURBS-Darstellung umgesetzt wird. Dabei werden die Figuren rekursiv in Teilstücke zerlegt, bis sie einfach genug für den Einsatz direkter Verfahren sind.

Für die effiziente Umsetzung eines solchen Algorithmus sind zwei Fragen von zentraler Bedeutung:

1. Ist die Teilkurve bzw. -fläche für die Lösung relevant?
2. Ist das Problem einfach genug, um eine andere Strategie zu wählen wie z.B. die Iteration mit dem Newtonverfahren?

Kapitel 2 zeigt verbesserte Möglichkeiten auf, die speziellen Eigenschaften der NURBS-Darstellung zu nutzen, um diese Fragen zu beantworten. Dazu wird eine neue Eindeutigkeitsaussage für beliebige Gleichungssysteme entwickelt und gezeigt, wie sie sich auf verschiedene Probleme anwenden lässt. Ein weiteres, grundlegendes Ergebnis in diesem Zusammenhang ist die Entwicklung einer Möglichkeit für die Abschätzung des Richtungsfeldes der partiellen Ableitungen von NURBS-Flächen.

Die folgenden drei Kapitel sind Abstandsproblemen gewidmet, für die gleich zwei Algorithmen angegeben werden. Der 3D-Algorithmus für die Be-

rechnung von Punktabständen zu Kurven oder Flächen bietet eine Verbesserung bezüglich der ersten der obigen Fragen. Verglichen mit früher vorgeschlagenen Vorgehensweisen führt er zu einer verbesserten Rechenzeit und Stabilität. Die zweite Frage wird jedoch immer noch heuristisch gelöst, was eine Quelle für Instabilität sein kann. Dieses Problem geht der Algorithmus aus Kapitel 5 an. Er beschränkt sich auf rationale Bézier-Kurven und -Flächen, sodass die Darstellung des Abstandsquadrates als rationale Bezier-Funktion effizient berechenbar ist. Für diese Funktion kann die Eindeutigkeit eines lokalen Minimums gesichert werden, sodass wir ein sicheres Kriterium für den Übergang zur Newtoniteration haben. Zusammen mit weiteren Überlegungen führt dies zu einer Robustheit, die – bei gleichzeitiger Reduktion der Rechenzeit – über die bekannten Ansätze hinausgeht.

In Kapitel 6 wird das Abstandsproblem aus der differentialgeometrischen Perspektive betrachtet. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen Punkte einen eindeutigen Lotfußpunkt bzw. nächsten Punkt auf einer Kurve oder Fläche besitzen. Sind die Punkte näher an der Kurve als das Minimum der Krümmungsradien bzw. näher an der Fläche als das Minimum aller Hauptkrümmungsradien, kann die Eindeutigkeit garantiert werden, falls die Kurven eine Schranke an die Totalkrümmung oder die Flächen eine Schranke an einen neu definierten Krümmungsradius unterschreiten. Aus einem anderen Blickwinkel betrachtet, sind diese Ergebnisse eine erstmalige Verallgemeinerung des Rollsatzes von Blaschke für offene Kurven und Flächen.

In Kapitel 7 wird der Zusammenhang der Totalkrümmung einer NURBS-Kurve mit den Eigenschaften ihres Kontrollpolygons untersucht. Es stellt sich heraus, dass die Totalkrümmung durch die Winkelsumme des Kontrollpolygons abgeschätzt werden kann. Für reguläre NURBS-Kurven wird auch die Konvergenz der Winkelsumme gegen die Totalkrümmung unter Verfeinerung des Knotenvektors gezeigt und durch ein Beispiel belegt, dass die Regularität eine notwendige Voraussetzung ist. Als Anwendung werden die Krümmungsdämpfung des Schoenberg-Operators gefolgert und neue Algorithmen für die Berechnung von Selbstschnitten für Kurven und Tubenflächen angegeben.

Im letzten Kapitel wird die maximale Geschwindigkeit von Kurven und Flächen untersucht. Das ist die Norm der Ableitungsvektoren. Für den rationalen Bézier-Fall werden die bekannten Abschätzungen verbessert und ergänzt. Die neue Abschätzung hängt nicht mehr vom Quotienten des größten und kleinsten Gewichts ab, sondern vom Quotienten aufeinander folgender Gewichte.

*If I have seen further than others, it is
by standing upon the shoulders of giants.
(Isaac Newton)*

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die am häufigsten verwendeten Begriffe eingeführt und einige ihrer Eigenschaften zusammengetragen. Die einfachsten Bezeichnungen finden sich im Symbolverzeichnis. Hier sind zunächst einige elementare Begriffe:

$(u_0, \dots, u_m), u_i \in \mathbb{R}$ heißt **Zerlegung eines Intervalls** $[a, b]$, falls $a = u_0, b = u_m$ und $u_i \leq u_{i+1}$. Ihre **Feinheit** ist

$$\Delta(u_0, \dots, u_m) := \max_{0 \leq i \leq m-1} |u_{i+1} - u_i|.$$

Weiterhin wird die **Kugel** mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^n$ und Radius $R > 0$ definiert als $\{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - M\| \leq R\}$.

Differentialgeometrische Begriffe

Eine (parametrisierte) **Kurve** $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 2$ ist eine stetige Abbildung eines reellen, kompakten Intervalls I mit nichtleerem Inneren in den \mathbb{R}^n . Für eine C^1 -glatte Kurve ist die **Bogenlänge** gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_I \|\gamma'(t)\| dt,$$

und sie heißt **regulär**, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Eine C^1 -glatte reguläre Kurve lässt sich auch **normal**, also bezüglich der Bogenlänge parametrisieren, sodass $\|\gamma'\| = 1$ gilt.

Ist die Kurve C^2 -glatt und regulär, so ist ihre **Krümmung** gegeben durch

$$\kappa := \frac{\sqrt{\|\gamma'\|^2\|\gamma''\|^2 - \langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}}{\|\gamma'\|^3}. \quad (1.0.1)$$

Für $n = 2$ wird gelegentlich die **vorzeichenbehaftete Krümmung**

$$\kappa_2 := \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3}$$

und das **Frenetsche Zweibein** a_1, a_2 verwendet. a_1 ist gegeben durch

$a_1 := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ und a_2 durch die Bedingung, dass a_1, a_2 eine positiv orientierte Orthonormalbasis bilden.

Die folgenden Begriffe benötigen wir zur Definition der Totalkrümmung. Ein **Polygonzug** P im \mathbb{R}^n mit $m \geq 1$ Ecken ist eine endliche Folge von Punkten $P_0, \dots, P_m \in \mathbb{R}^n$. Er heißt **regulär**, falls $P_i \neq P_{i+1}$ und **geschlossen**, wenn $P_m = P_0$ ist. Zur Vereinfachung der Notation sollen Indizes, die nicht im definierten Bereich liegen, den kleinsten Rest modulo $m + 1$ bezeichnen. Mit

$$\phi_i := \angle(P_{i+1} - P_i, P_i - P_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}$$

ist die **Winkelsumme** eines regulären Polygonzuges P definiert durch $\angle(P) := \sum_{i=1}^{m-1} \phi_i$ und die Winkelsumme eines geschlossenen regulären Polygonzuges durch $\angle(P) := \sum_{i=1}^m \phi_i$. Zur Definition der **Winkelsumme** eines nichtregulären Polygonzuges werden aufeinander folgende gleiche Punkte zu einem Punkt zusammengefasst. Ein Polygonzug P_0, \dots, P_m heißt **einbeschrieben** in eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn es $t_0, \dots, t_m \in [a, b]$ gibt, mit $t_i \leq t_{i+1}$ und $P_i = \gamma(t_i)$. Die **Totalkrümmung** der (geschlossenen) Kurve ist gegeben durch $\kappa(\gamma) := \sup\{\angle(P')\}$, wobei P' über alle (geschlossenen) in γ einbeschriebenen regulären Polygonzüge läuft. Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang der Totalkrümmung mit der Krümmung (1.0.1) und rechtfertigt dadurch den Namen.

Satz 1.0.1 (vgl. (AlexResh89, Abschnitt 5.3)) Für eine reguläre C^2 -glatte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist $\kappa(\gamma)$ endlich, und es gilt

$$\kappa(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa(t) dt,$$

wobei κ die durch Formel (1.0.1) definierte Krümmung von γ ist.

Außerdem lässt sich die Totalkrümmung als die Summe der Winkeländerungen der Ableitungsvektoren interpretieren:

Satz 1.0.2 (CoraPort87) Die Totalkrümmung einer regulären C^1 -glatten Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, falls $\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ rektifizierbar ist. Dann gilt auch

$$\kappa(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i)) \right\},$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen von $[a, b]$ genommen wird.

Beweis: Der Beweis erschließt sich direkt aus 4.7 und 4.8 von (CoraPort87).

□

Ein (parametrisiertes) **Flächenstück**

$$F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{1.0.2}$$

$$(u, v) \rightarrow F(u, v) \tag{1.0.3}$$

ist eine stetige Abbildung des Produktes zweier reeller, kompakter Intervalle mit nichtleerem Inneren in den \mathbb{R}^3 . Im Folgenden auftretende Ableitungen seien als existent vorausgesetzt. F heißt **regulär**, falls

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \neq 0, \text{ für alle } u \in I, v \in J,$$

und dann ist das **Normalenvektorfeld** definiert als

$$N := \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right\|}.$$

Die **erste und zweite Fundamentalform** sind dann gegeben durch:

$$I := \langle dF \otimes dF \rangle$$

$$II := \langle dF \otimes dN \rangle.$$

Für $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ bedeutet dies:

$$I(w_1, w_2) = \langle dF(w_1), dF(w_2) \rangle,$$

$$II(w_1, w_2) = \langle dF(w_1), dN(w_2) \rangle.$$

Bezüglich der Koordinatenrichtungen lässt sich I dann darstellen durch

$$\begin{pmatrix} \langle \partial_u F, \partial_u F \rangle & \langle \partial_u F, \partial_v F \rangle \\ \langle \partial_u F, \partial_v F \rangle & \langle \partial_v F, \partial_v F \rangle \end{pmatrix},$$

und II durch

$$\begin{pmatrix} \langle \partial_u F, \partial_u N \rangle & \langle \partial_u F, \partial_v N \rangle \\ \langle \partial_u F, \partial_v N \rangle & \langle \partial_v F, \partial_v N \rangle \end{pmatrix} \text{ oder } - \begin{pmatrix} \langle \partial_u \partial_u F, N \rangle & \langle \partial_u \partial_v F, N \rangle \\ \langle \partial_u \partial_v F, N \rangle & \langle \partial_v \partial_v F, N \rangle \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist die **Normalschnittkrümmung** zur Richtung $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$\kappa_N(w) = \frac{II(w, w)}{I(w, w)}.$$

Das Minimum und Maximum der Normalschnittkrümmungen an einer Stelle werden als die **Hauptkrümmungen** κ_1, κ_2 bezeichnet.

NURBS–Kurven und –Flächen

In diesem Abschnitt werden die Definitionen und die wichtigsten Eigenschaften der NURBS–Darstellung von Kurven und Flächen zusammengetragen. Referenzen werden nur für die Eigenschaften angegeben, die nicht in den Lehrbüchern (PieglTiller97), (Farin02) oder (PatrMaek02) zu finden sind. Es wird die Notation von (PatrMaek02) verwendet.

B–Splines

Wir definieren die (normalisierten) **B–Splines** $N_i^p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ der Ordnung $p \geq 1$ zur Zerlegung (u_0, \dots, u_m) von $[a, b]$ durch

$$N_i^1(x) := \begin{cases} 1, & u_i \leq x < u_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, i = 0, \dots, m-1 \quad (1.0.4)$$

und die Rekursionsvorschrift von deBoor, Cox und Mansfield

$$N_i^p(x) := \frac{x - u_i}{u_{i+p-1} - u_i} N_i^{p-1}(x) + \frac{u_{i+p} - x}{u_{i+p} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(x), \quad (1.0.5)$$

wobei $i = 0, \dots, m-p$, $x \in [u_0, u_m]$ und $0/0$ als 0 definiert ist. Die Zerlegung (u_0, \dots, u_m) wird als **Knotenvektor** und seine Einträge als **Knoten** bezeichnet. Die **Vielfachheit** eines Knotens ist die Anzahl der vorkommenden Einträge mit gleichem Wert.

Einige wichtige Eigenschaften der B–Splines sind:

- **Polynomialität:** $N_i^p|_{[u_k, u_{k+1}]}$ ist Polynom vom Grad $p-1$
- **Positivität:** $N_i^p \geq 0$

- **Kompakter Träger:** $N_i^p(x) = 0$, für $x < u_i$ oder $u_{i+p} \leq x$
- **Zerlegung der Eins:** $\sum_{i=k-p+1}^k N_i^p(x) = 1$, für $u_k \leq x < u_{k+1}$
- **Differenzierbarkeit:** N_i^p ist an jedem Knoten der Vielfachheit k $p - k - 1$ mal stetig differenzierbar

Mit den **Greville–Abszissen**

$$\eta_i^p := \frac{u_{i+1} + \dots + u_{i+p-1}}{p-1} \quad (1.0.6)$$

zur Ordnung p lassen sich lineare Funktionen darstellen:

$$\sum_{i=0}^{m-p} \eta_i^p N_i^p(x) = x, x \in [u_p, u_{m-p}[. \quad (1.0.7)$$

Die **Ableitung** der B–Splines ist gegeben durch die Formel:

$$(N_i^p)'(x) = \frac{p-1}{u_{i+p-1} - u_i} N_i^{p-1}(x) - \frac{p-1}{u_{i+p} - u_{i+1}} N_{i+1}^{p-1}(x), \quad x \in [u_0, u_m].$$

Die **Ableitung einer Linearkombination** $r(x) := \sum_{i=0}^{m-p} P_i N_i^p(x)$ mit $P_i \in \mathbb{R}^d, d > 0$ lässt sich dann schreiben als:

$$r'(x) = \sum_{i=1}^{m-p} (p-1) \frac{P_i - P_{i-1}}{u_{i+p-1} - u_i} N_i^{p-1}(x), \quad x \in [u_0, u_m]. \quad (1.0.8)$$

r lässt sich auch durch B–Splines niedrigerer Ordnung darstellen:

$$r(x) = \sum_{i=0}^{m-p-1} N_i^{p-1}(x) [(1 - \alpha_i(x))P_{i-1} + \alpha_i(x)P_i], \quad x \in [u_0, u_m], \quad (1.0.9)$$

wobei $\alpha_i(x) = \frac{x - u_i}{u_{i+p-1} - u_i}$. Da die N_i^1 stückweise konstant sind, kann durch rekursive Anwendung von (1.0.9) die Auswertung von r berechnet werden. Diese Vorgehensweise ist auch als **deBoor–Algorithmus** bekannt.

Ein weiterer wichtiger Algorithmus ist das **Einfügen eines Knotens**. Mit diesem lässt sich zu r eine neue Darstellung als Linearkombination von B–Splines finden, die zu einem Knotenvektor mit einem zusätzlichem Knoten $u_* \in [u_l, u_{l+1}]$ definiert sind. Es werden also Koeffizienten \bar{P}_i bestimmt, sodass

$$r(x) = \sum_{i=0}^{m-p+1} \bar{N}_i^p(x) \bar{P}_i, \quad x \in [u_0, u_m],$$

wobei \overline{N}_i^p B-Splines zum Knotenvektor $(u_0, \dots, u_l, u_*, u_{l+1}, \dots, u_m)$ sind. Sie lassen sich berechnen durch die Vorschrift:

$$\overline{P}_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} \quad (1.0.10)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i \leq l - p + 1, \\ \frac{u_* - u_i}{u_{i+p-1} - u_i}, & l - p + 2 \leq i \leq l, \\ 0, & i \geq l + 1. \end{cases} \quad (1.0.11)$$

Dieser Algorithmus eröffnet auch die Möglichkeit, eine B-Spline-Darstellung für einen Teil der Abbildung r zu bestimmen, z.B. für den Parameterbereich $[u_0, u_*], u_* \in]u_l, u_{l+1}[$. Dazu wird die Darstellung zu einem Knotenvektor bestimmt, in dem u_* $p-1$ mal auftritt. Mit den so gewonnenen Koeffizienten \widehat{P}_i lässt sich $r|[u_0, u_*]$ mit B-Splines \widehat{N}_i^p zum Knotenvektor $(u_0, \dots, u_l, u_*, \dots, u_*)$ darstellen, wobei u_* hier die Vielfachheit p hat. Es gilt

$$r|[u_0, u_*] = \sum_{i=0}^l \widehat{N}_i^p \widehat{P}_i.$$

Entsprechend gilt auch

$$r|[u_*, u_m] = \sum_{i=0}^{m-l-1} \widehat{N}_i^p \widehat{P}_{i+l},$$

wobei \widehat{N}_i^p die B-Splines zum Knotenvektor $(u_*, \dots, u_*, \dots, u_m)$ sind. Die Berechnung der B-Spline-Darstellungen von $r|[u_0, u_*]$ und $r|[u_*, u_m]$ wird nachfolgend **Unterteilen** genannt.

Ein weiteres bekanntes Resultat ist die quadratische Konvergenz der Koeffizienten gegen die Auswertungen der Funktion an den Greville-Abszissen. Um dies genauer zu formulieren, treffen wir die Konvention $u_l = u_0$ für $l < 0$ und $u_l = u_m$ für $l > m$ und definieren damit $h_{i,p} = (u_{i+2p-2} - u_{i-p+2})$.

Satz 1.0.3 (Dahmen86, Theorem 2.1) *Es gibt eine nur von der Ordnung p abhängige Konstante $C > 0$, sodass für jedes auf $[u_{i-p+2}, u_{i+2p-2}]$ stetige $r = \sum_{i=0}^{m-p} P_i N_i^p$ und alle $i \in \{0, \dots, m-p\}$ gilt:*

$$\|r(\eta_i) - P_i\| \leq C \cdot h_{i,p} \left\| r'|[u_{i-p+2}, u_{i+2p-2}] \right\|_{\infty}.$$

Ist $r \in C^1[u_{i-p+2}, u_{i+2p-2}]$, gilt sogar:

$$\|r(\eta_i) - P_i\| \leq C \cdot (h_{i,p})^2 \left\| r''|[u_{i-p+2}, u_{i+2p-2}] \right\|_{\infty}.$$

Hierbei ist unter r' und r'' die einseitige (links- oder rechtsseitige) Ableitung zu verstehen.

Der Satz ist in der Referenz für Funktionen (d.h. für skalare P_i) formuliert, er lässt sich jedoch direkt auf Kurven (d.h. für vektorielle P_i) übertragen.

Bemerkung 1.0.4 (Erklärung zu Konvergenzaussagen)

Konvergenzaussagen beziehen sich auf das Verhalten der Kontrollpunkte und Gewichte bei Veränderung der Basis, in der die Abbildung dargestellt wird. Der durch die Basis aufgespannte Raum ist variabel, es wird lediglich vorausgesetzt, dass die konkrete Abbildung dargestellt werden kann. Intuitiv gesprochen, bedeutet Satz 1.0.3: Wenn wir eine B-Spline-Darstellung der Funktion r wählen, deren Knotenvektor eine halbierte Feinheit hat, dann wird $\max |P_i - r(\eta_i)|$ geviertelt.

Bei Aussagen für Kurven und Flächen ist zu beachten, dass die Parametrisierung und der Definitionsbereich unverändert bleiben, und somit auch der erste und letzte Knoten.

NURBS-Kurven

Eine NURBS-Kurve der Ordnung $p \geq 2$ wird über Knotenvektoren der Form

$$u_0 = \dots = u_{p-1} \leq \dots \leq u_{m-p+1} = \dots = u_m \tag{1.0.12}$$

mit $u_i < u_{i+p-1}, i = 1, \dots, m - p$ definiert. Zu gegebenen **Kontrollpunkten** $P_i \in \mathbb{R}^d, d > 1$ und **Gewichten** $w_i \in \mathbb{R}^+$ für $i = 0, \dots, m - p$ hat sie die Darstellung

$$\gamma(x) := \frac{\sum_{i=0}^{m-p} N_i^p(x) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{m-p} N_i^p(x) w_i}, x \in [u_0, u_m]. \tag{1.0.13}$$

Wie üblich wird der Funktionswert in u_m durch den Grenzwert von $\gamma(u_m - h)$ für $h \rightarrow u_m$ ersetzt, sodass eine stetige Kurve entsteht. In dieser Arbeit (wie sonst überall auch) werden alle Linearkombinationen von B-Splines auf diese Weise ergänzt.

Der Polygonzug P_0, \dots, P_L der aufeinanderfolgenden Kontrollpunkte wird als **Kontrollpolygon** bezeichnet. Die wichtigsten Eigenschaften einer solchen Kurve sind:

- **Rationalität:** $\gamma|_{[u_k, u_{k+1}]}$ ist rational
- **convex-hull-property:** $\gamma([u_k, u_{k+1}])$ liegt in der konvexen Hülle von P_{k-p+1}, \dots, P_k
- **Endpunktinterpolation:** $\gamma(u_0) = P_0$ und $\gamma(u_m) = P_L$

- **Endtangente:**

$$\gamma'(u_0) = (p-1) \frac{w_1 P_1 - P_0}{w_0 u_p - u_0}, \gamma'(u_m) = (p-1) \frac{w_{m-p-1} P_{m-p} - P_{m-p-1}}{w_{m-p} u_m - u_{m-p}} \quad (1.0.14)$$

- **Lokalität:** Für $x \in [u_k, u_{k+1}]$ ist $\gamma(x)$ bereits durch die Kontrollpunkte P_{k-p+1}, \dots, P_k bestimmt
- **Differenzierbarkeit:** γ ist an jedem Knoten der Vielfachheit k $p-1-k$ mal stetig differenzierbar
- **variation–diminishing–property:** Für $d=2$ schneidet jede Gerade das Kontrollpolygon mindestens so oft wie die Kurve. Für $d=3$ gilt dasselbe für Schnitte mit Ebenen.

Unterteilung, Einfügen von Knoten und Auswertungen mit dem deBoor–Algorithmus lassen sich in natürlicher Weise auf NURBS–Kurven übertragen, indem sie für Zähler und Nenner in (1.0.13) getrennt durchgeführt werden. Dabei ist gewährleistet, dass die neuen Gewichte positiv sind, weil sie durch Konvexkombinationen der ursprünglichen Gewichte entstehen. Für die Kontrollpunkte Q_i der NURBS–Darstellung mit zusätzlichem Knoten $u_* \in [u_l, u_{l+1}]$ gilt $Q_i = P_i$, für $i \leq l-p+1$, $Q_i = P_{i-1}$, für $i \geq l+1$ und

$$Q_i = \frac{\alpha_i w_i}{\alpha_i w_i + (1-\alpha_i) w_{i-1}} P_i + \frac{(1-\alpha_i) w_{i-1}}{\alpha_i w_i + (1-\alpha_i) w_{i-1}} P_{i-1}, \quad (1.0.15)$$

für $i = l-p+2, \dots, l$, mit den α_i aus (1.0.10).

NURBS–Flächen

Eine **NURBS–Fläche** F der Ordnungen $p, q \geq 2$ ist gegeben durch zwei Knotenvektoren $U = (u_0, \dots, u_m)$ und $V = (v_0, \dots, v_n)$ mit Eigenschaften wie bei den Kurven (1.0.12), den **Kontrollpunkten** $P_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ und den **Gewichten** $w_{i,j} \in \mathbb{R}^+$, $i = 0, \dots, m-p$; $j = 0, \dots, n-q$. Sie ist definiert durch

$$F(u, v) := \frac{\sum_{i=0}^{m-p} \sum_{j=0}^{n-q} N_i^p(u) N_j^q(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m-p} \sum_{j=0}^{n-q} N_i^p(u) N_j^q(v) w_{i,j}}, \quad u \in [u_0, u_m], v \in [v_0, v_n], \quad (1.0.16)$$

wobei die von u abhängigen B–Splines auf dem Knotenvektor U und die anderen auf V definiert sind. Die Menge der Kontrollpunkte wird auch als **Kontrollnetz** bezeichnet.

NURBS–Flächen besitzen ähnliche Eigenschaften wie Kurven:

- **Rationalität:** $F[[u_k, u_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}]]$ ist rational
- **convex-hull-property:** $F([u_k, u_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}])$ liegt in der konvexen Hülle von $P_{i,j}, i = k - p + 1, \dots, k; j = l - q + 1, \dots, l$
- **Endpunktinterpolation:** $F(u_0, v_0) = P_{0,0}$, die anderen Ecken entsprechend
- **Randdarstellung:** Der Rand $F(\{u_0\} \times [v_0, v_n])$ ist eine NURBS-Kurve mit Knotenvektor V , Kontrollpunkten $P_{0,k}$ und Gewichten $w_{0,k}, k = 0, \dots, n - q$. Für die anderen Ränder gilt Analoges
- **Lokalität:** Für $x \in [u_k, u_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}]$ ist $F(x)$ bereits durch die Kontrollpunkte $P_{i,j}, i = k - p + 1, \dots, k, j = l - q + 1, \dots, l$ bestimmt
- **Differenzierbarkeit:** Für jeden Knoten u_* aus U der Vielfachheit k gilt, dass F an jedem $(u_*, v), v \in [v_0, v_n]$ in u -Richtung $p - 1 - k$ mal stetig partiell differenzierbar ist. Für die Parameterrichtung v gilt analoges.

NURBS-Flächen lassen sich als Kurvenschar interpretieren, deren Kontrollpunkte ebenfalls Kurven sind:

$$P_i(v) := \frac{\sum_{j=0}^{n-q} N_j^q(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{j=0}^{n-q} N_j^q(v) w_{i,j}}, \quad W_i(v) := \sum_{j=0}^{n-q} N_j^q(v) w_{i,j},$$

$$F(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{m-p} N_i^p(u) W_i(v) P_i(v)}{\sum_{i=0}^{m-p} N_i^p(u) W_i(v)}. \quad (1.0.17)$$

Unterteilung und das Einfügen von Knoten lassen sich bezüglich einer Parameterrichtung direkt übertragen.

Weitere Bezeichnungen

Es wird gelegentlich von **polynomialen** Kurven und Flächen gesprochen. Damit ist gemeint, dass alle Gewichte gleich eins sind. Dann summiert sich der Nenner von (1.0.16) zu eins.

Ein anderer wichtiger Sonderfall ergibt sich, wenn keine **inneren Knoten** vorhanden sind. Das sind Knoten, die nicht mit dem ersten oder letzten Knoten übereinstimmen. Die Knotenvektoren haben dann die Form

$$\underbrace{a = \dots = a}_p < \underbrace{b = \dots = b}_p,$$

wobei p die zugehörige Ordnung bezeichnet. In diesem Fall spricht man von rationalen **Bézier–Kurven** bzw. **–Flächen**. Für $[a, b] = [0, 1]$ entsprechen die B–Splines N_i^p dann den **Bernsteinpolynomen**

$$B_i^{p-1}(t) := \binom{p-1}{i} t^i (1-t)^{p-i-1}, 0 \leq i \leq p-1, t \in [0, 1].$$

Der deBoor–Algorithmus wird in diesem Fall **deCasteljau–Algorithmus** genannt.

Die **homogenen Koordinaten** eines Punktes (x, y, z) sind gegeben durch (wx, wy, wz, w) , mit $w \neq 0$. Die homogenen Koordinaten von NURBS–Kurven und Flächen sind also polynomial. Die Kontrollpunkte für Kurven haben dann die Form $(w_i P_i, w_i)^T$, die für Flächen $(w_{i,j} P_{i,j}, w_{i,j})^T$. Diese Darstellung der Kontrollpunkte wird in praktischen Anwendungen häufig eingesetzt, um verschiedene Algorithmen einheitlich zu implementieren. So werden die Kontrollpunkte meistens auch in dieser Form in einem Computersystem gespeichert.

Zuletzt sei noch eine Besonderheit für die Darstellung von Funktionen in NURBS–Form angemerkt: Hier heißen die (skalaren) Koeffizienten **Kontrollwerte**, im Gegensatz zu den „Kontrollpunkten“ der Kurven und Flächen.

Unterteilungsalgorithmen

Für NURBS–Kurven und –Flächen sind Unterteilungsalgorithmen die verbreitetste Methode zur Lösung globaler Fragestellungen, wie z.B. der Suche nach Schnittpunkten. Sie nutzen die Unterteilungsfähigkeiten der NURBS–Darstellung zum Umsetzen einer *divide and conquer* Strategie. Die Kurven oder Flächen werden unterteilt, sodass die einzelnen Segmente eine eigene NURBS–Darstellung haben. Damit lässt sich für die Position der einzelnen Teile mittels der *convex–hull–property* eine dreidimensionale Umgebung angeben. Mit dieser und weiteren Eigenschaften lässt sich bestimmen, ob ein Segment zu der Lösung des Problems beitragen, beispielsweise einen Schnittpunkt enthalten kann. Ist das nicht der Fall, werden die entsprechenden Segmente nicht weiter betrachtet.

Typischerweise wird ein Unterteilungsalgorithmus rekursiv ausgeführt, wobei die Segmentierung und Prüfung auf Relevanz laufend wiederholt werden. Es entstehen immer kleinere Segmente, wodurch die Lösungen immer genauer eingeschlossen werden. Im praktischen Einsatz hat es sich als effizient erwiesen nach einigen Schritten die Rekursion zu beenden und zu dem schnelleren Newtonverfahren überzugehen. Damit wird iteriert, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Das Prinzip der Rekursion wird in Abbildung 1.1 veranschaulicht. Oben in der Abbildung sind zwei Kurven zu sehen, deren Schnittpunkte bestimmt werden sollen. Die konvexen Hüllen der Kontrollpunkte überlappen sich, sodass unterteilt werden muss. In der Mitte der Abbildung ist die Situation nach dem Unterteilen der rechten Kurve dargestellt. Der Pfeil zeigt auf den Punkt, an dem sie getrennt wurde, sodass wir nun drei NURBS-Kurven haben. Da sich die konvexen Hüllen der Kontrollpunkte der linken Kurve und der Kurve 2 nicht überlappen, muss die Kurve 2 nicht weiter betrachtet werden und die zuletzt abgebildete Situation entsteht. Nun würde die linke Kurve unterteilt.

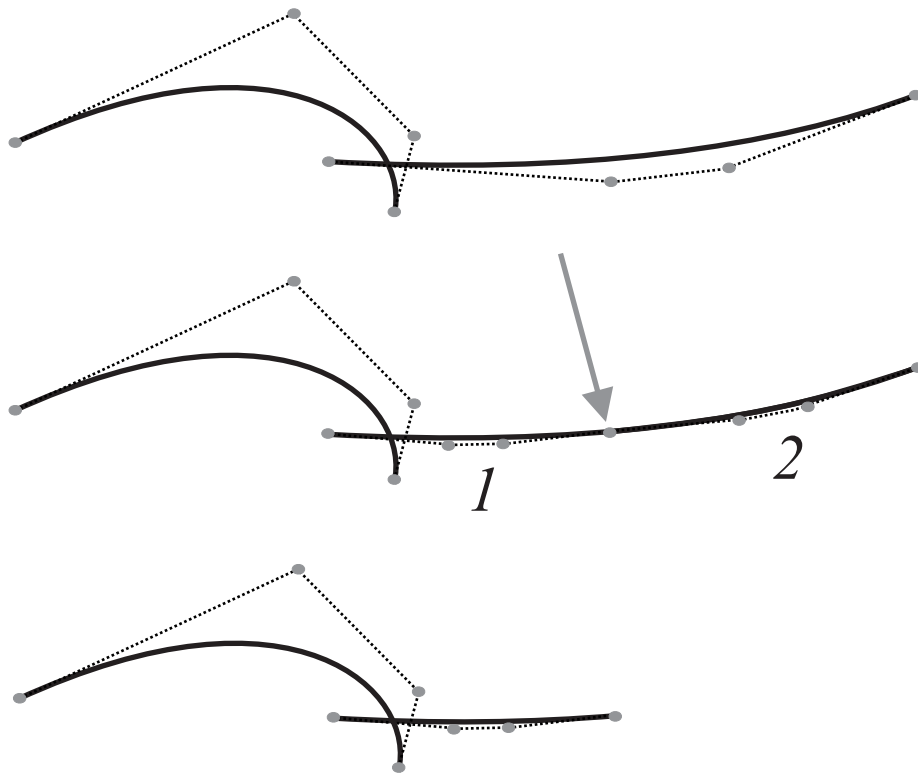


Abbildung 1.1: Unterteilungsalgorithmus für Kurvenschnitte

*Nichts ist getan, wenn noch
etwas zu tun übrig ist.
(C.F. Gauß)*

Kapitel 2

Konstruktion und Einsatz von Tangentialkegeln

Tangentialkegel sind ein weit verbreitetes Hilfsmittel zur Lösung globaler Probleme, wie z.B. der Berechnung von Schnittpunkten, Schnittkurven und Selbstschnitten. Üblicherweise werden sie in Unterteilungsalgorithmen dazu eingesetzt, die Eindeutigkeit einer Lösung festzustellen, um dann zur Newton-iteration überzugehen. Der erste Teil dieses Kapitels befasst sich mit ihrer effizienten Konstruktion. Es werden kürzere Beweise für die bekannten Einschließungssätze gegeben und für Kurven wird auch die Qualität der Kegel unter Verfeinerung der Knotenfolge untersucht. Weiterhin wird erstmals eine Konstruktion für Tangentialkegel von NURBS-Flächen angegeben.

