

Wechselwirkung von Polarisationsmodendispersion und polarisationsabhängiger Dämpfung in faseroptischen Systemen



Genehmigte Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Dortmund

von
Dipl.-Phys. Ansgar Steinkamp

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Peter Krummrich
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Klaus Petermann
Ort und Tag der Einreichung: Dortmund, 07. Mai 2007
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Diskussion der Literatur.....	2
2	Grundlagen	7
2.1	Grundlagen der Faseroptik und Randbedingungen dieser Arbeit.....	7
2.2	Polarisationszustände und Transmissionsoperatoren.....	11
2.2.1	Abstrakte Darstellung von Jones-Vektoren und Jones-Operatoren.....	11
2.2.2	Klassische Polarisationszustände und abstrakte Jones-Vektoren.....	18
2.2.3	Pauli-Matrizen und Karlsson-Quaternionen.....	21
2.2.4	Stokes-Vektoren und Poincaré-Kugel.....	24
2.2.5	Rotationsachse und Rotationswinkel eines unitären Jones-Operators.....	27
2.2.6	Polarisationsgrad (DOP).....	29
2.3	Doppelbrechende Elemente.....	30
2.3.1	Ein doppelbrechendes Element.....	31
2.3.2	Verkettung doppelbrechender Elemente.....	37
2.3.3	PSPs, DGD und PMD-Vektor.....	39
2.3.4	PMD erster und zweiter Ordnung.....	46
2.3.5	Bandbreite der PSPs.....	49
2.4	PDL-Elemente.....	50
2.4.1	Ein PDL-Element.....	51
2.4.2	Verkettung von PDL-Elementen.....	56
3	Statistik von PMD und PDL	61
3.1	Theorie der Wechselwirkung von PMD und PDL.....	62
3.2	Modellierung, Implementierung und Aufbau des Systems.....	69
3.2.1	Berechnung von Systemgrößen.....	69
3.2.2	Allgemeine Überlegungen zur Modellierung und zum Aufbau des Systems.....	74
3.2.3	Aufbau und Parameter des Systems.....	76
3.3	Statistik einer Schar von Realisierungen bei fester Frequenz.....	79

3.3.1	PDL	79
3.3.2	DGD und DAS	81
3.3.3	PSPs	86
3.3.4	Komplexer PMD-Vektor	88
3.3.5	PMD und PDL zweiter Ordnung	92
3.4	Autokorrelationsfunktionen	97
3.5	Analyse einer Realisierung entlang der Frequenz	99
3.5.1	PDL	99
3.5.2	DGD und DAS	100
3.5.3	PSPs	102
3.5.4	Komplexer PMD-Vektor	102
3.5.5	PMD und PDL zweiter Ordnung	104
3.5.6	PMD- und PDL-Größen in der Umgebung einer Nullstelle der DGD	109
4	Signalverzerrungen durch PMD und PDL	113
4.1	Simulationsaufbau, Modellierung und Implementierung	114
4.1.1	Parameterraum	115
4.1.2	Signal am Eingang	120
4.1.3	Transmission des Signals und Analyse am Ausgang	122
4.2	Ausgangspunkt und Zielsetzung	126
4.3	Orientierung ausgezeichneter Polarisationszustände	127
4.4	PDL des Pulses	132
4.5	DGD des Pulses	133
4.6	Pulsverbreiterung	135
4.6.1	Extrema der Verbreiterung	135
4.6.2	Pulsverbreiterung der Laufzeit-PSPs und der DOP-PSPs	138
4.7	DOP des Pulses am Ausgang	140
4.7.1	Extrema der DOP	140
4.7.2	DOP der Laufzeit-PSPs und der Verbreiterungs-PSPs	142
4.8	Kontraktion der Poincaré-Kugel	143
4.9	Polarisationsabhängigkeit der Signalverzerrungen – ein Beispiel	149

5	PMD-Kompensation und Statistik der Signalverzerrungen.....	153
5.1	Simulationsaufbau, Modellierung und Implementierung	154
5.1.1	Optische PMD-Kompensatoren – Übersicht.....	154
5.1.2	Simulationsaufbau: Signal am Eingang, System und Art der Kompensation	159
5.2	Mittelwert der Pulsverbreiterung unter dem Einfluss von PDL	162
5.2.1	Optimale DGD des 2FG-Kompensators I.....	162
5.2.2	Mittelwert der Pulsverbreiterung	164
5.3	Ausläufer der Verteilung unter dem Einfluss von PDL.....	165
5.3.1	Statistik der Pulsverbreiterung im unkompensierten Fall	165
5.3.2	Statistik der Pulsverbreiterung beim Einsatz von 3FG-Kompensatoren.....	168
5.3.3	Statistik der Pulsverbreiterung beim Einsatz von 2FG-Kompensatoren.....	172
5.3.4	Optimale DGD des 2FG-Kompensators II.....	175
5.3.5	Pulsverbreiterung im Ausläufer der Verteilung	176
5.3.6	Zusammenfassung: Wann ist der Einsatz von PMD-Kompensatoren sinnvoll?	178
6	Zusammenfassung	181
	Anhang.....	183
	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.....	183
	Abkürzungsverzeichnis.....	183
	Verzeichnis der Symbole und Formelzeichen	184
	Literaturverzeichnis	191

1 Einleitung

In faseroptischen Kommunikationssystemen sind im Wesentlichen zwei polarisationsabhängige Effekte zu beachten: Polarisationsmodendispersion und polarisationsabhängige Dämpfung. Während Polarisationsmodendispersion (PMD) vor allem aufgrund von ortsabhängiger Doppelbrechung der verwendeten Glasfasern auftritt, liegt die Ursache von polarisationsabhängiger Dämpfung (engl.: Polarization-Dependent Loss, PDL) in einer Polarisationsabhängigkeit der Leistungstransmission diverser optischer Komponenten entlang der Strecke begründet. Aufgrund von PMD kommt es zu Verzerrungen des optischen Signals, PDL resultiert derweil in einer zufälligen Schwankung des Verhältnisses aus Signalleistung und Rauschleistung (engl.: Signal to Noise Ratio, SNR). Die beiden Effekte für sich genommen sind in der Literatur umfassend beschrieben, ihre Auswirkungen sind sehr gut erforscht.

Nur in ersten Ansätzen erforscht sind allerdings bisher die Wechselwirkungen zwischen den beiden Effekten. Die Aufgabe dieser Arbeit wird darin bestehen, entsprechende Lücken des Kenntnisstands – unter Zuhilfenahme numerischer Simulationen – möglichst umfassend zu schließen. Dabei wird sich zeigen, dass sich der Einfluss von PMD auf PDL im Wesentlichen auf eine Veränderung der statistischen Eigenschaften der PDL beschränkt. Die Einflussnahme in umgekehrter Richtung ist weitaus komplizierter und zudem nur äußerst unzureichend in der Literatur beschrieben. Deshalb sollen hier vor allem die Auswirkungen von PDL auf PMD-bedingte Signalverzerrungen analysiert werden.

Zunächst wird das Kapitel 2 die mathematischen und physikalischen Grundlagen darlegen, welche für ein Verständnis der nachfolgenden Kapitel unabdingbar sind. Nach einer kurzen Diskussion der Randbedingungen dieser Arbeit in Kapitel 2.1 wird das Kapitel 2.2 die abstrakte Darstellung von Polarisationszuständen einführen sowie das mathematische Gerüst zum Umgang mit diesen Zuständen. Schließlich werden die beiden Grundelemente des Modells eines faseroptischen Systems – das doppelbrechende Element und das PDL-Element – sowie Verkettungen derartiger Elemente in den Kapiteln 2.3 und 2.4 diskutiert. Dabei werden eine Reihe wichtiger Begriffe und Konzepte eingeführt, welche in nachfolgenden Kapiteln von zentraler Bedeutung sein werden. Die Betrachtungen der Kapitel 2.3 und 2.4 erfolgen weitestgehend getrennt nach den Effekten PMD und PDL. Gemischte Verkettungen von doppelbrechenden Elementen und PDL-Elementen, welche zur Modellierung von Systemen mit PMD *und* PDL verwendet werden, finden in Kapitel 2 noch keine Berücksichtigung.

Dies erfolgt erst in den Kapiteln 3 bis 5. Zunächst werden in Kapitel 3.1 die theoretischen Grundlagen der Wechselwirkung von PMD und PDL dargestellt. Die Aufgabe des Kapitels 3 wird dann darin bestehen, die statistischen Eigenschaften von Systemen mit PMD und PDL zu untersuchen. So sollen die zentralen PMD- und PDL-Größen des

Systems bezüglich ihrer statistischen Eigenschaften – sowohl im Frequenzbereich als auch bezüglich einer Schar von Systemen – analysiert werden. Das optische Signal wird dabei noch keine Rolle spielen, sämtliche Untersuchungen des Kapitels 3 beziehen sich »auf das System an sich«.

Das Kapitel 4 geht dann einen Schritt weiter und untersucht die Auswirkungen dieser statistischen Eigenschaften auf die Transmission des Signals. Im Vordergrund wird dabei die Frage stehen, wie die Signalverzerrungen von den Eigenschaften des Systems und des Eingangssignals (Stärke der PMD, Stärke der PDL, Polarisationszustand am Eingang, Trägerfrequenz, Bandbreite des Signals) abhängen. Dazu wird aus der Schar aller möglichen Realisierungen des Systems eine zufällig ausgewählt und über einen möglichst großen spektralen Bereich – zur Erfassung einer ausreichend großen Zahl statistisch unabhängiger Frequenzen – betrachtet.

Das Kapitel 5 schließlich konzentriert sich auf die Scharstatistik der Signalverzerrungen. Vor allem soll dabei geklärt werden, welchen Einfluss die Stärke der PDL auf die Wahrscheinlichkeit großer PMD-bedingter Signalverzerrungen hat. Dies ist die zentrale Frage zur Beurteilung der Wahrscheinlichkeit eines Systemausfalls aufgrund wechselwirkender PMD und PDL. Diese Wahrscheinlichkeit kann durch den Einsatz sogenannter PMD-Kompensatoren reduziert werden. Deren Wirksamkeit ist aufgrund der Anwesenheit von PDL allerdings herabgesetzt. Wie ausgeprägt diese Abnahme der Wirksamkeit ist, wird in Kapitel 5 ebenfalls ausführlich untersucht.

Bei all diesen Betrachtungen soll ausdrücklich Wert darauf gelegt werden, dass die Resultate möglichst universell einsetzbar sind, also nicht nur für ausgewählte Beispielsysteme Gültigkeit besitzen. Dies wird unter anderem dadurch erreicht, dass jeweils vor Beginn der Analyse systematisch alle relevanten Parameter des Systems und des Signals auf gegenseitige Abhängigkeiten sowie auf sinnvolle normierte Darstellungsmöglichkeiten hin überprüft werden.

Ein Leser, der bereits mit den mathematischen und physikalischen Grundlagen des Kapitels 2 (und ggf. des Kapitels 3.1) vertraut ist, sollte zumindest einen kurzen Blick auf das Verzeichnis der Symbole und Formelzeichen im Anhang werfen, um die hier verwendete Notation zu erfassen. Dadurch wird eine Interpretation der Ergebnisse der Kapitel 3 bis 5 wesentlich erleichtert.

1.1 Diskussion der Literatur

Vor dem Einstieg in die theoretischen Grundlagen soll zunächst ein kurzer Überblick über den aktuellen Stand der Forschung erfolgen, welcher gleichsam einen wesentlichen Beitrag zur Motivation dieser Arbeit liefern wird. Nach einleitenden Empfehlungen für Einsteiger in die Thematik folgt eine Diskussion relevanter Literaturstellen auf dem Gebiet der Wechselwirkung von PMD und PDL.

Einführende Literatur

Sind Grundzüge der Optik und der faseroptischen Übertragungstechnik bekannt, so ist als Einstieg in das Themengebiet der Polarisationsmodendispersion vor allem [1] zu empfehlen. Neben einer sehr anschaulichen Einführung finden sich dort verständlich geschriebene Kapitel über PMD-Messverfahren, statistische Eigenschaften von PMD, Methoden zur Emulation und Simulation von PMD, Systemauswirkungen durch PMD (vorwiegend erster Ordnung) und Verfahren der elektrischen und optischen PMD-Kompensation. Eine Berücksichtigung von PDL findet jedoch ebenso wenig statt wie eine tiefgehende mathematische Beschreibung von PMD. Letztere findet sich kompakt aber umfassend in [2], unter Verwendung der »bra-c-ket-Notation« und von Pauli-Matrizen. Empfehlenswert als Einführung ist zudem [3], welches einige der Themen von [1] behandelt, allerdings unter Verwendung einer etwas veralteten Notation. [4], [5] und [6] sind als kurze Einführungen ebenfalls gut geeignet.

Zur Vertiefung der Thematik der PMD-Emulation ist [7] (bzw. in gekürzter Fassung [8]) eine gute Wahl. Die Auswirkung von PMD auf die Laufzeit und die zeitliche Breite optischer Pulse wird in [9] – mithilfe der Momentenmethode – näher untersucht. Eine tiefgehende Analyse der Wirksamkeit einfacher PMD-Kompensatoren ist das Thema von [10]. Die wichtigsten PMD-Messverfahren schließlich finden sich beispielsweise in [11], dort erfolgt eine weitergehende Betrachtung als im entsprechenden Teilkapitel von [1].

PDL: Verkettung von PDL-Elementen, Statistik der PDL, Messung von PDL

Die genannten Empfehlungen beleuchten unterschiedliche Aspekte von PMD, sie nehmen jedoch allesamt Systeme an, die frei von PDL sind. Viele dieser Themen werden auch von [12] abgedeckt. Sie werden dort sehr anschaulich dargestellt und zugleich mathematisch äußerst präzise behandelt. Zusätzlich finden sich in [12] aber auch lesenswerte Ausführungen zum Thema PDL, konsequent in »bra-c-ket-Notation« und unter Verwendung des Pauli-Spinvektors. (Das kurze Unterkapitel über die Wechselwirkung von PMD und PDL in [12] ist jedoch nur in Ansätzen in der Lage, die komplizierten Zusammenhänge ausreichend zu vermitteln.)

Eine systematische Beschreibung und Analyse von PDL-Elementen (ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung mit PMD) wurde erstmals in [13] von Gisin durchgeführt. Die dort eingeführten Bezeichnungen und Symbole sind in der Literatur weit verbreitet und werden auch in dieser Arbeit verwendet. Neben Überlegungen zu statistischen Eigenschaften der Faserdämpfung sind ein einfaches PDL-Messverfahren sowie Regeln zur Berechnung verketteter PDL-Elemente und erste Ansätze zur Beschreibung der PDL-Statistik aufgeführt. Weite Teile dieser Ergebnisse finden sich auch – in äußerst kompakter und eleganter Form unter Zuhilfenahme von »Karlsson-Quaternionen« – im zweiten Unterkapitel von [14]. Simulationen, Messungen und analytische Berechnungen zur Statistik verketteter PDL-Elemente finden sich in [15], [16], [17] und [18]. Die genannte Reihenfolge spiegelt nicht nur die zeitliche Folge der Veröffentlichung wider, sondern auch den nicht trivialen Weg bis zum exakten

analytischen Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der PDL. Schließlich enthält [19] eine sehr detaillierte Beschreibung unterschiedlicher Methoden zur Messung von PDL.