Im zweiten Teil werden die Kriterien für die Eindeutigkeit von Lösungen behandelt. Es wird eine neue Eindeutigkeitsaussage für beliebige Gleichungssysteme angegeben, aus der sich dann systematisch Bedingungen für die verschiedenen geometrischen Fragestellungen herleiten lassen. Einige davon sind äquivalent zu bekannten Resultaten. Für die anderen wird gezeigt, dass sie wertvolle Beiträge für Unterteilungsalgorithmen darstellen.

2.1 Definitionen und bekannte Resultate

Sei $\text{conv}(A)$ die konvexe Hülle einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\text{ccone}(A) := \{a\mu \mid a \in \text{conv}(A), \mu \in \mathbb{R}^+\}$$

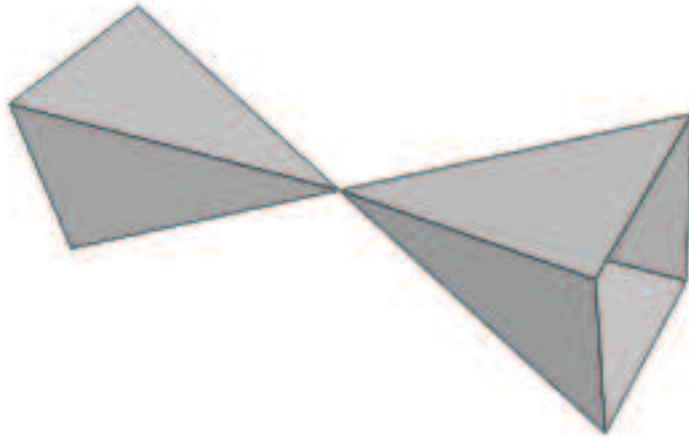


Abbildung 2.1: Aufgespannter Kegel und sein Negatives

der durch A erzeugte konvexe Kegel (beachte, dass \mathbb{R}^+ nicht die Null enthält).

Der **Tangentialkegel** zur Parameterrichtung $x_i, 1 \leq i \leq m$, einer C^1 -glatten Abbildung $G : D \rightarrow \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^m$ ist definiert durch

$$T_{x_i}(G) := \text{ccone} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}(D) \right).$$

Ist G eine Kurve, schreiben wir kurz $T(G)$.

Weiterhin heißt $\text{ccone}(\{v_1, \dots, v_s\})$ der durch die Vektoren $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$ **aufgespannte Kegel**. Falls $T_{x_i}(G) \subset \text{ccone}(\{v_1, \dots, v_s\})$ heißen v_1, \dots, v_s **einschließende Vektoren** für $T_{x_i}(G)$. In Abbildung 2.1 ist ein durch vier Vektoren aufgespannter Kegel und sein Negatives dargestellt.

Der Grund für die breite Anwendbarkeit von Kegeln ist die Möglichkeit, für jeden Tangentialkegel einer NURBS-Kurve oder -Fläche geeignete einschließende Vektoren zu bestimmen. In (Floater92b) wurde gezeigt, dass für jede NURBS-Kurve γ mit den Kontrollpunkten P_0, \dots, P_L die sogenannte Hodografeneigenschaft erfüllt ist:

$$T(\gamma) \subset \text{ccone}(\{P_1 - P_0, \dots, P_L - P_{L-1}\}). \quad (2.1.1)$$

D.h., die Tangentenrichtungen einer NURBS-Kurve liegen in dem durch die Kanten des Kontrollpolygons aufgespannten Kegel. Für polynomiale Flächen haben wir eine direkte Verallgemeinerung dieser Aussage. Es ist allgemein bekannt, dass bei gegebenen Kontrollpunkten $P_{i,j}, i = 0, \dots, L, j = 0, \dots, M$

folgende Beziehung gilt:

$$T_u(F) \subset \text{ccone}\left(\{P_{i+1,j} - P_{i,j}\}_{\substack{i=0,\dots,L-1 \\ j=0,\dots,M}}\right). \quad (2.1.2)$$

Für rationale Flächen ist das einzige Ergebnis in (SaWaSe95) zu finden. Für eine Bézier–Fläche F der Grade (m, n) , mit den Kontrollpunkten $P_{i,j}$ und den Gewichten $w_{i,j}$, haben wir für $T_u(F)$ die einschließenden Vektoren:

$$\sum_{l=\max(0,k-n)}^{\min(n,k)} \binom{n}{l} \binom{n}{k-l} w_{i+1,l} w_{i,k-l} (P_{i+1,l} - P_{i,k-l}), \quad (2.1.3)$$

für $k = 0, \dots, 2n$, $i = 0, \dots, m - 1$. Für den polynomialen Fall, also $w_{i,j} = 1$, bilden diese Vektoren einen engeren Einschluss als (2.1.2). Ihre Berechnung ist jedoch mit einem höheren Aufwand verbunden.

2.2 Konstruktion von Tangentialkegeln für NURBS–Kurven

Über einschließende Vektoren

Die Hodografeneigenschaft (2.1.1) wurde von (Floater92b) aus einer recht aufwändigen Darstellung der Ableitung gefolgert. Auch der Beweis von (SedMey87) für rationale Bézier–Kurven lässt sich nicht auf einfache Art und Weise für NURBS verallgemeinern. Wir geben hier einen deutlich kürzeren Beweis auf der Grundlage des deBoor–Algorithmus an.

Satz 2.2.1 *Sei $\gamma : [u_0, u_m] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine NURBS–Kurve der Ordnung p mit Knotenvektor (u_0, \dots, u_m) , $u_k < u_{k+p-2}$ für $2 \leq k \leq m - p$, Kontrollpolygon $P_0, \dots, P_{m-p} \in \mathbb{R}^3$ und Gewichten $w_0, \dots, w_{m-p} \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für alle $x_* \in [u_k, u_{k+1}]$, $p \leq k \leq m - p$:*

$$\gamma'(x_*) \in \text{ccone}(\{P_{i+1} - P_i\}_{i=k-p+1}^{k-1}).$$

Beweis: Durch das Einfügen von x_* als Knoten entsteht ein neues Kontrollpolygon Q mit:

$$Q_i = \beta_i P_i + (1 - \beta_i) P_{i-1}, \quad i = 0, \dots, m - p + 1,$$

wobei $\beta_i \in [0, 1]$, siehe (1.0.15). Damit gilt für die Differenzen von Q :

$$\begin{aligned} Q_{i+1} - Q_i &= \beta_{i+1} P_{i+1} + (1 - \beta_{i+1}) P_i - \beta_i P_i - (1 - \beta_i) P_{i-1} \\ &= \beta_{i+1} (P_{i+1} - P_i) + (1 - \beta_i) (P_i - P_{i-1}). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\text{ccone}(\{Q_{i+1} - Q_i\}_{i=0,\dots,m-p}) \subset \text{ccone}(\{P_{i+1} - P_i\}_{i=0,\dots,m-p-1}).$$

Fügen wir x_* so oft ein, dass es $p - 1$ mal im Knotenvektor vorkommt, entsteht ein Kontrollpolygon \tilde{Q} mit derselben Eigenschaft. Damit haben wir die Kurve unterteilt, und mit (1.0.14) gilt $\gamma'(x_*) \in \text{ccone}(\{\tilde{Q}_{i+1} - \tilde{Q}_i\})$ also auch $\gamma'(x_*) \in \text{ccone}(\{P_{i+1} - P_i\})$.

Die Lokalität der Behauptung ergibt sich, weil $\gamma[[u_k, u_{k+1}](x_*)$ bereits durch

P_{k-p+1}, \dots, P_k bestimmt ist. □

Mit der obigen Eigenschaft können wir also die Tangentenrichtungen abschätzen. Die Erfahrung zeigt, dass die erzeugten aufgespannten Kegel nicht viel größer sind als die Tangentialkegel und sie während einer rekursiven Unterteilung immer besser approximieren. Wir wollen dieses Verhalten nun auch theoretisch begründen. Zunächst benötigen wir ein Lemma zu Greville–Abszissen.

Lemma 2.2.2 *Für die Greville–Abszissen η_i^p eines Knotenvektors $U = (u_0, \dots, u_m)$ gilt:*

$$\eta_{i-1}^p \leq \eta_i^{p-1} \leq \eta_i^p.$$

Beweis: Die erste Ungleichung lässt sich schreiben als

$$\frac{u_i + \dots + u_{i+p-2}}{p-1} \leq \frac{u_{i+1} + \dots + u_{i+p-2}}{p-2}.$$

Sie folgt sofort aus der Anordnung der u_i . Entsprechendes gilt für die zweite Ungleichung. □

Hier folgt nun die erste Konvergenzaussage. Zum besseren Verständnis beachte man die allgemeine Erläuterung 1.0.4 und die Definition der $h_{i,p}$ vor Satz 1.0.3.

Lemma 2.2.3 *Für eine C^1 –glatte B–Spline–Kurve γ der Ordnung p gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass für alle Darstellungen mit den Kontrollpunkten P_i und dem Knotenvektor $U = (u_0, \dots, u_m)$ gilt:*

$$\|\gamma(\eta_i^{p-1}) - [(\beta_i P_i + (1 - \beta_i) P_{i-1})]\| < C h_{i,p+1}^\tau, \quad i = 1, \dots, m - p$$

mit den Greville–Abszissen η_i^{p-1} und $\beta_i := \frac{\eta_i^{p-1} - \eta_{i-1}^p}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p} \in [0, 1]$.

Ist $\gamma \in C^2[u_{i-p+1}, u_{i+2p}]$, so ist $\tau = 2$, sonst $\tau = 1$.

Beweis: Betrachten wir die Formel

$$\gamma(\eta_i^{p-1}) = \gamma(\eta_i^p) \frac{\eta_i^{p-1} - \eta_{i-1}^p}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p} + \gamma(\eta_{i-1}^p) \frac{\eta_i^p - \eta_i^{p-1}}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p} + O(h_{i,p+1}^\tau), \quad (2.2.1)$$

für $i = 1, \dots, m-p$. Mit Lemma 2.2.2 ergibt sich $\frac{\eta_i^{p-1} - \eta_{i-1}^p}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p} \in [0, 1]$ und wir sehen leicht, dass hier eine Konvexkombination von $\gamma(\eta_i^p)$ und $\gamma(\eta_{i-1}^p)$ gebildet wird. Dann lässt sich (2.2.1) durch Einsetzen der Taylor-Entwicklungen

$$\begin{aligned} \gamma(\eta_{i-1}^p) &= \gamma(\eta_i^{p-1}) + (\eta_{i-1}^p - \eta_i^{p-1})\gamma'(\eta_i^{p-1}) + O((\eta_{i-1}^p - \eta_i^{p-1})^\tau) \\ \gamma(\eta_i^p) &= \gamma(\eta_i^{p-1}) + (\eta_i^p - \eta_i^{p-1})\gamma'(\eta_i^{p-1}) + O((\eta_i^p - \eta_i^{p-1})^\tau) \end{aligned}$$

verifizieren. Für das Landausymbol beachte man $\eta_{i-1}^p, \eta_i^{p-1}, \eta_i^p \in [u_{i-p+1}, u_{i+2p}]$ womit dann $\max\{|\eta_{i-1}^p - \eta_i^{p-1}|, |\eta_i^p - \eta_i^{p-1}|\} \leq h_{i,p+1}$ gilt. Wenden wir dann Satz 1.0.3 auf $\gamma(\eta_i^p)$ und $\gamma(\eta_{i-1}^p)$ an, ergibt sich

$$\gamma(\eta_i^{p-1}) = P_i \frac{\eta_i^{p-1} - \eta_{i-1}^p}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p} + P_{i-1} \frac{\eta_i^p - \eta_i^{p-1}}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p} + O(h_{i,p+1}^\tau),$$

(beachte dabei $\max\{h_{i,p}, h_{i-1,p}\} \leq h_{i,p+1}$) und die Behauptung folgt sofort. \square

Der folgende Satz zeigt nun, wie sich die Gewichte auf die Länge der Ableitungen der Kurve auswirken.

Satz 2.2.4 Für eine C^1 -glatte NURBS-Kurve $\gamma = \frac{\theta}{w}$ der Ordnung $p \geq 3$ gibt es eine von θ , w und p abhängige Konstante $C > 0$, sodass für alle Darstellungen mit den Kontrollpunkten P_i und Gewichten w_i über Knotenvektoren $U = (u_0, \dots, u_m)$ mit $u_i < u_{i+p-2}$, für $i = 2, \dots, m-p$ gilt:

$$\left\| \gamma'(\eta_i^{p-1}) - \frac{w_i w_{i-1}}{(\beta_i w_i + (1 - \beta_i) w_{i-1})^2} \frac{p-1}{u_{i+p-1} - u_i} (\Delta P_{i-1}) \right\| < C h_{i,p+1}^\tau,$$

$$i = 1, \dots, m-p,$$

mit den Greville-Abszissen η_i^{p-1} und $\beta_i = \frac{\eta_i^{p-1} - \eta_{i-1}^p}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p}$. Sind

$\theta, w \in C^2[u_{i-p+1}, u_{i+2p}]$, so ist $\tau = 2$, sonst $\tau = 1$.

Beweis: Wir beginnen mit

$$\gamma'(\eta_i^{p-1}) = \left(\frac{\theta}{w} \right)' (\eta_i^{p-1}) = \frac{\theta'(\eta_i^{p-1})w(\eta_i^{p-1}) - \theta(\eta_i^{p-1})w'(\eta_i^{p-1})}{w^2(\eta_i^{p-1})}. \quad (2.2.2)$$

Für w und θ , verwenden wir die Taylorentwicklung

$$\Phi(\eta_{i-1}^p) = \Phi(\eta_i^{p-1}) + (\eta_{i-1}^p - \eta_i^{p-1})\Phi'(\eta_i^{p-1}) + O((\eta_{i-1}^p - \eta_i^{p-1})^2)$$

in der Form

$$\Phi(\eta_i^{p-1}) = \Phi(\eta_{i-1}^p) - (\eta_{i-1}^p - \eta_i^{p-1})\Phi'(\eta_i^{p-1}) + O((\eta_{i-1}^p - \eta_i^{p-1})^2),$$

mit $\Phi \in \{\theta, \omega\}$. Wir setzen nun in (2.2.2) für $w(\eta_i^{p-1})$ und $\theta(\eta_i^{p-1})$ ein, wobei sich die Terme mit Φ' auslöschen, sodass wir

$$\gamma'(\eta_i^{p-1}) = \frac{\theta'(\eta_i^{p-1})w(\eta_{i-1}^p) - \theta(\eta_{i-1}^p)w'(\eta_i^{p-1})}{w^2(\eta_i^{p-1})} + O(h_{i,p}^2) \quad (2.2.3)$$

schreiben können. Beachte dabei, dass

$$\eta_i^{p-1}, \eta_{i-1}^p \in [u_{i-p+2}, u_{i+2p-2}] \text{ und deshalb } |\eta_i^{p-1} - \eta_{i-1}^p| \leq h_{i,p}.$$

Wir wenden nun Satz 1.0.3 auf alle möglichen Terme des Zählers an, wobei wir die Kontrollpunkte der Ableitungen (1.0.8) entnehmen:

$$\begin{aligned} & \theta'(\eta_i^{p-1})w(\eta_{i-1}^p) - \theta(\eta_{i-1}^p)w'(\eta_i^{p-1}) \\ &= \frac{p-1}{|u_{i+p-1} - u_i|} ((P_i w_i - P_{i-1} w_{i-1})w_{i-1} - P_{i-1} w_{i-1}(w_i - w_{i-1})) + O(h_{i,p+1}^\tau) \\ &= \frac{p-1}{|u_{i+p-1} - u_i|} w_i w_{i-1} (P_i - P_{i-1}) + O(h_{i,p+1}^\tau). \end{aligned}$$

Für das Landausymbol beachte man $\max\{h_{i-1,p}, h_{i,p-1}\} \leq h_{i,p+1}$. Wenden wir nun Lemma 2.2.3 auf den Nenner an, ergibt sich die Behauptung. \square

Bemerkung 2.2.5 Für die β_i aus Satz 2.2.2 gilt $\beta_0 = 0$ und $\beta_{m-p} = 1$. Der Vorfaktor $\frac{w_i w_{i-1}}{(\beta_i w_i + (1 - \beta_i) w_{i-1})^2}$ ergibt dann $\frac{w_1}{w_0}$ bzw. $\frac{w_{m-p-1}}{w_{m-p}}$, wie in der Darstellung der Randableitungen (1.0.14).

Im Folgenden zeigen wir für reguläre Kurven, dass $\text{ccone}(\{\Delta P_i\})$ den Tangentialkegel, unter Verfeinerung der Knotenfolge, beliebig gut approximiert.

Satz 2.2.6 Für jede C^1 -glatte reguläre NURBS-Kurve $\gamma = \frac{\theta}{w}$ der Ordnung $p \geq 3$ gibt es von θ , w und p abhängige Konstanten $h, C > 0$, sodass für alle Darstellungen mit Kontrollpunkten P_0, \dots, P_{m-p} über Knotenvektoren $U = (u_0, \dots, u_m)$ mit $u_i < u_{i+p-2}$, für $i = 2, \dots, m-p$ und $\Delta(U) < h$ gilt:

$$\left\| \frac{(p-1)\Delta P_i}{|u_{i+p} - u_{i+1}|} \right\| > C, \quad 0 \leq i \leq m-p-1,$$

also auch $\Delta P_i \neq 0$.

Beweis: Aus Satz 2.2.4 erhalten wir die Existenz einer Konstanten $D > 0$ mit:

$$\left\| \frac{w_i w_{i-1}}{(\beta_i w_i + (1 - \beta_i) w_{i-1})^2} \frac{p-1}{|u_{i+p-1} - u_i|} (\Delta P_{i-1}) \right\| \geq \min \|\gamma'\| - D \cdot \Delta(U).$$

Wegen der Regularität ist $\min \|\gamma'\| > 0$, womit sich die Behauptung ergibt. \square

Für NURBS-Kurven mit regulären Kontrollpolygonen haben wir auch die quadratische Konvergenz der Richtungen des Kontrollpolygons.

Satz 2.2.7 Für eine C^1 -glatte reguläre NURBS-Kurve $\gamma = \frac{\theta}{w}$ der Ordnung $p \geq 3$ gibt es von θ, w und p abhängige Konstanten $h, C > 0$, sodass für alle Darstellungen mit Kontrollpunkten P_0, \dots, P_{m-p} über Knotenvektoren $U = (u_0, \dots, u_m)$ mit $u_i < u_{i+p-2}$, für $i = 2, \dots, m-p$ und $\Delta(U) < h$ gilt:

$$\left\| \frac{\Delta P_{i-1}}{\|\Delta P_{i-1}\|} - \frac{\gamma'(\eta_i^{p-1})}{\|\gamma'(\eta_i^{p-1})\|} \right\| \leq C h_{i,p+1}^\tau, \quad i = 1, \dots, m-p.$$

Hierbei sind η_i^{p-1} die Greville-Abszissen bezüglich der Ordnung $p-1$. Ist die Kurve aus $C^2[u_{i-p+1}, u_{i+2p}]$, so gilt $\tau = 2$, sonst $\tau = 1$.

Beweis: Wir erweitern $\frac{\Delta P_{i-1}}{\|\Delta P_{i-1}\|}$ mit $\frac{w_i w_{i-1}}{((1 - \beta_i) w_{i-1} + \beta_i w_i)^2}$ und wenden dann die elementare Ungleichung

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq 2 \frac{\|a - b\|}{\|b\|}$$

an. Nun liefert uns Satz 2.2.4 die Behauptung. \square

Als weitere Folgerung der obigen Konvergenzeigenschaften bekommen wir diese neue Aussage über die Bogenlänge von NURBS-Kurven.

Satz 2.2.8 Für eine C^2 -glatte NURBS-Kurve $\gamma = \frac{\theta}{w}$ der Ordnung $p \geq 3$ gibt es eine von θ, w und p abhängige Konstante $C > 0$, sodass für alle Darstellungen mit Kontrollpunkten P_0, \dots, P_{m-p} über Knotenvektoren $U = (u_0, \dots, u_m)$ mit $u_i < u_{i+p-2}$, für $i = 2, \dots, m-p$ gilt:

$$\left| L(\gamma) - \sum_{i=1}^{m-p} \frac{w_i w_{i-1}}{((1 - \beta_i) w_{i-1} + \beta_i w_i)^2} \|\Delta P_{i-1}\| \right| \leq C \Delta(U)^2,$$

mit $\beta_i = \frac{\eta_i^{p-1} - \eta_{i-1}^p}{\eta_i^p - \eta_{i-1}^p}$.

Beweis: Analog zu (KobPrau95) unter Verwendung von Satz 2.2.4. \square

2.3 Konstruktion von Tangentialkegeln für NURBS-Flächen

Die bisherigen Konstruktionsmöglichkeiten für Tangentialkegel rationaler Flächen beschränkten sich auf den Bézier-Fall. Ich gebe hier einen kurzen Beweis für die bekannten einschließenden Vektoren an und leite erstmals Formeln für NURBS-Flächen her. Anschließend werden einige interessante Eigenschaften herausgestellt.

Analog zum Ansatz von (WaSeSa97) verwenden wir die Darstellung (1.0.17) und nutzen die Hodografeneigenschaft für konstantes v . Damit sind die Richtungen der partiellen Ableitungen bezüglich des Parameters u in $\text{ccone}(\{P_{i+1}(v) - P_i(v)\})$ enthalten. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned}
& P_{i+1}(v) - P_i(v) \\
&= \frac{\sum_{h=0}^{n-q} N_h^q(v) w_{i+1,h} P_{i+1,h}}{\sum_{h=0}^{n-q} N_h^q(v) w_{i+1,h}} - \frac{\sum_{h=0}^{n-q} N_h^q(v) w_{i,h} P_{i,h}}{\sum_{h=0}^{n-q} N_h^q(v) w_{i,h}} \\
&= \frac{\sum_{h=0}^{n-q} \sum_{k=0}^{n-q} N_h^q(v) N_k^q(v) w_{i+1,h} w_{i,k} (P_{i+1,h} - P_{i,k})}{\sum_{h=0}^{n-q} \sum_{k=0}^{n-q} N_h^q(v) N_k^q(v) w_{i+1,h} w_{i,k}}. \tag{2.3.1}
\end{aligned}$$

Wenn die N_k^q der letzten Gleichung Bernstein-Polynome vom Grad $q - 1$ sind, kann der Zähler ausgedrückt werden als

$$\sum_{k=0}^{2q-2} B_k^{2q-2}(v) \sum_{l=\max(0, k-q+1)}^{\min(q-1, k)} \frac{\binom{q-1}{l} \binom{q-1}{k-l}}{\binom{2q-2}{k}} w_{i+1,l} w_{i,k-l} (P_{i+1,l} - P_{i,k-l}).$$

Hierdurch ergibt sich die bekannte Formel (2.1.3).

Um einen neuen Satz aufspannender Vektoren zu erhalten, summieren wir (2.3.1) um:

$$\frac{\sum_{h=0}^{n-q} \sum_{k=0}^{n-q} N_h^q(v) N_k^q(v) (w_{i+1,h} w_{i,k} P_{i+1,h} - w_{i+1,k} w_{i,h} P_{i,h})}{\sum_{h=0}^{n-q} \sum_{k=0}^{n-q} N_h^q(v) N_k^q(v) w_{i+1,h} w_{i,k}}. \tag{2.3.2}$$

Weil $N_h^q(v) N_k^q(v)$ auf $[u_0, u_m]$ eine positive Zerlegung der Eins bilden, also die convex-hull-property gilt, ergibt sich folgender

Satz 2.3.1 Für eine NURBS-Fläche F mit den Kontrollpunkten $P_{i,j}$ und den Gewichten $w_{i,j}$, $i = 0, \dots, m - p$, $j = 0, \dots, n - q$ gilt:

$$T_u(F) \subset \text{ccone} \left(\left\{ \frac{w_{i+1,h}}{w_{i+1,k}} P_{i+1,h} - \frac{w_{i,h}}{w_{i,k}} P_{i,h} \right\}_{\substack{i=0, \dots, m-p-1, \\ h,k=0, \dots, n-q}} \right). \tag{2.3.3}$$

Für die Einschränkung der Abbildung auf Intervalle zwischen aufeinanderfolgenden Knoten lässt sich analog zu Satz (2.2.1) leicht eine schärfere (lokalisierte) Aussage treffen. Sie wäre aber notationell überfrachtet, weswegen hier darauf verzichtet wird. Im Gegensatz zu Formel (2.1.3) ergibt (2.3.3) für den polynomialen Fall, also $w_{i,j} = 1$, sofort die einfachere Aussage (2.1.2).

Bemerkung 2.3.2 *Eine rationale Bézier-Fläche lässt sich umparametrisieren, indem die Gewichte $w_{i,j}$ durch $c^i d^j w_{i,j}$ mit $c, d > 0$ ersetzt werden, wobei die hochgestellten i und j Exponenten sind. Die Richtungen der aufspannenden Vektoren in (2.3.3) werden durch diese Umparametrisierungen nicht verändert.*

Es folgt auch direkt, dass die einschließenden Vektoren (2.1.2) des polynomialen Falls für eine größere Klasse von Flächen gelten.

Folgerung 2.3.3 *Für eine NURBS-Fläche F mit den Kontrollpunkten $P_{i,j}$ und Gewichten $w_{i,j}$ mit der Tensorproduktstruktur $w_{i,j} = \mu_i \nu_j$ gilt:*

$$T_u(F) \subset \text{ccone}(\{P_{i+1,h} - P_{i,h}\}).$$

Bemerkung 2.3.4 *In der üblichen Darstellungen von Kugeln, Kegeln, Tori und von Rotations- und Translations-Flächen in NURBS-Form haben die Gewichte eine Tensorproduktstruktur und diese bleibt bei Unterteilung und Graderhöhung erhalten.*

Typischerweise hat ein volumenbasiertes CAD-System (Solid-Modeller) nur noch Rundungsflächen als weitere Flächenklasse, die rational dargestellt wird. Eine solche sehen wir in Abbildung 2.2. Sie hat den Grad 2 in der Richtung mit 3 Kontrollpunkten, in der anderen den Grad 3. Die Gewichte der ersten und dritten Kontrollpunktreihe sind 1, die der mittleren lauten

$$0.841, 0.828, 0.809, 0.789, 0.773, 0.767, 0.764.$$

Wegen

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i+1,h}}{w_{i+1,k}} P_{i+1,h} - \frac{w_{i,h}}{w_{i,k}} P_{i,h} \\ &= \frac{w_{i+1,h}}{w_{i+1,k}} \left(P_{i+1,h} - \frac{w_{i+1,k}}{w_{i+1,h}} \frac{w_{i,h}}{w_{i,k}} P_{i,h} \right) \\ &= \frac{w_{i+1,h}}{w_{i+1,k}} \left(P_{i+1,h} - P_{i,h} + \left(1 - \frac{w_{i+1,k}}{w_{i+1,h}} \frac{w_{i,h}}{w_{i,k}}\right) P_{i,h} \right) \end{aligned}$$

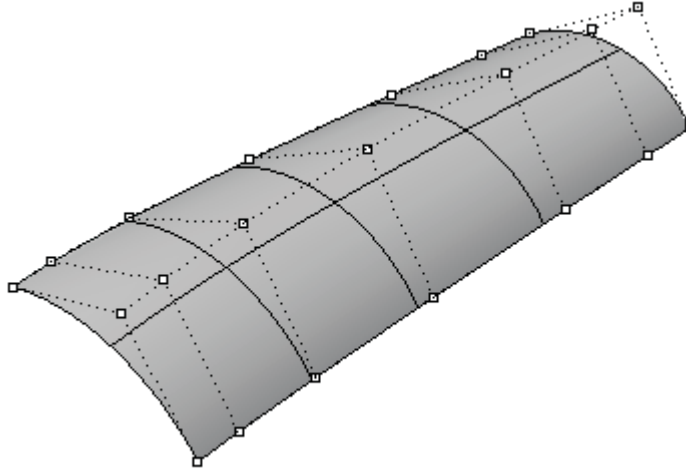


Abbildung 2.2: Rundungsfläche

können wir

$$\Lambda := \max \left\{ \left| 1 - \frac{w_{i+1,k} w_{i,h}}{w_{i+1,h} w_{i,k}} \right| \right\}$$

als Maß für den Unterschied zu $\text{ccone}(\{P_{i+1,h} - P_{i,h}\})$ nehmen. Ist $\Lambda = 0$, sind die Kegel identisch. Ist in unserem Beispiel u die Parameterrichtung vom Grade 2, so gilt $\Lambda < 0.065$ für T_u und $\Lambda < 0.025$ für T_v . D.h., die Abschätzung (2.3.3) ist zumindest in diesem Beispiel sehr nahe an derjenigen für polynomiale Flächen.

Die neue Konstruktion bietet den klaren Vorteil, dass die Fläche nicht in rationaler Bernstein-Bézier-Form vorliegen muss und somit die rechenaufwändige Konvertierung entfällt.

2.4 Einheitliche Darstellung globaler Eindeutigkeitsaussagen

In der Vergangenheit wurden verschiedene Bedingungen an die Tangentialkegel angegeben, die garantieren, dass ein globales Problem höchstens eine Lösung besitzt. Sie beruhen auf geometrischen Überlegungen und sind für jede Fragestellung einzeln entwickelt worden. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sie sich in eine transparente Systematik eingliedern lassen, aus welcher dann auch neue Bedingungen folgen.

Im Folgenden nennen wir $H_v := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, p \rangle > 0\}$ den **offenen Halbraum** zur Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Satz 2.4.1 *Die Ableitungsvektoren einer stückweise C^1 -glatten geschlossenen Kurve sind in keinem offenen Halbraum enthalten.*

Beweis: Sei die Kurve gegeben durch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Zu einer Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ betrachten wir die Funktion $f := \langle v, \gamma \rangle$. Da $f(0) = f(1)$ gilt, ist entweder $f' = 0$ oder f' nimmt positive und negative Werte an. Also liegt γ' in beiden Fällen nicht in dem offenen Halbraum zur Richtung v . \square

Satz 2.4.2 *Ein Gleichungssystem $\Omega(x_1, \dots, x_d) = 0$ mit C^1 -glattem $\Omega : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^d$ konvex, $d \leq n$ hat maximal eine Lösung, falls es für jede Kombination von $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ einen offenen Halbraum gibt, in dem*

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}(D), \dots, \epsilon_d \frac{\partial \Omega}{\partial x_d}(D) \quad (2.4.1)$$

enthalten ist.

Beweis: Seien zwei Lösungen u_0 und u_1 gegeben, also $u_0 \neq u_1$ mit $\Omega(u_0) = \Omega(u_1)$. Wir betrachten die Strecke $c = (c_1, c_2, \dots, c_d)$ zwischen u_0 und u_1 . $\Omega \circ c$ ist eine geschlossene Kurve, sodass ihr Tangentenbild nach Satz 2.4.1 jeden offenen Halbraum verlässt. Wegen $(\Omega \circ c)' = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \right) \circ c \cdot c'_i$ tut dies also auch die Menge (2.4.1) wenn $\epsilon_i = \text{sign}(c'_i)$ für $c'_i \neq 0$ und $\epsilon_i = 1$ für $c'_i = 0$. \square

Die folgenden bekannten Aussagen lassen sich direkt folgern:

Folgerung 2.4.3 (HoCoh00) *Wenn die Ableitungsvektoren einer C^1 -glatten Kurve in einem offenen Halbraum liegen, kann sie keine Selbstschnitte haben.*

Folgerung 2.4.4 (SedMey88) *Seien zwei C^1 -glatte Kurven $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ gegeben. Wenn für jedes $\epsilon \in \{-1, 1\}$ die Mengen $\gamma'_1([0, 1])$ und $\epsilon \cdot \gamma'_2([0, 1])$ in einem offenen Halbraum liegen, kann es nur einen Schnittpunkt zwischen den beiden Kurven geben.*

Folgerung 2.4.5 (SedMey88) *Seien eine C^1 -glatte Fläche $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine C^1 -glatte Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Wenn es für jede Kombination von $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ einen offenen Halbraum gibt, in dem*

$$\epsilon_1 \frac{\partial F}{\partial u}([0, 1]^2), \epsilon_2 \frac{\partial F}{\partial v}([0, 1]^2), \epsilon_3 \gamma'([0, 1])$$

enthalten sind, dann schneiden sich die Kurve und die Fläche in maximal einem Punkt.

Folgerung 2.4.6 (SedKaChr89) Seien zwei C^1 -glatte Flächen $F, G : D := [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Wenn es für jede Kombinationen von $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ einen offenen Halbraum gibt, in dem

$$\epsilon_1 \frac{\partial F}{\partial u}([0, 1]^2), \epsilon_2 \frac{\partial F}{\partial v}([0, 1]^2), \epsilon_3 \frac{\partial G}{\partial u}([0, 1]^2)$$

enthalten sind, dann ist keine der Schnittkurven der beiden Flächen geschlossen.

Beweis: Aus Satz 2.4.2 erhalten wir, dass für jeden v -Parameter von G maximal eine Lösung von $F = G$ existiert. \square

Folgerung 2.4.6 wurde in der Referenz anders dargestellt. Ihre Interpretation mit Tangentialkegeln ist dennoch äquivalent.

2.4.1 Anwendung auf Selbstschnitte von NURBS-Flächen

Für die Selbstschnittfreiheit von Flächen lassen sich in der Literatur verschiedene Kriterien finden. (AndPetSte98) behandeln die in praktischen Anwendungen wenig relevanten Dreiecks-Bézierflächen. (Lasser88) gibt heuristische Bedingungen für den Ausschluss von Selbstschnitten an, die von den exakten Kriterien von (HoCoh00) überholt worden sind. Das letztgenannte Ergebnis wird hier genauer dargestellt und anschließend gezeigt, wie es mit den Aussagen des vorangegangenen Abschnittes verbessert werden kann.

Zur Abschätzung der Tangentialkegel werden in (HoCoh00) **Winkelräume** verwendet. Ein solcher ist definiert durch eine Richtung $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und einen Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Er enthält alle $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, mit $\angle(z, w) \leq \alpha$. Seien in dem Winkelraum z_n, α_n alle Normalenrichtungen enthalten und die Tangentenrichtungen in z_u, α_u bzw. z_v, α_v .

Satz 2.4.7 (HoCoh00, Proposition 5) Eine sich selbst schneidende Fläche erfüllt mindestens eine der folgenden Bedingungen:

Einer der drei Winkelräume existiert nicht,

$$\angle(z_n, z_u) \leq \alpha_u,$$

$$\angle(z_n, z_v) \leq \alpha_v.$$

Für die Anwendung dieses Satzes muss zunächst der Winkelraum der Normalenrichtungen bestimmt werden, dessen Berechnung wir weiter untersuchen wollen. Es bieten sich zwei Möglichkeiten an: Die Berechnung der

Bézierdarstellung der skalierten Normalenfläche $\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}$ und die Verwendung der Tangentialkegel. Die erste Methode ist lediglich für Bézierflächen denkbar und selbst dafür ist sie sehr aufwändig. Ein auf Geschwindigkeit ausgelegter Algorithmus von (Kiciak01) benötigt für die Berechnung mindestens $48m^2n^2$ arithmetische Operationen (m und n sind die Grade). Die für die Tangentialkegel nötigen einschließenden Vektoren lassen sich mit $9n^2m$ Operationen bestimmen. Dieser Wert gilt unter der Annahme, dass die Kontrollpunkte in homogenen Koordinaten vorliegen und die einschließenden Vektoren aus (2.3.3) mit der Darstellung

$$w_{i,k}w_{i+1,h}P_{i+1,h} - w_{i+1,k}w_{i,h}P_{i,h}$$

verwendet werden. Um die Bedeutung dieser Werte für den Gesamtalgorithmus zu beleuchten sei hier noch die Anzahl der Operationen des deCasteljau-Algorithmus angegeben. Es werden $4.5mn(n-1)$ Additionen und Multiplikationen benötigt. Tabelle 2.1 zeigt die Anzahl der arithmetischen Operationen, die für die Berechnung für bestimmte rationale Beispiele notwendig sind.

BERECHNUNG	ORDNUNG (4,4)	ORDNUNG (6,6)
Normalenfläche	4968	35100
Tangentialfläche	576	1125
deCasteljau	216	450

Tabelle 2.1: Berechnungsaufwand in arithmetischen Operationen

Wir sollten also auf die Berechnung der skalierten Normalenfläche verzichten und die Winkelräume der Tangentenrichtungen nutzen, um den Winkelraum der Normalenrichtungen zu bestimmen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn sich die Winkelräume der Tangentenrichtungen nicht überlappen und in einem gemeinsamen offenen Halbraum liegen. Diese Bedingung allein reicht aber bereits aus, um auf die Nichtexistenz von Selbstschnitten zu schließen, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.4.8 *Ein C^1 -glattes Flächenstück $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist selbstschnittfrei, falls für jedes $\epsilon \in \{-1, 1\}$ die Mengen $\text{ccone}(\frac{\partial F}{\partial u}([0, 1]^2))$ und $\epsilon \cdot \text{ccone}(\frac{\partial F}{\partial v}([0, 1]^2))$ in einem gemeinsamen offenen Halbraum liegen.*

Beweis: Folgt aus Satz 2.4.2 in Anwendung auf $F = p, p \in \mathbb{R}^n$. □

Eine weitere Verbesserung ergibt sich durch die Tatsache, dass wir nun nicht mehr auf Winkelräume angewiesen sind, sondern die Bedingungen direkt für die partiellen Ableitungen prüfen können. In (Hohemeyer92, Abschnitt 4.3) wird ein effizienter Test angegeben. Es wird zunächst überprüft,

ob sich die Kegel in einer der Koordinatenrichtungen trennen lassen. Anschließend werden „Spherical Bounding Boxes“ herangezogen. Wenn dies auch scheitert, wird ein Algorithmus mittels linearer Optimierung verwendet. Der Aufwand für die jeweiligen Schritte ist ansteigend, sodass die meisten Ausschlüsse mit wenig Aufwand erreicht werden.

Bemerkung 2.4.9 *Die Voraussetzungen von Satz 2.4.8 sind bereits als hinreichende Bedingungen für die Regularität der Fläche bekannt. Sie wurden in (KimPapWoo95) fehlerhaft angegeben und in (AumReiSpitz95) und (Daniel95) korrigiert.*

2.4.2 Anwendung auf die Lösung polynomialer Gleichungssysteme in Bernstein–Bézier Form

Die in diesem Abschnitt (2.4) vorgestellten Methoden lassen sich auch auf polynomiale Gleichungssysteme der Form

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_m=0}^{n_m} B_{i_1}^{n_1}(x_1) \cdots B_{i_m}^{n_m}(x_m) P_{i_1, \dots, i_m} = 0, \quad x_i \in [0, 1], \quad (2.4.2)$$

mit $P_{i_1, \dots, i_m} \in \mathbb{R}^m$, anwenden. Die linksstehende Abbildung hat zu Bézier-Kurven und –Flächen analoge Eigenschaften, sodass ein auf Unterteilung basierender Algorithmus angegeben werden kann. Typischerweise wird dabei die Rekursion abgebrochen, wenn die Länge des Parameterintervalls eine vorgegebene Länge unterschreitet, siehe (PatrMaek02).

Die bisher bekannten Eindeutigkeitsaussagen beziehen sich immer auf Kurven und Flächen, sodass sie nicht auf (2.4.2) angewendet werden können. Die fehlende Kontrolle über die Anzahl der Lösungen, wird auch in (PatrMaek02, 4.3.3) als eines der Hauptprobleme benannt. Mit Satz 2.4.2 lässt sich dieser Mangel nun beseitigen. Die Tangentialkegel der Abbildung auf der linken Seite von (2.4.2) lassen sich durch einen von den Differenzen der Kontrollpunkte aufgespannten Kegel abschätzen:

$$T_{x_k} \subset \text{ccone}(\{P_{i_1, \dots, i_k+1, \dots, i_m} - P_{i_1, \dots, i_m}\}).$$

Damit lassen sich hinreichende Bedingungen für die Voraussetzungen des Satzes 2.4.2 einfach angeben.

*He who seeks for methods
without having a definite problem in mind
seeks in the most part in vain.
(D.Hilbert)*

Kapitel 3

Einführung zu Projektionen von Punkten auf NURBS–Kurven und –Flächen

Algorithmen für die Verarbeitung von Freiformgeometrien werden erst durch ihre Anwendung zu einem wertvollen Beitrag, den die Wissenschaft leisten kann. Deshalb ist es besonders wichtig, die Bedürfnisse der Softwaresysteme zu kennen, in denen sie eingesetzt werden. In diesem Kapitel werden neben der Problemstellung verschiedene Einsatzgebiete vorgestellt und anschließend ein Überblick über die bekannten Lösungsansätze gegeben.

3.1 Problemstellung

Es werden die folgenden drei Problemstellungen behandelt:

1. Projektion eines Punktes auf eine Kurve:

Gegeben: $P \in \mathbb{R}^3$, NURBS–Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Gesucht: $x \in I$ mit $\|P - \gamma(x)\| = \min_{t \in I} \|P - \gamma(t)\|$

2. Projektion eines Punktes auf eine Fläche:

Gegeben: $P \in \mathbb{R}^3$, NURBS–Fläche $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Gesucht: $x \in I \times J$ mit $\|P - F(x)\| = \min_{t \in I \times J} \|P - F(t)\|$

3. Suche nach den lokalen Minima des Abstandes zwischen zwei Kurven:

Gegeben: NURBS–Kurven $\gamma_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i=1,2$.

Gesucht: Alle lokalen Minimalstellen von $\|\gamma_1 - \gamma_2\|$.

Der Punkt P der Fragestellungen 1 und 2 wird im Folgenden **Anfragepunkt** genannt.

3.2 Anwendungsbeispiele

Hier wird eine Auswahl von Anwendungen der obigen Fragestellungen in CAD–Systemen beschrieben.

Identifikation

Die sogenannte Identifikation ist der Vorgang des Auswählens einer auf dem Bildschirm dargestellten Figur durch den Benutzer. Dabei gilt es zu entscheiden, welche der Kurven auf dem Bildschirm dem Mauszeiger am nächsten ist.

Die Projektion einer NURBS–Kurve auf die Bildschirmenebene lässt sich wieder als NURBS–Kurve darstellen. Es muß also der Abstand eines Punktes zu einer zweidimensionalen NURBS–Kurve bestimmt werden.

Bestimmung des Inneren einer Fläche

Das heute verbreitetste Modell zur Darstellung von Geometrien in CAD/CAM–Systemen ist das *Boundary Representation Modell*. Hierbei werden die Objekte durch eine zugrunde liegende Geometrie und eine Begrenzung definiert. Eine getrimmte Fläche besteht aus einer Basisfläche und einem geschlossenen Kurvenzug auf der Fläche, der den Rand darstellt. Dabei gilt an jeder Stelle des Randes, dass der Normalenvektor der Fläche, die Richtung der Kurve und jede Richtung, die nach innen zeigt, ein Rechtssystem bilden.

Um an einer Stelle des Randes zu ermitteln, ob eine Richtung nach innen zeigt, wird der Normalenvektor der Fläche benötigt. Der Punkt wird also auf die Fläche projiziert und an dem gewonnenen Parameter die Normale berechnet.

Projektion von Kurven auf Flächen

Die metrische Projektion einer NURBS-Kurve auf eine NURBS-Fläche ist nicht mehr als NURBS-Kurve darstellbar und muss somit für die Weiterverarbeitung approximiert werden. Dazu werden Punkte der Originalkurve gewählt, auf die Fläche projiziert und anschließend interpoliert.

Berechnung der Schnittpunkte zweier Kurven

Ein häufiges Problem in einem CAD-System ist das Bestimmen aller Schnittpunkte zwischen zwei Kurven, die auf einer gemeinsamen Fläche liegen. Da solche Kurven typischerweise nur bis auf eine Toleranz auf der Fläche liegen, ist nicht zu erwarten, dass sie sich tatsächlich schneiden. Daher werden die lokalen Minima des Abstandes der beiden Kurven gesucht, deren Werte die eben genannte Toleranz unterschreiten.

3.3 Bekannte Algorithmen

Zum Thema der Projektionen und Abstandsberechnungen sind bereits einige Beiträge in der Literatur erschienen. Hier werden die Arbeiten vorgestellt, die sich mit NURBS-Geometrien befassen.

Beiträge von T. Dokken 1985

Diese Arbeit beschreibt die Anwendung bekannter Algorithmen für die Nullstellensuche von B-Spline-Funktionen auf Schnitt- und Projektionsprobleme von polynomialen Kurven und Flächen. Dabei wird vorgeschlagen, das Problem der nächsten Punkte zu behandeln, indem die Nullstellen der Ableitung, bzw. die gemeinsamen Nullstellen der partiellen Ableitungen des Abstandsquadrates bestimmt werden und unter diesen die beste Lösung gewählt wird. Dazu wird die Gleichung, bzw. das Gleichungssystem durch Interpolation in einer B-Spline-Basis dargestellt, und ihre Nullstellen mit dem Algorithmus von (LanRie81) berechnet.

Dieser Ansatz lässt sich nicht effizient auf den rationalen Fall übertragen, was wohl aus heutiger Sicht das größte Problem ist. Weiterhin sind Berechnungen mit Béziersegmenten wegen der Geschwindigkeit zu bevorzugen. Außerdem ist der Algorithmus von (LanRie81) im univariaten Fall überholt und für den bivariaten Fall wird nicht klar gesagt, wie der Nullstellenalgorithmus funktioniert.

Beiträge von J. Zhou, E. C. Sherbrooke, N. M. Patrikalakis 1993

In dieser Arbeit wenden die Autoren die von ihnen entwickelten Unterteilungsalgorithmen für die Nullstellensuche von Polynomen auf die Berechnung nächster Punkte zu NURBS-Kurven und -Flächen an. Die Ableitung, bzw. die partiellen Ableitungen des Abstandsquadrates, werden in Bernstein-Bézier-Form dargestellt und ihre Nullstellen, bzw. gemeinsamen Nullstellen gesucht. Dazu werden die Verfahren *Projected Polyhedron* und *Linear Programming* verwendet, die im Wesentlichen auf der Strategie des *Bézier Clipping* beruhen. Es werden heuristische Abbruchbedingungen verwendet, um zum Newtonverfahren überzugehen, was zu Problemen bei der Sicherheit führen kann.

Weil Béziersegmente behandelt werden, können mit diesem Algorithmus auch nächste Punkte auf rationalen Kurven und Flächen bestimmt werden. Allerdings ist die Berechnung der Bernstein-Bézier-Form der Ableitung zeitraubend (vor allem im bivariaten Fall) und der Polynomgrad wird verdoppelt. Weil der Aufwand des deCasteljau-Algorithmus quadratisch mit dem Grad wächst, ist die Nullstellensuche deutlich langsamer als im polynomialen Fall.

Beiträge von C. Turnbull, S. Cameron 1998

Hier wird die Projektion auf den Rand eines konvexen Körpers oder eines konvexen zweidimensionalen Bereiches von außen behandelt. Die Untersuchungen lassen sich nicht für den allgemeinen Fall verwenden, nicht einmal für konvexe Flächen.

Beiträge von D. E. Johnson, E. Cohen 1998

Für das hier vorgestellte einfache Gerüst dienen die obere und untere Schranke für den Abstand der betrachteten Objekte als Basis für einen Unterteilungsalgorithmus nach dem Branch and Bound Muster. Nach jedem Unterteilungsschritt wird mittels der Schranken versucht, Bereiche ohne Lösung zu identifizieren. Die Unterteilung wird beendet, wenn die Länge der Parameterbereiche eine vorgegebene Toleranz unterschreitet. Es werden Heuristiken angegeben, die möglichst gute obere Schranken für den Abstand ermitteln.

Für den spezielleren Fall der vorliegenden Dissertation lässt sich lediglich die Grundidee verwenden, da weitere Veröffentlichungen gezeigt haben, dass deutlich bessere Lösungen möglich sind.

Beiträge von E. Dyllong, W. Luther 1999

In dieser Arbeit wird das Gerüst des zuvor genannten Artikels weiterentwickelt, allerdings ohne Zitat, was auf eine parallele Entwicklung schließen lässt. Hier wird die Unterteilung abgebrochen, wenn die Kurve oder Fläche eine vorgegebene Dicke unterschreitet. Auf diesen Segmenten wird anschließend das Newtonverfahren, bezogen auf die Ableitung des Abstandsquadrates, angewandt. Für den Abbruch wird die von (WaXu91) entwickelte verbesserte Kontrolle der Dicke verwendet. Weiterhin werden Kriterien genannt, mit denen ausgeschlossen werden kann, dass sich das Minimum in einem Segment befindet. Diese sind allerdings fehlerhaft, da sie Segmente ausschließen können, die eine Lösung enthalten. Deshalb ist hier keine weitreichende Lösung des Problems zu finden.

Beiträge von Y. L. Ma, W. T. Hewitt 2003

Den Autoren dieses Artikels sind wahrscheinlich die Veröffentlichungen (Dokken85), (ZhShPa93) und (JohCoh98) nicht bekannt, da sie nicht als vorangegangene Arbeiten zu diesem Thema angegeben wurden. Hier wird unter anderem eine geometrische Abbruchbedingung der Arbeit von Dyllong und Luther neu erfunden. Die Hauptidee ist allerdings das Ausschlusskriterium für die Elimination von Segmenten, in denen das Minimum nicht zu finden ist. Für Kurven ist auch die Korrektheit bewiesen. Weiterhin sei erwähnt, dass hier ein Beispiel angegeben wird, für das die Implementierung von (PieglTiller97) in der Bibliothek NLib ein fehlerhaftes Ergebnis liefert.

Beiträge mit vorhergehender Approximation

Eine ganze Reihe von Arbeiten ermittelt die Startwerte für die Iteration nach dem Minimum, indem sie die Kurve oder Fläche vorab durch einen Polygonzug, bzw. ein Polyedernetz annähern. Es wird zunächst auf die Näherung projiziert und mit dem Ergebnis ein Parameter auf der Kurve, bzw. Fläche geschätzt.

Die Berechnung der Approximation ist eine zeitaufwändige Operation. Sie lohnt sich nur, wenn eine größere Menge von Punkten projiziert werden soll. Weiterhin hängt die Qualität der Ergebnisse im hohen Maße von der Genauigkeit der Approximation ab. Ein solches Vorgehen findet sich in (PieglTiller97), (PieTil01), (Henshaw02) und (LamBruRis04).

In (HiCAD) ist diese Möglichkeit für Tensorproduktflächen implementiert gewesen und musste ersetzt werden, da sie fehlerhafte Ergebnisse lieferte.

*Alles was lediglich wahrscheinlich ist,
ist wahrscheinlich falsch.
R. Descartes*

Kapitel 4

3D-Algorithmus für die Projektion von Punkten auf NURBS-Kurven und -Flächen

3D-Algorithmen sind die verbreitetste Vorgehensweise für die Berechnung von Schnitten und Projektionen. Sie basieren auf der rekursiven Unterteilung der Kurven und Flächen und der Verwendung von Eigenschaften, wie der *convex-hull-property*. In den Arbeiten (DylLuth99) und (MaHew03) sind solche Algorithmen für die Projektion von Punkten auf Kurven und Flächen beschrieben. Sie werden in diesem Kapitel weiter verbessert.

Für die Qualität eines Unterteilungsalgorithmus ist es von entscheidender Bedeutung gute Kriterien für die Nichtexistenz von Lösungen zu haben. Das von (DylLuth99) angegebene Kriterium schließt möglicherweise Segmente aus, die die Lösung enthalten. In Abbildung 4.1 ist eine solche Situation angegeben, wobei der zu projizierende Punkt mit P bezeichnet ist und die gepunktete Linie das Kontrollpolygon des betrachteten Kurvensegmentes darstellt. Das Segment wird ausgeschlossen, obwohl der zu P nächste Punkt offenbar in Pfeilrichtung liegt. In diesem Kapitel werden neue Kriterien entwickelt und nachgewiesen, dass sie keine falschen Entscheidungen zum Ausschluss treffen. Außerdem zeigen numerische Vergleiche, dass sie zu einer besseren Laufzeit führen als die von (MaHew03).

Für den Rest dieses Kapitels nehmen wir an, dass die Vielfachheit der inneren Knoten höchstens $p-2$ ist (p ist die Ordnung), sodass die C^1 -Glattheit

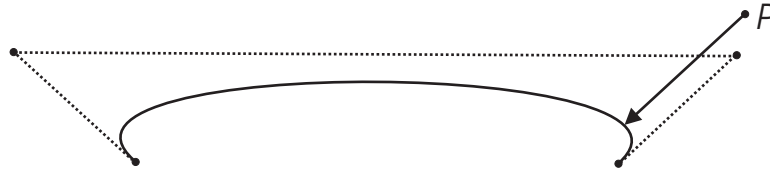


Abbildung 4.1: Fehlerfall bisheriger Kriterien

der Kurve und Fläche gesichert ist.

4.1 Ideenskizze für den Algorithmus

Die Lösung wird angenähert, indem die Kurve oder Fläche rekursiv unterteilt wird. In jedem Schritt wird das Objekt an einem inneren Knoten in zwei Segmente geteilt. Wenn es keine inneren Knoten gibt, wird das arithmetische Mittel der Parametergrenzen gewählt. Bei Flächen muß man entscheiden, in welcher Parameterrichtung geteilt werden soll. Falls nur ein Knotenvektor innere Knoten hat, wird die zu ihm gehörende Parameterrichtung gewählt. Andernfalls verwenden wir für die Auswahl die Ecken der Fläche. Diese sind aufgrund der Endpunktinterpolation durch die Ecken des Kontrollnetzes gegeben, also $P_{0,0}$, $P_{m-p,0}$, $P_{0,n-q}$, $P_{m-p,n-q}$. Wir wählen die Parameterrichtung, in der geteilt wird, sodass die zwei angrenzenden Ecken mit dem kleinsten Abstand zum Anfragepunkt im gleichen Segment verbleiben. Angrenzend bedeutet hier, dass die Ecken sich nicht diagonal gegenüberstehen. Durch diese Heuristik wird die Wahrscheinlichkeit für den Ausschluss eines der Segmente erhöht. Abbildung 4.2 zeigt die beiden Möglichkeiten, wobei wir die linke bevorzugen.

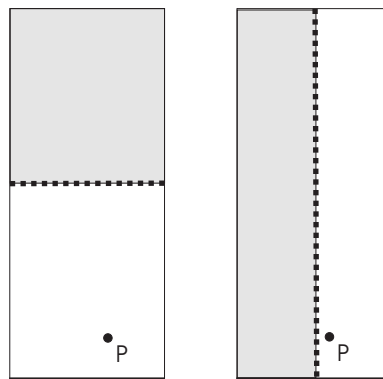


Abbildung 4.2: Teilungsrichtung

Nach dem Unterteilen versuchen wir die Segmente, die keine Lösung enthalten, zu eliminieren. Dazu analysieren wir die Beziehung zwischen dem Anfragepunkt und dem Kontrollpolygon. Die Effizienz des Algorithmus hängt im Wesentlichen von der Fähigkeit ab, eine große Anzahl von Teilen auszuschließen.

Wie bei den anderen 3D-Algorithmien wird der Unterteilungsprozess angehalten, wenn eine Flachheitsbedingung erfüllt ist. Wir bestimmen den Abstand der Kontrollpunkte zu einer Geraden, bzw. Ebene und kontrollieren, ob er kleiner als eine vorgegebene Toleranz ist. Trifft das zu, wird für dieses Segment die Newton-Iteration auf die Ableitung des Abstandsquadrates angewendet. Um eine bessere Chance auf Konvergenz zu haben, wird das globalisierte Newton-Verfahren verwendet. Näheres dazu findet sich in (Polak97).

4.2 Eliminationskriterien

Das einfachste Kriterium verwendet eine obere Schranke M für den Abstand zwischen dem Anfragepunkt und der Kurve bzw. Fläche. Wegen der Endpunktinterpolation kann M als der kleinste Abstand von den Enden (Ecken) des Kontrollpolygons (-Netzes) bestimmt werden. Wir können ein Segment eliminieren, wenn der kleinste Abstand zwischen dessen achsenparalleler Hüllquader und dem Anfragepunkt größer als M ist. Diese Methode ist ausreichend für einen funktionierenden Algorithmus, sie eliminiert aber vergleichsweise wenig Segmente, sodass der Zeitaufwand sehr hoch ist. Abbildung 4.3 zeigt den Grund. Das linke Segment beinhaltet eindeutig nicht die Lösung, kann aber nicht eliminiert werden. Beide Segmente müssen im nächsten Schritt weiter unterteilt werden. Die Notwendigkeit für zusätzliche Kriterien ist offensichtlich.

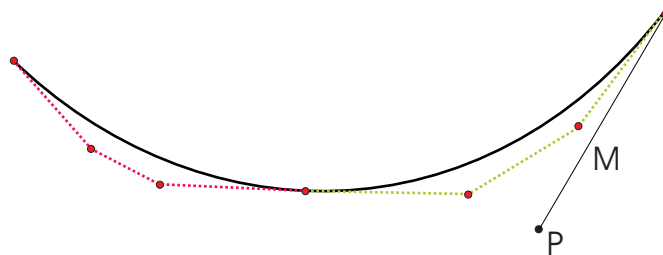


Abbildung 4.3: Schwäche der Standardelimination

4.2.1 Ausschlusskriterien für Kurven

Liegt der nächste Punkt an einem Ende der Kurve, wird dieser als Kandidat betrachtet, und das zugehörige Segment nicht weiter unterteilt. Der folgende Satz lässt uns solch eine Situation erkennen.

Satz 4.2.1 Sei $\gamma : [u_0, u_m] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine NURBS-Kurve mit Kontrollpunkten P_0, \dots, P_L und $P \in \mathbb{R}^3$ der Anfragepunkt. Wenn

$$\langle P_i - P_0, P_0 - P \rangle > 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (4.2.1)$$

dann ist $\|\gamma(u_0) - P\| < \|\gamma(t) - P\|$ für $t \in]u_0, u_m]$.

Die Bedingungen werden in Abbildung 4.4 dargestellt und bedeuten, dass die Kontrollpunkte P_1, \dots, P_L hinter der gestrichelten Linie liegen.

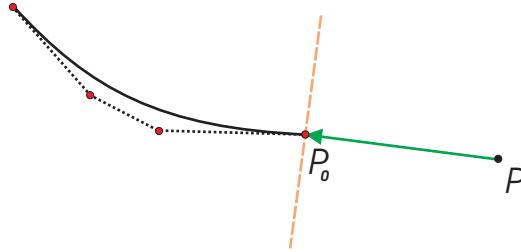


Abbildung 4.4: Ausschluss eines Kurvensegmentes

Beweis: Wegen der convex-hull-property existieren für alle $u \in [u_0, u_m]$ Zahlen $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum_{i=0}^L \lambda_i = 1$, sodass $\gamma(u) = \sum_{i=0}^L \lambda_i P_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\gamma(u) - P\|^2 &= \left\| \sum_{i=0}^L \lambda_i P_i - P_0 + P_0 - P \right\|^2 \\ &= \|P_0 - P\|^2 + \left\| \sum_{i=0}^L \lambda_i (P_i - P_0) \right\|^2 + 2 \sum_{i=0}^L \lambda_i \langle P_i - P_0, P_0 - P \rangle \\ &\stackrel{(4.2.1)}{>} \|P_0 - P\|^2 = \|\gamma(u_0) - P\|^2. \end{aligned}$$

□

Um diesen Satz anzuwenden, bestimmen wir den zum Anfragepunkt nächsten Endpunkt der Kurve und wählen ihn als P_0 . Im Abschnitt 4.3 werden wir dieses Kriterium mit denen aus (MaHew03) vergleichen.

4.2.2 Ausschlusskriterien für Flächen

Das Kurvenkriterium lässt sich auch auf Flächen übertragen, wobei die Ecken nun die Rolle der Endpunkte übernehmen.

Satz 4.2.2 Sei $F : [u_0, u_m] \times [v_0, v_n] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine NURBS-Fläche mit Kontrollpunkten $P_{i,j}, i = 0, \dots, L, j = 0, \dots, M$ und $P \in \mathbb{R}^3$ der Anfragepunkt. Falls

$$\langle P_{i,j} - P_{0,0}, P_{0,0} - P \rangle > 0, (i, j) \neq (0, 0),$$

dann ist $\|F(u_0, v_0) - P\| < \|F(t, s) - P\|$ für $(t, s) \in [u_0, u_m] \times [v_0, v_n]$ mit $(t, s) \neq (u_0, v_0)$.

Beweis: Genauso wie für Satz 4.2.1. □

Das Kriterium ist in Abbildung 4.5 illustriert und wird auf die zum Anfragepunkt nächste Ecke angewendet. Wenn abgesehen von $P_{0,0}$ alle Kontrollpunkte hinter der gestrichelten Ebene liegen, ist $P_{0,0}$ der Punkt mit dem kleinsten Abstand. Der graue Keil mit der Spitze in $P_{0,0}$ beinhaltet alle Anfragepunkte, für welche dieses Segment ausgeschlossen werden kann.

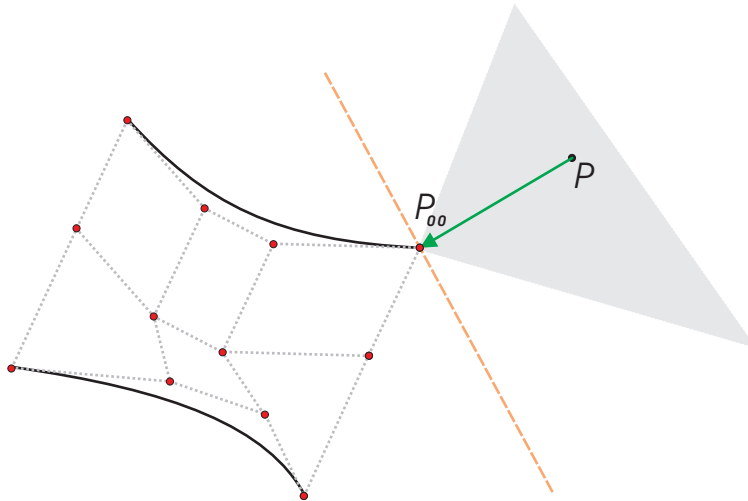


Abbildung 4.5: Eliminations-Kriterium für Flächen

4.2.3 Weitere Ausschlusskriterien für Flächen

Für die Herleitung weiterer Ausschlusskriterien benötigen wir folgende Beobachtung:

Lemma 4.2.3 Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d, d \geq 2$, eine C^1 -glatte Kurve und $T(\gamma)$ der Tangentialkegel von γ . Dann gilt für alle $t_0, t_1 \in I$ mit $t_1 > t_0$

$$\gamma(t_1) - \gamma(t_0) \in T(\gamma) \cup \{0\}.$$

Beweis: Es gilt

$$\gamma(t_1) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \gamma'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{t_1 - t_0}{n} \gamma' \left(t_0 + (t_1 - t_0) \frac{i}{n} \right). \quad (4.2.2)$$

Jede Summe liegt in $T \cup \{0\}$ und somit auch der Grenzwert. \square

Satz 4.2.4 Sei $P \in \mathbb{R}^3$ der Anfragepunkt, F eine reguläre NURBS-Fläche mit Kontrollpunkten $P_{i,j}, i = 0, \dots, L, j = 0, \dots, M$ und $T_v(F)$ der Tangentialkegel von F in Richtung v . Falls

$$\langle P_{i,0} - P, w \rangle > 0, \text{ für alle } i = 0, \dots, L, w \in T_v, \quad (4.2.3)$$

dann liegen die nächsten Punkte auf der Randkurve $F(u, 0)$ und keiner von ihnen ist ein kritischer Punkt der Abstandsfunktion.