Messung von PMD in Anwesenheit von PDL

Ein wichtiges Standardverfahren zur Messung des »PMD-Vektors« und dessen Frequenzabhängigkeit ist das sogenannte JME-Verfahren von Heffner (engl.: Jones Matrix Eigenanalysis) [20]. Im Gegensatz zu anderen gängigen PMD-Messmethoden liefert es auch in Anwesenheit von PDL korrekte Ergebnisse. Eyal und Tur haben daraufhin in [21], [22], [23] und [24] verschiedene andere PMD-Messverfahren überprüft und dahingehend weiterentwickelt, dass sie auch bei Systemen mit PMD und PDL angewendet werden können. Teilweise sind diese neuen Verfahren zudem in der Lage, Größen zu messen, welche nur in Systemen mit wechselwirkender PMD und PDL auftreten. Ähnliche Überlegungen wurden auch in [25] durchgeführt.

Wechselwirkung von PMD und PDL – Theoretische Betrachtungen

Gisin und Huttner waren 1997 die ersten, die eine systematische analytische Beschreibung von Systemen mit wechselwirkender PMD und PDL in Angriff genommen haben [26], [27]. (Teile dieser Ergebnisse wurde im selben Jahr auch durch Eyal und Tur publiziert [21], in anderer Darstellung – Polarisationszustände wurden in der komplexen Ebene dargestellt – aber mit äquivalenten Resultaten.) [26] ist die vermutlich meistzitierte Quelle auf dem Gebiet wechselwirkender PMD und PDL. So findet sich dort die allgemein gültige Darstellung des Transmissionsoperators von Systemen mit PMD und PDL, prägnant formuliert unter Verwendung des Pauli-Spinvektors. Zudem wird dort das Konzept der »Principal States of Polarization«, welches 1986 von Poole *et al.* für Systeme ohne PDL entwickelt wurde [28], konsequent verallgemeinert für den allgemeinen Fall mit PDL. In [26] wird zudem ein wesentlicher Teil der Theorie aufgestellt, welche den theoretischen Unterbau der Kapitel 3 bis 5 dieser Arbeit bildet. So basieren wichtige Algorithmen des Computerprogramms, welches für die Kapitel 3 bis 5 entwickelt wurde, auf dieser Theorie. Des Weiteren wird in [26] die »dynamische Gleichung für PMD«, welche 1991 durch Poole *et al.* für Systeme ohne PDL aufgestellt wurde [29], in allgemein gültiger Form hergeleitet. Auch ist in [26] die verallgemeinerte »dynamische Gleichung für PDL« aufgeführt. Auf diese beiden Gleichungen bauen einige der bereits zitierten Quellen ganz wesentlich auf. Schließlich erfolgen in [26] erste Überlegungen zur Frequenzabhängigkeit der PDL für Systeme mit PMD.

Folgen der Wechselwirkung von PMD und PDL – Einschränkungen bisheriger Ergebnisse

Huttner *et al.* ([27], [30] und [31]), Chen *et al.* ([32], [33]) und andere Autoren (z. B. [34]) haben daraufhin doppelbrechende Systeme bezüglich des Einflusses von PDL untersucht. Die dabei erzielten Ergebnisse legen den Schluss nahe, dass eine Vernachlässigung von PDL – bei einer Analyse der Auswirkungen von PMD – deutlich verfälschte Ergebnisse nach sich ziehen kann. Allerdings weisen die untersuchten

Systeme einige wesentliche Einschränkungen auf: Die verwendeten Parameter wurden häufig sehr praxisfern gewählt (Annahme von zu hohen PDL-Werten) und kaum eines der zugrundeliegenden Modelle lässt sich auf reale faseroptische Systeme von mehreren 100 km Länge anwenden (Modelle mit zu geringer Anzahl doppelbrechender Elemente). Zudem wurden bei den genannten Veröffentlichungen die statistischen Eigenschaften der Systeme nur unzureichend berücksichtigt. Vor allem aber wurden nur speziell ausgesuchte Fälle mit fest vorgegebenen Parametern betrachtet. Im Gegensatz dazu sollen in den Kapiteln 3 bis 5 dieser Arbeit Ergebnisse erzielt werden, welche möglichst universell auf praxisnahe Systeme anwendbar sind. Sie sollen weitestgehend unabhängig sein von der Streckenlänge, der Stärke der PMD, der Wahl des Modulationsverfahrens, der Anordnung der Systemkomponenten, etc. Einige der dabei erzielten Ergebnisse wurden in [35] und in [36] veröffentlicht.

Li und Yariv sowie Feced *et al.* haben die »verallgemeinerte dynamische Gleichung für PMD« in [37] bzw. in [38] mithilfe von Verfahren zur Lösung stochastischer Differenzialgleichungen analysiert. Dabei gelingt es den Autoren, skalare Erwartungswerte wichtiger PMD und PDL Systemgrößen analytisch zu ermitteln. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen konnten jedoch bisher – im Gegensatz zum einfachen Fall ohne PDL – noch nicht analytisch bestimmt werden. Erste Untersuchungen auf diesem Gebiet mithilfe von Simulationen wurden in [32], [34] und vor allem in [39] durchgeführt. Die Aufgabe des Kapitels 3 wird darin bestehen, diese Untersuchungen systematisch fortzuführen und sie auszudehnen auf in der Literatur bisher noch nicht berücksichtigte Größen.

Für Systeme ohne PDL hat sich Shieh [40] (und in ähnlicher Weise Karlsson [41]) der Frage gewidmet, wie das Konzept der »Principal States of Polarization« so verallgemeinert werden kann, dass die endliche Bandbreite optischer Pulse explizit berücksichtigt wird. Diese Überlegungen wurden – in ersten Ansätzen und mithilfe von Simulationen – durch Lu *et al.* auf Systeme mit wechselwirkender PMD und PDL ausgedehnt [42], [43]. Allerdings wurden dabei wiederum sehr einfache Beispielsysteme mit recht praxisfernen Parametern betrachtet. Das Kapitel 4 dieser Arbeit wird diese Untersuchungen deutlich ausdehnen und dabei zu einer Reihe von Ergebnissen kommen, welche sich auf reale Systeme anwenden lassen. In diesem Zusammenhang ist es Wang *et al.* [44] und Karlsson *et al.* [14] bereits gelungen, einen analytischen Ausdruck zu finden, mit dem sich die Verbreiterung optischer Pulse in Systemen mit PMD und PDL berechnen lässt. Für sehr einfache Beispielsysteme wurden diese Gleichungen in den genannten Quellen auch angewendet. Bei praxisnahen Systemen erweist sich die analytische Berechnung allerdings als nicht durchführbar, sodass – wie in Kapitel 4 dieser Arbeit geschehen – auf Simulationen zurückgegriffen werden muss.

Der Einfluss von PDL auf Signalverzerrungen durch PMD wurde auch von Shtaif *et al.* [45] und von Xie und Mollenauer [39] untersucht. In letztgenannter Quelle sind zudem Simulationsergebnisse zum Einfluss von PDL auf die Wirksamkeit optischer PMD-Kompensatoren aufgeführt, ein Thema, mit dem sich auch [46] auseinandersetzt. Das

Kapitel 5 dieser Arbeit wird diese Untersuchungen intensivieren und eine Reihe neuer und sehr universell einsetzbarer Ergebnisse präsentieren.

Weitere Literaturstellen

Als letzte Literaturempfehlung sei [47] genannt, wo die Konstruktion einfacher Emulatoren für kombinierte PMD und PDL mithilfe von polarisationserhaltenden Fasern aufgezeigt wird. Zudem finden sich dort Hinweise zur Vermeidung von PDL für den Fall, dass ein reiner PMD-Emulator angestrebt wird.

2 Grundlagen

Zunächst sollen in Kapitel 2.1 die Grundlagen der faseroptischen Übertragungstechnik soweit behandelt werden, wie sie zum Verständnis der nachfolgenden Kapitel unerlässlich sind. Ein weitergehend interessierter Leser sei auf die Bücher von Agrawal [48] und Unger [49], [50] verwiesen, alternativ bietet auch [51] einen guten Einstieg in die Materie. Weiterhin werden in Kapitel 2.1 einige der Annahmen diskutiert, welche für den Rest dieser Arbeit als vorausgesetzt gelten.

Der Begriff des Polarisationszustands, welcher in Kapitel 2.1 eingeführt wird, soll in Kapitel 2.2 abstrahiert werden. Dazu wird ein mathematisches Gerüst erstellt, mit dem Polarisationszustände sowie Änderungen dieser Zustände sehr elegant beschrieben werden können. Das Kapitel 2.2 bildet die theoretische Grundlage für alle nachfolgenden Kapitel.

Die beiden Grundbausteine, aus denen das zu modellierende faseroptische System aufgebaut wird, sind das doppelbrechende Element und das PDL-Element. Diese Bausteine werden in den Kapiteln 2.3 und 2.4 – unter konsequenter Anwendung des mathematischen Gerüsts des Kapitels 2.2 – diskutiert. Schließlich werden Verkettungen doppelbrechender Elemente sowie Verkettungen von PDL-Elementen analysiert, wobei erstmals wichtige Begriffe und Konzepte auftreten, welche in nachfolgenden Kapiteln eine zentrale Rolle spielen werden (PMD- und PDL-Vektoren, Bandbreite der PSPs, ...).

2.1 Grundlagen der Faseroptik und Randbedingungen dieser Arbeit

Das zentrale Element einer faseroptischen Übertragungsstrecke ist die Glasfaser, welche aus Quarzglas (also aus amorphem SiO_2) besteht. Durch Dotierung beispielsweise mit GeO_2 lässt sich die Brechzahl von Quarzglas beeinflussen, wodurch der typische Aufbau einer Stufenfaser erreicht werden kann: Erhöhte Brechzahl n_k im zylindrischen Kern mit einem Radius a von etwa 4 bis 5 μm , umgeben vom Fasermantel der Brechzahl n_m . Zur Vermeidung hoher Dämpfungsverluste darf die Dotierung des Kerns nicht zu ausgeprägt sein, die relative Brechzahldifferenz zwischen Kern und Mantel liegt bei praktisch eingesetzten Fasern deutlich unter einem Prozent. Derartige Fasern werden als »schwach führend« bezeichnet, ein Grenzfall, der für den weiteren Verlauf vorausgesetzt wird.

Die Berechnung der optischen Moden (Eigenwellen) der Faser basiert auf der klassischen Elektrodynamik, geht also aus von den Maxwell- und den Materialgleichungen. Dabei soll ein linearer Zusammenhang zwischen der elektrischen Polarisation \vec{P} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} angenommen werden, Effekte der nichtlinearen Optik werden also in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. (Auswirkungen der nichtlinearen

Optik auf faseroptische Systeme sind beispielsweise in [52] beschrieben.) Des Weiteren soll *vorläufig* angenommen werden, dass \vec{P} und \vec{E} durch einen Skalar verknüpft sind, dass die elektrische Suszeptibilität also eine einfache Zahl ist. Die Faser wird dadurch als ideal isotrop angesetzt, die Brechzahl hängt nicht vom »Polarisationszustand« (s. u.) ab.

Bei den Untersuchungen der folgenden Kapitel wird die Dämpfung der Faser keine Rolle spielen, dennoch ist sie indirekt von großer Bedeutung: Entlang einer tatsächlichen Übertragungsstrecke sind in (mehr oder weniger) periodischen Abständen optische Verstärker platziert. Diese sollen hier als ideale Verstärker modelliert werden, das Rauschen aufgrund verstärkter spontaner Emission wird also nicht berücksichtigt. Da ein lineares optisches System vorausgesetzt wurde, entspricht dieses Modell insgesamt einer Übertragungsstrecke ohne Dämpfung und mit optischen Verstärkern, welche »nichts tun«. Dennoch sind die Verstärker sowie ihre Positionierung entlang der Strecke von großer Wichtigkeit für die folgenden Kapitel, sie bewirken nämlich indirekt das Auftreten von polarisationsabhängiger Dämpfung (PDL): Ein optischer Verstärker besteht neben einer Erbium-dotierten Faser aus einer Reihe unterschiedlicher optischer Komponenten, von denen einige die Eigenschaft haben, dass sie polarisationsabhängig dämpfen. Somit sind die optischen Verstärker des Systems die Hauptursache für PDL. Das Kapitel 2.4 wird sich ausführlicher mit diesen Ursachen auseinandersetzen.

Unter den oben genannten Bedingungen lässt sich die Wellengleichung für die elektrische (bzw. die magnetische) Feldstärke in einfacher Form aufstellen. Bei einer Berücksichtigung der Randbedingungen an der Grenze zwischen Kern und Mantel folgen schließlich die Moden der Faser, also die entsprechenden Lösungen der Wellengleichung. Dabei zeigt sich, dass bei geeigneter Wahl von Wellenlänge λ (gemessen im Vakuum), Kernradius a und Brechzahl von Kern n_k und Mantel n_m nur noch eine Mode geführt werden kann, eine Faser wird unter der Bedingung $2\pi(a/\lambda)\sqrt{n_k^2 - n_m^2} < 2,405$ zur »Einmodenfaser«. In der Praxis werden die Fasern zur Vermeidung von Krümmungsverlusten nur geringfügig unterhalb dieses Wertes betrieben. Die verbleibende Grundmode wird (im hier angenommenen Grenzfall schwach führender Fasern) »LP₀₁-Mode« genannt.

Die Feldamplitude der Grundmode hat die Eigenschaft, dass sie keine Umfangsabhängigkeit aufweist. Zudem fällt sie in radialer Richtung näherungsweise gemäß einer Gauß-Funktion ab. Somit wird – abhängig von Wellenlänge und Kernradius – nur ein Teil der Leistung im Faserkern, der Rest im Fasermantel geführt. Die Grundmode »sieht« also eine gemittelte Brechzahl, welche effektive Brechzahl \bar{n} genannt wird. Diese errechnet sich durch geeignete Mittelung von Kern- und Mantelbrechzahl über den radialen Leistungsverlauf der Grundmode, sie hat also den Wertebereich $n_m < \bar{n} < n_k$. Der radiale Abfall der Feldamplitude ändert sich entlang der Strecke nicht, er hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse dieser Arbeit und wird deshalb von nun an ignoriert (abgesehen von der impliziten Berücksichtigung durch die effektive Brechzahl \bar{n}).

Dispersion aufgrund von Materialdispersion ($n_k(\lambda)$, $n_m(\lambda)$) und Wellenleiterdispersion (Wellenlängenabhängigkeit des Leistungsanteils im Kern mit der Folge $\bar{n}(\lambda)$) wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Für die hier betrachteten linearen optischen Systeme ist diese Annahme äquivalent zum Fall der vollständigen (periodischen) Dispersionskompensation mithilfe von dispersionskompensierenden Fasern. Entgegen manch missverständlicher Aussagen in der Literatur beeinflussen sich Dispersion und »Polarisationsmodendispersion« (PMD, siehe Kapitel 2.3), welche jeweils eine Verbreiterung optischer Pulse hervorrufen, nicht gegenseitig. Eine wechselseitige »Verstärkung« der beiden Effekte tritt nicht auf. Diesbezüglich ist also eine vollständige Dispersionskompensation äquivalent zu einem System ohne Dispersion. Weitere Erläuterungen zu dieser Äquivalenz finden sich beispielsweise in [9].

Eine weitere Eigenschaft der Grundmode ist, dass ihre Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung im Grenzfall schwach führender Fasern verschwinden, die Mode ist also transversal elektromagnetisch. Des Weiteren gilt in diesem Grenzfall, dass die Mode radial einheitlich polarisiert ist. Dies bedeutet, dass der Polarisationszustand nicht abhängt vom radialen Abstand von der Faserachse. Für den Spezialfall eines »linearen Polarisationszustands« (s. u.) ist die Mode also »einheitlich linear polarisiert«, worauf die Namensgebung der LP-Moden zurückzuführen ist.