Beweis: Wegen Lemma 4.2.3 existiert ein $w \in T_v \cup \{0\}$, sodass

$$\|F(u, v) - P\|^2 = \|F(u, 0) + w - P\|^2.$$

Weil $F(u, 0)$ in der konvexen Hülle der $P_{i,0}, i = 0, \dots, L$ liegt, existieren $\lambda_i > 0$ mit $\sum \lambda_i = 1$, sodass $\sum \lambda_i P_{i,0} = F(u, 0)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|F(u, v) - P\|^2 &= \|F(u, 0) - P\|^2 + 2 \langle F(u, 0) - P, w \rangle + \|w\|^2 \\ &= \|F(u, 0) - P\|^2 + 2 \sum \lambda_i \langle P_{i,0} - P, w \rangle + \|w\|^2 \\ &> \|F(u, 0) - P\|^2. \end{aligned}$$

Sei $F(u_*, 0)$ eines der globalen Minima und λ_i seien die zugehörigen Koeffizienten. Dann kann die notwendige Bedingung $\langle F(u_*, 0) - P, \partial_v F(u_*, 0) \rangle = 0$ für kritische Punkte der Abstandsfunktion nicht erfüllt sein. Der Grund dafür ist

$$\langle F(u_*, 0) - P, \partial_v F(u_*, 0) \rangle = \sum \lambda_i \langle P_{i,0} - P, \partial_v F(u_*, 0) \rangle > 0.$$

\square

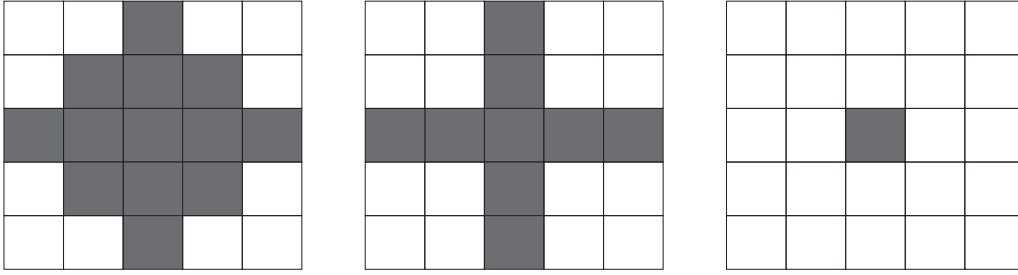


Abbildung 4.6: Ausschluss-Muster

Wenn der Tangentialkegel in einem Winkelraum z , α enthalten ist, ist die Bedingung

$$\angle(P_{i,0} - P, z) < \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad i = 0, \dots, L$$

hinreichend für den Ausschluss des Segmentes.

Abbildung 4.6 zeigt eine schematische Momentaufnahme der nicht ausgeschlossenen Teile im Parameterbereich der Fläche während der Unterteilung. Die erste Abbildung zeigt die Situation, wenn lediglich das Abstandskriterium verwendet wird, die zweite gehört zu den Kriterien aus (MaHew03) und die letzte zu den in der vorliegenden Arbeit dargestellten Kriterien.

4.3 Numerische Ergebnisse

Wir vergleichen die verschiedenen Algorithmen, indem wir jeweils nur die Ausschlusskriterien austauschen. Weil die Laufzeit stark von der Hardware und der Implementierung abhängt, zählen wir lediglich die durchgeführten Unterteilungen.

In jedem Test werden die Punkte eines $10 \times 10 \times 10$ Gitters auf die Kurve oder Fläche projiziert. Dabei ist das Gitter in jeder Richtung drei mal größer als der übliche achsenparallele Hüllquader. Die Tabellen enthalten die durchschnittliche Anzahl an Unterteilungen.

Kurven-Vergleich

Abbildung 4.7 zeigt die Kurven, die für den Test verwendet wurden. Lediglich die letzte Kurve liegt nicht in einer Ebene.

Es wird deutlich, dass die neuen Kriterien zu einer verbesserten Laufzeit führen, falls die Kurve Wendepunkte besitzt.

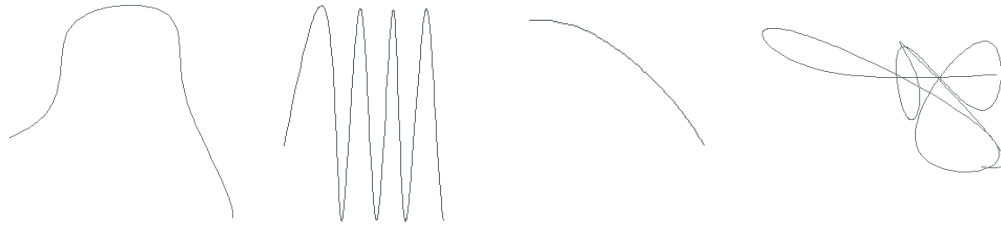


Abbildung 4.7: Getestete Kurven

BEISPIEL	HEWITT & MA	SELIMOVIC
1. Kurve	8.04	5.92
2. Kurve	19.59	13.81
3. Kurve	3.91	3.91
4. Kurve	18.07	16.37

Tabelle 4.1: Anzahl an Unterteilungen des Kurventests

Flächen–Vergleich

Der Vergleich wurde mit Flächen von geringer geometrischer Komplexität durchgeführt, wie sie für CAD Modelle typisch sind, siehe Abbildung 4.8.

BEISPIEL	HEWITT & MA	SELIMOVIC
1. Rundung	39.47	14.27
2. Translation	21.30	3.15
3. Patch	41.43	15.20

Tabelle 4.2: Anzahl an Unterteilungen des Flächentests

Die Anzahl der notwendigen Unterteilungen wurde durch die Verwendung der neuen Kriterien vermindert. Wählt man ein engeres Gitter, sind die Ergebnisse nicht ganz so stark, aber die neuen Kriterien sind auch dann immer klar im Vorteil.

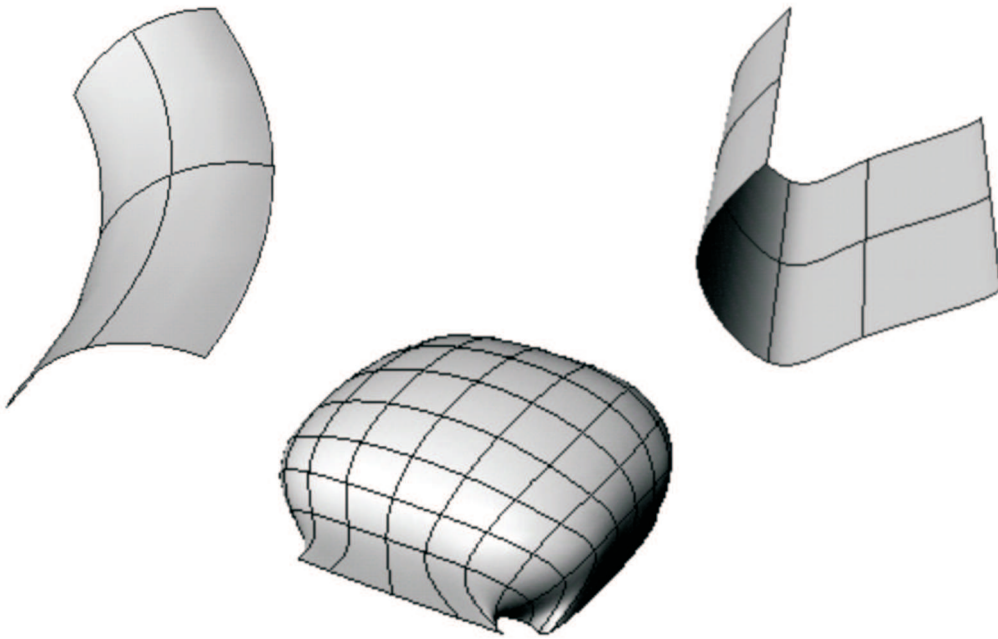


Abbildung 4.8: Getestete Flächen

*Except in mathematics,
the shortest distance between
point A and point B
is seldom a straight line.
(Unbekannter Autor)*

Kapitel 5

Symbolisch–Numerischer Algorithmus für die Projektion von Punkten auf rationale Bézier–Kurven und –Flächen

Die Schwachstelle des im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Algorithmus ist die Entscheidung für den Übergang zum Newtonverfahren. Es wird nicht garantiert, dass beim Übergang zum Newtonverfahren nur eine lokale Lösung in dem betrachteten Bereich liegt. Wenn es mehrere lokale Lösungen gibt, gehen alle bis auf eine verloren. In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, das mehr Sicherheiten bietet.

Um das Problem adäquat zu behandeln, wird die Darstellung des Abstandsquadrats in Bernstein–Bézier–Form verwendet. Sie lässt sich für Bézier–Kurven und –Flächen effizient berechnen und anhand ihrer Kontrollwerte lassen sich zuverlässige Aussagen über die jeweilige Situation treffen. Die wichtigste davon ist die Konvexität der Funktion. Ist sie gegeben, gibt es höchstens ein lokales Minimum im Inneren des Definitionsbereiches, und es kann zur Newtoniteration übergegangen werden. Im polynomialen Fall gibt es hinreichende Bedingungen für die Konvexität. Für rationale Funktionen ist das nur im univariaten Fall gegeben, sodass wir uns für rationale Flächen

auf notwendige Bedingungen für die Konvexität beschränken müssen.

Die Betrachtung des Abstandsquadrates hat den Nachteil, dass wir uns auf den Bézier-Fall beschränken müssen. Nur dann kann die entsprechende Darstellung des Abstandsquadrates effizient berechnet werden. Sie lässt sich aber mit dem 3D-Algorithmus aus Kapitel 4 kombinieren, da dieser stets an inneren Knoten unterteilt, sodass die einzelnen Segmente nach einigen Schritten Bernstein-Bézier-Form haben und zum Abstandsquadrat übergegangen werden kann.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden mathematische Aussagen entwickelt, die dem Algorithmus zugrunde liegen. Im Anschluss wird er im Detail vorgestellt und seine Laufzeit untersucht.

5.1 Mathematische Grundlagen

Die Konvexität ist nur dann eine sinnvolle Abbruchbedingung für die Rekursion, wenn das Abstandsquadrat in der Umgebung einer Lösung tatsächlich konvex ist und das auch anhand der Kontrollwerte bestimmt werden kann. Im diesem Abschnitt zeigen wir, dass typischerweise beides zutrifft.

5.1.1 Konvexität des Abstandsquadrates

Wir zeigen, dass die Abstandsfunktion in der Umgebung eines lokalen Minimums typischerweise eine positiv definite Hessematrix besitzt. Dazu werden in den folgenden Sätzen die Ausnahmen charakterisiert, sodass man sehen kann, dass sie in praktischen Anwendungen kaum zu erwarten sind.

Satz 5.1.1 *Seien eine C^2 -glatte reguläre Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wenn für das Abstandsquadrat $f := \|\gamma - P\|^2$ an irgendeiner Stelle $a_m \in [0, 1]$ die Bedingung $f'(a_m) = f''(a_m) = 0$ erfüllt ist, so liegt P auf der Krümmungsachse von γ im Punkt $\gamma(a_m)$.*

Beweis: Die obigen Voraussetzungen bedeuten, dass die Kugel um P mit dem Radius $\|\gamma(a_m) - P\|$ die Kurve in zweiter Ordnung berührt. Die Mittelpunkte all dieser Kugeln bilden gerade die Krümmungsachse, siehe (Walter89). \square

Satz 5.1.2 *Seien eine C^2 -glatte reguläre Fläche $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wenn für das Abstandsquadrat $f := \|F - P\|^2$ an einem lokalen Minimum $a_m \in]0, 1[\times]0, 1[$ die Hessematrix $\text{Hess}(f)(a_m)$ singulär ist, so ist $f(a_m) = |\frac{1}{\kappa}|$, wobei κ eine nichtverschwindende Hauptkrümmung in a_m ist. P ist also ein Fokalpunkt.*

Beweis: Wenn wir P als den Ursprung wählen, ist das Abstandsquadrat $\langle F, F \rangle$ und es gilt

$$\frac{1}{2}\text{Hess}(\langle F, F \rangle) = \begin{pmatrix} \langle \partial_u F, \partial_u F \rangle & \langle \partial_u F, \partial_v F \rangle \\ \langle \partial_u F, \partial_v F \rangle & \langle \partial_v F, \partial_v F \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \partial_u \partial_u F, F \rangle & \langle \partial_u \partial_v F, F \rangle \\ \langle \partial_u \partial_v F, F \rangle & \langle \partial_v \partial_v F, F \rangle \end{pmatrix}.$$

Wir wählen die Lage der Fläche so, dass die Tangentialebene in a_m der xy -Ebene entspricht. Wegen $\text{grad}(\langle F, F \rangle) = 0$ gilt damit auch $F(a_m) = \lambda N(a_m)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\frac{1}{2}\text{Hess}(\langle F, F \rangle)(a_m) = I_{a_m} - \lambda II_{a_m},$$

wobei I und II die zur ersten und zweiten Fundamentalform gehörenden Darstellungen sind und der untere Index die Stelle kennzeichnet, an der sie ausgewertet werden. $|\lambda|$ ist der Abstand von P und $F(a_m)$. Weiterhin können wir die Parametrisierung von F so wählen, dass I_{a_m} die Einheitsmatrix ist und II_{a_m} Diagonalgestalt hat. Die Eigenwerte von II_{a_m} sind die Hauptkrümmungen $\kappa_1(a_m)$ und $\kappa_2(a_m)$, weshalb

$$\frac{1}{2}\text{Hess}(\langle F, F \rangle)(a_m) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda\kappa_1(a_m) & 0 \\ 0 & 1 - \lambda\kappa_2(a_m) \end{pmatrix}$$

gilt. Nun ist es einfach zu sehen, dass die Matrix genau dann singulär ist, wenn für ein $i = 0, 1$ $\kappa_i(a_m) \neq 0$ und $\frac{1}{\kappa_i(a_m)} = \lambda$ gilt, also wenn P ein Fokuspunkt ist. Positive Definitheit stellt sich ein, wenn der Abstand $|\lambda|$ kleiner ist als die Krümmungsradien aller Normalschnittkurven in a_m . \square

Bemerkung 5.1.3 *Liegt der Anfragepunkt auf der Fläche, also $F(a_m) = P$, ist die Abstandsfunktion in einer Umgebung um a_m strikt konvex (d.h. die Hessematrix ist positiv definit).*

5.1.2 Konvexität der Kontrollwerte konvexer Funktionen

Die Kontrollwerte einer konvexen rationalen Bézier-Funktion sind leider nicht immer konvex ($\Delta^2 P_i > 0$). Wir zeigen im folgenden, dass eine Funktion f mit $f'' > 0$ nach genügend vielen Unterteilungen in der Mitte des Parameterbereiches ein konvexes Kontrollpolygon haben wird. Damit werden wir später die Bedingung $\Delta^2 P_i > 0$ als Abbruchkriterium des Unterteilungsalgorithmus für die Suche nach einem Minimum von f rechtfertigen können.

Sei $f = \frac{a}{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch die beiden polynomialen Bézier-Funktionen a und b vom Grade n gegeben, wobei b nur positive Kontrollwerte haben soll.

Für ein $[t_0, t_1] \subseteq [0, 1]$ wird die rationale Bézier-Darstellung von $g := f|_{[t_0, t_1]}$ betrachtet, die sich durch die Bézier-Darstellung von $a|_{[t_0, t_1]}$ und $b|_{[t_0, t_1]}$ ergibt. Die Kontrollwerte und Gewichte von g werden für den Rest dieses Abschnittes mit P_i bzw. w_i , $i = 0, \dots, n$ bezeichnet.

Satz 5.1.4 *Es gibt eine von a, b und deren Grad abhängige Konstante $C > 0$, sodass für alle Intervalle $[t_0, t_1]$, in denen ein Minimum von f liegt, gilt:*

$$\max_{i=0}^{n-2} \left| g''(t_0) - \frac{n(n-1)w_{i+2}}{(t_1-t_0)^2 w_i} (P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) \right| < C(t_1 - t_0).$$

Beweis: Wir stellen zunächst die vorhandenen Konvergenzaussagen für a und b zusammen. Aus dem Satz 1.0.3, Formel (1.0.8) und dem Satz von Taylor folgen

$$\begin{aligned} \max_i |a(t_0) - w_i P_i| &= O(t_1 - t_0), \\ \max_i \left| a'(t_0) - \frac{n}{t_1 - t_0} (w_{i+1} P_{i+1} - w_i P_i) \right| &= O(t_1 - t_0), \\ \max_i \left| a''(t_0) - \frac{n(n-1)}{(t_1 - t_0)^2} (w_{i+2} P_{i+2} - 2w_{i+1} P_{i+1} + w_i P_i) \right| &= O(t_1 - t_0), \end{aligned}$$

wobei die durch Landausymbole repräsentierten Funktionen von a und dem Grad abhängen, aber nicht vom gewählten Intervall $[t_0, t_1]$. Analoges gilt für b , wenn $w_j P_j$ durch w_j ersetzt wird. Wir beginnen mit dem Ausdruck

$$g'' = \left(\frac{(a'b - ab')}{b^2} \right)' = \frac{a''b - ab''}{b^2} - \frac{2(a'b - ab')b'}{b^3}.$$

Da in $[t_0, t_1]$ ein Minimum liegt, gibt es eine Stelle t_m mit $g'(t_m) = 0$. Deswegen ist

$$\|g'\|_\infty = \left\| \frac{a'b - ab'}{b^2} \right\|_\infty = O(t_1 - t_0)$$

und wir haben nur noch den ersten Summanden zu betrachten. Für diesen

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \frac{(t_1 - t_0)^2}{n(n-1)}(a''b - ab'')(t_0) \\
&= (w_{i+2}P_{i+2} - 2w_{i+1}P_{i+1} + w_iP_i)w_i - P_iw_i(w_{i+2} - 2w_{i+1} + w_i) + O((t_1 - t_0)^3) \\
&= (w_{i+2}P_{i+2} - 2w_{i+1}P_{i+1})w_i - P_iw_i(w_{i+2} - 2w_{i+1}) + O((t_1 - t_0)^3) \\
&= w_{i+2}w_i(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) + 2P_{i+1}w_{i+2}w_i - P_iw_{i+2}w_i \\
&\quad - 2w_{i+1}P_{i+1}w_i - P_iw_iw_{i+2} + 2P_iw_iw_{i+1} + O((t_1 - t_0)^3) \\
&= w_{i+2}w_i(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) + 2w_{i+2}w_i(P_{i+1} - P_i) \\
&\quad - 2w_{i+1}w_i(P_{i+1} - P_i) + O((t_1 - t_0)^3) \\
&= w_{i+2}w_i(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) - 2(w_{i+2} - w_{i+1})w_i(P_{i+1} - P_i) + O((t_1 - t_0)^3).
\end{aligned}$$

Wegen Satz 2.2.4 und $g'(t_m) = 0$ gilt $\frac{n(P_{i+1} - P_i)}{t_1 - t_0} = O(t_1 - t_0)$. Damit und mit $w_{i+2} - w_{i+1} = O(t_1 - t_0)$ ergibt sich

$$\frac{a''b - ab''}{b^2}(t_0) = \frac{n(n-1)}{(t_1 - t_0)^2} \frac{w_{i+2}}{w_i} (P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) + O(t_1 - t_0)$$

und damit die Behauptung. \square

5.1.3 Konvexität bivariater Funktionen

Für die Konstruktion des später vorgestellten Algorithmus benötigen wir ein hinreichendes Kriterium für die Eindeutigkeit eines Minimums im Inneren des Definitionsbereiches einer bivariaten Bézier-Funktion. Für den polynomialen Fall verwenden wir die Konvexität, die sich mit folgender Bedingung prüfen lässt:

Satz 5.1.5 (Floater99, Theorem 3.3) *Eine polynomiale bivariate Bézier-Funktion der Grade (m, n) mit Kontrollpunkten $P_{i,j}$ hat eine positiv definite Hessematrix, falls*

$$\Delta_{20}P_{i,j} > 0, \quad i = 0, \dots, m-2, j = 0, \dots, n,$$

$$\Delta_{02}P_{i,j} > 0, \quad i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n-2,$$

und für alle $k, l, r, s \in \{0, 1\}$

$$\Delta_{20}P_{i,j+l+s}\Delta_{02}P_{i+k+r,j} > \frac{mn}{(m-1)(n-1)}(\Delta_{11}P_{i+k,j+l})^2$$

$$i = 0, \dots, m-2, \quad j = 0, \dots, n-2.$$

In der Referenz wurde die Bedingung direkt für die Konvexität formuliert. Tatsächlich wird der Beweis für die obige Aussage angegeben. Da das Kriterium nur hinreichend ist, stellt sich die Frage, ob es nach endlich vielen Unterteilungen erfüllt sein wird. Um das zu zeigen, benötigen wir wieder eine bekannte Konvergenzaussage

Satz 5.1.6 (Dahmen86) *Sei $f : [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine polynomiale bivariate Bézier-Funktion der Grade (m, n) mit Kontrollpunkten $P_{i,j}$. Dann gibt es eine nur von den Graden abhängige Konstante $C > 0$ mit:*

$$|f(\eta_i^m, \mu_j^n) - P_{i,j}| < C(s_1 - s_0)^2 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \right\|_\infty + C(t_1 - t_0)^2 \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\|_\infty.$$

Hierbei sind η_i und μ_j die Greville-Abszissen der entsprechenden Parameterrichtungen.

Satz 5.1.7 *Wenn eine polynomiale Bézier-Funktion mit positiv definiter Hessematrix in der Mitte des Definitionsbereiches in beiden Parameterrichtungen rekursiv unterteilt wird, sind die Bedingungen des Satzes 5.1.5 nach endlich vielen Schritten erfüllt.*

Beweis: Sei $f : [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein während der Rekursion entstandener Teil in Bézier-Form und $P_{i,j}$ seine Kontrollpunkte. Aus Satz 5.1.6 folgt sofort

$$\begin{aligned} m(m-1)\Delta_{2,0}P_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial s^2}f(s_0, t_0) + O(\max\{s_1 - s_0, t_1 - t_0\}) \\ n(n-1)\Delta_{0,2}P_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}f(s_0, t_0) + O(\max\{s_1 - s_0, t_1 - t_0\}) \\ mn\Delta_{1,1}P_{i,j} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}f(s_0, t_0) + O(\max\{s_1 - s_0, t_1 - t_0\}). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Bedingungen von Satz 5.1.5 ergibt die Behauptung. \square

Bivariate rationale Funktionen

Für bivariate, rationale Funktionen ist kein nur von den Kontrollwerten und Gewichten abhängendes Kriterium für die Konvexität bekannt. Als Ersatz dient uns unter anderem die Eindeutigkeit der Minima entlang der Parameterlinien. Im Folgenden leiten wir dafür eine hinreichende Bedingung her.

Sei eine bivariate Bézier-Funktion der Grade (m, n) gegeben durch die Kontrollwerte $P_{i,j} \in \mathbb{R}$, die positiven Gewichte $w_{i,j} \in \mathbb{R}^+$, $i = 0, \dots, m$; $j = 0, \dots, n$ und die Formel

$$F(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) w_{i,j}}.$$

Analog zu (1.0.17) stellen wir sie durch univariate Funktionen dar:

$$P_i(v) := \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i,j}}, \quad W_i(v) := \sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i,j},$$

$$F(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m B_i^m(u) W_i(v) P_i(v)}{\sum_{i=0}^m B_i^m(u) W_i(v)}.$$

Für konstantes v ist F also eine univariate rationale Bézier-Funktion, für die die variation-diminishing-property gilt. Diese besagt, dass die Funktion einen Wert höchstens so oft annimmt wie das Polygon ihrer Kontrollwerte. Falls also

$$P_{i+2}(v) - 2P_{i+1}(v) + P_i(v) > 0, \quad i = 0, \dots, m-2,$$

können die u -Linien nur ein Minimum haben. Weiterhin gilt

$$P_{i+2}(v) - 2P_{i+1}(v) + P_i(v) = \frac{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) B_l^n(v) w_{i+2,h} w_{i+1,k} w_{i,l} (P_{i+2,h} - 2P_{i+1,k} + P_{i,l})}{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) B_l^n(v) w_{i+2,h} w_{i+1,k} w_{i,l}}.$$

Eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit des Minimums entlang aller Parameterlinien mit konstanten v -Parameter wäre also, dass alle $P_{i+2,h} - 2P_{i+1,k} + P_{i,l}$ positiv sind. Wegen der Instabilität der Darstellung ist sie allerdings recht restriktiv. Eine schwächere Bedingung erhalten wir, wenn wir den Zähler in der Bernsteinbasis B_s^{3n} ausdrücken. Die Koeffizienten dieser Darstellung sind gegeben durch

$$H_{s,i} := \frac{1}{\binom{3n}{s}} \sum_{h+k+l=s} \binom{n}{h} \binom{n}{k} \binom{n}{l} w_{i+2,h} w_{i+1,k} w_{i,l} (P_{i+2,h} - 2P_{i+1,k} + P_{i,l}) \quad (5.1.1)$$

Sind alle $H_{s,i}$ positiv, haben die Parameterlinien mit konstantem v -Wert höchstens ein Minimum.

5.2 Projektion eines Punktes auf eine Kurve

In diesem Abschnitt geben wir eine genaue Beschreibung des Algorithmus für die Projektion eines Punktes P auf eine Kurve γ . Er enthält bereits alle wichtigen Ideen, die wir im zweiten Teil auf bivariate Probleme übertragen werden. Der Algorithmus gliedert sich in folgende Teile:

1. Berechnung der Bernstein-Bézier-Form von $\|\gamma - P\|^2$
2. Unterteilung, bis die Eindeutigkeit des Minimums gesichert ist
3. Iteration mit dem Newtonverfahren und Bisektion.

Berechnung der Bézierdarstellung von $\|\gamma - P\|^2$

Wir verwenden im Folgenden eine Darstellung mit skalierten Gewichten $\hat{w}_i = \binom{n}{i} w_i$. Dann ist

$$\gamma(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \hat{w}_i P_i t^i (1-t)^{n-i}}{\sum_{i=0}^n \hat{w}_i t^i (1-t)^{n-i}}$$

und das Abstandsquadrat lässt sich darstellen als

$$A(t) := \langle \gamma(t) - P, \gamma(t) - P \rangle = \frac{\sum_{k=0}^{2n} H_k t^k (1-t)^{2n-k}}{\sum_{k=0}^{2n} W_k t^k (1-t)^{2n-k}},$$

mit $H_k = \sum_{i+j=k} \langle \hat{w}_i (P_i - P), \hat{w}_j (P_j - P) \rangle$, und die $W_k = \sum_{i+j=k} \hat{w}_i \hat{w}_j$. (H_k, W_k) sind dann die skalierten Koeffizienten in homogener Darstellung. $\frac{H_k}{W_k}$ sind die Bézierkoeffizienten.

Es ist entscheidend, dass diese Berechnung (im Folgenden Konvertierung genannt) in einer angemessenen Zeit durchgeführt werden kann. Um das zu untersuchen, gehen wir davon aus, dass die Kurve in homogener Darstellung gespeichert ist, $w_i P_i$ also als Vektoren vorliegen. Binomialkoeffizienten und ihre Kehrwerte werden aus einer Tabelle ausgelesen, sodass ihre Berechnung nicht mit einfließt. Weiterhin werden wir nicht die einzelnen Operationsarten unterscheiden, da lediglich Additionen und Multiplikationen vorkommen und diese bei modernen Prozessoren dieselbe Berechnungszeit benötigen, siehe dazu (Podschun99). Im Folgenden wird die Anzahl der Operationen stets für dreidimensionale Kurven betrachtet.

Wir benötigen $4n+4$ Operationen, um die Koeffizienten zu skalieren. Für die Berechnung aller $\langle \hat{w}_i P_i, \hat{w}_j P_j \rangle$ und aller $\hat{w}_i \hat{w}_j$ wird wegen der Symmetrie jeweils $\frac{n(n+1)}{2}$ mal multipliziert. Zur Berechnung eines Skalarproduktes werden 5 Operationen benötigt und für das Addieren der einzelnen Skalarprodukte zur bisherigen Summe kommt noch eine Operation hinzu. Für die Berechnung der H_i benötigen wir deshalb $3n(n+1)$ und für die W_i $n(n+1)$ Operationen. Das sind insgesamt $4n(n+1)+4n = 4n^2+8n$ Operationen. Zum Vergleich: eine Ausführung des deCasteljau-Algorithmus benötigt $6n^2 - 6n$ Operationen.

Aufgrund der Schleifenvariablen und Indexberechnungen ist die Laufzeit in einer konkreten Implementierung höher. Andererseits hängt die Performance von den verschiedensten Faktoren ab, wie den Optimierungen des Compilers, Registerbelegungen und den Pipelines des Prozessors. Da wir das Verhalten nicht vollständig erfassen können, betrachten wir lediglich die mathematisch notwendigen Operationen, die oben gezählt wurden.

Unterteilung

In dieser Phase wird die Funktion A mit dem deCasteljau-Algorithmus rekursiv unterteilt. Gibt es in einem Segment genau ein lokales Minimum, wird zur Iteration übergegangen (mehr dazu im nächsten Abschnitt). Die Eindeutigkeit lässt sich durch die variation-diminishing-property feststellen, da die Funktion höchstens so viele Minima haben kann wie das Kontrollpolygon.

Für die Effizienz des Algorithmus ist es wichtig, Teile, die keine Lösung enthalten können, zu erkennen und nicht weiter zu betrachten. Dazu gibt es mehrere Kriterien, die nacheinander überprüft werden.

1. **Obere Schranke des Abstandes.** Die Schranke ist ein Abstandswert, den die Lösung unterschreiten muss. Liegen alle Koeffizienten der Funktion oberhalb dieser Schranke, kann das entsprechende Segment wegen der convex-hull-property die Lösung nicht enthalten und wird somit nicht weiter behandelt.

Ein Startwert für diese Schranke kann vom Benutzer vorgegeben werden. Sie wird nach jedem Unterteilen durch den ersten und letzten Kontrollwert verkleinert, da diese wegen der Endpunktinterpolation mit den Funktionswerten am Anfang und Ende übereinstimmen. Die Schranke wird ebenfalls mit dem Abstandswert einer gefundenen Lösung verkleinert.

2. **Das Minimum liegt am Rand.** Liegt das Minimum der Kontrollwerte am Rand, so gilt das wegen der Endpunktinterpolation und der convex-hull-property auch für die Funktion. Dann kann der Rand als Kandidat für die globale Lösung angesehen und das Segment aus dem Algorithmus entfernt werden.

Das Unterteilen des Abstandsquadrates ist (näherungsweise) doppelt so aufwändig wie das Unterteilen der Kurve selbst. Allerdings wird in typischen Anwendungen in einem CAD-System die Eindeutigkeit sofort festgestellt. Weiteres dazu findet sich im Abschnitt Situationsanalyse.

Iteration

Ist die Eindeutigkeit der Lösung gesichert, wird das Newtonverfahren eingesetzt, um sie genauer anzunähern. Der Startwert wird über den minimalen Kontrollwert P_μ bestimmt. Da die Bernsteinpolynome in den Greville-Abszissen ihre jeweiligen Maxima haben, wird er als μ/n gewählt.

Falls die Newton-Iteration divergiert, wenden wir das Bisektionsverfahren an. Wir können es einsetzen, da die Bedingungen für den Übergang zur

Iteration sicherstellen, dass die Zielfunktion in den Rändern des betrachteten Intervalls unterschiedliche Vorzeichen hat.

Während der Iteration wird nicht die Bézierdarstellung des Abstandsquadrates, sondern das Bézier-Segment der Kurve ausgewertet. Sie hat einen niedrigeren Grad, was wegen der quadratischen Laufzeit des deCasteljau-Algorithmus zu einem spürbar geringeren Rechenaufwand führt.

Situationsanalyse

Die Berechnungsdauer des hier vorgestellten Algorithmus hängt von der Situation ab, in der er angewendet wird. Ist die Situation einfach, sodass die Eindeutigkeit gleich festgestellt wird, liegt die Laufzeit nur geringfügig über der des Newtonverfahrens. Normalerweise benötigt es vier Auswertungen, um die übliche Genauigkeit (10^{-8}) zu erreichen. Die Laufzeit für die Berechnung der Bernstein-Bézier-Form des Abstandsquadrates ist vergleichbar mit einer Auswertung.

Falls die Funktion mehrere Minima hat, bricht die Unterteilung frühestens ab, wenn sie in unterschiedlichen Segmenten liegen. Das ist auch gewünscht, weil man für alle Lösungen das sichere iterative Verfahren verwenden möchte. Das Laufzeitverhalten ist allerdings schwächer gegenüber einer rekursiven Teilung der Kurve selbst, da das Unterteilen mit doppelt so vielen Operationen verbunden ist. Da der Abbruch nach der Trennung relativ schnell erfolgt, wird auch hier die Laufzeit im Durchschnitt gering sein. Außerdem bleibt noch die verbesserte Sicherheit, die diese Vorgehensweise auszeichnet.

Wenn zwei Minima aufeinander fallen, wir also eine doppelte Nullstelle von $(\|\gamma - P\|^2)'$ haben, ist die Situation besonders aufwändig. Auch wenn die Funktion konvex sein kann, wird die Eindeutigkeit niemals festgestellt und die Unterteilung kommt erst zum Stehen, wenn die Länge des Definitivintervalls eine benutzerdefinierte Toleranz unterschreitet.

Einerseits ist diese Situation selten, sie tritt auf, wenn der zu projizierende Punkt auf der Krümmungsachse liegt (Satz 5.1.1), andererseits konvergiert das Newtonverfahren in dieser Situation auch nur linear. Deshalb wäre die Feststellung der Eindeutigkeit kein besonders großer Gewinn. Alle anderen Verfahren verwenden ebenfalls die Newtoniteration, sodass dieser Punkt im Vergleich nicht als Schwäche ausgelegt werden kann. Die hier geschilderte Abstufung der Effizienz zeigt ein für Unterteilungsalgorithmen typisches Bild, auch für die Betrachtung anderer Probleme, wie z.B. Schnitte.