Mit den genannten Annahmen lässt sich die Grundmode gemäß einer homogenen ebenen Welle beschreiben. Dazu sei ein Koordinatensystem angenommen, bei dem die z -Achse in Ausbreitungsrichtung liegt, mit willkürlich aber fest vorgegebenen x - und y -Achsen. Mit den Amplituden der transversalen Feldkomponenten E_x und E_y , ihrer gemeinsamen Phase ϕ , der Phasendifferenz zwischen y - und x -Komponente δ , der Kreisfrequenz ω und der Ausbreitungskonstanten $\beta \equiv \bar{n}(2\pi/\lambda)$ kann schließlich der elektrische Feldvektor einer Frequenzkomponente als Funktion von Ort z und Zeit t aufgestellt werden,

$$\vec{E}(z,t) = \text{Re} \left[e^{i\phi} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta z)} \right], \quad (2.1)$$

wobei e die Eulersche Zahl und i die imaginäre Einheit darstellen.

Die Amplituden E_x und E_y sind positive reelle Zahlen, die Summe ihrer Quadrate ist proportional zur Lichtintensität. Die Phasendifferenz δ sei so definiert, dass sie den Wertebereich $-180^\circ < \delta \leq 180^\circ$ aufweist. Aufgrund des Zusammenhangs $k_0 \equiv 2\pi/\lambda = \omega/c$ zwischen Vakuumwellenzahl k_0 , Vakuumwellenlänge λ , Kreisfrequenz ω und Vakuumlichtgeschwindigkeit c kann die Ausbreitungskonstante auch geschrieben werden als $\beta = \bar{n}k_0 = \bar{n}(\omega/c)$. Sie hat somit den Wertebereich $n_m k_0 < \beta < n_k k_0$.

Der zeitliche Verlauf des elektrischen Feldvektors (2.1) für einen festen Ort z definiert den »Polarisationszustand« der monochromatischen ebenen Welle. Offenbar oszillieren die x - und die y -Komponente des Feldvektors unabhängig voneinander mit der gegebenen Frequenz ω , der Amplitude E_x bzw. E_y und der Phasendifferenz δ . Die Bewegung entspricht der eines klassischen zweidimensionalen harmonischen Oszillators. Somit

läuft die Spitze des Feldvektors für einen festen Ort z als Funktion der Zeit entlang einer Ellipse in der xy -Ebene, dargestellt in Abb. 2.1. Die Form der Ellipse, beschrieben durch die eingezeichneten Winkel ψ und χ ($0^\circ \leq \psi < 180^\circ$, $-45^\circ \leq \chi \leq 45^\circ$), definiert eindeutig den Polarisationszustand (engl.: State of Polarization, SOP). Dieser hängt also weder ab von der Intensität (proportional zu $E_x^2 + E_y^2$) noch von der gemeinsamen Phase ϕ . Für eine weitergehende Diskussion sei beispielsweise das Kapitel 3 von [53] empfohlen.

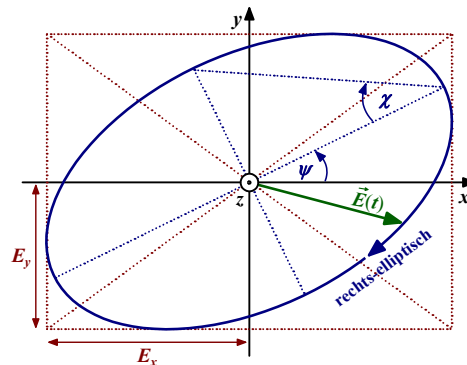


Abb. 2.1: Polarisationsellipse: Zeitlicher Verlauf des elektrischen Feldvektors einer monochromatischen ebenen Welle für einen festen Ort z ; die Winkel ψ (»Neigungswinkel«) und χ (»Elliptizitätswinkel«) definieren eindeutig den Polarisationszustand (SOP). Im dargestellten Fall schaut der Beobachter in Richtung Lichtquelle, sodass gemäß der unten eingeführten Konvention ein rechts-elliptischer SOP vorliegt.

Für den speziellen Fall einer Phasendifferenz $\delta = 0^\circ$ oder 180° wird die Ellipse zu einer geraden Linie (Elliptizitätswinkel $\chi = 0^\circ$), der Polarisationszustand wird als »linear« bezeichnet. Bei gleich großen Amplituden $E_x = E_y$ und einer Phasendifferenz von $\delta = \pm 90^\circ$ ergibt sich hingegen der Grenzfall eines Kreises (Elliptizitätswinkel $\chi = \pm 45^\circ$), der Polarisationszustand nennt sich »zirkular«. Die Bezeichnungen für den Umlaufsinn des Feldvektors werden in der Literatur leider nicht einheitlich gewählt. Hier gelte folgende Konvention, welche häufig von Autoren im Zusammenhang mit Polarisationsmodendispersion verwendet wird: Rotiert die Spitze des elektrischen Feldvektors in der xy -Ebene auf einer Ellipse *im Uhrzeigersinn* für den in Richtung Lichtquelle (also in Richtung $-z$) schauenden Beobachter, so liegt ein *rechts-elliptischer* Polarisationszustand vor. Der Begriff links-elliptisch sei analog vereinbart.

Die hier diskutierte monochromatische ebene Welle stellt nur im Grenzfall eines Lasers im »CW-Betrieb« (Dauerstrich-Betrieb, engl.: Continuous Wave) eine ausreichend genaue Beschreibung dar. Wird hingegen ein (digitales) optisches Signal erzeugt und übertragen, so resultiert eine endliche Breite im Spektrum. Für den hier angenommenen Fall linearer Medien lässt sich die Ausbreitung des Signals dann beschreiben, indem es als lineare Superposition monochromatischer ebener Wellen dargestellt wird, welche unabhängig voneinander übertragen werden.

2.2 Polarisationszustände und Transmissionsoperatoren

Die bisherige Beschreibung von Polarisationszuständen entspricht dem »klassischen« Vorgehen: Die Zustände werden durch komplexe zweidimensionale Spaltenvektoren dargestellt, die Änderung dieser Zustände durch komplexe 2×2 Matrizen. Dabei sind die Spaltenvektoren und Matrizen bezüglich eines zugrundeliegenden (willkürlich festgelegten) Koordinatensystems zu interpretieren.

Eine theoretische Beschreibung der Auswirkungen von PMD und PDL in dieser klassischen Darstellung ist jedoch umständlich. Wird der Formalismus hingegen umgestellt durch Übernahme einiger Konzepte und Darstellungsweisen der Quantenmechanik [54], [55] und der Theorie von Quaternionen [14], so erleichtert dies das weitere Vorgehen erheblich. Damit werden kompakte und »elegante« Berechnungen ermöglicht, die Darstellung von Ergebnissen wird wesentlich vereinfacht. Beispielsweise erfolgt der mathematische Übergang zwischen dem »Jones-Raum« und dem »Stokes-Raum« dann auf vergleichsweise triviale Art.

Die Notation, welche in diesem Kapitel eingeführt und fortan verwendet werden soll, beruht auf einer Kombination aus [54] (Quantenmechanik), [2], [4] (PMD), [26] (PMD und PDL), [12] (Polarisationsoptik) und [56] (komplexe Vektorräume). Die dort anzuwendenden Konzepte und Darstellungsweisen sollen in diesem Kapitel konsistent zusammengeführt werden. Sie bilden den theoretische Unterbau der Kapitel 3 bis 5.

2.2.1 Abstrakte Darstellung von Jones-Vektoren und Jones-Operatoren

Jones-Raum

Die Gesamtheit aller Polarisationszustände sei repräsentiert durch einen komplexen, linearen Vektorraum \mathbb{J} (»Jones-Raum«) mit Skalarprodukt. Dieser Vektorraum bestehe aus einer Menge von Elementen (»Jones-Vektoren«) $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, \dots, |s\rangle, |t\rangle, \dots, |\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle, |\nearrow\rangle, |\searrow\rangle, |\odot\rangle, |\ominus\rangle, \dots$, für welche die Addition $|\alpha\rangle + |\beta\rangle$ und die Multiplikation $c|\alpha\rangle$ mit einer komplexen Zahl $c \in \mathbb{C}$ definiert sind. Die Resultate dieser Verknüpfungen sind wiederum Elemente des Jones-Raums, diesbezüglich ist er also abgeschlossen.

Für die Addition $|\alpha\rangle + |\beta\rangle \equiv |\alpha + \beta\rangle$ gelten die üblichen Regeln komplexer linearer Vektorräume: Kommutativität, Assoziativität, Existenz eines »Nullvektors« $|0\rangle$ mit $|\alpha\rangle + |0\rangle \equiv |\alpha\rangle$ für alle $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$, Existenz »inverser Elemente« $|- \alpha\rangle$ mit $|\alpha\rangle + |- \alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle - |\alpha\rangle \equiv |0\rangle$. Ebenso gelten die üblichen Regeln der Multiplikation mit komplexen Zahlen $c|\alpha\rangle \equiv |c \cdot \alpha\rangle$ wie Assoziativität und Distributivität. Zudem möge für alle $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$ und $c \in \mathbb{C}$ die Beziehung $0|\alpha\rangle = c|0\rangle = |0\rangle$ gelten.

Dimension und Basis

Für Elemente von \mathbb{J} gelte die übliche Definition der linearen Unabhängigkeit: Elemente werden als »linear unabhängig« bezeichnet, wenn sie sich nur trivial zum Nullvektor linear kombinieren lassen. Die Maximalzahl linear unabhängiger Elemente von \mathbb{J} , die

»Dimension« von \mathbb{J} , ist 2. Somit bilden zwei linear unabhängige Jones-Vektoren eine »Basis« von \mathbb{J} .

Skalarprodukt und Norm

Jedem Paar von Jones-Vektoren $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{J}$ ist eine komplex Zahl $\langle\alpha|\beta\rangle \in \mathbb{C}$ zugeordnet, das »Skalarprodukt von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ «. Dieses habe die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\beta\rangle &= \langle\beta|\alpha\rangle^*, \quad (*: \text{konjugiert komplex}) \\ \langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle &= \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle, \\ \langle\alpha|c \cdot \beta\rangle &= c \langle\alpha|\beta\rangle = \langle c^* \cdot \alpha|\beta\rangle, \quad c \in \mathbb{C}, \\ \langle\alpha|\alpha\rangle &\geq 0 \quad \text{für alle } |\alpha\rangle \in \mathbb{J} \\ &= 0 \quad \text{nur für } |\alpha\rangle = |0\rangle. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Zwei Jones-Vektoren $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{J}$ heißen »orthogonal«, falls ihr Skalarprodukt verschwindet, $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$. Die »Norm« eines Jones-Vektors $|\alpha\rangle$ ist definiert als $\|\alpha\| \equiv \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$. Hat ein Jones-Vektor $|\alpha\rangle$ die Norm $\|\alpha\| = 1$, so wird er als »normiert« bezeichnet.

VON-Systeme

Zwei normierte und orthogonale Jones-Vektoren $|\alpha_1\rangle$ und $|\alpha_2\rangle$ bilden ein »Orthonormalsystem«. Da sie eine Basis von \mathbb{J} darstellen, bilden sie ein »vollständiges Orthonormalsystem« (VON-System). Ein beliebiger Jones-Vektor $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ lässt sich dann entwickeln gemäß

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= |\alpha_1\rangle \langle\alpha_1|\beta\rangle + |\alpha_2\rangle \langle\alpha_2|\beta\rangle, \quad |\beta\rangle \in \mathbb{J}, \\ &|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle: \text{VON-System von } \mathbb{J}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Für ein gegebenes VON-System $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ wird ein Jones-Vektor $|\beta\rangle$ also eindeutig durch seine (komplexen) Entwicklungskoeffizienten $\langle\alpha_1|\beta\rangle$ und $\langle\alpha_2|\beta\rangle$ beschrieben.

Dualer Jones-Raum

Die Jones-Vektoren $|\alpha\rangle$ des Vektorraums \mathbb{J} werden häufig als »ket-Vektoren« bezeichnet, im Gegensatz zu den im Folgenden eingeführten »bra-Vektoren« $\langle\alpha|$ des »dualen Raums« \mathbb{J}^* . Diese Bezeichnungen gehen auf Paul A. M. Dirac zurück [57], sie spielen auf die Notation mit spitzen Klammern (engl.: bra-c-ket) an.

Der »duale Jones-Raum« \mathbb{J}^* sei definiert als Menge linearer Funktionale $\{\langle\alpha|, \langle\beta|, \dots\}$ aus dem Jones-Raum \mathbb{J} in die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Anders formuliert, wird ein Vektor aus \mathbb{J} (»ket-Vektor«) durch ein Element aus \mathbb{J}^* (»bra-Vektor«) auf eine komplexe Zahl abgebildet. Dabei ist die Abbildungsvorschrift so definiert, dass der ket-Vektor $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ durch den bra-Vektor $\langle\alpha| \in \mathbb{J}^*$ auf das Skalarprodukt $\langle\alpha|\beta\rangle \in \mathbb{C}$ abgebildet wird, $\langle\alpha|(|\beta\rangle) \equiv \langle\alpha|\beta\rangle$.

Für jeden Jones-Vektor $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$ gibt es demnach einen entsprechenden »dualen Jones-Vektor« (bra-Vektor) $\langle\alpha| \in \mathbb{J}^*$ im dualen Jones-Raum. Aufgrund der Regeln für

Skalarprodukte (2.2) ist der duale Jones-Raum \mathbb{J}^* selbst ein komplexer, linearer Vektorraum.

Analog zum Entwicklungssatz (2.3) für Jones-Vektoren $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ ist ein dualer Jones-Vektor $\langle\beta| \in \mathbb{J}^*$ eindeutig definiert durch Angabe der Skalarprodukte von $|\beta\rangle$ mit den Elementen des VON-Systems $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ von \mathbb{J} ,

$$\begin{aligned} \langle\beta| &= \langle\beta|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + \langle\beta|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|, & \langle\beta| &\in \mathbb{J}^*, \\ & & \langle\alpha_1|, \langle\alpha_2| &: \text{VON-System von } \mathbb{J}^*. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\langle\beta|\alpha_1\rangle$ und $\langle\beta|\alpha_2\rangle$ des bra-Vektors $\langle\beta|$ sind offenbar konjugiert komplex zu den entsprechenden Koeffizienten der Entwicklung (2.3) des ket-Vektors $|\beta\rangle$.

Jones-Operatoren

Die Änderung eines Polarisationszustands – beispielsweise durch ein doppelbrechendes Element oder ein PDL-Element – wird mathematisch beschrieben durch die Abbildung des zugehörigen Jones-Vektors $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$ auf einen anderen Jones-Vektor $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$. Alternativ kann diese Änderung des Polarisationszustands auch als Abbildung im dualen Jones-Raum \mathbb{J}^* von $\langle\alpha|$ auf $\langle\beta|$ interpretiert werden.

Die zugehörige Abbildung \mathbf{A} , welche durch $\mathbf{A}|\alpha\rangle = |\beta\rangle$ jedem Element $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$ eindeutig ein Element $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ zuordnet, wird »Jones-Operator« \mathbf{A} genannt. Die entsprechende Abbildung im dualen Raum \mathbf{A}^\dagger , welche über $\langle\alpha|\mathbf{A}^\dagger = \langle\beta|$ dem Element $\langle\alpha| \in \mathbb{J}^*$ das Element $\langle\beta| \in \mathbb{J}^*$ zuordnet, wird als »zu \mathbf{A} adjungierter Operator« \mathbf{A}^\dagger bezeichnet. Somit wirkt \mathbf{A} im Jones-Raum \mathbb{J} so wie \mathbf{A}^\dagger im dualen Jones-Raum \mathbb{J}^* .

Zwei Operatoren \mathbf{A} und \mathbf{B} sind per Definition identisch ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), wenn für alle $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$ die Beziehung $\mathbf{A}|\alpha\rangle = \mathbf{B}|\alpha\rangle$ gilt. Der »Nulloperator« des Jones-Raums $\mathbf{0}$ ist definiert über $\mathbf{0}|\alpha\rangle \equiv |0\rangle$ für alle $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$. Entsprechend ist der »Einheitsoperator« $\mathbf{1}$ festgelegt durch $\mathbf{1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle$.

Vorsicht ist geboten bei der Anwendung eines adjungierten Operators \mathbf{A}^\dagger auf einen Vektor $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$ des Jones-Raums. Dieser Fall ist durchaus definiert, die Abbildungsvorschriften von \mathbf{A} und \mathbf{A}^\dagger im Jones-Raum \mathbb{J} sind allerdings im Allgemeinen nicht identisch, $\mathbf{A}|\alpha\rangle \neq \mathbf{A}^\dagger|\alpha\rangle$. Vereinfacht ausgedrückt, ist die Abbildungsvorschrift eines adjungierten Operators \mathbf{A}^\dagger im Jones-Raum \mathbb{J} so definiert, dass das Skalarprodukt von $\mathbf{A}^\dagger|\alpha\rangle$ mit $|\gamma\rangle$ gleich dem von $|\alpha\rangle$ mit $\mathbf{A}|\gamma\rangle$ ist. Mit Hilfe dieser Definition lässt sich einfach zeigen, dass $(\mathbf{A}^\dagger)^\dagger = \mathbf{A}$ und $(c\mathbf{A})^\dagger = c^*\mathbf{A}^\dagger$ gilt, für $c \in \mathbb{C}$.

Funktionen von Operatoren

Die Summe zweier Operatoren ($\mathbf{A} + \mathbf{B}$) ist festgelegt durch die Relation $(\mathbf{A} + \mathbf{B})|\alpha\rangle \equiv \mathbf{A}|\alpha\rangle + \mathbf{B}|\alpha\rangle$ für $|\alpha\rangle \in \mathbb{J}$, ihr Produkt durch $\mathbf{AB}|\alpha\rangle \equiv \mathbf{A}(\mathbf{B}|\alpha\rangle)$. Bei der Produktbildung wird \mathbf{A} also auf das Ergebnis von $\mathbf{B}|\alpha\rangle$ angewendet. Diese Definition wird sich als fundamental wichtig erweisen bei der Berechnung der Transmission eines Signals durch mehrere optische Elemente, beispielsweise eine Reihe verketteter doppel-

brechender Elemente mit verschachtelten PDL-Elementen. So ist die Reihenfolge der Produktbildung im Allgemeinen nicht beliebig wählbar, $\mathbf{AB}|\alpha\rangle \neq \mathbf{BA}|\alpha\rangle$. Das Signal am Ausgang des Systems hängt also entscheidend von der Reihenfolge der Elemente ab. So ist es nicht möglich, erst die Transmission des Signals durch alle Einmodenfasern (modelliert durch verkettete doppelbrechende Elemente) zu berechnen und abschließend die Jones-Operatoren aller PDL-Elemente »einzusammeln« und auf das Signal wirken zu lassen. In diesem Zusammenhang sei der »Kommutator« zweier Operatoren \mathbf{A} und \mathbf{B} definiert gemäß $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$. Das Vertauschen der Reihenfolge zweier Operatoren im Produkt ist also nur erlaubt, wenn diese »kommutieren«, wenn ihr Kommutator also gleich dem Nulloperator $\mathbf{0}$ ist. Für die Summe und das Produkt zweier Operatoren \mathbf{A} und \mathbf{B} lässt sich ferner zeigen, dass $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger$ und $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$ gelten.

Potenzen von Operatoren sind definiert über $\mathbf{A}^n|\alpha\rangle \equiv \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{A}|\alpha\rangle)$ mit $\mathbf{A}^0 \equiv \mathbf{1}$. Mit Hilfe der Regeln für Summen, Produkte und Potenzen lassen sich entsprechend Polynome und Potenzreihen aufstellen. Ein wichtiges Beispiel ist die Exponentialfunktion eines Operators \mathbf{A}

$$e^{\mathbf{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \dots, \quad (2.5)$$

welche in den folgenden Kapiteln häufig Anwendung finden wird. Für Exponentialfunktionen mehrerer Operatoren ist dabei streng auf die Reihenfolge zu achten,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} &\neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \\ &\neq e^{\mathbf{B}+\mathbf{A}} \\ &\neq e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn \mathbf{A} und \mathbf{B} kommutieren, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{0}$.

Wie in den Kapiteln 2.3 und 2.4 erläutert wird, lässt sich der Jones-Operator eines Übertragungssystems mit PMD und PDL sehr gut modellieren durch ein Produkt derartiger Exponentialfunktionen. Da die entsprechenden Operatoren im Exponenten nicht kommutieren werden, sind die Regeln (2.6) zu beachten.

Ableitung eines Operators

Die Ableitung eines Operators $\mathbf{A}(x)$ nach dem reellen Parameter x ist definiert gemäß

$$\frac{d}{dx} \mathbf{A}(x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \varepsilon) - \mathbf{A}(x)}{\varepsilon}. \quad (2.7)$$

Entsprechendes gilt für partielle Ableitungen. In späteren Kapiteln sollen auch die Abkürzungen \mathbf{A}_x und $\partial_x \mathbf{A}$ für die (partielle) Ableitung nach x verwendet werden.

Der Jones-Operator eines Systems aus doppelbrechenden Elementen – ggf. mit verschachtelten PDL-Elementen – wird sich als frequenzabhängig erweisen. Die Berechnung wichtiger Systemgrößen (wie z. B. des »PMD-Vektors«) in Kapitel 3 wird

dann mit Algorithmen erfolgen, welche auf der numerischen Differentiation des frequenzabhängigen Jones-Operators beruhen.

Lineare und hermitesche Operatoren

Ein Operator \mathbf{A} wird »linear« genannt, falls für beliebige $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{J}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ die Relation $\mathbf{A}(c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle) = c_1\mathbf{A}|\alpha\rangle + c_2\mathbf{A}|\beta\rangle$ gilt. Die Jones-Operatoren der Kapitel 3 bis 5 werden allesamt lineare Operatoren sein.

Ein Operator \mathbf{A} nennt sich »hermitesch« (»selbstadjungiert«), falls er gleich seinem adjungierten Operator ist, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$. Das Produkt zweier hermitescher Operatoren ist nur dann wiederum hermitesch, falls die beiden Operatoren kommutieren. Eine wichtige optische Komponente, welche durch einen hermiteschen Jones-Operator modelliert werden kann, ist das einfache PDL-Element. Bei der Diskussion von PDL-Elementen in Kapitel 2.4 wird sich zeigen, dass die Jones-Operatoren zweier verketteter PDL-Elemente im Allgemeinen nicht kommutieren. Somit ist der gesamte Jones-Operator ihrer Verkettung im Allgemeinen nicht hermitesch.

Projektionsoperatoren und dyadische Produkte

Für einen normierten Jones-Vektor $|\alpha\rangle$ wird der Jones-Operator $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ als »Projektionsoperator« bezeichnet. Die Anwendung des Projektionsoperators $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ auf einen ket-Vektor $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ ergibt das Resultat $|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle$, also einen ket-Vektor, welcher parallel zu $|\alpha\rangle$ ist, multipliziert mit dem Faktor $\langle\alpha|\beta\rangle$. Wird der Projektionsoperator hingegen auf einen bra-Vektor $\langle\beta| \in \mathbb{J}^*$ angewendet, so resultiert entsprechend $\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|$, also ein bra-Vektor parallel zu $\langle\alpha|$ und multipliziert mit $\langle\beta|\alpha\rangle$. Projektionsoperatoren sind sowohl linear als auch hermitesch.

Werden die Projektionsoperatoren $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|$ und $|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|$ der Elemente eines VON-Systems $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ von \mathbb{J} addiert, so resultiert der Einheitsoperator,

$$|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| = \mathbf{1}, \quad |\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle: \text{VON-System von } \mathbb{J}. \quad (2.8)$$

Diese »Vollständigkeitsrelation« ermöglicht es, die Entwicklungssätze (2.3) und (2.4) durch einfaches Anwenden des Einheitsoperators $\mathbf{1}$ auf den ket-Vektor $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ bzw. den bra-Vektor $\langle\beta| \in \mathbb{J}^*$ zu erhalten,

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= \mathbf{1}|\beta\rangle = |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|\beta\rangle + |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|\beta\rangle, \\ \langle\beta| &= \langle\beta|\mathbf{1} = \langle\beta|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| + \langle\beta|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Projektionsoperatoren sind Spezialfälle sogenannter »dyadischer Produkte« $|\alpha\rangle\langle\beta|$, wobei $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathbb{J}$ zwei (nicht notwendigerweise normierte) Jones-Vektoren sind. Dyadische Produkte sind in der Regel nicht hermitesch, es gilt $(|\alpha\rangle\langle\beta|)^\dagger = |\beta\rangle\langle\alpha|$. Projektionsoperatoren und dyadische Produkte werden beispielsweise in Kapitel 2.2.4 verwendet, um einen einfachen Zusammenhang zwischen Jones-Vektoren und »Stokes-Vektoren« herzustellen.

Inverse Operatoren

Für einen Operator \mathbf{A} mit umkehrbar eindeutiger Abbildungsvorschrift $\mathbf{A}|\alpha\rangle=|\beta\rangle$ ist der zu \mathbf{A} »inverse« Operator \mathbf{A}^{-1} definiert durch $|\alpha\rangle\equiv\mathbf{A}^{-1}|\beta\rangle$. Somit gilt $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{1}$. Weiterhin erweisen sich \mathbf{A} und \mathbf{A}^{-1} als vertauschbar (der Kommutator verschwindet). Es gelten die Regeln $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ und $(\mathbf{A}^{-1})^\dagger=(\mathbf{A}^\dagger)^{-1}$. \mathbf{A}^{-1} ist also genau dann hermitesch, wenn \mathbf{A} es ist.

Unitäre Operatoren und unitäre Transformationen

Gilt für einen Operator \mathbf{U} die Relation $\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{U}^\dagger$, so nennt er sich »unitär«. Äquivalent dazu ist die Aussage $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger=\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}=\mathbf{1}$. Das Produkt zweier unitärer Operatoren ist wiederum unitär. Das Kapitel 2.3.1 wird zeigen, dass ein doppelbrechendes Element durch einen unitären Jones-Operator beschrieben werden kann, was somit auch für die Verkettung mehrerer doppelbrechender Elemente gilt. Da eine Einmodenfaser – unter den Annahmen des Kapitels 2.1 – in sehr guter Näherung durch verkettete doppelbrechende Elemente modelliert werden kann, ist ihr zugehöriger Jones-Operator unitär. Die gesamte Theorie von PMD *ohne* PDL basiert auf unitären Jones-Operatoren.

Für einen Jones-Vektor $|\alpha\rangle$ und einen Jones-Operator \mathbf{A} werden die unitären Abbildungen $\mathbf{U}|\alpha\rangle$ bzw. $\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger$ »unitäre Transformationen« genannt. Es lässt sich zeigen, dass eine unitäre Transformation weder die Norm des Jones-Vektors $|\alpha\rangle$ ändert noch das Skalarprodukt zweier Jones-Vektoren. (Zwei orthogonale Polarisationszustände bleiben deshalb auch nach der Transmission durch eine Verkettung doppelbrechender Elemente orthogonal.) Auch bleibt ein hermitescher Operator nach unitärer Transformation hermitesch, zwei kommutierende Operatoren kommutieren auch nach einer unitären Transformation. Ebenso sind Eigenwerte (s. u.) invariant unter einer unitären Transformation.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Wird ein Jones-Vektor $|\alpha\rangle$ durch einen Jones-Operator \mathbf{A} auf einen anderen Jones-Vektor $\mathbf{A}|\alpha\rangle=|\beta\rangle$ abgebildet, so ist das Resultat $|\beta\rangle$ im Allgemeinen nicht parallel zu $|\alpha\rangle$. Für den Spezialfall, dass eine Anwendung von \mathbf{A} den Jones-Vektor $|\alpha\rangle$ bis auf einen komplexen Faktor $a\in\mathbb{C}$ nicht ändert, wird $|\alpha\rangle$ »Eigenvektor« von \mathbf{A} genannt, mit dem »Eigenwert« a . Die »Eigenwertgleichung« lautet somit $\mathbf{A}|\alpha\rangle=a|\alpha\rangle$. Als entsprechende Gleichung im dualen Jones-Raum \mathbb{J}^* ergibt sich $\langle\alpha|\mathbf{A}^\dagger=a^*\langle\alpha|$.

Ein Jones-Operator hat genau zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Ist der Jones-Operator hermitesch oder unitär, so sind diese beiden Eigenvektoren orthogonal, sie bilden, falls sie normiert werden, ein VON-System von \mathbb{J} . Die beiden Eigenwerte des hermiteschen Jones-Operators sind reell, für einen unitären Jones-Operator sind sie komplexe Zahlen vom Betrag 1, sie liegen also auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene.

Diese Regeln werden im Folgenden häufig Anwendung finden. So wird sich in Kapitel 2.3.3 zeigen, dass die »Principal States of Polarization« verketteter doppelbrechender

Elemente (*ohne* PDL) die orthogonalen Eigenvektoren eines hermiteschen Operators sind, mit reellen Eigenwerten, welche der »Differential Group Delay« entsprechen.