Für strikt konvexe rationale Bézierfunktionen besagt Satz 5.1.4, dass nach endlich vielen Unterteilungen die Darstellung ein konvexes Kontrollpolygon hat. Damit haben wir in regulären Fällen garantiert einen Abbruch der Unterteilung durch Eindeutigkeit. Aber wie groß sind die Bereiche der Kurve,

auf denen das Minimum eindeutig ist? Dazu finden sich in Kapitel 6 einige Betrachtungen für den Fall, dass der nächste Punkt näher ist als das Minimum der Krümmungsradien. Dann muss die Kurve eine Totalkrümmung von $\frac{\pi}{2}$ überschreiten, damit ein zweiter Lotfußpunkt und damit ein zweites lokales Minimum existieren kann. In Kapitel 7 wird auch gezeigt, dass sich die Totalkrümmung einer NURBS-Kurve durch die Winkelsumme des Kontrollpolygons abschätzen lässt.

Weiterhin stellt sich die Frage, wie oft unterteilt werden muss, damit sich die Eindeutigkeit eines Minimums in den Kontrollwerten widerspiegelt und damit vom Algorithmus erkannt wird. An dieser Stelle ist es unvermeidlich, das Verhalten des Algorithmus in der Praxis zu testen. Der Algorithmus ist im CAD System (HiCAD) implementiert und zeigt das erwartete Verhalten. Im Normalfall wird die Eindeutigkeit sofort festgestellt, und das Newtonverfahren konvergiert ohne Bisektion.

5.3 Bivariate Fragestellungen

Die Vorgehensweise der Projektion auf Kurven lässt sich auf den bivariaten Fall übertragen, allerdings nur mit einigen Abstrichen. Die Berechnung der Bernstein-Bézier-Form des Abstandsquadrates ist auch in diesem Fall möglich. Die Eindeutigkeit wird durch die Konvexität der Funktion erkannt. Im polynomialen Fall kann Sie anhand des Kontrollnetzes festgestellt werden, im rationalen Fall verwenden wir lediglich notwendige Bedingungen.

Die beiden Fragestellungen Kurve-Kurve und Punkt-Fläche werden in ein Minimierungsproblem einer bivariaten Bézierfunktion überführt. Anschließend wird derselbe Algorithmus verwendet, um die Lösungen zu finden. Dieser wird als erster vorgestellt.

5.3.1 Minimum bivariater, rationaler Bézier-Funktionen

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die übliche Unterteilungsstrategie durch geeignete Kriterien für den Ausschluss und die Eindeutigkeit von Lösungen effizient umgesetzt werden kann. Da der Rand an übergeordneter Stelle untersucht wird, suchen wir lediglich Minima im Inneren.

Sei die Funktion F gegeben durch die Kontrollwerte und Gewichte $P_{i,j} \in \mathbb{R}$ bzw. $w_{i,j} \in \mathbb{R}^+$, $i = 0, \dots, n$; $j = 0, \dots, m$ und die Formel

$$F(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) w_{i,j}}, \quad u, v \in [0, 1].$$

Unterteilung

Die Funktion wird mit dem deCastljam-Algorithmus in einer Parameterrichtung in der Mitte des Parametergebietes geteilt. Die Richtung wird über die Höhenänderungen der $P_{i,j}$ bestimmt. Genauer gesagt wird sie in v -Richtung unterteilt, falls

$$\max_{i,k,l} \{|P_{i,k} - P_{i,l}| \mid k < l\} < \max_{j,k,l} \{|P_{k,j} - P_{l,j}| \mid k < l\},$$

sonst in u -Richtung. Dies ist eine aus praktischen Versuchen entstandene Heuristik, die die Wahrscheinlichkeit für den Ausschluss eines der Teile erhöht.

Ausschlusskriterien

Wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist, kann das Segment die Lösung nicht enthalten, und es wird nicht weiter betrachtet.

1. Nullstellenfreiheit des Gradienten.

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \neq 0 \text{ und } \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \neq 0$$

werden getrennt mit den Mitteln aus Kapitel 2 überprüft. Für partielle Ableitung in Richtung u einer polynomialen Funktion ist

$$P_{i+1,j} - P_{i,j} < 0 \text{ oder } P_{i+1,j} - P_{i,j} > 0$$

hinreichend, vergleiche (2.1.2). Für rationale Funktionen gilt dasselbe, wenn die Differenzen durch

$$\frac{w_{i+1,h}}{w_{i+1,k}} P_{i+1,h} - \frac{w_{i,h}}{w_{i,k}} P_{i,h}$$

ersetzt werden, siehe (2.3.3).

2. Minimum in einer Ecke. (Nur für die Suche nach dem globalen Minimum) Mit der Endpunktinterpolation und der convex-hull-property ergibt sich

$$P_{0,0} < P_{i,j}, \text{ für } (i, j) \neq (0, 0)$$

als hinreichende Bedingung dafür, dass $F(0,0)$ ein globales Minimum dieses Segmentes ist (entsprechend für die anderen Ecken). Ist die Bedingung für eine Ecke erfüllt, wird überprüft, ob der Gradient verschwindet und die Stelle ggf. als Kandidat für die Gesamtlösung betrachtet.

3. **Vorgegebene Schranke.** (Nur für die Suche nach dem globalen Minimum) Während der Rekursion wird eine obere Schranke für das Minimum von F in einer Variablen M protokolliert. Wegen der convex-hull-property werden alle Segmente ausgeschlossen, für die

$$\min P_{i,j} > M$$

erfüllt ist. Die Schranke M wird nach jedem Unterteilen durch die Kontrollpunkte an den Ecken verbessert, da diese dem Funktionswert in der Ecke entsprechen (Endpunktinterpolation).

4. **Konkavität polynomialer Funktionen.** Eine Funktion mit

$$\text{Hess}(F) \text{ negativ definit}$$

hat höchstens eine kritische Stelle und diese ist ein Maximum. Die Berechnung dieser Eigenschaft wird im Abschnitt Eindeutigkeit beschrieben.

Eindeutigkeit für polynomiale Funktionen (Übergang zum Newtonverfahren)

Der bedeutendste Beitrag des hier vorgestellten Algorithmus ist die Sicherung der Eindeutigkeit der einzelnen Minima, was allerdings nur im polynomialen Fall möglich ist. Ist die Eindeutigkeit festgestellt, können wir zum schnelleren Newtonverfahren übergehen.

Ist $\text{Hess}(F)$ in einem Minimum positiv definit, so gilt das auch für eine ganze Umgebung, auf der F dann konvex ist. Da die Unterteilung den Bereich, in dem die Lösung sein kann, immer weiter verkleinert, wird jedes Minimum nach endlich vielen Schritten in einem Parameterbereich eines Segmentes liegen, der vollständig in der obigen Umgebung enthalten ist. Um diese Situation zu erkennen, wird die hinreichende Bedingung aus Satz 5.1.5 verwendet. Möglicherweise wird die Konvexität damit nicht sofort erkannt, aber durch Satz 5.1.7 wissen wir, dass die Bedingung nach weiteren Unterteilungen erfüllt sein wird.

Die Komplexität der Bedingung für die Konvexität ist $O(mn)$, sodass sie im Vergleich zu den $O(m^2n)$ des deCasteljau-Algorithmus einfacher zu berechnen ist.

Eindeutigkeit für rationale Funktionen

Für rationale Funktionen ist keine Bedingung für Konvexität bekannt, weswegen eine Heuristik eingesetzt werden muss. Sie ist aus verschiedenen Tests zusammengesetzt, die notwendig sind für die Konvexität der Funktion.

1. **Positiv definite Hessematrix in den Ecken.** In den Ecken des Parameterbereiches lassen sich die zweiten Ableitungen in konstanter Zeit berechnen. Ist die Matrix nicht positiv definit, wird das Segment weiter unterteilt.
2. **Eindeutigkeit des Minimums über der Diagonalen.** Die Kontrollpunkte der Funktion über der Diagonalen lassen sich mit relativ geringem Aufwand berechnen als

$$Q_k := \frac{\sum_{i+j=k} \widehat{w}_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i+j=k} \widehat{w}_{i,j}},$$

wobei $\widehat{w}_{i,j} := \binom{n}{i} \binom{n}{j} w_{i,j}$ die skalierten Gewichte und $P_{i,j}$ die Kontrollwerte von F sind. Wegen der variation–diminishing–property, ist die Bedingung

$$\Delta^2 Q_k > 0$$

hinreichend dafür, dass F über der Diagonalen höchstens ein Minimum besitzt.

3. **Eindeutigkeit des Minimums über Parameterlinien.** Wir verwenden (5.1.1) um zu überprüfen, ob die Funktion über den Parameterlinien höchstens ein Minimum hat.
4. **Weitere Kriterien.** Da die obigen Bedingungen nicht hinreichend für die Konvexität sind, kann es notwendig sein, weitere, stärker heuristische Anforderungen, an den Abbruch zu stellen. Dies hängt allerdings von der Anwendung ab und kann hier nicht allgemein behandelt werden.

Iteration

Nach dem Abbruch der Rekursion wird das Newtonverfahren zur Minimierung des Abstandsquadrates angewendet. Die notwendigen Auswertungen der Funktion werden dabei aus den Auswertungen der Kurven bzw. Flächen berechnet. Ihre Grade sind geringer und sie sind zum Teil univariat, was die Auswertung spürbar beschleunigt.

Der Startwert wird ermittelt, indem der minimale Bézierkoeffizient $P_{\mu,\nu}$ bestimmt und über die Greville–Abszissen auf den Parameterbereich bezogen wird. Der Startparameter ist dann gegeben durch $(\mu/n, \nu/m)$. Diese Wahl entstammt der Tatsache, dass die Bernsteinpolynome ihre Maxima an den Greville–Abszissen annehmen, also der zugehörige Koeffizient dort den größten Einfluss hat.

Sei $F(u, v)$ die zu minimierende Funktion und x_0 eine Näherung an das Minimum. Das Inkrement des Parameters durch einen Schritt des Newtonverfahrens ist gegeben durch

$$h = -\text{Hess}(f)(x_0)^{-1} \text{grad}(f)(x_0).$$

Als erstes wird überprüft, ob der neue Parameter $x_0 + h$ im Parameterbereich liegt. Wenn nicht, wird die Schrittweite so verkürzt, dass er auf den Rand fällt. Weiterhin wird die Länge des Schrittes entsprechend der Armijo-Regel modifiziert, siehe (Polak97). Dazu berechnen wir

$$\lambda = \max\left\{\frac{1}{2^k} \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } f\left(x_0 + \frac{1}{2^k}h\right) - f(x_0) < \frac{1}{2^{k+1}}\langle h, \text{grad}(f)(x_0) \rangle\right\}$$

und setzen die neue Schrittweite gleich λh . In den meisten Fällen ist keine Modifikation notwendig, also $k = 0$, sodass keine zusätzlichen Auswertungen durchgeführt werden müssen und die Laufzeit sich nicht wesentlich verschlechtert.

Wenn die Iteration den Definitionsbereich nicht verlässt, ist die Konvergenz nach Theorem 1.4.9 in (Polak97) gesichert. Im praktischen Einsatz ist auch mit Randkorrekturen eine Divergenz nicht vorgekommen.

Analyse

In der Effizienzbetrachtung ergibt sich ein zu den Kurven analoges Bild. In gutartigen Situationen ist der Algorithmus schnell und robust. Ist die Hessematrix in einer Lösung allerdings singulär, ergibt sich die Konvexität nie und wir unterteilen, bis die Länge des Parameterbereiches eine vom Benutzer vorgegebene Schranke unterschreitet. Die geometrische Interpretation solcher Fälle wird später gegeben.

Kurven und Flächen in CAD-Systemen sind typischerweise in Form von B-Splines gespeichert. Die einzelnen Béziersegmente sind deswegen verhältnismäßig klein und enthalten meistens nur eine Lösung. Dadurch ist eine geringe Rechenzeit gewährleistet, selbst wenn in Ausnahmefällen mehrere oder singuläre Lösungen auftreten.

Offene Fragen

Durch diese Anwendung ergeben sich weitere Fragen, die bisher noch ungelöst zu sein scheinen:

1. Gibt es schwächere Bedingungen als die Konvexität unter denen das Minimum einer bivariaten Funktion eindeutig ist?

2. Wann ist eine bivariate rationale Bézierfunktion konvex?

Dabei wäre es auch ein Fortschritt, die Fragen für Funktionen über Dreiecken zu lösen, da sich Tensorprodukte in diese konvertieren lassen.

5.3.2 Projektion eines Punktes auf eine Fläche

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Berechnung des nächsten Punktes auf einer Fläche. Wir suchen nur Lösungen, die im Inneren des Parameterbereiches liegen, da die nächsten Punkte des Randes separat mit dem Kurvenalgorithmus ermittelt werden.

Sei eine reguläre Fläche in skaliertem Bernstein-Bézier-Form gegeben als

$$\Phi(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m S_i^n(u) S_j^m(v) \widehat{w}_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m S_i^n(u) S_j^m(v) \widehat{w}_{i,j}},$$

wobei $P_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ und $\widehat{w}_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ für $i = 0, \dots, n$; $j = 0, \dots, m$ und $S_i^n = t^i(1-t)^{n-i}$.

Das Abstandsquadrat zu einem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$ lässt sich dann darstellen als

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \|\Phi(u, v) - P\|^2 = \langle \Phi(u, v) - P, \Phi(u, v) - P \rangle \\ &= \frac{\sum_{i,j,k,l} S_i^n(u) S_j^m(v) S_k^n(u) S_l^m(v) \langle \widehat{w}_{i,j} (P_{i,j} - P), \widehat{w}_{k,l} (P_{k,l} - P) \rangle}{\sum_{i,j,k,l} S_i^n(u) S_j^m(v) S_k^n(u) S_l^m(v) \widehat{w}_{i,j} \widehat{w}_{k,l}} \\ &= \frac{\sum_{i,j} S_i^{2n}(u) S_j^{2m}(v) \sum_{k_1+k_2=i} \sum_{l_1+l_2=j} \langle \widehat{w}_{k_1,l_1} (P_{k_1,l_1} - P), \widehat{w}_{k_2,l_2} (P_{k_2,l_2} - P) \rangle}{\sum_{i,j} S_i^{2n}(u) S_j^{2m}(v) \sum_{k_1+k_2=i} \sum_{l_1+l_2=j} \widehat{w}_{k_1,l_1} \widehat{w}_{k_2,l_2}}. \end{aligned}$$

Die skalierte Bézierdarstellung des Abstandsquadrates hat also die Koeffizienten

$$H_{i,j} := \sum_{k_1+k_2=i} \sum_{l_1+l_2=j} \langle \widehat{w}_{k_1,l_1} (P_{k_1,l_1} - P), \widehat{w}_{k_2,l_2} (P_{k_2,l_2} - P) \rangle$$

und die Gewichte

$$W_{i,j} := \sum_{k_1+k_2=i} \sum_{l_1+l_2=j} \widehat{w}_{k_1,l_1} \widehat{w}_{k_2,l_2}.$$

Die Berechnung dieser Koeffizienten bezeichnen wir im Folgenden als Konvertierung.

Rechenaufwand der Konvertierung

Wir gehen davon aus, dass die Fläche in homogener Darstellung gegeben ist und unterscheiden nicht zwischen Additionen und Multiplikationen. Für die paarweisen Skalarprodukte und die Produkte der Gewichte nutzen wir die Symmetrie aus, sodass sich folgende Aufwände ergeben:

1. Skalierung der Koeffizienten: $4(m+1)(n+1)$ Operationen
2. Berechnung der $w_{k,l}(P_{k,l} - P)$: $6(m+1)(n+1)$ Operationen
3. Berechnung der Skalarprodukte: $\frac{5}{2}(m+1)^2(n+1)(n+2)$ Operationen
4. Berechnung der Gewichtsprodukte: $\frac{1}{2}(m+1)^2(n+1)(n+2)$ Operationen

Zum Vergleich ziehen wir den deCasteljau Algorithmus heran, mit dessen Hilfe die Fläche geteilt wird. Für eine Ausführung benötigen wir $3(m+1)m(n+1) + 3(n+1)n$ Operationen. Die Komplexität der obigen Berechnung ist also höher als die des deCasteljau Algorithmus. In CAD Systemen werden typischerweise Flächen mit geringen Graden eingesetzt, die oft bikubisch sind. In der Tabelle 5.1 wird die Anzahl an Operationen für bikubische und biquintische Flächen gegenübergestellt. Die Konvertierung benötigt

BEISPIEL	KONVERTIERUNG	DECASTELJAU
Bikubisch	414	216
Biquintisch	2500	900

Tabelle 5.1: Vergleich der notwendigen arithmetischen Operationen

im ersten Fall zweimal und im zweiten Fall dreimal so viele Operationen wie der deCasteljau-Algorithmus. Da sie nur einmal durchgeführt wird, ist das ein akzeptables Verhältnis. Ein weiteres Problem könnte sein, dass eine Unterteilung des Abstandsquadrates im rationalen Fall drei- bis viermal aufwändiger ist als die Unterteilung der Fläche selbst. Im polynomialen Fall ist es immer noch der Faktor 2. Ob diese Vorgehensweise effizienter ist als die Unterteilung der Fläche, hängt also davon ab, ob die Ausschluss- und Eindeutigkeitskriterien besser sind. Sie sind es tatsächlich. Die Implementierung des Algorithmus in dem CAD-System HiCAD hat ergeben, dass im Normalfall nur ein oder zwei Unterteilungen notwendig sind, damit die Eindeutigkeit der Lösung festgestellt wird. Auch die Ausschlusskriterien sind effizienter als die anhand der Fläche arbeitenden, sodass selbst in Situationen, in denen die Eindeutigkeit nicht festgestellt wird, die Laufzeit nicht leidet.

Die Abbildungen 5.1 und 5.2 zeigen jeweils eine bikubische Fläche mit 1000 Projektionen von Punkten, die einem $10 \times 10 \times 10$ großen Gitter des

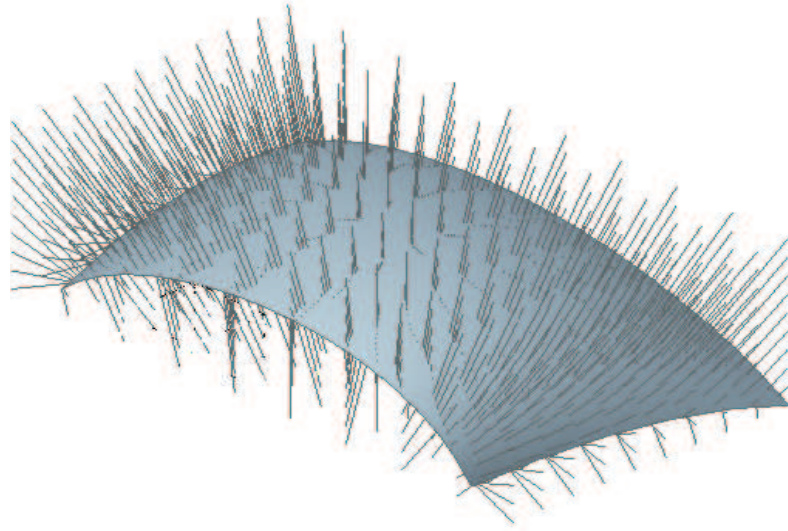


Abbildung 5.1: 1000 Projektionen

Hüllquaders entnommen wurden. Die erste hat eine definite und die zweite eine indefinite zweite Fundamentalform. Es mussten durchschnittlich 1.63 Unterteilungen durchgeführt werden, um die Konvexität festzustellen.

Situationen ohne Eindeutigkeit

Die verwendete Bedingung für den Abbruch ist hinreichend für die positive Definitheit der Hessematrix. Deshalb werden wir in Situationen, in denen die Hessematrix in einer Lösung nicht positiv definit ist, keine gesicherte Eindeutigkeit bekommen. Laut Satz 5.1.2 tritt eine solche Situation ein, falls der zu projizierende Punkt Fokuspunkt der Fläche ist. In praktischen Anwendungen ist das nicht zu erwarten.

Weiterhin ist die Größe des Bereiches wichtig, in der das Abstandsquadrat ein eindeutiges Minimum besitzt. Im Fall, dass der Anfragepunkt näher ist als die Krümmungsradien aller Normalschnitte, wird in Kapitel 6 eine Umgebung angegeben.

5.3.3 Nächste Punkte zwischen zwei Kurven

Wie T. Dokken bereits in der Arbeit (Dokken85) bemerkt hat, macht es in einem CAD-System wenig Sinn, Schnittpunkte von Kurven im dreidimensionalen Raum zu suchen. Die Kurven werden durch Approximation erzeugt, sodass echte Schnittpunkte nicht entstehen. Gesucht sind die lokalen Minima des Abstandes, die eine vorgegebene Toleranz unterschreiten.

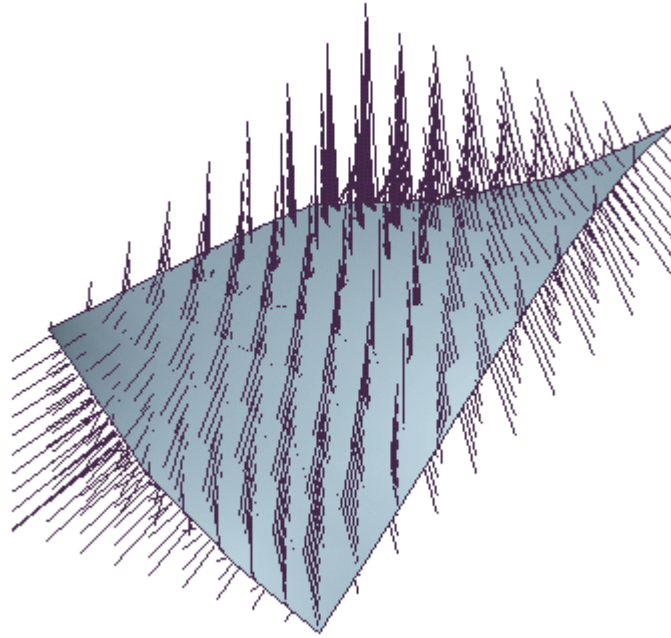


Abbildung 5.2: 1000 Projektionen

Um den Algorithmus aus Abschnitt 5.3.1 einzusetzen, bringen wir das Abstandskadrat $\|\gamma(t) - \theta(s)\|^2$ in Bernstein-Bézier-Form. Seien dazu zwei Kurven γ und θ gegeben. Die Kontrollpunkte und Gewichte von γ bezeichnen wir mit $G_i \in \mathbb{R}^3$ bzw. $g_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$, die von θ mit $T_j \in \mathbb{R}^3$ bzw. $t_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, m$.

Zunächst schreiben wir die Differenz als

$$\gamma(u) - \theta(v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) t_j g_i (G_i - T_j)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) g_i t_j}. \quad (5.3.1)$$

Danach können wir das Vorgehen des Punkt-Fläche Problems übernehmen, wobei P der Ursprung ist und die obige Differenz die Rolle der Fläche übernimmt.

Rechenaufwand

Die Komplexität der Konvertierung entspricht der des Punkt-Fläche Problems. Der Rechenaufwand wird lediglich durch die Berechnung der Koeffizienten in (5.3.1) vergrößert. Das sind $7(m+1)(n+1)$ Operationen.

Der Vergleich mit einer Teilung durch den deCasteljau Algorithmus fällt hier allerdings anders aus. Es muss nämlich nur eine Kurve geteilt werden,

was $3n(n+1)$ Operationen bedeutet. Die Laufzeit ist also dramatisch höher als bei einer Unterteilung im 3D. In Anwendungen, in denen die Sicherheit wichtiger ist als die Geschwindigkeit, macht es trotzdem Sinn diesen Algorithmus einzusetzen.

Situationen ohne Eindeutigkeit

Die Situationen, in denen die Hessematrix des Abstandsquadrates singulär ist, kann man für Kurven nicht so einfach charakterisieren. Wir wollen trotzdem versuchen zu begründen, dass sie eher selten vorkommen.

Wir betrachten die Hessematrix von $F := \langle \gamma - \theta, \gamma - \theta \rangle$:

$$\frac{1}{2}\text{Hess}(F) = \begin{pmatrix} \langle \gamma', \gamma' \rangle & -\langle \gamma', \theta' \rangle \\ -\langle \gamma', \theta' \rangle & \langle \theta', \theta' \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle \gamma'', \gamma - \theta \rangle & 0 \\ 0 & -\langle \theta'', \gamma - \theta \rangle \end{pmatrix}.$$

Um die Situation besser zu verstehen, gehen wir für die Kurven zu einer auf Bogenlänge bezogenen Parametrisierung über und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{Hess}(F) = & \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\angle(\gamma', \theta')) \\ -\cos(\angle(\gamma', \theta')) & 1 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \kappa_\gamma \|\gamma - \theta\| \cos(\angle(\gamma'', \gamma - \theta)) & 0 \\ 0 & -\kappa_\theta \|\gamma - \theta\| \cos(\angle(\theta'', \gamma - \theta)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sind die folgenden Bedingungen erfüllt, ist die Hessematrix diagonaldominant und somit positiv definit:

$$|\cos(\angle(\gamma', \theta'))| + \kappa_\gamma \|\gamma - \theta\| |\cos(\angle(\gamma'', \gamma - \theta))| < 1$$

$$|\cos(\angle(\gamma', \theta'))| + \kappa_\theta \|\gamma - \theta\| |\cos(\angle(\theta'', \gamma - \theta))| < 1.$$

Wenn die Kurven sich schneiden, also $\gamma(t_0) - \theta(s_0) = 0$ genügt die lineare Unabhängigkeit der Ableitungen für die positive Definitheit. Das gleiche gilt, falls die Krümmungen $\kappa_\gamma(t_0)$ und $\kappa_\theta(s_0)$ verschwinden. Für große Winkel zwischen den Ableitungen müssen die genannten Größen entsprechend klein sein. Beispielsweise genügt es, wenn bei $\gamma'(s_0) \perp \theta'(t_0)$ die Bedingungen

$$\kappa_\gamma(s_0) < \frac{1}{\|\gamma(s_0) - \theta(t_0)\|} \text{ und } \kappa_\theta(t_0) < \frac{1}{\|\gamma(s_0) - \theta(t_0)\|}$$

erfüllt sind.

Insgesamt lässt sich vermuten, dass die positive Definitheit generisch ist.

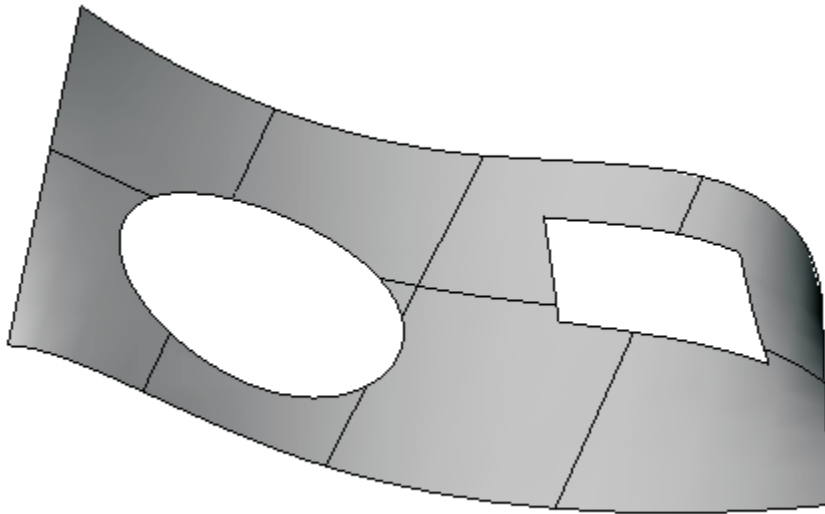


Abbildung 5.3: Getrimmte Fläche

5.3.4 Projektion auf getrimmte Flächen

Eine getrimmte Fläche besteht aus einer NURBS–Fläche und einer Menge von Begrenzungspfaden, die bis auf eine vorgegebene Toleranz auf der Fläche liegen. Jeder der Pfade besteht aus einer Reihe von NURBS–Kurven, die stetig aneinander anschließen und entweder die äußere Begrenzung des gültigen Bereiches darstellen oder ein Loch in der Fläche beschreiben. Ein Beispiel ist in Abbildung 5.3 gegeben.

Jedes System für die Verarbeitung dieser Flächen bietet einen sogenannten Innentest, mit dem für einen gegebenen Parameter der Fläche bestimmt werden kann, ob er im gültigen Bereich liegt. Damit können wir einen Algorithmus angeben:

- Bestimme alle Lotfußpunkte des Anfragepunktes auf der Basisfläche
- Entferne alle Punkte, die nicht im gültigen Bereich sind
- Füge den nächsten Punkt der Begrenzungspfade hinzu
- Wähle den Punkt mit dem kleinsten Abstand.

Das Bestimmen aller Lotfußpunkte auf der Fläche ist mit dem Punkt–Fläche Algorithmus möglich und der nächste Punkt auf den Begrenzungspfaden wird mit dem Punkt–Kurve Algorithmus durchgeführt.

5.3.5 Projektion auf Subdivisionsflächen

Der neue Algorithmus lässt sich ohne größere Schwierigkeiten auf tensorprodukt–basierte Subdivisionsflächen wie z.B. die von Doo/Sabin oder Catmull/Clark anwenden. Abgesehen von nichtregulären Punkten, lassen sich die durch Verfeinerung entstehenden Segmente in Bernstein–Bézier–Form ausdrücken, sodass der Algorithmus angewendet werden kann. Bekanntermaßen bleibt die Anzahl der irregulären Punkte konstant und ihr Einflussbereich wird immer kleiner. Solange die Maske des Algorithmus lediglich positive Einträge hat, gilt auch die convex-hull-property, sodass der Bereich durch das Abstandskriterium eliminiert wird, falls die Lösung nicht genau auf den irregulären Punkt fällt.

Für Subdivisionsflächen auf der Basis von Box–Splines, wie z.B. das Loop–Schema, gilt die gleiche Argumentation, nur dass die zu entnehmenden Flächen Dreiecks–Bézier–Form haben. Hierfür lässt sich ein analoges Verfahren einsetzen. Das Entscheidende für die Stabilität des Algorithmus ist das Kriterium für Konvexität, das für Dreiecks–Bézierfunktionen von z.B. (ChanDavi84) angegeben wurde.

5.4 Vergleich

Wir vergleichen den in diesem Kapitel vorgestellten Algorithmus mit den bisher bekannten. Dabei werden die beiden generellen Vorgehensweisen aus der Literatur getrennt behandelt. Erstere formt die Fragestellung in ein Nullstellenproblem polynomialer Gleichungen um. Die zweite unterteilt die Kurven und Flächen selbst.

5.4.1 Vergleich mit anderen Umformungen des Problems

Andere Umformungen des Problems sind bereits von (Dokken85) und (ZhShPa93) vorgeschlagen worden. Sie haben die Bernstein–Bézier–Darstellung der Ableitung des Abstandsquadrates für Kurven und des Gradienten des Abstandsquadrates für Flächen herangezogen, um einen Unterteilungsalgorithmus anzugeben. Der neue Algorithmus hat demgegenüber einige Vorteile, die hier dargelegt werden.

Sichere Abbruchbedingung

Die Autoren der früheren Algorithmen haben keine sicheren Bedingungen angegeben, unter denen es in einem Bereich genau eine Lösung gibt. Beispielsweise wird in (ZhShPa93) vorgeschlagen, das Newtonverfahren einzusetzen, wenn die Länge des Parameterbereiches eines Segmentes 10^{-6} unterschreitet. Dies kann zur Folge haben, dass die Iteration gegen ein lokales Minimum konvergiert und die globale Lösung nicht gefunden wird.

Konvertierungsaufwand im rationalen Fall

Bei rationalen Kurven und Flächen ist der Konvertierungsaufwand zum Darstellen der Ableitungen in Bernstein–Bézier–Form sehr hoch. Dazu muss das Abstandquadrat in Bézierform gebracht und anschließend seine Ableitung berechnet werden.

Betrachten wir erst den univariaten Fall mit einer Kurve des Grades n . Für die Berechnung der Abstandsfunktion werden $4n^2 + 8n$ Operationen benötigt und es entsteht eine rationale Funktion vom Grade $2n$. Für die Darstellung der Ableitung benötigt man 2 Produkte von Polynomen mit einem Grad von mindestens $2n - 1$. Der Leitterm des Rechenaufwandes ist dann $12n^2$. Dies ist bereits ein erheblicher Mehraufwand gegenüber der reinen Betrachtung des Abstandsquadrates.

Für Flächen ist die Berechnung des Abstandsquadrates bereits zwei- bis dreimal aufwändiger als eine Unterteilung mit dem deCasteljau–Algorithmus (siehe Tabelle 5.1). Die Anzahl der Operationen für die Berechnung der Bernstein–Bézier–Form des Gradienten ist, analog zum univariaten Fall, nochmals deutlich höher. Es ist also zu erwarten, dass die Rechenzeit insgesamt deutlich leidet.

Unterteilung im rationalen Fall

Hat eine rationale Fläche die Grade (n, m) , dann hat das Abstandskquadrat die Grade $2n, 2m$ und die partielle Ableitung nach u hat $4n - 1, 4m$. Weil die Komplexität des bivariaten deCasteljau Algorithmus $O(m^2n)$ ist, ist das Unterteilen einer partiellen Ableitungen achtmal aufwändiger als das Unterteilen des Abstandsquadrates. Da wir zwei partielle Ableitungen unterteilen müssen, ist der Aufwand für jede Rekursion um den Faktor 16 erhöht.

Weiterhin unterteilt der neue Algorithmus typischerweise nur wenige Male (bis die Funktion konvex ist). Dagegen sorgen die Abbruchbedingungen der anderen Verfahren für relativ tiefe Rekursionen, die zusammen mit dem höheren Aufwand des Unterteilens eine deutlich längere Laufzeit mit sich bringen.

Für den univariaten Fall gelten analoge Überlegungen, der Unterschied ist allerdings geringer (Faktor 4).

Maxima

Wenn die kritischen Stellen der Abstandsfunktion berechnet werden, gelten auch Maxima als Lösungen. Das führt zu einer Erhöhung der Rechenzeit, die mit dem neuen Algorithmus vermieden wird.

5.4.2 Vergleich mit 3D Algorithmen

Die meisten neueren Algorithmen arbeiten direkt mit der Kurve oder Fläche. Der entscheidende Vorteil dabei ist, dass die Grade relativ gering sind und somit das Unterteilen besonders schnell ist. Es wird unterteilt, bis eine heuristische Abbruchbedingung erfüllt ist und anschließend das Newtonverfahren angewendet. Zuletzt hat sich durchgesetzt, den Abstand der Kurve bzw. Fläche zu einer Geraden bzw. Ebene zu messen und wenn dieser kleiner ist als eine vorgegebene Toleranz, das Newtonverfahren einzusetzen. Das Hauptproblem liegt darin, dass die Komplexität der Fragestellung von der Lage des Anfragepunktes zur Fläche abhängt und dies durch das Kriterium nicht berücksichtigt wird.

Der neue Algorithmus verbessert die Sicherheit, indem die Konvexität des Abstandsquadrates als Abbruchbedingung gewählt wird. Im polynomialen Fall kann sie sicher ermittelt werden. Ist die Funktion rational, werden notwendige Bedingungen verwendet. Dadurch wird gewährleistet, dass verschiedene lokale Lösungen getrennt werden und das Newtonverfahren konvergiert. In den häufigen, einfachen Fällen ist das Abstandskadrat sofort konvex, sodass auch die Laufzeit eine deutliche Verbesserung erfährt.

Das bedeutet aber nicht, dass der neue Algorithmus auch immer schneller ist. Wählt man die Toleranz der Abbruchbedingung des 3D-Algorithmus nur groß genug, wird dieser schneller sein, wobei die Sicherheit des Verfahrens dann sehr leidet.

*Im großen Garten der Geometrie
kann sich jeder nach seinem Geschmack
einen Strauß pflücken.
(D.Hilbert)*

Kapitel 6

Eindeutigkeit von Projektionen

Globale Sätze bilden die Höhepunkte der klassischen Differentialgeometrie. Prominente Beispiele sind die Sätze von Fenchel, Milnor, Schwarz, Schur und der Rollensatz von Blaschke, in deren Bereich sich die folgenden Ergebnisse eingliedern lassen. Es werden Aussagen über die Eindeutigkeit von Lotfußpunkten und nächsten Punkten auf einer C^2 -glatten regulären Kurve γ im \mathbb{R}^n vorgestellt, die mit der Totalkrümmung $\kappa(\gamma)$ zusammenhängen. Hierin enthalten ist auch ein Kriterium für das freie Rollen von Kugeln auf offenen Raumkurven. Schließlich werden die Ergebnisse auf Hyperflächen angewendet.

Hauptresultate sind die Sätze 6.2.5 und 6.3.3 für Kurven und die Sätze 6.4.2 und 6.4.3 für Flächen.

6.1 Totalkrümmung und der Satz von Fenchel

Wir werden mit Kurven arbeiten, die aus endlich vielen regulären Teilen zusammengesetzt sind und benötigen daher folgende Aussage zur Totalkrümmung.

Satz 6.1.1 *vgl. (AlexResh89, Theorem 5.1.3)* Sei eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Für jede Stelle $t \in]0, 1[$ gilt: $\kappa(\gamma)$ existiert genau dann, wenn $\kappa(\gamma|_{[0, t]})$ und $\kappa(\gamma|_{[t, 1]})$ existieren. In diesem Fall existieren auch die links-

und rechtsseitigen Grenzwerte der Tangentenrichtungen in t . Wird der Winkel zwischen diesen Grenzwerten als α bezeichnet, gilt

$$\kappa(\gamma) = \kappa(\gamma|[0, t]) + \kappa(\gamma|[t, 1]) + \alpha.$$

Sei γ geschlossen und γ_o dieselbe Kurve, nur dass sie als offen betrachtet wird (für die Totalkrümmung). $\kappa(\gamma)$ existiert genau dann, wenn $\kappa(\gamma_o)$ existiert. In diesem Fall existieren die Grenzwerte der Tangentenrichtungen am Anfang und am Ende der offenen Kurve. Ist der Winkel zwischen ihnen bezeichnet als α , gilt

$$\kappa(\gamma) = \kappa(\gamma_o) + \alpha.$$

Sei $\lfloor x \rfloor := \max\{u \in \mathbb{Z} | u \leq x\}$ die Gauß-Klammer.

Folgerung 6.1.2 Seien $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ reguläre C^2 -glatte Kurven in \mathbb{R}^n mit Definitionsbereichen $[0, 1]$, Krümmungsfunktionen κ_i und es gelte: $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$, $i = 1, \dots, k$ (Indizes modulo k). Dann ist die geschlossene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\Gamma : [0, k] \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{6.1.1}$$

$$\Gamma(t) := \gamma_{\lfloor t \rfloor + 1}(t - \lfloor t \rfloor) \tag{6.1.2}$$

stetig und für ihre Totalkrümmung gilt:

$$\kappa(\Gamma) = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \kappa_i ds + \sum_{i=1}^k \angle(\gamma'_i(1), \gamma'_{i+1}(0)).$$

Beweis: Die Stetigkeit ist offensichtlich. Wir betrachten die offene Kurve Γ_o , die entsteht, indem Γ an der Stelle 0 als offen betrachtet wird. Falls ihre Totalkrümmung existiert, gilt nach Satz 6.1.1:

$$\kappa(\Gamma) = \kappa(\Gamma_o) + \angle(\gamma'_k(1), \gamma'_0(0)).$$

Wir zeigen nun mit vollständiger Induktion über k , dass $\kappa(\Gamma_o)$ existiert und

$$\kappa(\Gamma_o) = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \kappa_i ds + \sum_{i=1}^{k-1} \angle(\gamma'_i(1), \gamma'_{i+1}(0))$$

gilt, woraus sich dann die Aussage ergibt. Dazu sei Γ_o^l die, analog zu (6.1.1), aus $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ zusammengesetzte Kurve.

Für $k = 1$ bekommen wir die Verankerung durch Satz 1.0.1. Ist $k > 1$ wenden wir einmal Satz 6.1.1 an und zeigen damit

$$\kappa(\Gamma_o^k) = \kappa(\Gamma_o^{k-1}) + \kappa(\gamma_k) + \angle(\gamma'_{k-1}(1), \gamma'_k(0)).$$

Anwendung von Satz 1.0.1 auf $\kappa(\gamma_k)$ und Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefern die Behauptung. \square

Eine geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heie **konvex**, wenn sie in einer zweidimensionalen Ebene liegt und wenn jede Gerade mit $\gamma([0, 1])$ höchstens zwei Punkte oder ein ganzes Intervall (auf der Geraden) gemeinsam hat.

Damit lautet der Satz von Fenchel:

Satz 6.1.3 vgl. (Milnor50, Theorem 3.4) *Für ein geschlossenes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, für das $\kappa(\gamma)$ existiert, gilt $\kappa(\gamma) \geq 2\pi$. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn γ konvex ist.*

6.2 Lotfußpunkte und Totalkrümmung

Zunächst werden einige Konsequenzen des Satzes von Fenchel herausgestellt, die im Beweis des eigentlichen Satzes (6.2.5) eine zentrale Rolle spielen werden.

Lemma 6.2.1 *Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -glatte reguläre Kurve. Gibt es einen Punkt $P \in \mathbb{R}^n$, der nicht mit $\gamma(0)$ oder $\gamma(1)$ zusammenfällt, sodass gilt:*

$$\langle \gamma(0) - P, \gamma'(0) \rangle = 0 \quad (6.2.1)$$

$$\langle \gamma(1) - P, \gamma'(1) \rangle = 0 \quad (6.2.2)$$

$$\langle \gamma(0) - P, \gamma(1) - P \rangle = 0, \quad (6.2.3)$$

dann ist $\kappa(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}$. Gleichheit gilt genau dann, wenn die zusammengesetzte Kurve, bestehend aus γ , $\overline{\gamma(1)P}$ und $\overline{P\gamma(0)}$, konvex ist.

Beweis: Wir betrachten die stückweise C^1 -glatte geschlossene Kurve, die zusammengesetzt ist aus γ und den beiden Verbindungsstrecken zwischen den Endpunkten von γ und dem Punkt P . Wir stellen ihre Totalkrümmung mit Folgerung 6.1.2 als Summe der Totalkrmmungen der einzelnen Segmente und der Winkel an den Anschlussstellen dar. Da an allen drei Verbindungen der Segmente nach Voraussetzung rechte Winkel herrschen und die Totalkrümmung nach dem Satz von Fenchel mindestens 2π sein muss, ergibt sich für die Totalkrümmung von γ eine untere Schranke von $\frac{\pi}{2}$. Die Aussage über die Gleichheit folgt ebenfalls aus dem Satz von Fenchel. \square

Lemma 6.2.2 Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -glatte reguläre Kurve. Ist $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ und

$$\langle \gamma(0) - \gamma(1), \gamma'(1) \rangle = 0, \quad (6.2.4)$$

dann ist $\kappa(\gamma) > \frac{\pi}{2}$.

Beweis: γ kann wegen seiner Regularität und (6.2.4) nicht vollständig auf der Geraden G durch $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ liegen. Also gibt es in $]0, 1[$ ein Maximum des Abstandsquadrates zu G (in 0 und 1 ist der Abstand 0). Ist der zugehörige Parameter von γ als t_* bezeichnet, lässt sich Lemma 6.2.1 auf $\gamma|_{[t_*, 1]}$ anwenden. Als P wählen wir den Lotfußpunkt von $\gamma(t_*)$ auf G . Die notwendige Bedingung für die Maximalität des Abstandes liefert uns

$$\langle \gamma(t_*) - P, \gamma'(t_*) \rangle = 0 \text{ und} \quad (6.2.5)$$

$$\langle \gamma(t_*) - P, P - \gamma(1) \rangle = 0. \quad (6.2.6)$$

Diese Gleichungen entsprechen (6.2.1) und (6.2.3) für das Kurvenstück $\gamma|_{[t_*, 1]}$. Mit (6.2.4) erhalten wir (6.2.2) aus Lemma 6.2.1. Somit folgt $\kappa(\gamma|_{[t_*, 1]}) \geq \frac{\pi}{2}$, also erst recht $\kappa(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}$.

Damit $\kappa(\gamma) = \frac{\pi}{2}$ ist, müsste $\kappa(\gamma|_{[0, t_*]}) = 0$, also $\gamma|_{[0, t_*]}$ ein Gradenstück sein. Das Dreieck mit den Ecken $\gamma(0)$, $\gamma(t_*)$ und P müsste wegen (6.2.5) und (6.2.6) jeweils einen rechten Winkel in P und $\gamma(t_*)$ haben, ein Widerspruch. \square

Lemma 6.2.3 Falls für eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ die Totalkrümmung $\kappa(\gamma|_{]0, 1[})$ existiert, dann ist $\kappa(\gamma|_{]0, 1[}) \geq \pi$. Gleichheit kann nur gelten, wenn γ als geschlossene Kurve konvex ist.

Beweis: Die Totalkrümmung der geschlossenen Kurve ist nach dem Satz von Fenchel mindestens 2π . Sie lässt sich mit Satz 6.1.1 darstellen als Summe der Totalkrümmung der als offen betrachteten Kurve und des Winkels zwischen Anfangs- und Endtangente. Da kein Winkel π überschreiten kann, muss der zweite Summand mindestens π betragen, woraus sich die Aussage ergibt. Die Gleichheit wird direkt vom Satz von Fenchel geliefert. \square

Lemma 6.2.4 Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^2 -glatte reguläre Kurve. Sei weiterhin $P \in \mathbb{R}^n$ sowie $t_* \in [0, 1]$ mit

$$\langle \gamma(t_*) - P, \gamma'(t_*) \rangle = 0$$

und

$$\|\gamma(t_*) - P\| \cdot \max_{t \in [0, 1]} \kappa(t) < 1. \quad (6.2.7)$$

Dann liegt in t_* ein striktes lokales Minimum des Abstandes von P und $\gamma(t)$ vor.

Beweis: Sei ohne Einschränkung γ normal und P der Ursprung. Dann gilt für $f(t) := \|\gamma(t)\|^2$:

$$f'(t_*) = 2\langle \gamma'(t_*), \gamma(t_*) \rangle = 0,$$

$$f''(t_*) = 2(\langle \gamma'(t_*), \gamma'(t_*) \rangle + \langle \gamma''(t_*), \gamma(t_*) \rangle).$$

Ist entweder $\gamma(t_*) = 0$ oder $\gamma''(t_*) = 0$, so ist $f''(t_*) > 0$, anderenfalls:

$$f''(t_*) = 2 + 2\kappa(t_*)\|\gamma(t_*)\| \cos(\angle(\gamma''(t_*), \gamma(t_*))) > 0$$

wegen (6.2.7). □

Satz 6.2.5 (Hauptaussage) Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^2 -glatte reguläre Kurve. Sei weiterhin ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ gegeben, für den gilt:

$$\langle \gamma(0) - P, \gamma'(0) \rangle = 0 \tag{6.2.8}$$

$$\langle \gamma(1) - P, \gamma'(1) \rangle = 0, \tag{6.2.9}$$

$$\|\gamma(0) - P\| \cdot \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) < 1. \tag{6.2.10}$$

Dann ist $\kappa(\gamma) > \frac{\pi}{2}$.

Wir geben zunächst einen einfachen Beweis für $n = 2$ an und nutzen diesen später für die Gleichheitsdiskussion.

Beweis für $n = 2$: Sei o.E. $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ normal, a_1, a_2 das Frenetsche Zweibein und κ_2 die zweidimensionale Krümmung (vorzeichenbehaftet). Wegen (6.2.8) gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) + \mu a_2(0) = P$. Mit den Frenetschen Ableitungsgleichungen erhalten wir für die Parallelkurve $\theta := \gamma + \mu a_2$ die Ableitung $\theta' = (1 - \mu \kappa_2) a_1$.

Wegen (6.2.10) ist $0 < 1 - \mu \kappa < 2$, also ist θ regulär und es gilt

$$\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{\theta'}{\|\theta'\|}.$$

Da die linke Seite rektifizierbar ist, schließen wir mit Satz 1.0.2, dass die Totalkrümmung von θ existiert und $\kappa(\gamma) = \kappa(\theta)$ ist. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \langle \theta(l) - \theta(0), \theta'(l) \rangle &= \langle \gamma(l) + \mu a_2(l) - P, (1 - \mu \kappa_2(l)) a_1(l) \rangle \\ &= (1 - \mu \kappa_2(l)) \langle \gamma(l) - P, \gamma'(l) \rangle \stackrel{(6.2.9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Der Beweis erschließt sich durch Anwendung von Lemma 6.2.3 bzw. 6.2.2 im Fall $\theta(0) = \theta(l)$ bzw. $\theta(0) \neq \theta(l)$. \square

Beweis für $n > 2$: Ist $\gamma(0) = P$ oder $\gamma(l) = P$, so ergibt sich die Aussage aus dem Lemma 6.2.2 oder 6.2.3. Wir nehmen also das Gegenteil an, und es gelte weiterhin o.E., dass $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ normal und P der Ursprung ist sowie $\gamma(l)$ auf $\mathbb{R}^+ e_1$ liegt. Weiterhin können wir davon ausgehen, dass

$$\|\gamma(0)\| < \|\gamma(l)\|, \quad (6.2.11)$$

da $g(t) := \|\gamma(t)\|^2$ nach Lemma 6.2.4 in 0 ein lokales Minimum hat. Falls also (6.2.11) nicht erfüllt ist, gibt es eine Stelle $t_* \in]0, l[$, an der das Maximum von g angenommen wird. Ersetzen wir die Kurve γ durch das Teilstück $\gamma|[0, t_*]$, so sind die Voraussetzungen (6.2.9) und (6.2.10) weiterhin erfüllt und (6.2.11) ist gültig.

Wir betrachten den Abstand $a(t) := \text{dist}(\gamma(t), G)$ der Kurve γ und der e_1 -Achse G und unterscheiden dabei zwei Fälle:

1. Fall: Der Abstand $a(t)$ nimmt ein Maximum in $t_+ \in]0, l[$ an. Sei P_+ der zu $\gamma(t_+)$ nächste Punkt der Geraden G . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(t_+) - P_+, \gamma(l) - P_+ \rangle &= 0 \\ \langle \gamma(t_+) - P_+, \gamma'(t_+) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit (6.2.9) folgt $\kappa(\gamma|[t_+, l]) \geq \frac{\pi}{2}$ durch Anwendung von Lemma 6.2.1 auf $\gamma|[t_+, l]$ und P_+ . Für $\kappa(\gamma|[t_+, l]) = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir damit auch, dass $\gamma|[t_+, l]$ in einer Ebene liegt. Damit auch $\kappa(\gamma) = \frac{\pi}{2}$ gilt, muss $\gamma|[0, t_+]$ eine Gerade in derselben Ebene sein, also die gesamte Kurve in einer Ebene liegen. Der Beweis für $n = 2$ liefert uns für diesen Fall die Ungleichung $\kappa(\gamma) > \frac{\pi}{2}$.

2. Fall: Das einzige Maximum des Abstandes $a(t)$ liegt in 0 (beachte $a(l) = 0$). Wir führen dies zum Widerspruch zu (6.2.10).

Betrachte das System

$$f(t, s) = \|\gamma(t) - s \cdot e_1\|^2 = \|\gamma(0)\|^2 \quad (6.2.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = -2\langle \gamma(t) - s \cdot e_1, e_1 \rangle \leq 0, \quad (6.2.13)$$

für $t \in [0, l]$ und $s \in \mathbb{R}$.

Beobachtung: Ist (t_0, s) eine Lösung von (6.2.12) und (6.2.13) und herrscht in (6.2.13) Gleichheit, so ist der Abstand von $\gamma(t_0)$ und G gleich $\|\gamma(0)\|$. Dieser ist allerdings mindestens so groß wie der Abstand von $\gamma(0)$ und G . Wegen der Bedingung in diesen Fall ist $t_0 = 0$.

Die Lösungsmenge ist nicht leer ($t = l, s = \|\gamma(l)\| - \|\gamma(0)\|$ ist eine Lösung) und kompakt. Wir können also eine Lösung (t_m, s_m) mit maximalem s -Wert wählen.

Zeige nun, dass $t_m > 0$:

Für $t = 0$ ergeben sich in (6.2.12) die Lösungen $s_0 = 0$ und $s_1 = 2\langle e_1, \gamma(0) \rangle$. Wenn (6.2.13) für $(0, s_1)$ gültig ist, ist $s_1 \leq 0$. Da $(l, \|\gamma(l)\| - \|\gamma(0)\|)$ eine Lösung mit größerem s -Wert ist, siehe (6.2.11), ergibt sich ein Widerspruch.

Zusammen mit unserer Beobachtung können wir schließen:

$$-\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, e_1 \rangle < 0.$$

Sei σ die lokale Auflösung um (t_m, s_m) von $f(t, s) - \|\gamma(0)\|^2 = 0$ nach s ($s = \sigma(t)$), die wegen der gerade gezeigten Ungleichung nach dem Satz über implizite Funktionen existiert. σ existiert auch für $t_m = l$, da sich γ , und somit auch f , ohne weiteres C^2 fortsetzen lässt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sigma'(t_m) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}(t_m, s_m)}{\frac{\partial f}{\partial s}(t_m, s_m)} \\ &= \frac{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, \gamma'(t_m) \rangle}{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, e_1 \rangle} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn in $t = l$ gilt (6.2.9) und in $t \neq l$ liegt ein Extremum von σ im Inneren vor. Dann gilt weiter:

$$\begin{aligned} \sigma''(t_m) &= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_m, s_m)}{\frac{\partial f}{\partial s}(t_m, s_m)} \\ &= \frac{\|\gamma'(t_m)\|^2 + \langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, \gamma''(t_m) \rangle}{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, e_1 \rangle} \\ &\stackrel{(6.2.12)}{=} \frac{1 - \kappa(t_m)\|\gamma(0)\| \cos(\angle(\gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, \gamma''(t_m)))}{\langle \gamma(t_m) - s_m \cdot e_1, e_1 \rangle} \\ &> 0, \quad \text{da } \kappa\|\gamma(0)\| < 1, \end{aligned}$$

was zeigt, dass hier ein Minimum von σ vorliegt. Somit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Maximalität von s_m . \square

Bemerkung 6.2.6 Wird in (6.2.10) die Gleichheit zugelassen, ist die Aussage nicht richtig. Beispielsweise würde dann ein beliebig kleines Stück eines Kreises mit seinem Mittelpunkt die Voraussetzungen erfüllen.

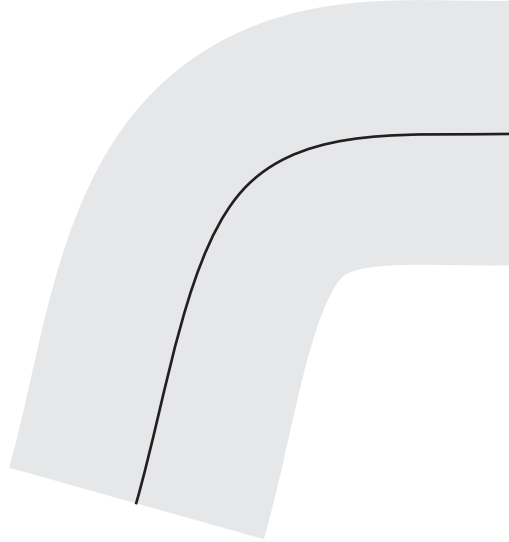


Abbildung 6.1: Bereich eindeutiger Lotfußpunkte

Anders formuliert, besagt Satz 6.2.5, dass Lotfußpunkte auf einer Kurve mit Totalkrümmung kleiner oder gleich $\frac{\pi}{2}$ eindeutig sind, wenn sie zu Punkten gehören, die in einer Schlauchumgebung um die Kurve mit Dicke $\frac{1}{\max_{t \in [0,1]} \kappa(t)}$ liegen. Dies wird in Abbildung 6.1 veranschaulicht.

Die untere Schranke der Totalkrümmung lässt sich auch auf die Bogenlänge übertragen.

Folgerung 6.2.7 *Unter der Voraussetzung von Satz 6.2.5 ist die Bogenlänge der Kurve größer als $\frac{\pi}{2 \max_{t \in [0,1]} \kappa(t)}$.*

Beweis:

$$\frac{\pi}{2} < \int_0^1 \kappa \|\gamma'\| dt \leq \max_{t \in [0,1]} \kappa(t) \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

□

6.3 Das freie Rollen auf Raumkurven

Der Rollensatz von Blaschke liefert eine Aussage über das freie Rollen von konvexen Objekten ineinander. Er besagt Folgendes:

Satz 6.3.1 (Rollensatz von Blaschke (Blaschke56)) *Seien zwei reguläre geschlossene konvexe Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben, die sich gleichsinnig*

berühren, d.h. es gibt $t_0, t_1 \in I$, sodass $\gamma_0(t_0) = \gamma_1(t_1)$ und $\frac{\gamma'_0(t_0)}{\|\gamma'_0(t_0)\|} = \frac{\gamma'_1(t_1)}{\|\gamma'_1(t_1)\|}$.
 Wenn die Kurven auf der gleichen Seite ihrer gemeinsamen Tangente liegen und in allen Punkten mit gleichsinnig parallelen Tangenten die Krümmung von γ_0 kleiner oder gleich der Krümmung von γ_1 ist, so ist γ_1 ganz in dem von γ_0 umgrenzten konvexen Bereich enthalten. Siehe Abbildung 6.2.

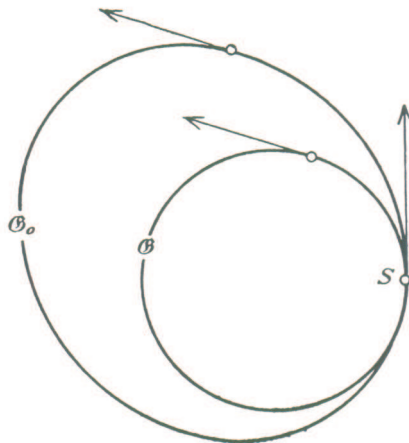


Fig. 21.

Abbildung 6.2: Originalskizze aus (Blaschke56)

Für Raumkurven ist eine solche Aussage nicht verfügbar. Mit dem Ergebnis des letzten Abschnitts lässt sich jedoch ein ähnlicher Satz folgern. Zur Vorbereitung zeigen wir zunächst folgendes

Lemma 6.3.2 Gegeben sei eine Kugel im \mathbb{R}^n um den Ursprung mit Radius R . Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^2 -glatte reguläre Kurve mit Anfangspunkt $R \cdot e_1$. Dort soll γ die Kugel auch berühren, d.h. $\langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Ist $R \cdot \max_{t \in [0, 1]} \kappa(t) < 1$, so kann γ nur dann den Halbzylinder unter der Kugel $\{p \in \mathbb{R}^n | p_1 \leq 0 \text{ und } \|p - p_1 e_1\| \leq R\}$ erreichen oder in die Kugel eindringen, wenn $\kappa(\gamma) \geq \frac{\pi}{2}$ ist.

Beweis: Zeige zuerst, dass γ nicht wieder in die Kugel eindringt, falls $\kappa(\gamma) < \frac{\pi}{2}$. Angenommen, unter dieser Voraussetzung tritt die Kurve doch in die Kugel ein. Dann folgt: In 0 liegt nach Lemma 6.2.4 ein lokales Minimum des Abstandes vom Nullpunkt, weshalb es ein Maximum an einer Stelle $t_m \in]0, 1[$ geben muss. Wir haben dann insgesamt:

$$\begin{aligned} \langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle &= 0 \\ \langle \gamma(t_m), \gamma'(t_m) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Wegen Satz 6.2.5 gilt dann $\kappa(\gamma) > \frac{\pi}{2}$.

Zu zeigen ist nun: Dringt die Kurve in den Halbzylinder ein, so ist $\kappa(\gamma) > \frac{\pi}{2}$. Unter dieser Voraussetzung muss γ aufgrund der Stetigkeit die zu e_1 senkrechte Hyperebene durch 0 schneiden. Der Abstand von γ zur e_1 -Achse ist dort größer als R , da γ außerhalb der Kugel bleibt. Im Eintrittspunkt in den Zylinder unter der Kugel ist der Abstand zur e_1 -Achse gleich R und für $t = 0$ ist er Null, wodurch wir schließen können, dass er ein Maximum an einer Stelle $t_* \in]0, 1[$ annimmt. Sei P_* der zu $\gamma(t_*)$ nächste Punkt auf der e_1 -Achse. Dann können wir Lemma 6.2.1 auf $\gamma|[0, t_*]$ und P_* anwenden, womit $\frac{\pi}{2}$ als untere Schranke für die Totalkrümmung folgt. \square

Satz 6.3.3 (Rollsatz im \mathbb{R}^n) Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^2 -glatte reguläre Kurve mit $\kappa(\gamma) \leq \pi$. Sei weiterhin ein $R > 0$ gegeben mit

$$R \cdot \max_{t \in [0, 1]} \kappa(t) < 1.$$

Dann haben die Kurve γ und jede sie berührende Kugel mit Radius R nur den einen Berührungspunkt gemeinsam.

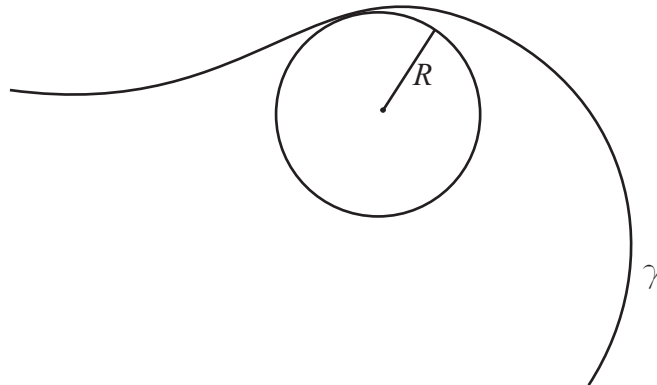


Abbildung 6.3: Freies Rollen

Beweis: An dem Berührungspunkt hat wegen Lemma 6.2.4 der Abstand der Kurve zu dem Mittelpunkt P der Kugel ein lokales Minimum. Wenn also γ die Kugel wieder schneidet, wird ein Maximum der Abstandsfunktion bezüglich P in einem $t_* \in]0, 1[$ zwischen Berühr- und Rückkehrpunkt angenommen. Also befindet sich dort ein zweiter Lotfußpunkt (der erste liegt in 0) und wir können Satz 6.2.5 anwenden, wodurch wir $\kappa(\gamma|[0, t_*]) > \frac{\pi}{2}$ erhalten. Betrachte nun den Punkt auf der Verbindung zwischen P und diesem Lotfußpunkt, der vom letzteren den Abstand R hat, siehe dazu Abbildung 6.4. Nehme ohne Einschränkung an, dies sei der Ursprung und der Lotfußpunkt liege in $R \cdot e_1$.

Die Kugel K um den Ursprung mit Radius R berührt dann γ in $R \cdot e_1$. Da die ursprüngliche Kugel in der Vereinigung des Zylinders unterhalb von K und K selbst liegt, lässt sich Lemma 6.3.2 anwenden. $\gamma|_{[t_*, 1]}$ hat also eine Totalkrümmung von mindestens $\frac{\pi}{2}$. In der Summe ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, dass die Totalkrümmung der Kurve kleiner oder gleich π ist. \square

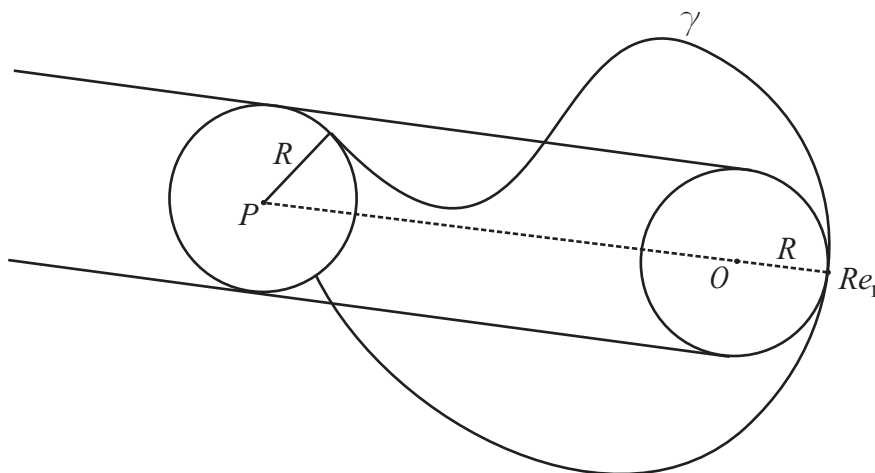


Abbildung 6.4: Konstruktion des Beweises zu Satz 6.3.3

Folgerung 6.3.4 *Unter der Voraussetzung von Satz 6.3.3 ist die Bogenlänge der Kurve größer als $\frac{\pi}{\max_{t \in [0,1]} \kappa(t)}$.*

Beweis: Wie zu Folgerung 6.2.7. \square

6.4 Anwendung auf Hyperflächen

Sei M eine C^3 -Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$, $n \geq 2$ und $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Ist N ein Normaleneinheitsvektorfeld, so sind die erste und zweite Fundamentalform gegeben durch

$$I = \langle dx \otimes dx \rangle$$

$$II = \langle dx \otimes dN \rangle.$$

Den geometrischen Tangentialraum an der Stelle $p \in M$ bezeichnen wir mit $T_p M$.