Zustände als Spaltenvektoren und Operatoren als Matrizen

Jeder Jones-Vektor $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ ist für ein gegebenes VON-System $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ eindeutig bestimmt durch seine Entwicklungskoeffizienten $\langle\alpha_1|\beta\rangle$ und $\langle\alpha_2|\beta\rangle$ bzgl. dieser Basis, siehe Entwicklungssatz (2.3). Diese beiden Koeffizienten sollen abgekürzt geschrieben werden als $\langle\alpha_1|\beta\rangle \equiv \beta_1$ und $\langle\alpha_2|\beta\rangle \equiv \beta_2$. Werden sie als Komponenten eines Spaltenvektors aufgefasst, so lässt sich jeder abstrakte Jones-Vektor (ket-Vektor) $|\beta\rangle \in \mathbb{J}$ einem solchen Spaltenvektor eindeutig zuordnen gemäß

$$|\beta\rangle = \mathbf{1}|\beta\rangle = |\alpha_1\rangle \underbrace{\langle\alpha_1|\beta\rangle}_{\equiv \beta_1} + |\alpha_2\rangle \underbrace{\langle\alpha_2|\beta\rangle}_{\equiv \beta_2} \equiv \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{|\alpha_{1,2}\rangle}. \quad (2.10)$$

Dabei ist die Angabe der Basis als Index unerlässlich, falls es zu Mehrdeutigkeiten bezüglich des verwendeten VON-Systems kommen könnte. Die entsprechenden dualen Jones-Vektoren (bra-Vektoren) $\langle\beta| \in \mathbb{J}^*$ haben gemäß Entwicklungssatz (2.4) Entwicklungskoeffizienten, welche konjugiert komplex zu β_1 und β_2 sind. Somit kann der duale Jones-Vektor $\langle\beta| \in \mathbb{J}^*$ eindeutig dem Zeilenvektor

$$\langle\beta| = \langle\beta|\mathbf{1} = \underbrace{\langle\beta|\alpha_1\rangle}_{\beta_1^*} \langle\alpha_1| + \underbrace{\langle\beta|\alpha_2\rangle}_{\beta_2^*} \langle\alpha_2| \equiv (\beta_1^* \quad \beta_2^*)_{\langle\alpha_{1,2}|} \quad (2.11)$$

zugeordnet werden. Durch Einsetzen der Vollständigkeitsrelation (2.8) in die Beziehung $\langle\beta|\gamma\rangle = \langle\beta|\mathbf{1}|\gamma\rangle$ folgt dann, dass das Skalarprodukt zweier Jones-Vektoren $|\beta\rangle$ und $|\gamma\rangle$ dargestellt werden kann durch das »gewöhnliche« Skalarprodukt der zugehörigen Zeilen- und Spaltenvektoren,

$$\langle\beta|\gamma\rangle = (\beta_1^* \quad \beta_2^*)_{\langle\alpha_{1,2}|} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}_{|\alpha_{1,2}\rangle} = \beta_1^* \gamma_1 + \beta_2^* \gamma_2. \quad (2.12)$$

Ganz entsprechend lassen sich Jones-Operatoren \mathbf{A} bei gegebenem VON-System $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ durch komplexe 2×2 Matrizen (»Jones-Matrizen«) darstellen. Dazu seien die Matrixelemente definiert als $A_{mn} \equiv \langle\alpha_m|\mathbf{A}|\alpha_n\rangle$, sodass sich die Zuordnung definieren lässt gemäß

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}\mathbf{A}\mathbf{1} = \sum_{m,n} |\alpha_m\rangle \underbrace{\langle\alpha_m|\mathbf{A}|\alpha_n\rangle}_{\equiv A_{mn}} \langle\alpha_n| \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{|\alpha_{1,2}\rangle}. \quad (2.13)$$

Die Anwendung des Operators \mathbf{A} auf einen Jones-Vektor $|\beta\rangle$ stimmt dann in Matrixschreibweise mit der gewöhnlichen Multiplikation »Matrix · Spaltenvektor« überein. Entsprechend wird das Produkt zweier Operatoren bei der Darstellung durch Matrizen zur gewöhnlichen Matrizenmultiplikation.

Nach diesen Definitionen ergibt sich die Matrix des zu \mathbf{A} adjungierten Operators \mathbf{A}^\dagger aus der Matrix von \mathbf{A} durch Vertauschen von Zeilen und Spalten und Übergang zum

konjugiert Komplexen. Damit muss die Matrix eines hermiteschen Operators reelle Diagonalelemente haben.

Wie bereits erläutert wurde, bilden die beiden Eigenvektoren eines hermiteschen bzw. eines unitären Jones-Operators ein VON-System von \mathbb{J} . Werden derartige Jones-Operatoren dargestellt als Matrizen bezüglich »ihres eigenen« VON-Systems, so liegen sie in Diagonalform vor. Die Diagonalelemente werden durch die beiden Eigenwerte gebildet.

Spur eines Operators

Die »Spur« eines Operators \mathbf{A} , $\text{Sp}(\mathbf{A})$, ist in Matrixschreibweise die Summe der Diagonalelemente. Sie erweist sich als unabhängig vom verwendeten VON-System und ist invariant unter einer unitären Transformation. Für Operatoren \mathbf{A} und \mathbf{B} gelten die Beziehungen $\text{Sp}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Sp}(\mathbf{A}) + \text{Sp}(\mathbf{B})$, $\text{Sp}(\mathbf{AB}) = \text{Sp}(\mathbf{BA})$ und $\text{Sp}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}) = \text{Sp}(\mathbf{A})$. Diese Relationen werden z. B. bei der Herleitung des verallgemeinerten »komplexen PMD-Vektors« für Systeme mit PMD und PDL benötigt. Mit Hilfe der Spur lässt sich auch eine Verbindung zwischen dem dyadischen Produkt $|\alpha\rangle\langle\beta|$ und dem Skalarprodukt $\langle\beta|\alpha\rangle$ aufstellen gemäß $\text{Sp}(|\alpha\rangle\langle\beta|) = \langle\beta|\alpha\rangle$.

Unitäre Operatoren mit Determinante = 1

Ein unitärer Jones-Operator \mathbf{T} lässt sich immer umschreiben zu $\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-i\phi}\mathbf{U}$ mit dem ebenfalls unitären Jones-Operator \mathbf{U} der Eigenschaft $\det(\mathbf{U}) = 1$ und einer reellen Phase ϕ . Die beiden Eigenwerte von \mathbf{T} liegen auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene (s. o.). Wegen $\det(\mathbf{U}) = 1$ muss für \mathbf{U} zudem gelten, dass das Produkt seiner beiden Eigenwerte den Wert Eins ergibt. Die Eigenwerte von \mathbf{U} lassen sich also schreiben als $\mathbf{e}^{\pm i\varphi/2}$ mit reellem φ . Diese Zusammenhänge werden unter anderem in Kapitel 2.2.5 eine zentrale Rolle spielen.

2.2.2 Klassische Polarisationszustände und abstrakte Jones-Vektoren

Nach dieser abstrakten Einführung soll nun die Verbindung zwischen den Jones-Vektoren des Jones-Raums \mathbb{J} und der klassischen Darstellung von Polarisationszuständen des Kapitels 2.1 hergestellt werden.

Dazu sei das Koordinatensystem des Kapitels 2.1 gegeben, bei dem die z -Achse in Ausbreitungsrichtung liegt, mit fest vorgegebenen x - und y -Achsen. Bezüglich dieses Koordinatensystems soll ein linearer Polarisationszustand entlang der x -Achse (»horizontal« linear polarisiert, $\psi = \chi = 0^\circ$ in Abb. 2.1 auf Seite 10) dargestellt werden durch den abstrakten Jones-Vektor $|\leftrightarrow\rangle \in \mathbb{J}$. Entsprechend sei ein linearer Polarisationszustand entlang der y -Achse (»vertikal« linear polarisiert, $\psi = 90^\circ$, $\chi = 0^\circ$) durch $|\updownarrow\rangle \in \mathbb{J}$ repräsentiert. Dabei sollen $|\leftrightarrow\rangle$ und $|\updownarrow\rangle$ als normiert angenommen werden, es gilt also $\|\leftrightarrow\rangle\| = \|\updownarrow\rangle\| = 1$ bzw. $\langle\leftrightarrow|\leftrightarrow\rangle = \langle\updownarrow|\updownarrow\rangle = 1$. Offenbar sind $|\leftrightarrow\rangle$ und $|\updownarrow\rangle$ orthogonal, $\langle\updownarrow|\leftrightarrow\rangle = \langle\leftrightarrow|\updownarrow\rangle = 0$, sie bilden somit ein VON-System des Jones-Raums \mathbb{J} , $|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow| = \mathbf{1}$.

Ein beliebiger Jones-Vektor $|S\rangle \in \mathbb{J}$ möge als Information den Polarisationszustand, die Intensität und die gemeinsame Phase des elektrischen Feldvektors (2.1) von Seite 9 enthalten gemäß

$$|S\rangle = \mathbf{1}|S\rangle = |\leftrightarrow\rangle \underbrace{\langle \leftrightarrow | S \rangle}_{\equiv s_{\leftrightarrow}} + |\updownarrow\rangle \underbrace{\langle \updownarrow | S \rangle}_{\equiv s_{\updownarrow}} = \begin{pmatrix} s_{\leftrightarrow} \\ s_{\updownarrow} \end{pmatrix}_+ \equiv e^{i\phi} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Dabei wurde im letzten Schritt zurückgegriffen auf die konventionelle Notation mit den Feldamplituden E_x und E_y , der gemeinsamen Phase ϕ und der Phasendifferenz zwischen y - und x -Komponente δ . (Die optische Intensität ist somit proportional zu $\langle S|S\rangle = E_x^2 + E_y^2$.) Zudem wurde im letzten Schritt darauf verzichtet, das gegebene VON-System explizit an den Spaltenvektor zu schreiben. Die Information über das zugrundeliegende VON-System beeinflusst aber die Werte der Amplituden E_x und E_y und den Wert der Phasendifferenz δ , während sie keinen Einfluss auf den Wert der gemeinsamen Phase ϕ hat. Ein Verzicht auf das explizite Aufführen des VON-Systems ist also nur dann zulässig, wenn keine Gefahr von Mehrdeutigkeiten besteht.

Somit lässt sich der elektrische Feldvektor der monochromatischen ebenen Welle abstrakt und unabhängig von einer (willkürlich) festgelegten Basis schreiben als

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re}[|S\rangle e^{i(\omega t - \beta z)}]. \quad (2.15)$$

Offenbar repräsentieren $|S\rangle$ und $c|S\rangle$ für einen komplexen Faktor c denselben Polarisationszustand, da durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl nur die Intensität $\langle S|S\rangle$ und die gemeinsame Phase ϕ verändert werden.

Da die Intensität keine Rolle für den Polarisationszustand spielt, wird der Jones-Vektor häufig in normierter Form angegeben. Für den weiteren Verlauf soll dabei die Konvention als vereinbart gelten, dass ein beliebiger – nicht notwendigerweise normierter – Jones-Vektor $|S\rangle \in \mathbb{J}$ durch einen Großbuchstaben und seine normierte Version

$$|s\rangle \equiv \frac{|S\rangle}{\|S\|} = \frac{|S\rangle}{\sqrt{\langle S|S\rangle}} \quad (2.16)$$

durch den zugehörigen Kleinbuchstaben gekennzeichnet werden. Als Spaltenvektor geschrieben, z. B. bezüglich des VON-Systems $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$ von \mathbb{J} , lautet der normierte Jones-Vektor dann

$$|s\rangle = \mathbf{1}|s\rangle = |\leftrightarrow\rangle \underbrace{\langle \leftrightarrow | s \rangle}_{\equiv s_{\leftrightarrow}} + |\updownarrow\rangle \underbrace{\langle \updownarrow | s \rangle}_{\equiv s_{\updownarrow}} = \begin{pmatrix} s_{\leftrightarrow} \\ s_{\updownarrow} \end{pmatrix}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} e^{i\phi} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Neben der Basis $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$ gibt es natürlich beliebig viele weitere VON-Systeme von \mathbb{J} . Ein weiteres Beispiel sind die beiden linearen Polarisationszustände im Winkel $\pm 45^\circ$ zur x -Achse ($\psi = 45^\circ$ bzw. 135° und $\chi = 0^\circ$ in Abb. 2.1 auf Seite 10). Sie sollen repräsentiert werden durch die normierten Jones-Vektoren $|\nearrow\rangle$ und $|\nwarrow\rangle$. Schließlich seien die beiden zirkularen Polarisationszustände genannt, welche in Abb. 2.1 durch $\chi = 45^\circ$ (rechts-zirkular) und $\chi = -45^\circ$ (links-zirkular) gekennzeichnet sind. Die beiden

zugehörigen abstrakten Jones-Vektoren seien mit $|\mathcal{C}\rangle$ (rechts-zirkular) und $|\mathcal{D}\rangle$ (links-zirkular) bezeichnet, entsprechend der Konvention des Kapitels 2.1. Sie werden ebenfalls als normiert angenommen.

Diese speziellen Jones-Vektoren bilden entsprechend paarweise VON-Systeme des Jones-Raums \mathbb{J} , es gelten somit folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 \text{Normierung: } & \|\leftrightarrow\rangle = \|\updownarrow\rangle = \|\swarrow\rangle = \|\searrow\rangle = \|\mathcal{C}\rangle = \|\mathcal{D}\rangle = 1 \\
 \text{Orthogonalität: } & \langle\leftrightarrow|\updownarrow\rangle = \langle\swarrow|\searrow\rangle = \langle\mathcal{C}|\mathcal{D}\rangle = 0 \\
 \text{Vollständigkeit: } & |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow| = \mathbf{1} \\
 & |\swarrow\rangle\langle\swarrow| + |\searrow\rangle\langle\searrow| = \mathbf{1} \\
 & |\mathcal{C}\rangle\langle\mathcal{C}| + |\mathcal{D}\rangle\langle\mathcal{D}| = \mathbf{1}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Somit lässt sich ein allgemeiner Jones-Vektor $|S\rangle$ darstellen als Spaltenvektor gemäß

$$\begin{aligned}
 |S\rangle = \mathbf{1}|S\rangle &= |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow|S\rangle + |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow|S\rangle = \begin{pmatrix} S_{\leftrightarrow} \\ S_{\updownarrow} \end{pmatrix}_+ \\
 &= |\swarrow\rangle\langle\swarrow|S\rangle + |\searrow\rangle\langle\searrow|S\rangle = \begin{pmatrix} S_{\swarrow} \\ S_{\searrow} \end{pmatrix}_\times \\
 &= |\mathcal{C}\rangle\langle\mathcal{C}|S\rangle + |\mathcal{D}\rangle\langle\mathcal{D}|S\rangle = \begin{pmatrix} S_{\mathcal{C}} \\ S_{\mathcal{D}} \end{pmatrix}_\circ.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Häufig wird das VON-System $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$ verwendet. Bezüglich dieses VON-Systems lauten die Spaltenvektoren der speziellen Jones-Vektoren

$$\begin{aligned}
 |\leftrightarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_+ & |\updownarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_+ \\
 |\swarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_+ & |\searrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_+ \\
 |\mathcal{C}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}_+ & |\mathcal{D}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}_+.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Die explizite Angabe des VON-Systems als Index der Spalten- / Zeilenvektoren und Matrizen soll von nun an entfallen, falls das VON-System $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$ angenommen ist.

2.2.3 Pauli-Matrizen und Karlsson-Quaternionen

Pauli-Matrizen und Pauli-Spinvektor

Der Übergang zwischen Jones-Vektoren und »Stokes-Vektoren« (siehe Kapitel 2.2.4) sowie die Darstellung wichtiger Jones-Operatoren wird wesentlich vereinfacht durch Einführung der Pauli-Matrizen σ_1 , σ_2 , σ_3 und des Pauli-Spinvektors $\vec{\sigma}$ gemäß¹

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Aufgrund häufig auftretender Missverständnisse sei betont, dass es sich bei dem Pauli-Spinvektor $\vec{\sigma}$ nicht um einen »gewöhnlichen« Spaltenvektor handelt, sondern um einen Vektor, dessen Komponenten 2×2 Matrizen sind. Das Skalarprodukt eines reellen Vektors $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T \in \mathbb{R}^3$ mit dem Pauli-Spinvektor $\vec{\sigma}$ ergibt somit die komplexe 2×2 Matrix $\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3$.

Regeln für Pauli-Matrizen

Pauli-Matrizen sind ersichtlich hermitesch ($\sigma_i^\dagger = \sigma_i$), unitär ($\sigma_i^\dagger = \sigma_i^{-1}$) und haben die Spur $\text{Sp}(\sigma_i) = 0$. Weiterhin gelten die Multiplikationsregeln $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$ und $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i = i \sigma_k$, wobei (i, j, k) eine zyklische Permutation von $(1, 2, 3)$ darstellt. Schließlich erweisen sich die Gleichungen [2]

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) &= \vec{a} \mathbf{1} + i \vec{a} \times \vec{\sigma}, \\ (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})\vec{\sigma} &= \vec{a} \mathbf{1} - i \vec{a} \times \vec{\sigma}, \\ (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) &= a^2 \mathbf{1}, \\ (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) &= (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbf{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}, \\ (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})\vec{\sigma}(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) &= 2\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) - a^2 \vec{\sigma} \end{aligned} \quad (2.22)$$

(mit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und der Länge a von \vec{a}) oftmals als hilfreich für Berechnungen im Zusammenhang mit Polarisationszuständen.