Wir betrachten eine Teilmenge C von M , die konvex ist in dem Sinne, dass je zwei Punkte durch eine Geodätische verbunden werden können, die in C enthalten ist. Für eine solche Teilmenge definieren wir den **Krümmungsdurchmesser** als:

$$\kappa(C) := \sup_{p,q \in C} \inf \{ \kappa(x \circ c) \mid c \text{ ist Geodätische von } p \text{ nach } q \}. \quad (6.4.1)$$

Weiterhin heiÙe p_l **Lotfußpunkt** eines Punktes $P \in \mathbb{R}^n$ auf $x(C)$, wenn $(P - x(p_l)) \perp T_{p_l}M$. Außerdem sei mit $\kappa_n(p, v)$ die Normalschnittkrümmung von x an der Stelle p zur Richtung $v \in R^{n-1} \setminus \{0\}$ bezeichnet und wir definieren

$$\kappa_n^{\text{sup}}(C) := \sup \{ |\kappa_n(p, v)| \mid v \in R^{n-1} \setminus \{0\}, p \in C \}.$$

Wegen $\kappa(x \circ c) = |\kappa_n(c, c')|$ gilt dann

Bemerkung 6.4.1 *Ist c eine Geodätische in C , dann gilt für die Krümmungsfunktion κ von $x \circ c$:*

$$\kappa \leq \kappa_n^{\text{sup}}(C).$$

Satz 6.4.2 *Gibt es ein $P \in \mathbb{R}^n$ mit zwei Lotfußpunkten p_0 und p_1 , sodass*

$$\|P - x(p_0)\| \kappa_n^{\text{sup}}(C) < 1, \quad (6.4.2)$$

dann ist $\kappa(C) \geq \frac{\pi}{2}$.

Beweis: Wegen der Konvexität gibt es eine Geodätische $c : [0, l] \rightarrow C$ von p_0 nach p_1 . Sei κ die Krümmungsfunktion von $x \circ c$. Dann ist wegen Lemma 6.4.1 $\kappa(t) \leq \kappa_n^{\text{sup}}(C)$, und zusammen mit der Voraussetzung (6.4.2) gilt $\|P - x(c(0))\| \max_{t \in [0, l]} \kappa(t) < 1$. Damit und mit der Lotfußpunkteigenschaft von p_0 und p_1 sind für $x \circ c$ und P die Voraussetzungen von Satz 6.2.5 erfüllt. Es ist also $\kappa(x \circ c) \geq \frac{\pi}{2}$, woraus $\kappa(C) \geq \frac{\pi}{2}$ unmittelbar folgt. \square

Satz 6.4.3 *Sei $\kappa(C) < \pi$ und ein $R > 0$ gegeben mit*

$$R \cdot \kappa_n^{\text{sup}}(C) < 1. \quad (6.4.3)$$

Dann haben $x(C)$ und jede $x(C)$ berührende Kugel mit Radius R nur den einen Punkt gemein.

Beweis: Der Mittelpunkt der betrachteten Kugel soll P heißen. Sei der Berührungspunkt mit $P_0 = x(p_0)$ gegeben, wobei p_0 als ein Lotfußpunkt von P auf $x(C)$ gewählt ist. Die Berühreigenschaft bedeutet gerade, dass dies möglich ist. Dann nehmen wir das Gegenteil der Aussage an und bezeichnen

den zweiten Punkt, den die Kugel mit $x(C)$ gemeinsam hat, als $P_1 = x(p_1)$. Wegen der Konvexität gibt es eine Geodätische c von p_0 nach p_1 . Sei κ die Krümmungsfunktion von $x \circ c$. Dann ist wegen Lemma 6.4.1 $\kappa \leq \kappa_n^{\text{sup}}(C)$, und zusammen mit der Voraussetzung (6.4.3) gilt $R \cdot \max_{t \in [0, l]}(\kappa(t)) < 1$. Also sind die Voraussetzungen von Satz 6.3.3 für $x \circ c$ und P erfüllt, sodass $\kappa(x \circ c) \geq \pi$ ist und $\kappa(C) \geq \pi$ unmittelbar folgt. Dies ergibt einen Widerspruch zu den Voraussetzungen, weswegen das angenommene P_1 nicht existieren kann. \square

Bemerkung 6.4.4 *Lässt man in den Voraussetzungen (6.4.2) und (6.4.3) die Gleichheit zu, ist die Behauptung nicht mehr richtig. Das wird deutlich, wenn als Fläche eine beliebig kleine Kugelkappe und der Mittelpunkt als Projektionsfußpunkt in Satz 6.4.2 oder als Kugelmittelpunkt in Satz 6.4.3 genommen wird.*

Die Konvexität kann auch nicht fallen gelassen werden, was sich an einer Schraubenfläche verdeutlichen lässt (siehe Abbildung 6.5). Die Fläche ist beliebig flach, sodass die Behauptungen der obigen Sätze für sie nicht richtig sind. Da die Hauptkrümmungen beliebig klein sind, ist als einziges die Konvexität nicht erfüllt.

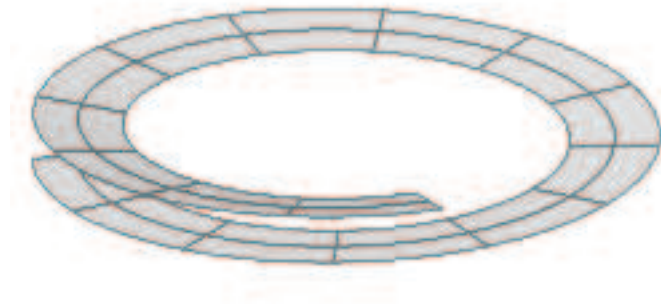


Abbildung 6.5: Schraubenfläche

*Math is like love – a simple idea
but it can get complicated.
(Unbekannter Autor)*

Kapitel 7

Totalkrümmung von NURBS–Kurven

In (Lasser89) wurde die Totalkrümmung verwendet, um einen Algorithmus für die Suche nach Selbstschnitten einer zweidimensionalen Bézier–Kurve anzugeben. Der Autor hat erkannt, dass sie kleiner ist als die Winkelsumme des Kontrollpolygons. Der Beweis ist leider fehlerhaft, was sich schon im Fehlen der notwendigen Regularitätsvoraussetzung zeigt. Wir geben einen neuen Beweis für die deutlich allgemeinere Klasse der NURBS–Kurven und arbeiten gleich im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 . Außerdem zeigen wir die Konvergenz der Winkelsumme des Kontrollpolygons gegen die Totalkrümmung unter Verfeinerung der Knotenfolge. Im letzten Teil beleuchten wir die Anwendungen dieser Aussagen. Dies sind zum einen die Krümmungsdämpfung des Schoenberg–Operators und zum anderen neue Algorithmen für die Berechnung von Selbstschnitten von Kurven und Röhrenflächen.

7.1 Totalkrümmungsverminderung von NURBS Kurven

Wir beweisen die Abschätzung für die Totalkrümmung ähnlich wie (LanRie83) die variation–diminishing–property. Dazu zeigen wir zunächst, dass sich die Winkelsumme des Kontrollpolygons mit dem Einfügen eines Knotens nicht vergrößert.

Lemma 7.1.1 (*AlexResh89, Lemma 5.1.1*) Seien L und M zwei Polygonzüge im \mathbb{R}^n . Ist L in M eingeschrieben, dann gilt $\angle(L) \leq \angle(M)$.

Satz 7.1.2 Die Winkelsumme des Kontrollpolygons einer NURBS-Kurve wird nach dem Einfügen eines Knotens nicht größer.

Beweis: Sei das Kontrollpolygon der Kurve mit P bezeichnet und das Kontrollpolygon, das sich nach dem Einfügen eines Knotens ergibt, mit Q . Letzteres lässt sich mit Formel (1.0.15) berechnen, aus der man auch sieht, dass Q in P eingeschrieben ist. Beachte dabei, dass die Koeffizienten der P_i und P_{i-1} in (1.0.15) positiv sind, und in der Summe 1 ergeben. Nach Lemma 7.1.1 kann die Winkelsumme von Q also nicht größer sein als die von P .

Satz 7.1.3 Die Winkelsumme der Kontrollpunkte einer NURBS-Kurve ist größer oder gleich der Totalkrümmung der NURBS-Kurve.

Beweis: Sei S_0, \dots, S_m ein beliebiger in eine NURBS-Kurve eingeschriebener Polygonzug S mit den Kurvenparametern t_0, \dots, t_m . Fügt man an diesen Parametern Knoten ein, bis ihre Vielfachheit der um eins verminderten Ordnung entspricht, hat das neue Kontrollpolygon Q Ecken, die mit den Ecken von S zusammenfallen. Anders ausgedrückt: S ist in Q eingeschrieben. Damit ist die Winkelsumme von S kleiner oder gleich der von Q (Lemma 7.1.1) und nach Satz 7.1.2 auch kleiner oder gleich der Winkelsumme des ursprünglichen Kontrollpolygons der NURBS-Kurve. \square

7.2 Konvergenz der Winkelsumme des Kontrollpolygons

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Winkelsumme des Kontrollpolygons einer NURBS Kurve bei Verfeinerung des Knotenvektors gegen ihre Totalkrümmung konvergiert.

Zunächst stellen wir einige elementare Aussagen über die Metrik auf der Einheitskugel zusammen, die später Verwendung finden.

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt

$$\angle(a, b) \leq \angle(a, c) + \angle(c, b), \quad (7.2.1)$$

$$\angle(a, b) \geq |\angle(a, c) - \angle(c, b)|, \quad (7.2.2)$$

$$\angle(a, b) \leq \frac{\pi}{2} \left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\|, \quad (7.2.3)$$

$$\left\| \frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \leq 2 \frac{\|a - b\|}{\|b\|}, \quad (7.2.4)$$

$$|\angle(a, b) - \angle(c, d)| \leq \angle(a, c) + \angle(b, d). \quad (7.2.5)$$

7.2.1 Differentialgeometrische Hilfssätze

Lemma 7.2.1 Für jede C^1 -glatte und stückweise C^2 -glatte reguläre Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass für jedes $t \in [0, 1]$ und $t + h \in [0, 1]$ mit $h > 0$ gilt:

$$\angle(\gamma'(t), \gamma'(t + h)) \leq h C.$$

Beweis: Mit (7.2.3) und (7.2.4) haben wir

$$\begin{aligned} & \angle(\gamma'(t), \gamma'(t + h)) \\ & \leq \frac{\pi}{2} \left\| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} - \frac{\gamma'(t + h)}{\|\gamma'(t + h)\|} \right\| \\ & \leq \pi \frac{\|\gamma'(t) - \gamma'(t + h)\|}{\|\gamma'(t + h)\|}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Differenzierbarkeit von γ' und gleichmäßigen Beschränktheit von $\frac{1}{\|\gamma'\|}$. \square

Satz 7.2.2 Die totale Variation der Krümmungsfunktion einer regulären C^3 -glatte Kurve ist beschränkt.

Beweis: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine normale Parametrisierung der betrachteten Kurve. Dann ist $\kappa = \|\gamma''\|$ und für $t_0, \dots, t_m \in [a, b]$ mit $t_i < t_{i+1}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \left| \|\gamma''(t_{i+1})\| - \|\gamma''(t_i)\| \right| & \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma''(t_{i+1}) - \gamma''(t_i)\| \\ & \leq \|\gamma'''\|_{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} |t_{i+1} - t_i| = \|\gamma'''\|_{\infty} (b - a). \end{aligned}$$

□

Lemma 7.2.3 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine normale C^3 -glatte Kurve. Dann existiert eine nur von der Kurve abhängige Konstante $C > 0$, sodass für jede Zerlegung $T = (t_0, \dots, t_m)$ von $[a, b]$ gilt

$$\left| \kappa(\gamma) - \sum_{i=0}^{m-1} \|\gamma'(t_{i+1}) \times \gamma'(t_i)\| \right| \leq C\Delta(T). \quad (7.2.6)$$

Hierin bezeichnet $\Delta(T) := \max\{t_{i+1} - t_i\}$ die Feinheit der Zerlegung.

Beweis: Mit dem Satz von Taylor ist für $t, t+h \in [a, b]$ mit $h > 0$

$$\gamma'(t) \times \gamma'(t+h) = h\gamma'(t) \times \gamma''(t) + \int_t^{t+h} \gamma'(t) \times \gamma'''(u)(t+h-u) du.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & | \|\gamma'(t) \times \gamma'(t+h)\| - h\kappa(t) | \\ & \leq \left\| \int_t^{t+h} \gamma'(t) \times \gamma'''(u)(t+h-u) du \right\| \\ & \leq \max_{u \in [t, t+h]} \|\gamma'(t) \times \gamma'''(u)\| \int_t^{t+h} (t+h-u) du. \end{aligned}$$

Das Integral ergibt

$$\int_t^{t+h} (t+h-u) du = \int_h^0 v(-dv) = \int_0^h v dv = \frac{1}{2}h^2.$$

Damit haben wir

$$| \|\gamma'(t) \times \gamma'(t+h)\| - |h|\kappa(t) | \leq \frac{1}{2} \|\gamma'''\|_\infty h^2. \quad (7.2.7)$$

Weiterhin gibt es Zwischenstellen $\varphi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ mit

$$\kappa(\gamma) = \int_a^b \kappa(s) ds = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \kappa(s) ds = \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) \kappa(\varphi_i),$$

weswegen wir die linke Seite von (7.2.6) nach oben abschätzen können durch:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{m-1} |(t_{i+1} - t_i) \kappa(\varphi_i) - \|\gamma'(t_{i+1}) \times \gamma'(t_i)\|| \\
& \leq \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) |\kappa(\varphi_i) - \kappa(t_i)| + \sum_{i=0}^{m-1} |(t_{i+1} - t_i) \kappa(t_i) - \|\gamma'(t_{i+1}) \times \gamma'(t_i)\|| \\
& \stackrel{(7.2.7)}{\leq} \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) |\kappa(\varphi_i) - \kappa(t_i)| + D \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \\
& \leq \Delta(T) V_a^b(\kappa) + D\Delta(T)(b - a),
\end{aligned}$$

wobei $V_a^b(\kappa)$ die totale Variation von κ bezeichnet. \square

Satz 7.2.4 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre, C^1 -glatte und stückweise C^3 -glatte Kurve. Dann existiert eine nur von der Kurve abhängige Konstante $C > 0$, sodass für jede Zerlegung $T = (t_0, \dots, t_m)$ von $[a, b]$, gilt:

$$\left| \kappa(\gamma) - \sum_{i=0}^{m-1} \angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i)) \right| \leq C \Delta(T),$$

wobei $\Delta(T)$ die Feinheit der Zerlegung bezeichnet.

Beweis: Bei Umparametrisierungen der Kurve ändert sich in der Behauptung nur die Konstante C , weshalb wir $\|\gamma'(t)\| = 1$ annehmen können. Wegen Lemma 7.2.1 reicht es, die Aussage für C^3 -glatte γ zu zeigen. Wir können nämlich o.B.d.A. die Stellen, die nicht C^3 sind, in die Zerlegung T aufnehmen. Die Aussage für C^3 -glatte Kurven überträgt sich dann auf die zusammengesetzte Kurve.

Durch die Taylorentwicklung des Sinus und Lemma 7.2.1 erhalten wir zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$|\angle(\gamma'(t), \gamma'(t+h)) - \sin(\angle(\gamma'(t), \gamma'(t+h)))| \leq C_1 \angle(\gamma'(t), \gamma'(t+h))^3 \leq C_2 h^3. \tag{7.2.8}$$

Damit schätzen wir die linke Seite der Behauptung ab, indem wir den Sinus

des Winkels einschreiben:

$$\begin{aligned} & \left| \kappa(\gamma) - \sum_{i=0}^{m-1} \angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i)) \right| \\ & \leq \left| \kappa(\gamma) - \sum_{i=0}^{m-1} \sin(\angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i))) \right| \\ & \quad + \sum_{i=0}^{m-1} \left| \angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i)) - \sin(\angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i))) \right|. \end{aligned}$$

Durch Lemma 7.2.3 lässt sich die Ungleichungskette mit einer Konstanten $C_3 > 0$ fortsetzen:

$$\leq C_3 \Delta(T) + \sum_{i=0}^{m-1} \left| \sin(\angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i))) - \angle(\gamma'(t_{i+1}), \gamma'(t_i)) \right|. \quad (7.2.9)$$

Wegen (7.2.8) existiert eine Konstante $C_4 > 0$, sodass weiter vergrößert werden kann:

$$\begin{aligned} & \leq C_3 \Delta(T) + C_4 \sum_{i=0}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)^3 \\ & \leq C_3 \Delta(T) + C_4(b-a)\Delta(T)^2. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.2.5 Wird zu den Voraussetzungen des Satzes 7.2.4 noch $\kappa(t) \neq 0$ hinzugefügt, erhält man quadratische Konvergenz und einen einfacheren Beweis.

Beweisskizze: Wir verwenden folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} \angle(\gamma'(t), \gamma'(t+h)) &= \left\| \frac{\gamma'(t+h)}{\|\gamma'(t+h)\|} - \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\| + O(h^3) \\ &= \int_t^{t+h} \kappa(u) \|\gamma'(u)\| du + O(h^3). \end{aligned}$$

Die erste Identität erhalten wir mit elementaren Mitteln. Für die zweite verwenden wir, dass die Bogenlänge von $\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ der Totalkrümmung von γ entspricht. Die Aussage über die Bogenlänge erhalten wir aus (Floater05, Proposition 3.1). Dort wird die Regularität der Kurve vorausgesetzt, was $\kappa(t) \neq 0$ entspricht. □

7.2.2 Konvergenz

Wir vergleichen nun die Winkeländerungen der Kurve und des Kontrollpolygons bei Veränderung der Darstellung als NURBS. Zum besseren Verständnis der Konvergenzaussagen beachte Bemerkung 1.0.4.

Satz 7.2.6 Für eine reguläre C^1 -glatte NURBS-Kurve $\gamma = \frac{\theta}{w}$ der Ordnung $p \geq 3$, gibt es von θ , w und p abhängige Konstanten $h, C, D > 0$, sodass für alle Darstellungen mit Kontrollpunkten P_0, \dots, P_{m-p} und Knotenvektoren $U = (u_0, \dots, u_m)$ mit $u_i < u_{i+p-2}$, für $i = 2, \dots, m-p$ und $\Delta(U) < h$ gilt:

$$|\angle(\Delta P_{i+1}, \Delta P_i) - \angle(\gamma'(\eta_{i+1}^{p-1}), \gamma'(\eta_i^{p-1}))| \leq C \cdot h_{i,p+2}, \quad i = 1, \dots, m-p-1, \quad (7.2.10)$$

wobei η_i^{p-1} die Greville-Abszissen sind.

Ist γ aus $C^2[u_{i-p+1}, u_{i+2p+1}]$ gilt sogar:

$$|\angle(\Delta P_{i+1}, \Delta P_i) - \angle(\gamma'(\eta_{i+1}^{p-1}), \gamma'(\eta_i^{p-1}))| \leq D \cdot (h_{i,p+2})^2, \quad i = 1, \dots, m-p-1. \quad (7.2.11)$$

Beweis: Wir wählen nach Satz 2.2.6 ein $h > 0$, sodass $\Delta P_i \neq 0$ und betrachten ab jetzt nur Knotenvektoren mit $\Delta(U) < h$. Dann gilt wegen (7.2.5)

$$|\angle(\Delta P_i, \Delta P_{i+1}) - \angle(\gamma'(\eta_i^{p-1}), \gamma'(\eta_{i+1}^{p-1}))| \leq \angle(\Delta P_i, \gamma'(\eta_i^{p-1})) + \angle(\Delta P_{i+1}, \gamma'(\eta_{i+1}^{p-1})).$$

Unter Verwendung von (7.2.3) und Satz 2.2.7 können wir schließen

$$\begin{aligned} \angle(\Delta P_i, \gamma'(\eta_i^{p-1})) &\leq \frac{\pi}{2} \left\| \frac{\Delta P_i}{\|\Delta P_i\|} - \frac{\gamma'(\eta_i^{p-1})}{\|\gamma'(\eta_i^{p-1})\|} \right\| \\ &\leq \frac{\pi}{2} C_1 \cdot (h_{i,p+1})^\tau \end{aligned}$$

mit $\tau \in \{1, 2\}$ entsprechend der Differenzierbarkeitsordnung. Es gibt also eine Konstante C_2 mit

$$\begin{aligned} |\angle(\Delta P_{i+1}, \Delta P_i) - \angle(\gamma'(\eta_{i+1}^{p-1}), \gamma'(\eta_i^{p-1}))| &\leq C_2 \cdot \max\{(h_{i+1,p+1})^\tau, (h_{i,p+1})^\tau\} \\ &\leq C_2 (h_{i,p+2})^\tau. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Behauptung. □

Satz 7.2.7 (Hauptaussage) Sei $\gamma = \frac{\theta}{w}$ eine reguläre C^1 -glatte NURBS-Kurve der Ordnung p . Dann gibt es eine von θ , w und p abhängige Konstante

$C > 0$, sodass für alle Darstellungen der Ordnung p mit Kontrollpunkten P_0, \dots, P_{m-p} und Knotenvektoren $U = (u_0, \dots, u_m)$ mit $u_i < u_{i+p-2}$, für $i = 2, \dots, m-p$ gilt:

$$|\angle((P_i)_{i=0}^{m-p}) - \kappa(\gamma)| \leq C \Delta(U).$$

Beweis: Wir wählen zunächst $h > 0$, sodass nach Satz 2.2.6 $\Delta P_i \neq 0$ für alle Darstellungen mit $\Delta(U) < h$ gesichert ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^{m-p-1} \angle(\Delta P_{i+1}, \Delta P_i) - \kappa(\gamma) \right| \\ & \leq \sum_{i=0}^{m-p-1} \left| \angle(\Delta P_{i+1}, \Delta P_i) - \angle(\gamma'(\eta_{i+1}^{p-1}), \gamma'(\eta_i^{p-1})) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{i=0}^{m-p-1} \angle(\gamma'(\eta_{i+1}^{p-1}), \gamma'(\eta_i^{p-1})) - \kappa(\gamma) \right|. \end{aligned}$$

Der zweite Summand lässt sich durch Satz 7.2.4 abschätzen.

Für den ersten verwenden wir Satz 7.2.6. Je nach Differenzierbarkeitsordnung erhalten wir verschiedene Abschätzungen, wobei (7.2.10) für jene i verwendet werden muss, für die eine Unstetigkeit von γ'' in $[u_{i-p+1}, u_{i+2p+1}]$ liegt. Wenn k die Anzahl dieser Stellen ist, sind das maximal $3pk$ verschiedene i . Somit erhalten wir Konstanten $D_0, D_1 > 0$ mit

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m-p-1} \left| \angle(\Delta P_{i+1}, \Delta P_i) - \angle(\gamma'(\eta_{i+1}^{p-1}), \gamma'(\eta_i^{p-1})) \right| \\ & \leq 3pkD_0\Delta(U) + \sum_{i=0}^{m-p} D_1 \cdot (h_{i,p+2})^2. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-p} h_{i,p+2} & \leq \sum_{i=0}^{m-p} \sum_{j=-p}^{2p+2} u_{i+j+1} - u_{i+j} \\ & = \sum_{j=-p}^{2p+2} \sum_{i=0}^{m-p} u_{i+j+1} - u_{i+j} \\ & \leq (3p+3)(u_m - u_0) = \text{konst..} \end{aligned}$$

Alle Terme hängen nun linear von $\Delta(U)$ ab und sonst nur von der Ordnung, θ und w . \square

Bemerkung 7.2.8 Für nur stetige aber reguläre NURBS-Kurven gilt die Aussage genauso.

Beweis: Wir betrachten die differenzierbaren Teilstücke einer nur stetigen Kurve γ . Da an den C^0 -Stellen Knoten der Vielfachheit $p - 1$ liegen, sind ihre Kontrollpolygone als Teil des Kontrollpolygons von γ gegeben. Die Winkelsumme des Kontrollpolygons von γ ist also die Summe der Winkelsummen der Teilstücke plus der Winkel an den Nahtstellen. Wegen (1.0.14) sind die Winkel zwischen den Enden der Kontrollpolygone gleich den Winkeln zwischen den Kurventangenten an den Enden der Teilkurven. Mit Satz 6.1.2 können wir also die Konvergenzeigenschaft von den Teilstücken auf γ übertragen. \square

Bemerkung 7.2.9 Die Notwendigkeit der Regularitätsvoraussetzungen, lässt sich an der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verdeutlichen. Es ist eine Gerade und hat demnach Totalkrümmung Null. Die Kurve kann als B-Spline über einem Intervall dargestellt werden, in dem die Null enthalten ist, ohne dass 0 ein Knoten ist. Dann beträgt die Winkelsumme des Kontrollpolygons mindestens $\frac{\pi}{2}$.

Beweis: Sei $\gamma = \sum_{i=0}^L P_i N_i^p$ eine Darstellung als B-Spline, in der die Vielfachheiten der inneren Knoten kleiner $p - 2$ sind. Dann erhält man mit der Darstellung der Ableitung (1.0.8):

$$\begin{aligned} \|\gamma'\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^L \frac{p-1}{|u_{i+p-1} - u_i|} \Delta P_{i-1} N_i^{p-1}, \sum_{i=1}^L \frac{p-1}{|u_{i+p-1} - u_i|} \Delta P_{i-1} N_i^{p-1} \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^L \frac{p-1}{|u_{j+p-1} - u_j|} \frac{p-1}{|u_{i+p-1} - u_i|} N_j^{p-1} N_i^{p-1} \langle \Delta P_{i-1}, \Delta P_{j-1} \rangle. \end{aligned}$$

Wir betrachten das Knotenintervall, das die 0 enthält und nur die P_i , die einen Einfluss auf das Intervall haben. Davon können nicht alle gleich sein, da γ auf keinem Intervall konstant ist. Also gibt es zumindest ein positives Skalarprodukt: $\langle \Delta P_{i_0}, \Delta P_{i_0} \rangle$. Da die Koeffizienten der Skalarprodukte positiv sind, muss es auch negative Skalarprodukte geben, denn in 0 ergibt die Summe ($\|\gamma'(0)\| = 0$). Negatives Skalarprodukt bedeutet, dass es i und j gibt mit $\angle(\Delta P_i, \Delta P_j) > \frac{\pi}{2}$, womit die Winkelsumme des Kontrollpolygons ebenfalls diesen Wert übersteigt. \square

Bemerkung 7.2.10 *Numerische Versuche lassen vermuten, dass die Ordnung der Konvergenz tatsächlich quadratisch ist (gezeigt wurde lineare Konvergenz). Dabei scheint die Dimension des Raumes genauso unerheblich zu sein wie die Existenz von Wendepunkten oder die Stärke der Torsion.*

Folgerung 7.2.11 *Für die Totalkrümmung einer C^2 -glatten regulären Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ gilt:*

$$\int_{\gamma} \kappa ds \geq \angle(\gamma'(0), \gamma(1) - \gamma(0)) + \angle(\gamma'(1), \gamma(1) - \gamma(0)). \quad (7.2.12)$$

Beweis: γ bildet mit ihrer Sehne von Anfangs- bis Endpunkt eine geschlossene und stetige Kurve, auf die sich der Satz von Fenchel 6.1.3 anwenden lässt. Mit Satz 6.1.1 erhält man eine Darstellung der Totalkrümmung als Summe der entstehenden Winkel mit den Totalkrümmungen der Einzelkurven:

$$\int_{\gamma} \kappa ds + \pi - \angle(\gamma'(0), \gamma(1) - \gamma(0)) + \pi - \angle(\gamma'(1), \gamma(1) - \gamma(0)) \geq 2\pi. \quad (7.2.13)$$

□

Algorithmus 7.2.12 (Berechnung der Totalkrümmung) *Will man den Wert der Totalkrümmung bis auf eine Toleranz $\epsilon > 0$ berechnen, bietet die Ungleichung (7.2.12) eine Möglichkeit für ein sicheres Einschlussverfahren, da wir mit ihrer Hilfe eine untere Schranke für den gesuchten Wert berechnen können. Für offene NURBS-Kurven mit Kontrollpunkten P_0, \dots, P_L gilt nämlich:*

$$\int_{\gamma} \kappa ds \geq \angle(\Delta P_0, P_L - P_0) + \angle(\Delta P_{L-1}, P_L - P_0),$$

falls $\Delta P_0 \neq 0$ und $\Delta P_{L-1} \neq 0$. Eine obere Schranke wird durch Satz 7.1.3 gegeben, sodass wir durch Unterteilung immer kleinere einschließende Intervalle berechnen können. Der Abbruch erfolgt, wenn die Differenz zwischen der Summe der oberen und der Summe der unteren Schranken ϵ unterschreitet.

7.3 Anwendungen

Die Kenntnis über die Totalkrümmung einer Kurve lässt vielfältige Aussagen über ihr globales Verhalten zu. Beispielsweise kann eine Kurve nur dann einen nichttrivialen Knoten im Raum bilden, wenn ihre Totalkrümmung 4π übersteigt, siehe dazu (Milnor50). Im Folgenden finden sich verschiedene Anwendungen der Aussagen aus diesem Kapitel.

Schoenberg–Operator

Der Schoenberg–Operator der Ordnung p über dem Knotenvektor $U = (u_0, \dots, u_m)$ in Anwendung auf eine Kurve $\gamma : [u_0, u_m] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$S_U^p(\gamma) = \sum_{i=0}^{m-p} \gamma(\eta_i) N_i^p,$$

wobei N_i^p die B–Splines zum Knotenvektor U , und η_i die Greville–Abszissen sind.

Satz 7.3.1 *Der Schoenberg–Operator vermindert die Totalkrümmung, d.h.:*

$$\kappa(S_U^p(\gamma)) \leq \kappa(\gamma).$$

Beweis: $P = (\gamma(\eta_i))_{i=0}^{m-p}$ ist eine in γ einbeschriebene Punktfolge. Ihre Winkelsumme ist definitionsgemäß kleiner oder gleich $\kappa(\gamma)$. Andererseits ist $S_U^p(\gamma)$ eine NURBS–Kurve mit Kontrollpolygon P . Die Anwendung von Satz 7.1.3 zeigt, dass $\kappa(S_U^p(\gamma))$ kleiner ist als die Winkelsumme von P . \square

Selbstschnitte

Die Berechnung der Selbstschnitte von Kurven und Flächen ist eine der aufwändigsten Aufgaben eines CAD–Systems. Ihre Notwendigkeit ergibt sich durch Operationen wie Sweeps oder Rundungen, in denen das Entstehen von Selbstschnitten nicht immer vermieden werden kann. Um trotzdem eine gültige Darstellung der Geometrie zu erzeugen, müssen die Selbstschnitte mit einer gegebenen Toleranz approximiert werden.

Üblicherweise wird das Problem auf Schnittberechnungen zurückgeführt, für die stabile Algorithmen zur Verfügung stehen, siehe z.B. (HoCoh00). Dies geschieht durch Unterteilung der Kurve oder Fläche, bis je zwei benachbarte Segmente sich weder gegenseitig schneiden, noch Selbstschnitte besitzen. Anschließend werden die Schnittpunkte bzw. Schnittkurven aller nicht benachbarter Teile berechnet.

Das entscheidende Element des Algorithmus ist also das Kriterium, mit dem entschieden wird, ob eine Kurve oder Fläche Selbstschnitte besitzt. In diesem Abschnitt werden die bekannten Kriterien angegeben und neue, verbesserte vorgestellt.

Kurven

Die oben beschriebene Strategie wurde als erstes von (Lasser89) für Kurven eingesetzt. Er hat erkannt, dass eine zweidimensionale Bézier–Kurve nur dann

Selbstschnitte besitzen kann, wenn die Winkelsumme des Kontrollpolygons größer π ist. Der dort angegebene Beweis ist fehlerhaft, die Aussage ergibt sich allerdings aus den nachfolgenden Arbeiten.

(AndPetSte98) entwickeln eine schwächere Bedingung, die von (HoCoh00) nochmals für NURBS-Kurven erweitert wurde. Es wird geprüft, ob die Richtungen des Kontrollpolygons in einer offenen Halbsphäre liegen. Wenn sie es tun, kann die Kurve keinen Selbtschnitt haben. Der angegebene Beweis ist einfach, obwohl er im Detail nicht überzeugt. Eine der zitierten Aussagen ist nur für den regulären Fall gegeben, obwohl die betrachtete geschlossene Kurve eine solche Parametrisierung nicht zulässt. Folgerung 2.4.3 liefert die gleiche Aussage mit einem einfacheren Beweis.

Dieses Kriterium gilt zwar für Kurven im \mathbb{R}^3 , löst aber nicht das konkrete Problem. Kurven in CAD-Systemen schneiden sich nur bis auf eine vorgegebene Toleranz. So muss ein Selbtschnitt definiert werden als ein lokales Minimum des Abstandes an sich selbst, dessen Wert eine Toleranz ϵ unterschreitet. Anders ausgedrückt werden zu einer Kurve γ die lokalen Minima der Funktion $f(s, t) := \|\gamma(s) - \gamma(t)\|$ mit $f(s, t) < \epsilon$ für $s < t$ und gesucht.

Die Nichtexistenz eines solchen Minimums lässt sich mit dem Kriterium von (HoCoh00) nicht bestimmen. Beispielsweise hat eine Spirale nach einer Umdrehung ein solches Minimum, aber ihre Tangenten sind in einer Halbsphäre enthalten.

Die Totalkrümmung bietet eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen:

Satz 7.3.2 *Ist die Winkelsumme des Kontrollpolygons einer regulären NURBS-Kurve kleiner als π , kann sie keine lokalen Minima an sich selbst haben.*

Beweis: Wir betrachten die geschlossene Kurve, die sich ergibt, wenn die beiden Punkte des Minimums durch eine Gerade verbunden werden, siehe Abbildung 7.1. Die Gerade schließt mit den Tangenten der Kurve an den entsprechenden Stellen einen rechten Winkel ein. Laut Satz 6.1.3 (Satz von Fenchel) ist die Totalkrümmung mindestens 2π und wegen Folgerung 6.1.2 bleibt für die Kurve ein Minimum von π . Mit Satz 7.1.3 lässt sich die Totalkrümmung einer Kurve durch die Winkelsumme des Kontrollpolygons nach oben abschätzen. \square

Damit ein mit diesem Kriterium erstellter Algorithmus funktioniert, muss also nach endlich vielen Unterteilungen ein Zustand erreicht sein, in dem die Winkelsumme aller Segmente kleiner ist als π . Satz 7.2.7 sichert das für reguläre Kurven. Es ist dabei nicht verwunderlich, dass die Regularität vorausgesetzt werden muss, da diese Stellen den Grenzfall zwischen Selbtschnitt und Nichtselbtschnitt darstellen.

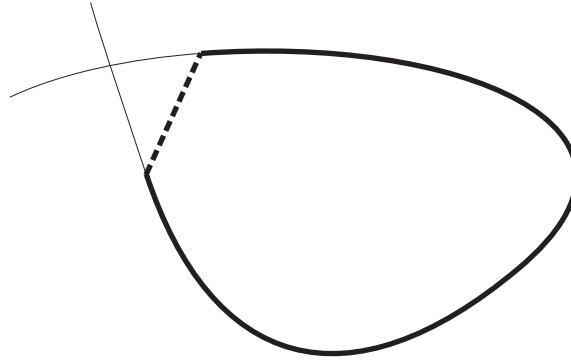


Abbildung 7.1: Geschlossene Kurve am Selbstminimum

Röhrenflächen

Zu einer gegebenen Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine **Röhrenfläche** mit Radius R die Hülle der Vereinigung aller Kugeln mit Mittelpunkten auf $\gamma([0, 1])$ und Radius R . Sie hat einige praktische Anwendungen in CAD-Systemen, wovon die einfachste die direkte Konstruktion der Mantelfläche ist. Mit den Ergebnissen dieses und des letzten Kapitels lässt sich eine Bedingung für ihre Selbstschnittfreiheit angeben:

Satz 7.3.3 *Eine Röhrenfläche um eine C^2 -glatte NURBS-Kurve ist selbstschnittfrei, falls der Radius R kleiner ist als das Minimum der Krümmungsradien der Zentralkurve und die Winkelsumme des Kontrollpolygons kleiner π ist.*

Beweis: Unter diesen Voraussetzungen ist die Totalkrümmung der Kurve nach Satz 7.1.3 kleiner π . Eine Kugel mit Radius R mit Mittelpunkt auf der Mantelfläche berührt nach Satz 6.3.3 $\gamma([0, 1])$ nur einmal. Also kann kein Selbstschnitt vorliegen. \square

*Miß alles,
was sich messen läßt,
und mach alles meßbar,
was sich nicht messen läßt.
(Galileo Galilei)*

Kapitel 8

Geschwindigkeit rationaler Bézier–Kurven und –Flächen

In diesem Kapitel wenden wir uns der maximalen Geschwindigkeit von rationalen Bézier–Kurven und –Flächen zu. Das sind die Maxima von $\|\gamma'\|$ bzw. $\|\frac{\partial F}{\partial u}\|$, $\|\frac{\partial F}{\partial v}\|$. In praktischen Anwendungen werden obere Schranken für diese benötigt, um Approximationsalgorithmen zu verbessern, siehe dazu (ZhFeSo03). Solche Schranken wurden bereits von verschiedenen Autoren angegeben.

(ZhFeSoYu04) drücken die Ableitung in rationaler Bézier–Form aus und verwenden die convex-hull-property, um eine Abschätzung zu berechnen. (Hermann99) liefert eine Schranke, falls die Grade der Kurve oder Fläche zwei oder drei sind. Die Schranken von (Floater92) liefern durch ihre einfache Abhängigkeit von den Kontrollpunkten und Gewichten Einsicht in die herrschenden Zusammenhänge:

$$\|\gamma'\| \leq n \frac{\max_i w_i}{\min_i w_i} \max_{i,j} \|P_i - P_j\| \quad (8.0.1)$$

$$\|\gamma'\| \leq n \left(\frac{\max_i w_i}{\min_i w_i} \right)^2 \max_i \|P_{i+1} - P_i\|. \quad (8.0.2)$$

Hier und im Folgenden werden \min und \max über alle möglichen Indizes gebildet. In (Floater92) ist angegeben, dass keine Schranke stärker ist als die

andere.

Das wichtigste Resultat dieses Kapitels sind die folgenden neuen Ungleichungen:

$$\|\gamma'\| \leq n \max\{\omega, \frac{1}{\omega}\} \cdot \max_{i,j} \|P_i - P_j\|, \quad (8.0.3)$$

$$\|\gamma'\| \leq n \max\{\omega, \frac{1}{\omega}\}^n \cdot \max_i \|P_{i+1} - P_i\|, \quad (8.0.4)$$

wobei $\omega := \max_i \frac{w_i}{w_{i+1}}$. (8.0.3) ist eine Verbesserung von (8.0.1), während (8.0.4) nur in manchen Fällen eine bessere Schranke ist als (8.0.2).

Im letzten Abschnitt werden die Ergebnisse auf die partiellen Ableitungen von Flächen angewendet, wodurch wir eine Verbesserung der Ergebnisse von (WaSeSa97) erhalten.

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind bereits in der Zeitschrift Computer Aided Geometric Design erschienen, siehe (Selimovic05).

8.1 Abschätzungen für Kurven

Wir betrachten rationale Bézier-Kurven mit Kontrollpunkten $P_i \in \mathbb{R}^n$ und Gewichten $w_i \in \mathbb{R}^+$. Wie (Floater92) beginnen wir mit der folgenden Darstellung der Ableitung:

$$\gamma'(t) = n \frac{w_0^{n-1} w_1^{n-1}}{(w_0^n)^2} (P_1^{n-1} - P_0^{n-1}). \quad (8.1.1)$$

w_i^k und P_i^k sind die temporären Gewichte und Punkte des deCasteljau-Algorithmus. Setzen wir $w_i^0 = w_i$ und $P_i^0 = P_i$, sind sie gegeben durch:

$$w_i^k = (1-t)w_i^{k-1} + tw_{i+1}^{k-1}, \quad (8.1.2)$$

$$w_i^k P_i^k = (1-t)w_i^{k-1} P_i^{k-1} + tw_{i+1}^{k-1} P_{i+1}^{k-1}. \quad (8.1.3)$$

Es folgen zwei Abschätzungen für die Quotienten aufeinanderfolgender Gewichte.

Lemma 8.1.1 *Für die temporären Gewichte w_i^k im k -ten Schritt des de-Casteljau Algorithmus, haben wir:*

$$\frac{w_i^k}{w_{i+1}^k} \leq \max_j \frac{w_j^{k-1}}{w_{j+1}^{k-1}} \quad \text{und} \quad \frac{w_{i+1}^k}{w_i^k} \leq \max_j \frac{w_{j+1}^{k-1}}{w_j^{k-1}}.$$

Beweis: Für positive reelle Zahlen a, b, c, d und $t \in [0, 1]$, gilt

$$\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} \leq \frac{(1-t)a + tb}{(1-t)c + td} \leq \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\}.$$

Anwendung auf

$$\frac{w_i^k}{w_{i+1}^k} = \frac{(1-t)w_i^{k-1} + tw_{i+1}^{k-1}}{(1-t)w_{i+1}^{k-1} + tw_{i+2}^{k-1}}$$

ergibt die Behauptung. □

Lemma 8.1.2 Für jede Bézier-Kurve γ vom Grad n , gilt

$$\|\gamma'(t)\| \leq n \max\left\{\omega, \frac{1}{\omega}\right\} \cdot \|P_1^{n-1} - P_0^{n-1}\|, \quad (8.1.4)$$

wobei $\omega := \max_i \frac{w_i}{w_{i+1}}$.

Beweis: Für die Gewichte in (8.1.1) finden wir eine Schranke durch

$$\begin{aligned} \frac{w_0^{n-1}w_1^{n-1}}{(w_0^n)^2} &= \frac{t^2w_0^{n-1}w_1^{n-1} + 2t(1-t)w_0^{n-1}w_1^{n-1} + (1-t)^2w_0^{n-1}w_1^{n-1}}{t^2(w_1^{n-1})^2 + 2t(1-t)w_0^{n-1}w_1^{n-1} + (1-t)^2(w_0^{n-1})^2} \\ &\leq \max\left\{\frac{w_1^{n-1}}{w_0^{n-1}}, 1, \frac{w_0^{n-1}}{w_1^{n-1}}\right\}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Interpretation des Quotienten als eine rationale Funktion in Bernstein-Bézier-Form und der convex-hull-property. Durch Lemma 8.1.1 ergibt sich weiter

$$\frac{w_0^{n-1}w_1^{n-1}}{(w_0^n)^2} \leq \max\left\{\max_i \frac{w_{i+1}}{w_i}, \max_i \frac{w_i}{w_{i+1}}\right\},$$

und damit die Behauptung. □

Als nächstes beweisen wir die Ungleichung (8.0.3).

Satz 8.1.3 Für jede Bézier-Kurve γ vom Grad n mit Kontrollpunkten P_i und Gewichten w_i , haben wir

$$\|\gamma'\| \leq n \max\left\{\omega, \frac{1}{\omega}\right\} \cdot \max_{i,j} \|P_i - P_j\|,$$

wobei $\omega := \max_i \frac{w_i}{w_{i+1}}$.

Beweis: Alle P_i^k befinden sich in der konvexen Hülle der P_i , weshalb wir $a_\mu > 0, \sum_{\mu=0}^n a_\mu = 1$ und $b_\nu > 0, \sum_{\nu=0}^n b_\nu = 1$ haben mit

$$\begin{aligned} \|P_i^k - P_j^l\| &= \left\| \sum_{\mu=0}^n a_\mu P_\mu - \sum_{\nu=0}^n b_\nu P_\nu \right\| \\ &= \left\| \sum_{\mu=0}^n \sum_{\nu=0}^n a_\mu b_\nu (P_\mu - P_\nu) \right\| \\ &\leq \max_{\mu, \nu} \|P_\mu - P_\nu\|. \end{aligned}$$

Anwendung von Lemma 8.1.2 schließt den Beweis. \square

Nun beweisen wir die nur von den Abständen aufeinander folgender Kontrollpunkte abhängende Schranke (8.0.4).

Satz 8.1.4 Für jede Bézier-Kurve γ vom Grad n mit den Kontrollpunkten P_i und Gewichten w_i , gilt

$$\|\gamma'\| \leq n \max\left\{\omega, \frac{1}{\omega}\right\}^n \cdot \max_i \|P_{i+1} - P_i\|,$$

wobei $\omega := \max_i \frac{w_i}{w_{i+1}}$.

Beweis: Analog zum Vorgehen in Lemma 8.1.1, erhalten wir

$$\frac{w_i^{k-1}}{w_i^k} \leq \max\left\{1, \frac{w_i^{k-1}}{w_{i+1}^{k-1}}\right\} \quad \text{und} \quad \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^k} \leq \max\left\{1, \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^{k-1}}\right\}. \quad (8.1.5)$$

Durch Einsetzen der Identität $(1-t)w_i^{k-1} = w_i^k - tw_{i+1}^{k-1}$ in (8.1.3), gilt außerdem

$$P_i^k = \left(1 - t \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^k}\right) P_i^{k-1} + t \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^k} P_{i+1}^{k-1}.$$

Dann können wir die Differenz beschreiben durch

$$P_{i+1}^k - P_i^k = \left(1 - t \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^k}\right) (P_{i+1}^{k-1} - P_i^{k-1}) + t \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^k} (P_{i+2}^{k-1} - P_{i+1}^{k-1}).$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
\|P_{i+1}^k - P_i^k\| &\leq \left(\left| 1 - t \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^k} \right| + t \frac{w_{i+2}^{k-1}}{w_{i+1}^k} \right) \cdot \max_j (\|P_{j+1}^{k-1} - P_j^{k-1}\|) \\
&\stackrel{(8.1.2)}{=} \left((1-t) \frac{w_i^{k-1}}{w_i^k} + t \frac{w_{i+2}^{k-1}}{w_{i+1}^k} \right) \cdot \max_j (\|P_{j+1}^{k-1} - P_j^{k-1}\|) \\
&\stackrel{(8.1.5)}{\leq} \max\left\{ \max\left\{ 1, \frac{w_i^{k-1}}{w_{i+1}^k} \right\}, \max\left\{ 1, \frac{w_{i+1}^{k-1}}{w_i^{k-1}} \right\} \right\} \cdot \max_j \|P_{j+1}^{k-1} - P_j^{k-1}\| \\
&\leq \max\left\{ \max_j \left\{ \frac{w_j^{k-1}}{w_{j+1}^k} \right\}, \max_j \left\{ \frac{w_{j+1}^{k-1}}{w_j^{k-1}} \right\} \right\} \cdot \max_j \|P_{j+1}^{k-1} - P_j^{k-1}\|.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 8.1.1 schließen wir dann

$$\|P_{i+1}^k - P_i^k\| \leq \max\left\{ \max_j \left\{ \frac{w_j}{w_{j+1}} \right\}, \max_j \left\{ \frac{w_{j+1}}{w_j} \right\} \right\} \cdot \max_j \|P_{j+1}^{k-1} - P_j^{k-1}\|,$$

und durch Induktion folgt

$$\|P_{i+1}^{n-1} - P_i^{n-1}\| \leq \max\left\{ \max_j \left\{ \frac{w_j}{w_{j+1}} \right\}, \max_j \left\{ \frac{w_{j+1}}{w_j} \right\} \right\}^{n-1} \cdot \max_j \|P_{j+1} - P_j\|.$$

Die Behauptung ergibt sich durch Einsetzen in die Ungleichung (8.1.4). \square

Vergleich der Ungleichungen

Es ist leicht zu sehen, dass (8.0.3) immer stärker ist als (8.0.1). Dagegen lassen sich (8.0.2) und (8.0.4) nicht anordnen. Dass die neue Schranke die stärkere sein kann, zeigt sich an einer Kurve, mit äquidistant auf einer Geraden liegenden Kontrollpunkten, deren Gewichte $w_i = \rho w_{i+1}$ mit $\rho > 1$ erfüllen. Für diese liefert die Ungleichung (8.0.2) die Schranke $\rho^{2n} \max \|P_{i+1} - P_i\|$ und (8.0.4) $\rho^n \max \|P_{i+1} - P_i\|$.

Ändert man die Gewichte zu $w_i = 1, i = 0 \dots n-1, w_n = 2$, so ist (8.0.2) die stärkere Ungleichung. Sie ergibt $4 \cdot \max \|P_{i+1} - P_i\|$ und die neue Ungleichung liefert $2^n \max \|P_{i+1} - P_i\|$ als obere Schranke.

8.2 Abschätzungen für Flächen

Für eine rationale Bézier-Kurve mit den Kontrollpunkten $P_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ und Gewichte $w_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ zeigen (WaSeSa97) die folgenden Schranken für die Norm

der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| &\leq m \left(\frac{\max_{i,j} w_{i,j}}{\min_{i,j} w_{i,j}} \right)^2 \left(\frac{\max_{i \neq 0, j} w_{i,j}}{\min_{i \neq 0, j} w_{i,j}} \right) \left(\frac{\max_{i,j \neq m} w_{i,j}}{\min_{i,j \neq m} w_{i,j}} \right) \\ &\quad \cdot \max_{i,h,k} \|P_{i+1,h} - P_{i,k}\|, \\ \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\| &\leq m \left(\frac{\max_{i,j} w_{i,j}}{\min_{i,j} w_{i,j}} \right)^3 \cdot \max_{i,j,h,k} \|P_{i,h} - P_{j,k}\|. \end{aligned}$$

Wir werden ihren Ansatz modifizieren, indem wir die Kurven–Ungleichungen aus Abschnitt 8.1 anwenden und die algebraischen Umformungen etwas geschickter durchführen. Der Schlüssel zu den Abschätzungen ist die folgende Darstellung von F :

$$\begin{aligned} P_i(v) &= \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i,j}}, \quad W_i(v) = \sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i,j}, \\ F(u, v) &= \frac{\sum_{i=0}^m B_i^m(u) W_i(v) P_i(v)}{\sum_{i=0}^m B_i^m(u) W_i(v)}. \end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen aus Abschnitt 8.1 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right\| &\leq m \left(\frac{\max_i W_i(v)}{\min_i W_i(v)} \right)^2 \cdot \max_i \|P_{i+1}(v) - P_i(v)\|, \\ \left\| \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right\| &\leq m \max\left\{ \max_i \frac{W_i(v)}{W_{i+1}(v)}, \max_i \frac{W_i(v)}{W_{i-1}(v)} \right\}^m \cdot \max_i \|P_{i+1}(v) - P_i(v)\|, \\ \left\| \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right\| &\leq m \max\left\{ \max_i \frac{W_i(v)}{W_{i+1}(v)}, \max_i \frac{W_i(v)}{W_{i-1}(v)} \right\} \cdot \max_{i,j} \|P_i(v) - P_j(v)\|. \end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir die Abstände der Kontrollpunkte:

$$\begin{aligned}
\|P_j(v) - P_i(v)\| &= \left\| \frac{\sum_{h=0}^n B_h^n(v) w_{j,h} P_{j,h}}{\sum_{h=0}^n B_h^n(v) w_{j,h}} - \frac{\sum_{h=0}^n B_h^n(v) w_{i,h} P_{i,h}}{\sum_{h=0}^n B_h^n(v) w_{i,h}} \right\| \\
&= \left\| \frac{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k} (P_{j,h} - P_{i,k})}{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k}} \right\| \\
&\leq \frac{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k} \|P_{j,h} - P_{i,k}\|}{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k}} \\
&\leq \frac{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k}}{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k}} \max_{h,k} \|(P_{j,h} - P_{i,k})\| \\
&= \max_{h,k} \|(P_{j,h} - P_{i,k})\|.
\end{aligned}$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{W_i(v)}{W_{i+1}(v)} &= \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i,j}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(v) w_{i+1,j}} \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{B_j^n(v) w_{i+1,j}}{\sum_{k=0}^n B_k^n(v) w_{i+1,k}} \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j}} \leq \max_j \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j}},
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\frac{W_i(v)}{W_{i-1}(v)} \leq \max_j \frac{w_{i,j}}{w_{i-1,j}}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right\| &\leq m \left(\frac{\max_{i,j} w_{i,j}}{\min_{i,j} w_{i,j}} \right)^2 \cdot \max_{i,h,k} \|P_{i+1,h} - P_{i,k}\|, \\
\left\| \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right\| &\leq m \max \left\{ \max_{i,j} \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j}}, \max_{i,j} \frac{w_{i,j}}{w_{i-1,j}} \right\}^m \cdot \max_{i,h,k} \|P_{i+1,h} - P_{i,k}\|, \\
\left\| \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \right\| &\leq m \max \left\{ \max_{i,j} \frac{w_{i,j}}{w_{i+1,j}}, \max_{i,j} \frac{w_{i,j}}{w_{i-1,j}} \right\} \cdot \max_{i,j,h,k} \|P_{i,h} - P_{j,k}\|.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist eindeutig eine Verbesserung der Ungleichungen von (WaSeSa97).

Eine rechenaufwändigere aber genauere Abschätzung wird erzielt, wenn in

$$\|P_j(v) - P_i(v)\| = \left\| \frac{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k} (P_{j,h} - P_{i,k})}{\sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n B_h^n(v) B_k^n(v) w_{j,h} w_{i,k}} \right\|$$

Zähler und Nenner in der stabilen Basis B_i^{2n} ausgedrückt wird. Die Koeffizienten des Zählers lauten dann

$$z_l := \frac{1}{\binom{2n}{k}} \sum_{h+k=l} \binom{n}{h} \binom{n}{k} w_{j,h} w_{i,k} (P_{j,h} - P_{i,k}), \quad l = 0, \dots, 2n,$$

für den Nenner haben wir entsprechend

$$n_l := \frac{1}{\binom{2n}{k}} \sum_{h+k=l} \binom{n}{h} \binom{n}{k} w_{j,h} w_{i,k}, \quad l = 0, \dots, 2n.$$

Der Bruch lässt sich dann als Bézier-Funktion interpretieren, die bekanntlich in der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte $\frac{z_l}{n_l}$ liegt. Damit ist

$$\|P_j(v) - P_i(v)\| \leq \max_l \left\| \frac{\sum_{h+k=l} \binom{n}{h} \binom{n}{k} w_{j,h} w_{i,k} (P_{j,h} - P_{i,k})}{\sum_{h+k=l} \binom{n}{h} \binom{n}{k} w_{j,h} w_{i,k}} \right\|.$$

Literaturverzeichnis

- [AlexResh89] A.D. Alexandrov, Yu.G. Reshetnyak, General Theory of Irregular Curves. Transl. from Russian by L.Ya.Yuziha, Mathematics and Its Applications: Soviet Series, 29 (1989) Kluwer Academic Publishers.
- [AndPetSte98] L.-E. Anderson, T.J. Peters, N.F. Steward, Selfintersection of composite curves and surfaces, Computer Aided Geometric Design 15 (1998), pp. 507–527.
- [AumReiSpitz95] G. Aumann, U. Reif, K. Spitzmüller, A counterexample to a corollary of Kim et al., Computer Aided Geometric Design 12 (1995), pp. 853–855.
- [Blaschke56] W. Blaschke, Kreis und Kugel (2. Auflage), de Gruyter Verlag Berlin 1956, pp. 113–118.
- [Böhm81] W. Böhm, Generating the Bézier Points of B-Spline Curves and Surfaces, Computer-Aided Design 13 (1981), pp. 365–366.
- [ChanDavi84] G.-Z. Chang, P.J. Davis, The convexity of Bernstein polynomials over triangles, Journal of Approximation Theory 40 (1984), pp. 11–28.
- [CoraPort87] G. Corach, H. Porta, Total Curvature of Non-Differentiable Curves, Revista Matemática Iberoamericana 3 (1987), pp. 33–59.
- [Dahmen90] W. Dahmen, Mathematische Methoden in der Geometrischen Datenverarbeitung (CAGD), Skript zur Vorlesung im Wintersemester 1989/90 und Sommersemester 1990 an der Freien Universität Berlin.

- [Dahmen86] W. Dahmen, Subdivision algorithms converge quadratically, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 16 (1986), pp. 145–158.
- [Daniel95] M. Daniel, A note on degenerate normal vectors, *Computer Aided Geometric Design* 12 (1995), pp. 857–860.
- [Dokken85] T. Dokken, Finding Intersections of B–Spline Represented Geometries Using Recursive Subdivision Techniques, *Computer Aided Geometric Design* 2 (1985), pp. 189–195.
- [DylLuth99] E. Dyllong, W. Luther, Distance calculation between a point and a NURBS surface, in *Curve and Surface Design: Saint–Malo* (1999), pp. 55–62.
- [Farin02] G.E. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD* (5th Edition), Morgan Kaufmann Publishers San Francisco 2002.
- [Floater92] M.S. Floater, Derivatives of rational Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design* 9 (1992), pp. 161–174.
- [Floater92b] M.S. Floater, Evaluation and properties of the Derivative of a NURBS Curve, in: *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*, T. Lyche and L.L. Schumaker (eds.), (1992), pp. 261–274.
- [Floater99] M.S. Floater, Properties of Tensor–Product Bernstein Polynomials, in: *Shape preserving representations in Computer–Aided Geometric Design*, J.M. Pena (ed.), Nova Science Publications, New York, (1999), pp. 149–162.
- [Floater05] M.S. Floater, Arc length estimation and the convergence of polynomial curve interpolation, *BIT* 45 (2005), pp. 679–694.
- [Henshaw02] W.D. Henshaw, An Algorithm for Projecting Points onto a Patched CAD Modell, *Engineering with Computers* 18 (2002), pp. 265–273.
- [Hermann99] T. Hermann, On the derivatives of second and third degree rational Bézier curve, *Computer Aided Geometric Design* 16 (1999), pp. 157–163.
- [HiCAD] HiCAD Next (Solid–Modeller), Software der Firma ISD Software und Systeme.

- [HoCoh00] C-C. Ho, E. Cohen, Surface self-intersections, in *Mathematical Methods of Curves and Surfaces: Oslo 2000*, T. Lyche, and L. L. Schumaker, (eds.), Vanderbilt University Press 2001, pp. 183–194.
- [Hohemeyer92] M.E. Hohemeyer, *Robust and Efficient Surface Intersection for Solid Modeling*, Dissertation, University of California at Berkeley (1992).
- [HoCoTh00] J.M. Hollerbach, E. Cohen, W.B. Thompson, R. Freier, D.E. Johnson, T.V. Thompson II, *Virtual Prototyping for Human-Centric Design*, in 2000 NSF Design and Manufacturing Research Conference, (Vancouver), January 2000.
- [JohCoh98] D.E. Johnson, E. Cohen, A framework for efficient minimum distance computations, in *Proc. IEEE Intl. Conf. Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, May 16–21, 1998, pp. 3678–3684.
- [Kiciak01] P. Kiciak, Computing normal vector Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design* 18 (2001), pp. 699–710.
- [KimPapWoo95] D.-S. Kim, P.Y. Papalambros, T.C. Woo, Tangent, normal, and visibility cones on Bézier surfaces, *Computer Aided Geometric Design* 12 (1995), pp. 305–320.
- [KobPrau95] L. Kobbelt, H. Prautzsch, Approximating the length of a spline by its control polygon, in *Mathematical Methods in CAGD III*, M. Daehlen, T. Lyche, L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, 1995, pp. 291 – 292.
- [LamBruRis04] J.G. Lambourne, D. Brujic, M. Ristic, An efficient algorithm for solving the point projection problem, *Geometric modeling and computing: Seattle 2003. Selected papers of the 8th SIAM conference on geometric design and computing*, Seattle, WA, USA, November 9–13, 2003. Brentwood, TN: Nashboro Press. *Modern Methods in Mathematics* (2004), pp. 105–112.
- [LanRie81] J.M. Lane, R.F. Riesenfeld, Bounds on a polynomial, *BIT*, Vol. 21, 1981, pp. 112–117.

- [LanRie83] J.M. Lane, R.F. Riesenfeld, A geometric proof for the variation diminishing property of B-spline approximation, *Journal of Approximation Theory* 37 (1983), pp. 1–4.
- [Lasser89] D. Lasser, Calculating the self-intersections of Bézier curves, *Computers in Industry* 12 (1989), pp. 259–268.
- [Lasser88] D. Lasser, Self-intersections of parametric surfaces, in: *Proceedings of the International Conference on Engineering Graphics and Descriptive Geometry, Vienna, Volume 1 (1988)*, pp. 322–331.
- [MaHew03] Y.L. Ma, W.T. Hewitt, Point inversion and projection for NURBS curve and surface: Control polygon approach, *Computer Aided Geometric Design* 20 (2003), pp. 79–99.
- [MaePatSakYu98] T. Maekawa, N.M. Patrikalakis, T. Sakkalis, G. Yu, Analysis and Applications of pipe surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 15 (1998), pp. 437–458.
- [Milnor50] J.W. Milnor, On the total curvature of knots, *Annals of Mathematics* 52 (1950), pp. 248–257.
- [NeCaLa00] M. Neagu, E. Calcoen, B. Lacolle, Bézier Curves: topological convergence of the control polygon, in *Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000*, T. Lyche, and L. L. Schumaker, (eds.), Vanderbilt University Press 2001.
- [PatrMaek02] N.M. Patrikalakis, T. Maekawa, *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 2002.
- [PieTil01] L.A. Piegl, W. Tiller, Parametrisation for surface fitting in reverse engineering, *Computer-Aided Design* 33 (2001), pp. 593–603.
- [PieglTiller97] L.A. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book (Second Edition)*, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1997, pp. 229–234.
- [PieglTiller97b] L.A. Piegl, W. Tiller, Symbolic operators for NURBS, *Computer-Aided Design* 29 (1997), pp. 361–368.
- [Podschun99] T.E. Podschun, *Das Assembler-Buch (4. Auflage)*, Addison-Wesley-Longman Bonn 1999, pp. 229–234.

- [Polak97] E. Polak, *Optimization Algorithms and Consistent Approximations*, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1997.
- [SaWaSe95] T. Saito, G.-J. Wang, T.W. Sederberg, Hodographs and normals of rational curves and surfaces, *Computer Aided Geometric Design* 12 (1995), pp. 417–430.
- [SedKaChr89] T.W. Sederberg, S. Katz, H.N. Christiansen, An improved test for closed loops in surface intersections, *Computer Aided Geometric Design* 5 (1988), pp. 161–171.
- [SedMey87] T.W. Sederberg, R.J. Meyers, Rational hodographs, *Computer Aided Geometric Design* 4 (1987), pp. 333–335.
- [SedMey88] T.W. Sederberg, R.J. Meyers, Loop detection in surface patch intersections, *Computer Aided Geometric Design* 5 (1988), pp. 161–171.
- [SedZund96] T.W. Sederberg, A.K. Zundel, Pyramids that bound surface patches, *Graphical Models and Image Processing* 58 (1996), pp. 75–81.
- [Selimovic05] I. Selimovic, New bounds on the magnitude of the derivative of rational Bézier curves and surfaces, *Computer-Aided Design* 22 (2005), pp. 321–326.
- [Selimovic05b] I. Selimovic, Foot points and total curvature, *Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik*, Nummer 281 (2005), FB Mathematik, Universität Dortmund.
- [Selimovic06] I. Selimovic, Improved algorithms for the projection of points on NURBS curves and surfaces, *Computer Aided Geometric Design* 23 (2006), pp. 439–445.
- [Spencer94] M. Spencer, *Polynomial Real Root Finding in Bernstein Form*, Dissertation, Department of Civil Engineering, Brigham Young University, 1994.
- [TurCam98] C. Turnbull, S. Cameron, Computing Distances Between NURBS-defined Convex Objects, in *Proc. IEEE Intl. Conf. Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, May 16–21, 1998, pp. 3685–3690.
- [Walter89] R. Walter, *Differentialgeometrie (2. Auflage)*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989.

- [WaSeSa97] G.-J. Wang, T.W. Sederberg, T. Saito, Partial derivatives of rational Bézier surfaces, *Computer Aided Geometric Design* 14 (1997), pp. 377–381.
- [WaXu91] G. Wang, W. Xu, The Termination Criterion for Subdivision of the Rational Bézier Curves, *Graphical Models and Image Processing* 1 (1991), Vol 52, pp. 93–96.
- [Wikipedia] <http://www.wikipedia.de>
- [ZhFeSo03] W. Zhongke, F. Lin, S.H. Soon, Topology preserving voxelisation of rational Bézier and NURBS curves, *Computers & Graphics* 27 (2003), pp. 83–89.
- [ZhFeSoYu04] W. Zhongke, F. Lin, S.H. Soon, K.-Y. Chan, Evaluation of difference bounds for computing rational Bézier curves and surfaces, *Computers & Graphics* 28 (2004), pp. 551–558.
- [ZhShPa93] J. Zhou, E.C. Sherbrooke, N.M. Patrikalakis, Computation of Stationary Points of Distance Functions, *Engineering with Computers* 9 (1993), pp. 231–246.
- [Zundel94] A.K. Zundel, Surface–Surface Intersection: Loop destruction using Bézier Clipping and Pyramidal bounds, Ph.D. Theses, Brigham Young University, 1994.