Spezielle Exponentialfunktionen

In Kapitel 2.3.1 wird sich zeigen, dass der Jones-Operator eines doppelbrechenden Elements die Struktur $e^{-i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}}$ aufweist. Die Struktur des Jones-Operators eines PDL-Elements hingegen folgt in Kapitel 2.4.1 zu $e^{\vec{b} \cdot \vec{\sigma}}$, mit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Die allgemein gültigen Beziehungen

$$e^{\pm i\vec{a} \cdot \vec{\sigma}} = \cos(a) \mathbf{1} \pm i \sin(a) (\hat{a} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.23)$$

¹ Die hier verwendeten Definitionen entsprechen den ursprünglichen Definitionen der Quantenmechanik bis auf eine permutierte Anordnung der Pauli-Matrizen. Damit bleibt gewährleistet, dass die klassischen Konventionen für »Stokes-Vektoren« erfüllt sind. Somit entspricht z. B. der lineare Polarisationszustand entlang der x -Achse $|\leftrightarrow\rangle$ auch tatsächlich dem Stokes-Vektor $\langle \leftrightarrow | \vec{\sigma} | \leftrightarrow \rangle = (1 \ 0 \ 0)^T$.

$$\mathbf{e}^{\pm \vec{a} \cdot \vec{\sigma}} = \cosh(a) \mathbf{1} \pm \sinh(a) (\hat{a} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.24)$$

(mit $\vec{a} = a\hat{a} \in \mathbb{R}^3$) werden deshalb in den Kapiteln 2.3 und 2.4 von Bedeutung sein. Sie lassen sich durch Entwicklung der Exponentialfunktion gemäß Gleichung (2.5) und unter Anwendung der Regeln für Pauli-Matrizen (2.22) einfach herleiten.

Karlsson-Quaternionen

Aufbauend auf dem Konzept des Pauli-Spinvektors haben Karlsson *et al.* in [14] eine spezielle Art von Quaternionen – von nun an »Karlsson-Quaternionen« genannt – entwickelt. Diese ähneln »gewöhnlichen« Quaternionen der Mathematik, unterscheiden sich von diesen jedoch in einigen wesentlichen Punkten, wodurch sie besser in die Polarisationsoptik integriert werden. Beispielsweise erlauben Karlsson-Quaternionen auch *komplexe* »Quaternion-Komponenten«, zudem sind Begriffe wie die »Norm eines Quaternion« anders als gewöhnlich definiert.

Karlsson-Quaternionen basieren auf dem folgenden Sachverhalt: Jede komplexe 2×2 Matrix \mathbf{M} (also auch jede Jones-Matrix) lässt sich entwickeln als Linearkombination der drei Pauli-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ mit komplexen Koeffizienten $m_0, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{C}$. Mit $\vec{m} \equiv (m_1 \ m_2 \ m_3)^T \in \mathbb{C}^3$ gilt somit

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m_0 \mathbf{1} + m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + m_3 \sigma_3 \\ &= m_0 \mathbf{1} + \vec{m} \cdot \vec{\sigma} \\ &\equiv [m_0, \vec{m}]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

In der letzten Zeile wurde die Darstellung von \mathbf{M} als »Karlsson-Quaternion« eingeführt. Somit ist das Karlsson-Quaternion einer komplexen 2×2 Matrix \mathbf{M} nichts anderes als \mathbf{M} entwickelt nach der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und den drei Pauli-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, geschrieben als $[m_0, \vec{m}]$. Die komplexen Koeffizienten $m_0, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{C}$ sind die Komponenten des Quaternion (»Quaternion-Komponenten«). m_0 wird als »Skalarteil«, \vec{m} als »Vektorteil« des Quaternion bezeichnet. Wird \mathbf{M} mithilfe der Koeffizienten $m_0, m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{C}$ explizit als Matrix ausgeschrieben,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_0 + m_1 & m_2 - i m_3 \\ m_2 + i m_3 & m_0 - m_1 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

so ergeben sich unmittelbar die Bestimmungsgleichungen für die Quaternion-Komponenten zu

$$m_0 = \frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{M}), \quad m_i = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_i \mathbf{M}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.27)$$

Falls die Spur von \mathbf{M} Null ist, verschwindet also der Skalarteil m_0 . Schließlich sei darauf hingewiesen, dass der Kommutator zweier Operatoren (Matrizen) \mathbf{A} und \mathbf{B} $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$ zwar die gleiche Schreibweise verwendet wie ein Karlsson-Quaternion $[m_0, \vec{m}] \equiv m_0 \mathbf{1} + \vec{m} \cdot \vec{\sigma}$, jedoch ersichtlich etwas anderes bedeutet.

Weiterführende Definitionen und Regeln

Das »zu \mathbf{M} konjugierte« Quaternion ist definiert als $\bar{\mathbf{M}} \equiv [m_0, -\vec{m}]$, die »Norm« von \mathbf{M} als $N[\mathbf{M}] \equiv m_0^2 - \vec{m} \cdot \vec{m}$. Somit ist die Norm von \mathbf{M} im Allgemeinen eine komplexe Zahl, für das Produkt zweier Quaternionen \mathbf{A} und \mathbf{B} hat sie die Eigenschaft $N[\mathbf{AB}] = N[\mathbf{A}]N[\mathbf{B}]$. Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich einige nützliche Aussagen treffen. So kann das Inverse des Quaternions \mathbf{M} unter Verwendung des konjugierten Quaternions $\bar{\mathbf{M}}$ und der Norm von \mathbf{M} geschrieben werden als $\mathbf{M}^{-1} = \bar{\mathbf{M}}/N[\mathbf{M}]$. Des Weiteren hat das zu \mathbf{M} adjungierte Quaternion \mathbf{M}^\dagger dessen konjugiert komplexe Quaternion-Komponenten, $\mathbf{M}^\dagger = [m_0^*, \vec{m}^*]$, und die Determinante von \mathbf{M} erweist sich als identisch zu dessen Norm, $\det(\mathbf{M}) = N[\mathbf{M}]$. Schließlich gilt die folgende – häufig verwendete – Beziehung für die Eigenwerte von \mathbf{M} :

$$\text{Eigenwerte von } \mathbf{M} \equiv [m_0, \vec{m}]: \quad m_0 \pm \sqrt{\vec{m} \cdot \vec{m}} \quad (2.28)$$

Produkte von Karlsson-Quaternionen

Mit Hilfe von Karlsson-Quaternionen lässt sich das Produkt zweier Jones-Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} auch direkt berechnen als Produkt ihrer Quaternionen,

$$\mathbf{AB} = [a_0, \vec{a}][b_0, \vec{b}] = [a_0b_0 + \vec{a} \cdot \vec{b}, a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \mathbf{i}(\vec{a} \times \vec{b})]. \quad (2.29)$$

Das Ergebnis des Produktes ist also ein Quaternion mit dem Skalarteil $a_0b_0 + \vec{a} \cdot \vec{b}$ und dem Vektorteil $a_0\vec{b} + b_0\vec{a} + \mathbf{i}(\vec{a} \times \vec{b})$. Mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich beispielsweise die Verkettung von PDL-Elementen sehr einfach berechnen [14].

Spezielle Quaternionen: Hermitesche und unitäre Jones-Operatoren

Die beiden »Grundbausteine«, aus denen die Systeme der Kapitel 3 bis 5 aufgebaut sind, sind doppelbrechende Elemente und PDL-Elemente. Erstere lassen sich durch unitäre, letztere durch hermitesche Jones-Operatoren modellieren. Die prinzipielle Struktur dieser Operatoren wurde in den Gleichungen (2.23) und (2.24) aufgezeigt. Ein erneuter Blick auf diese Gleichungen zeigt, dass auf der rechten Seite jeweils Karlsson-Quaternionen stehen:

$$e^{\pm \mathbf{i}\vec{a} \cdot \vec{\sigma}} = [\cos(a), \pm \mathbf{i} \sin(a) \hat{a}] \quad (2.30)$$

$$e^{\pm \vec{a} \cdot \vec{\sigma}} = [\cosh(a), \pm \sinh(a) \hat{a}] \quad (2.31)$$

Ganz allgemein gilt für einen Jones-Operator, dass er genau dann hermitesch ist, falls sein zugehöriges Karlsson-Quaternion reelle Komponenten m_0, m_1, m_2, m_3 hat. Dies folgt direkt aus der Darstellung (2.26) des Quaternions. Ein Jones-Operator ist hingegen genau dann unitär, wenn der Vektorteil seines Karlsson-Quaternions rein imaginär ist. Demgemäß ist der Jones-Operator von Gleichung (2.30) unitär, während der Jones-Operator der Gleichung (2.31) hermitesch ist.

2.2.4 Stokes-Vektoren und Poincaré-Kugel

Als Alternative zu Jones-Vektoren können Polarisationszustände auch mithilfe sogenannter Stokes-Vektoren dargestellt werden. Abgesehen von einer verbesserten Anschaulichkeit haben diese Vektoren zudem den Vorteil, dass sie direkt gemessen werden können. Das zugehörige Messverfahren wird beispielsweise in [12] beschrieben.

Stokes-Vektoren

Das »klassische« Vorgehen zur Definition von Stokes-Vektoren gemäß [58] oder [59] basiert auf der »klassischen« Darstellung von Jones-Vektoren, also auf Jones-Vektoren, welche bezüglich einer festen Basis als Spaltenvektoren vorliegen, siehe Kapitel 2.1 und Kapitel 2.2.2. Weitaus eleganter jedoch lassen sich Stokes-Vektoren mithilfe abstrakter Jones-Vektoren $|S\rangle \in \mathbb{J}$ unter Verwendung des Pauli-Spinvektors $\vec{\sigma}$ einführen: Sei $|S\rangle \in \mathbb{J}$ ein (nicht notwendigerweise normierter) Jones-Vektor, so ist

$$\vec{S} \equiv \langle S | \vec{\sigma} | S \rangle = \begin{pmatrix} \langle S | \sigma_1 | S \rangle \\ \langle S | \sigma_2 | S \rangle \\ \langle S | \sigma_3 | S \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

der zugehörige (nicht normierte) »Stokes-Vektor«. Seine Komponenten S_1, S_2, S_3 werden »Stokes-Parameter« genannt, sie sind reelle Zahlen, für die $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \langle S | S \rangle \equiv S_0$ gilt. Die Länge S_0 des Stokes-Vektors ist also proportional zur optischen Intensität. Beim Übergang vom Jones-Vektor $|S\rangle$ zum Stokes-Vektor \vec{S} bleibt die Information über die Intensität und über den Polarisationszustand erhalten, während die gemeinsamen Phase ϕ von $|S\rangle$ (siehe Kapitel 2.2.2) nicht im Stokes-Vektor enthalten ist. Die Menge aller Stokes-Vektoren wird als »Stokes-Raum« \mathbb{S} bezeichnet.

Alternativ können Stokes-Vektoren auch eingeführt werden über das dyadische Produkt $|S\rangle\langle S|$ des Jones-Vektors $|S\rangle \in \mathbb{J}$, dargestellt als Karlsson-Quaternion,

$$\begin{aligned} |S\rangle\langle S| &\equiv \frac{1}{2}(S_0 \mathbf{1} + S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2 + S_3 \sigma_3) \\ &\equiv \frac{1}{2}(S_0 \mathbf{1} + \vec{S} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}[S_0, \vec{S}]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nach dieser Definition entspricht der Stokes-Vektor \vec{S} dem Vektorteil des Quaternions von $|S\rangle\langle S|$, seine Länge S_0 ist durch den Skalarteil von $|S\rangle\langle S|$ gegeben. Die Äquivalenz der beiden Definitionen (2.32) und (2.33) lässt sich direkt mithilfe von Gleichung (2.27) und unter Ausnutzung von $\text{Sp}(\sigma_i |S\rangle\langle S|) = \langle S | \sigma_i | S \rangle$ zeigen.

Normierte Stokes-Vektoren

Ist nur der Polarisationszustand von Interesse, nicht jedoch die optische Intensität, so ist der normierte Stokes-Vektor die geeignete Darstellungsform. Er ist definiert gemäß

$$\hat{s} \equiv \frac{\vec{S}}{S_0} = \frac{\langle S | \vec{\sigma} | S \rangle}{\langle S | S \rangle} = \langle s | \vec{\sigma} | s \rangle = \begin{pmatrix} \langle s | \sigma_1 | s \rangle \\ \langle s | \sigma_2 | s \rangle \\ \langle s | \sigma_3 | s \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

wobei der normierte Jones-Vektor $|s\rangle$ von Gleichung (2.16) verwendet wurde. Somit gilt ersichtlich $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$. Analog zu Gleichung (2.33) lässt sich dann das Karlsson-Quaternion des Projektionsoperators $|s\rangle\langle s|$ schreiben als

$$\begin{aligned} |s\rangle\langle s| &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \hat{s} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}[1, \hat{s}]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Notation von Jones- und Stokes-Vektoren

Entsprechend der bisherigen Schreibweise sollen von nun an allgemeine Jones-Vektoren $|S\rangle$ und allgemeine Stokes-Vektoren \vec{S} durch Großbuchstaben, normierte Jones-Vektoren $|s\rangle$ und normierte Stokes-Vektoren \hat{s} hingegen durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet werden. Gleiches gilt für die Stokes-Parameter S_0, S_1, S_2, S_3 und s_1, s_2, s_3 . Ein normierter Stokes-Vektor \hat{s} erhält zudem ein »Dach«, ein nicht normierter Stokes-Vektor \vec{S} hingegen einen Vektorpfeil.

Stokes-Vektoren bei gegebener Basis

Wird der Jones-Vektor $|S\rangle$ bezüglich des gebräuchlichen VON-Systems $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$ als Spaltenvektor geschrieben, siehe Gleichung (2.14) auf Seite 19, so folgt die »klassische« Darstellung von Stokes-Vektoren,

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle S | S \rangle = E_x^2 + E_y^2, \\ \vec{S} &= \begin{pmatrix} \langle S | \sigma_1 | S \rangle \\ \langle S | \sigma_2 | S \rangle \\ \langle S | \sigma_3 | S \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^2 - E_y^2 \\ 2E_x E_y \cos(\delta) \\ 2E_x E_y \sin(\delta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Für ein intuitives Verständnis von Stokes-Vektoren ist jedoch eine andere Darstellung günstiger. Dazu sei der Jones-Vektor $|S\rangle$ gemäß Gleichung (2.19) von Seite 20 bezüglich unterschiedlicher VON-Systeme dargestellt, und zwar bezüglich $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle, |\nearrow\rangle, |\searrow\rangle$ und $|\odot\rangle, |\ominus\rangle$. Unter Verwendung der resultierenden Vektorkomponenten $S_{\leftarrow}, S_{\rightarrow}$ sowie $S_{\nearrow}, S_{\searrow}$ und S_{\odot}, S_{\ominus} lassen sich die Stokes-Parameter schließlich schreiben in der eingängigen Form

$$\begin{aligned} S_0 &= |S_{\leftarrow}|^2 + |S_{\rightarrow}|^2 & S_1 &= |S_{\leftarrow}|^2 - |S_{\rightarrow}|^2 \\ &= |S_{\nearrow}|^2 + |S_{\searrow}|^2 & S_2 &= |S_{\nearrow}|^2 - |S_{\searrow}|^2 \\ &= |S_{\odot}|^2 + |S_{\ominus}|^2 & S_3 &= |S_{\odot}|^2 - |S_{\ominus}|^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Weitere Beziehungen zwischen Jones-Vektoren und Stokes-Vektoren

Durch Anwendung des Projektionsoperators $|s\rangle\langle s|$ der Gleichung (2.35) auf den normierten Jones-Vektor $|s\rangle$ lässt sich eine weitere nützliche Verbindung zwischen Jones- und Stokes-Vektoren aufzeigen: Der normierte Jones-Vektor $|s\rangle$ ist Eigenvektor von $\hat{s} \cdot \vec{\sigma}$ mit dem Eigenwert Eins, es gilt also

$$\hat{s} \cdot \vec{\sigma} |s\rangle = |s\rangle. \quad (2.38)$$

Die Darstellung (2.35) des Projektionsoperators $|s\rangle\langle s|$ kann zudem dazu verwendet werden, eine Verbindung zwischen Skalarprodukten im Jones- und im Stokes-Raum herzuleiten. Für zwei normierte Jones-Vektoren $|a\rangle, |b\rangle$ und die zugehörigen normierten Stokes-Vektoren \hat{a}, \hat{b} lautet sie

$$|\langle a|b\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \hat{a} \cdot \hat{b}). \quad (2.39)$$

Orthogonale Jones-Vektoren entsprechen somit antiparallelen Stokes-Vektoren.

Poincaré-Kugel

Der normierte Stokes-Vektor $\hat{s} = (s_1 \ s_2 \ s_3)^T$ enthält als einzige Information den Polarisationszustand: Durch den Übergang vom Jones-Raum in den Stokes-Raum ist die Information über die gemeinsame Phase und durch Normierung die Information über die Intensität entfernt worden.

Werden die Komponenten s_1, s_2, s_3 von \hat{s} als kartesische Koordinaten eines Punktes auf der Einheitskugel ($s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$) interpretiert, so entspricht jeder Punkt der Kugel eindeutig einem Polarisationszustand. Diese Einheitskugel wird »Poincaré-Kugel« genannt, sie ist in Abb. 2.2 dargestellt. Die sphärischen Koordinaten $(2\psi, 2\chi)$ des Punktes

$$\begin{aligned} s_1 &= \cos(2\chi) \cdot \cos(2\psi), \\ s_2 &= \cos(2\chi) \cdot \sin(2\psi), \\ s_3 &= \sin(2\chi) \end{aligned} \quad (2.40)$$

entsprechen den Winkeln ψ und χ der Polarisationsellipse der Abb. 2.1 von Seite 10 [59]. Somit lässt sich ein Polarisationszustand eindeutig festlegen entweder durch Angabe der Komponenten s_1, s_2, s_3 oder durch Angabe des Winkelpaares 2ψ und 2χ . Unter anderem das Kapitel 4 wird davon ausgiebig Gebrauch machen. Der Wertebereich dieser Winkel 2ψ und 2χ ist gemäß Kapitel 2.1 festgelegt zu $0 \leq 2\psi < 360^\circ$ und $-90^\circ \leq 2\chi \leq 90^\circ$.

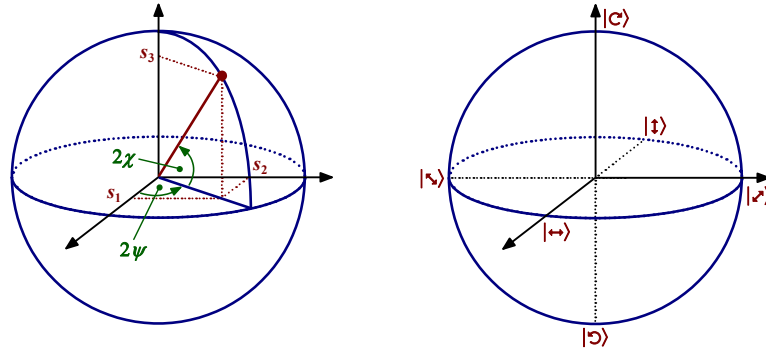


Abb. 2.2: Poincaré-Kugel: Jeder Punkt auf der Oberfläche dieser Einheitskugel entspricht eindeutig einem Polarisationszustand. Die kartesischen Koordinaten s_1 , s_2 , s_3 eines Punktes bzw. dessen sphärische Koordinaten 2ψ und 2χ legen somit eindeutig einen Polarisationszustand fest. Zum Vergleich sind auf der rechten Seite einige ausgezeichnete Jones-Vektoren eingetragen, zur Definition dieser abstrakten Zustände siehe Kapitel 2.2.2. Somit entspricht der »Nordpol« der Kugel einem rechts-zirkularen und der »Südpol« einem links-zirkularen Polarisationszustand. Punkte auf dem »Äquator« stellen unterschiedliche lineare Polarisationszustände dar.

2.2.5 Rotationsachse und Rotationswinkel eines unitären Jones-Operators

Die Wirkung eines unitären Jones-Operators lässt sich anschaulich als Rotation von Stokes-Vektoren auf der Poincaré-Kugel darstellen. Mit Hilfe der Achse und des Winkels dieser Rotation kann der Operator dann sehr kompakt geschrieben werden.

Um dies zu zeigen, sei an die Ergebnisse des Kapitels 2.2.1 erinnert: Die beiden Eigenvektoren eines unitären Jones-Operators \mathbf{T} sind orthogonal, die zugehörigen komplexen Eigenwerte haben den Betrag Eins. Wird \mathbf{T} umgeschrieben zu $\mathbf{T} = e^{-i\phi_0} \mathbf{U}$ mit $\det(\mathbf{U}) = 1$ und der reellen Phase ϕ_0 , so nehmen die Eigenwerte des (ebenfalls unitären) Operators \mathbf{U} die Form $e^{\pm i\varphi/2}$ an, mit reellem φ . Die Eigenwertgleichung von \mathbf{U} kann somit geschrieben werden als $\mathbf{U}|r_{\pm}\rangle = e^{\mp i\varphi/2}|r_{\pm}\rangle$, wobei die Eigenvektoren $|r_+\rangle$ und $|r_-\rangle$ orthogonal und normiert sind, es gilt also $\langle r_+|r_-\rangle = 0$ und $\langle r_{\pm}|r_{\pm}\rangle = 1$.

Die beiden Eigenvektoren $|r_+\rangle$ und $|r_-\rangle$ stellen also ein VON-System des Jones-Raums dar. Wird die Vollständigkeitsrelation $|r_+\rangle\langle r_+| + |r_-\rangle\langle r_-| = \mathbf{1}$ auf \mathbf{U} angewendet, ergibt sich unmittelbar $\mathbf{U} = e^{-i\varphi/2}|r_+\rangle\langle r_+| + e^{+i\varphi/2}|r_-\rangle\langle r_-|$. Werden nun die orthogonalen Jones-Vektoren $|r_{\pm}\rangle$ gemäß $|r_{\pm}\rangle\langle r_{\pm}| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \hat{r} \cdot \vec{\sigma})$ durch die zugehörigen antiparallelen Stokes-Vektoren $\pm \hat{r}$ ersetzt, so ergibt sich nach kurzer Rechnung der unitäre Jones-Operator \mathbf{U} in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \cos(\varphi/2)\mathbf{1} - i\sin(\varphi/2)(\hat{r} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= e^{-i(\varphi/2)\hat{r} \cdot \vec{\sigma}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Im letzten Schritt wurde die Gleichung (2.23) von Seite 21 angewendet. Somit lässt sich jeder unitäre Jones-Operator \mathbf{U} , welcher die Eigenschaft $\det(\mathbf{U}) = 1$ besitzt, in der Form $e^{-i(\varphi/2)\hat{r} \cdot \vec{\sigma}}$ darstellen. Dabei entspricht \hat{r} dem Eigenvektor $|r_+\rangle$ von \mathbf{U} zum Eigenwert $e^{-i\varphi/2}$ nach Transformation in den Stokes-Raum, $\hat{r} \equiv \langle r_+|\vec{\sigma}|r_+\rangle$.

Für einen allgemeinen unitären Jones-Operator \mathbf{T} gilt also

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{U} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{e}^{-i(\varphi/2)\hat{r}\cdot\vec{\sigma}}. \quad (2.42)$$

Die anschauliche Bedeutung dieser Gleichung wird ersichtlich, wenn \mathbf{T} auf einen Jones-Vektor $|s\rangle$ wirkt, $\mathbf{T}|s\rangle = |t\rangle$. Dabei sei $|s\rangle$ als normiert angenommen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, da der unitäre Operator \mathbf{T} gemäß Kapitel 2.2.1 die Norm nicht ändert. Der zugehörige Stokes-Vektor vor Anwendung von \mathbf{T} lautet $\hat{s} = \langle s|\vec{\sigma}|s\rangle$, nach Anwendung von \mathbf{T} wird daraus $\hat{t} = \langle t|\vec{\sigma}|t\rangle$ und somit $\hat{t} = \langle s|\mathbf{T}^\dagger\vec{\sigma}\mathbf{T}|s\rangle$. Durch Einsetzen von \mathbf{T} gemäß Gleichung (2.42) folgt – mithilfe der Regeln (2.22) für Pauli-Matrizen und unter strenger Beachtung der Vertauschbarkeitsregeln von Operatoren – schließlich das einfach zu deutende Resultat

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \langle s|\mathbf{T}^\dagger\vec{\sigma}\mathbf{T}|s\rangle \\ &= \cos(\varphi)\hat{s} + (1 - \cos(\varphi))\hat{r}(\hat{r}\cdot\hat{s}) + \sin(\varphi)\hat{r}\times\hat{s} \\ &= \hat{s} + \sin(\varphi)\hat{r}\times\hat{s} + (1 - \cos(\varphi))\hat{r}\times\hat{r}\times\hat{s} \\ &\equiv \mathbf{R}\hat{s}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Somit entspricht die Anwendung eines unitären Operators $\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{U} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{e}^{-i(\varphi/2)\hat{r}\cdot\vec{\sigma}}$ auf den Jones-Vektor $|s\rangle$ einer rechtshändigen Rotation des Stokes-Vektors $\hat{s} = \langle s|\vec{\sigma}|s\rangle$ auf der Poincaré-Kugel mit dem Winkel φ um die Achse \hat{r} . Diese Rotation ist in Abb. 2.3 veranschaulicht. Die entsprechende Rotationsmatrix \mathbf{R} wird »Müller-Matrix« genannt, sie ist orthogonal, d. h. es gilt $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$.

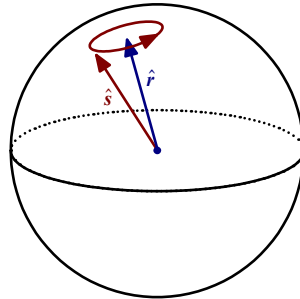


Abb. 2.3: Rotation des Stokes-Vektors $\hat{s} = \langle s|\vec{\sigma}|s\rangle$ auf der Poincaré-Kugel um die Achse \hat{r} (mit dem Winkel φ) als Folge der Anwendung des unitären Jones-Operators $\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{U} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{e}^{-i(\varphi/2)\hat{r}\cdot\vec{\sigma}}$ auf den Jones-Vektor $|s\rangle$.

Weiter verdeutlicht werden diese Zusammenhänge, indem die Rotation in differentieller Form geschrieben wird. Diese folgt aus Gleichung (2.43) im Grenzfall kleiner Winkel φ zu

$$\frac{d}{d\varphi}\hat{s} = \hat{r}\times\hat{s}. \quad (2.44)$$

Der unitäre Jones-Operator eines doppelbrechenden Elements, welcher in Kapitel 2.3.1 analysiert wird, ist ein wichtiges Beispiel. Dort ergibt sich als Rotationsachse \hat{r} die »Doppelbrechungsachse« des Elements (in den Stokes-Raum transformiert), während

der Winkel φ proportional ist zur »Differenz der effektiven Brechzahlen« $\Delta\bar{n}$, zur Kreisfrequenz ω und zur Länge L des Elements.

2.2.6 Polarisationsgrad (DOP)

Alle bisherigen Betrachtungen sind von monochromatischen ebenen Wellen ausgegangen oder – anders formuliert – von *einer* Frequenzkomponente eines optischen Signals. Dabei war der Polarisationszustand durch Angabe des Jones-Vektors $|S\rangle$ bzw. des Stokes-Vektors $\vec{S} \equiv \langle S|\vec{\sigma}|S\rangle$ (bzw. durch ihre normierten Entsprechungen) oder durch das Winkelpaar 2ψ und 2χ der Poincaré-Kugel eindeutig bestimmt.

Am Eingang eines faseroptischen Systems haben die Frequenzkomponenten des Signals in der Regel die Eigenschaft, dass sie allesamt den gleichen Polarisationszustand aufweisen. Das Signal wird dann als »vollständig polarisiert« (oft auch einfach als »polarisiert«) bezeichnet. Bei einem solchen polarisierten Signal hängt weder der normierte Stokes-Vektor \hat{s} noch das Winkelpaar 2ψ und 2χ von der Frequenz ab. Der nicht normierte Stokes-Vektor \vec{S} und der nicht normierte Jones-Vektor $|S\rangle$ sind hingegen sehr wohl frequenzabhängig, da sie die Information der spektralen Leistungsdichte enthalten. Genauer formuliert, ist $\langle S|S\rangle$ und damit auch die Länge des Stokes-Vektors \vec{S} proportional zur spektralen Leistungsdichte des Signals (siehe Kapitel 2.2.2) und somit in jedem (praxisrelevanten) Fall frequenzabhängig. Schließlich kann auch der *normierte* Jones-Vektor $|s\rangle$ eines vollständig polarisierten Signals von der Frequenz abhängen, da er neben dem Polarisationszustand auch die Information über die gemeinsame Phase ϕ enthält, siehe Gleichung (2.17) auf Seite 19. Ist diese frequenzabhängig, so ist es auch $|s\rangle$.

Ein PDL-Element lässt sich in guter Näherung durch einen frequenzunabhängigen Jones-Operator modellieren, siehe Kapitel 2.4.1. Demgegenüber erweist sich der Jones-Operator eines doppelbrechenden Elements in Kapitel 2.3.1 als abhängig von der Frequenz. (Es handelt sich dabei um einen unitären Operator, welcher eine Rotation im Stokes-Raum bewirkt mit einem Rotationswinkel φ proportional zur Kreisfrequenz ω .) Deshalb ist auch der Jones-Operator verketteter doppelbrechender Elemente – mit oder ohne verschachtelter PDL-Elemente – eine Funktion der Frequenz. Wirkt dieser frequenzabhängige Jones-Operator auf den Jones-Vektor einer Frequenzkomponente, hängt das Ergebnis ab von der Frequenz dieser Komponente. Der Polarisationszustand am Ausgang eines oder mehrerer doppelbrechender Elemente ist somit im Allgemeinen nicht für alle Frequenzkomponenten identisch. Das Signal ist nicht mehr vollständig polarisiert, es ist zu einem gewissen Grad »depolarisiert«.

Um eine Aussage treffen zu können, wie stark ein Signal depolarisiert ist, werden die nicht normierten Stokes-Vektoren $\vec{S} = (S_0 \ S_1 \ S_2 \ S_3)^T$ der einzelnen Frequenzkomponenten betrachtet. Ihre jeweilige Länge $S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ ist proportional zur spektralen Leistungsdichte. Da die Stokes-Parameter – gemäß der obigen Diskussion – frequenzabhängig sind, sollen sie nun geschrieben werden als $S_0(\omega)$, $S_1(\omega)$, $S_2(\omega)$ und $S_3(\omega)$. Ihr jeweiliger spektraler Mittelwert sei mit $\langle S_i \rangle$ ($i = 0, 1, 2, 3$) bezeichnet. Diese spektral

gemittelten Stokes-Parameter definieren schließlich den »DOP-Vektor« (engl.: Degree of Polarization) gemäß

$$\vec{s}_{\mathcal{D}} \equiv \frac{1}{\langle S_0 \rangle} \begin{pmatrix} \langle S_1 \rangle \\ \langle S_2 \rangle \\ \langle S_3 \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Für ein vollständig polarisiertes Signal gilt $\langle S_0 \rangle = \sqrt{\langle S_1 \rangle^2 + \langle S_2 \rangle^2 + \langle S_3 \rangle^2}$, der DOP-Vektor $\vec{s}_{\mathcal{D}}$ hat die Länge Eins. Für ein nicht polarisiertes Signal hingegen erweist sich die Länge des DOP-Vektors $\vec{s}_{\mathcal{D}}$ als umso geringer, je mehr sich die Polarisationszustände der Frequenzkomponenten unterscheiden. Somit ist die Länge des DOP-Vektors, genannt »DOP«

$$\mathcal{D} \equiv \|\vec{s}_{\mathcal{D}}\| = \frac{\sqrt{\langle S_1 \rangle^2 + \langle S_2 \rangle^2 + \langle S_3 \rangle^2}}{\langle S_0 \rangle}, \quad (2.46)$$

ein geeignetes Maß für den Grad der Polarisation. Die DOP hat ersichtlich den Wertebereich $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$, wobei $\mathcal{D} = 1$ für ein vollständig polarisiertes Signal gilt, während ein vollständig depolarisiertes Signal die DOP $\mathcal{D} = 0$ hat.

Unter anderem in Kapitel 5 wird die DOP eine wichtige Rolle spielen, dort wird sie eingesetzt als Rückkopplungssignal von PMD-Kompensatoren. Dabei wird – grob gesprochen – ausgenutzt, dass ein Signal umso mehr durch PMD verzerrt ist, je geringer sein Polarisationsgrad ist. Falls mithilfe optischer Komponenten am Ausgang des Systems – im einfachsten Fall mithilfe eines einzelnen doppelbrechenden Elements – erreicht werden kann, dass die DOP ansteigt, so nimmt die Verzerrung aufgrund von PMD ab.

2.3 Doppelbrechende Elemente

Die Einmodenfaser wurde in Kapitel 2.1 als ideal isotrop angesetzt, die elektrische Polarisation \vec{P} war also durch einen Skalar mit der elektrischen Feldstärke \vec{E} verknüpft. Als Folge dieser Annahme hängt die effektive Brechzahl \bar{n} der Grundmode nicht vom Polarisationszustand ab, gleiches gilt für die Ausbreitungskonstante $\beta = \bar{n}(\omega/c)$. Orthogonal polarisierte Varianten der Grundmode (»Polarisationsmoden«) sind somit entartet. Dies hat beispielsweise zur Folge, dass sich Polarisationszustände entlang dieser ideal zylindersymmetrischen Faser nicht ändern.

Aufgrund von Störungen der Zylindersymmetrie wird die Entartung jedoch aufgehoben. Kommt es beispielsweise bei der Faserherstellung zu Abweichungen bezüglich der Kreisförmigkeit des Faserkerns, so führt dies zu inneren Spannungen der Faser. Diese bewirken, dass die effektive Brechzahl vom Polarisationszustand abhängt, die Faser wird »doppelbrechend«. Äußerer Druck sowie das Verdrillen und Verbiegen der Faser beim Aufspulen, Verkabeln und Verlegen führen ebenso zu Störungen der Zylindersymmetrie. Diese äußeren Einflüsse – und somit auch die Stärke und Richtung der Doppelbrechung – ändern sich sowohl entlang der Strecke als auch mit der Zeit,

letzteres durch eine schwankende Umgebungstemperatur oder aufgrund von mechanischen Bewegungen.

Zumeist bewirken diese Störungen das Auftreten von »linearer Doppelbrechung«. In einem solchen Fall existiert ein ausgezeichneter linearer Polarisationszustand, welcher die erhöhte Brechzahl \bar{n}_+ »sieht«, sowie ein dazu orthogonaler Polarisationszustand mit verringerter Brechzahl \bar{n}_- . Diese ausgezeichneten Polarisationszustände sind im Stokes-Raum antiparallel, sie liegen bei linearer Doppelbrechung auf dem Äquator der Poincaré-Kugel. Weiterhin ist das Auftreten von »zirkularer Doppelbrechung« – beispielsweise aufgrund des Verdrillens von Fasern – ebenfalls möglich. Die ausgezeichneten Polarisationszustände liegen dann an den Polen der Poincaré-Kugel.

Eine Faser, bei der sich die Doppelbrechung entlang der Strecke in Stärke und Richtung ändert, lässt sich in guter Näherung durch die Verkettung einer »großen« Zahl sogenannter »doppelbrechender Elemente« modellieren. Die strenge Definition dieser Elemente erfolgt in Kapitel 2.3.1. Vergleiche von Experimenten, Simulationen und Emulationen in [1], [7] und [60] haben ergeben, dass die statistischen Eigenschaften von $N \gg 10$ verketteten doppelbrechenden Elementen (unterschiedlicher Richtung und Stärke) denen tatsächlich verwendeter Fasern sowohl bezüglich der Scharstatistik als auch bezüglich der Wellenlängenstatistik entsprechen. Dabei ist die Art der verwendeten doppelbrechenden Elemente (linear, zirkular oder allgemein elliptisch doppelbrechend) im Grenzfall einer großen Anzahl N nicht von Belang.

In Kapitel 2.3.1 soll zunächst der Grundbaustein des Fasermodells, das (allgemein elliptisch) doppelbrechende Element, analysiert werden. Daraufhin werden in den Kapiteln 2.3.2 bis 2.3.5 Verkettungen doppelbrechender Elemente untersucht, wobei wichtige Begriffe und Konzepte eingeführt werden, welche in nachfolgenden Kapiteln eine wichtige Rolle spielen.

Das gesamte Kapitel 2.3 basiert auf der Annahme, dass im System keine polarisationsabhängige Dämpfung (PDL) auftritt. Folglich werden alle Jones-Operatoren des Kapitels 2.3 unitär sein, sie beschreiben also eine Rotation im Stokes-Raum.

2.3.1 Ein doppelbrechendes Element

Definitionen

Elemente mit reiner Doppelbrechung lassen sich definieren als optische Elemente, deren Jones-Operatoren frequenzunabhängige orthogonale Eigenvektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ besitzen, welche durch unterschiedliche effektive Brechzahlen \bar{n}_+ bzw. \bar{n}_- ($\bar{n}_+ \geq \bar{n}_-$) charakterisiert sind. Die Differenz der effektiven Brechzahlen $\Delta\bar{n} \equiv \bar{n}_+ - \bar{n}_-$ sei für ein Element mit reiner Doppelbrechung unabhängig von der Frequenz. Die orthogonalen Eigenvektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ seien normiert, $\langle \pm | \pm \rangle = 1$. Sie bilden somit ein VON-System des Jones-Raums, es gilt die Vollständigkeitsrelation $|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| = \mathbf{1}$.

Gemäß dieser Definition sind die Eigenvektoren durch unterschiedliche effektive Brechzahlen \bar{n}_+ bzw. \bar{n}_- und somit auch durch unterschiedliche Ausbreitungs-

konstanten $\beta_{\pm} \equiv \bar{n}_{\pm}(\omega/c)$ charakterisiert. Deren Differenz wird häufig »Doppelbrechung« genannt und als $\Delta\beta \equiv \beta_+ - \beta_- = \Delta\bar{n}(\omega/c)$ bezeichnet. Da die Differenz der effektiven Brechzahlen $\Delta\bar{n}$ gemäß obiger Definition nicht von der Frequenz abhängt, ist die Ableitung der Doppelbrechung $\Delta\beta$ nach der Kreisfrequenz ω gegeben durch $\Delta\beta_{\omega} = \Delta\bar{n}/c$ und somit ebenfalls unabhängig von der Frequenz. Die Größe $\Delta\beta_{\omega} = \Delta\bar{n}/c$ (manchmal in der Literatur auch $\Delta\beta_1$ genannt) wird die anschauliche Bedeutung einer Differenz von Gruppenlaufzeiten pro Länge erhalten, siehe unten. Multipliziert mit der Länge L des doppelbrechenden Elements folgt die Differenz der Gruppenlaufzeiten, welche als »DGD« $\Delta\tau \equiv \Delta\beta_{\omega}L$ bezeichnet wird (engl.: Differential Group Delay). Für ein Element mit reiner Doppelbrechung gilt also $\Delta\tau = (\Delta\bar{n}/c)L$, die DGD ist in diesem Fall unabhängig von der Frequenz und proportional zur Länge L . Weiterhin gilt $\Delta\tau\omega = \Delta\beta L$.

Da die beiden Eigenvektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ orthogonal sind, sind ihre zugehörigen Stokes-Vektoren $\hat{s}_{\pm} \equiv \langle \pm | \vec{\sigma} | \pm \rangle$ antiparallel, $\hat{s}_+ = -\hat{s}_-$. Der Stokes-Vektor \hat{s}_+ wird häufig vereinfacht »Richtung« des doppelbrechenden Elements genannt. Weiterhin wird das Produkt aus Doppelbrechung $\Delta\beta$ und Richtung \hat{s}_+ als »Doppelbrechungsvektor« $\vec{\beta} \equiv \Delta\beta \hat{s}_+$ bezeichnet. (Die naheliegende Bezeichnung $\Delta\vec{\beta}$ ist in der Literatur unüblich, deshalb soll auch hier das gebräuchliche $\vec{\beta}$ verwendet werden.) Da der Eigenvektor $|+\rangle$ frequenzunabhängig ist, gilt selbiges für seinen Stokes-Vektor \hat{s}_+ , sodass die Ableitung des Doppelbrechungsvektors $\vec{\beta}$ nach der Kreisfrequenz $\vec{\beta}_{\omega} = \Delta\beta_{\omega} \hat{s}_+ = (\Delta\bar{n}/c) \hat{s}_+$ ergibt.

Einfaches Beispiel

Bevor der Jones-Operator eines allgemeinen doppelbrechenden Elements aufgestellt wird, soll als einleitendes Beispiel die Wirkung eines einfachen *linear* doppelbrechenden Elements untersucht werden. Dazu sei das Koordinatensystem des Kapitels 2.1 angenommen, bei dem die x - und y -Achsen entlang der Symmetrieachsen des Elements ausgerichtet sind: Das Element habe für monochromatische ebene Wellen, welche linear entlang der x -Achse polarisiert sind, die erhöhte Brechzahl \bar{n}_+ und entlang der y -Achse die verringerte Brechzahl \bar{n}_- . Für die Eigenvektoren des Jones-Operators ist also der einfache Fall $|+\rangle = |\leftrightarrow\rangle$ und $|-\rangle = |\updownarrow\rangle$ angenommen, dies entspricht im Stokes-Raum $\hat{s}_{\pm} = (\pm 1 \ 0 \ 0)^T$.

Somit gelten für die x - und y -Komponenten des elektrischen Feldvektors (2.1) von Seite 9 unterschiedliche Ausbreitungskonstanten $\beta_{\pm} = \bar{n}_{\pm}(\omega/c)$. Der elektrische Feldvektor hängt also nicht mehr entsprechend Gleichung (2.1) von Ort z und Zeit t ab, sondern gemäß

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \text{Re} \left[e^{i\phi} \begin{pmatrix} E_x \cdot e^{i(\omega t - \beta_+ z)} \\ E_y e^{i\delta} \cdot e^{i(\omega t - \beta_- z)} \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{Re} \left[e^{i\phi} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i(\delta + \Delta\bar{n}(\omega/c)z)} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_+ z)} \right]. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Für dieses speziell ausgerichtete linear doppelbrechende Element wächst offenbar die Phasendifferenz zwischen y - und x -Komponente linear mit dem Produkt ωz an, also linear sowohl entlang der Strecke als auch mit steigender Frequenz. Dies führt zu einer frequenzabhängigen Änderung des Polarisationszustands entlang des doppelbrechenden Elements.

Jones-Operator

Durch entsprechend verallgemeinerte Überlegungen lässt sich der Jones-Operator \mathbf{T} eines doppelbrechenden Elements mit beliebiger elliptischer Doppelbrechung aufstellen. Er erweist sich als unitär, womit er die allgemeine Struktur unitärer Operatoren hat, wie sie in Gleichung (2.42) auf Seite 28 dargestellt wurde, $\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{U} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{e}^{-i(\varphi/2)\hat{r}\cdot\vec{\sigma}}$. Die Rotationsachse \hat{r} erweist sich bei einem doppelbrechenden Element als identisch zum Stokes-Vektor $\hat{s}_+ \equiv \langle +|\vec{\sigma}|+ \rangle$, sie entspricht also dem Eigenvektor $|+\rangle$ mit erhöhter effektiver Brechzahl \bar{n}_+ . Weiterhin ist der Rotationswinkel φ gegeben durch $\Delta\beta L = \Delta\bar{n}(\omega/c)L$, also durch das Produkt aus Doppelbrechung $\Delta\beta$ und Länge L des Elements. Mit Hilfe der oben eingeführten DGD lässt sich der Rotationswinkel auch als Produkt aus DGD $\Delta\tau$ und Kreisfrequenz ω schreiben, $\Delta\beta L = \Delta\tau \omega$. Schließlich folgt die polarisationsunabhängige Phase ϕ_0 des Jones-Operators zu $\phi_0 = [(\beta_+ + \beta_-)/2]L$.

Somit lässt sich der Jones-Operator eines doppelbrechenden Elements der Länge L , der Richtung $\hat{s}_+ \equiv \langle +|\vec{\sigma}|+ \rangle$ und der Doppelbrechung $\Delta\beta$ schreiben gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{e}^{-i\phi_0} \mathbf{e}^{-i\frac{\Delta\beta L}{2}\hat{s}_+\cdot\vec{\sigma}}, & \Delta\beta &= \Delta\bar{n}(\omega/c), \\ & & L &: \text{Länge des Elements,} \\ & & \hat{s}_+ &: \text{Stokes-Vektor des Eigenvektors } |+\rangle, \\ \phi_0 &= \frac{\beta_+ + \beta_-}{2}L. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Alternativ kann der Jones-Operator auch durch Anwendung von Gleichung (2.30) auf Seite 23 durch ein Karlsson-Quaternion ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{e}^{-i\phi_0} \left(\cos\left(\frac{\Delta\beta L}{2}\right) \mathbf{1} - i \sin\left(\frac{\Delta\beta L}{2}\right) (\hat{s}_+ \cdot \vec{\sigma}) \right) \\ &= \mathbf{e}^{-i\phi_0} \left[\cos\left(\frac{\Delta\beta L}{2}\right), -i \sin\left(\frac{\Delta\beta L}{2}\right) \hat{s}_+ \right]. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Der Vektorteil des Karlsson-Quaternions ist also erwartungsgemäß rein imaginär, zudem ergibt die Berechnung der Quaternionen-Norm den Wert Eins.

Als letzte Darstellung soll der Jones-Operator des doppelbrechenden Elements bezüglich »seines eigenen« VON-Systems $|+\rangle$, $|-\rangle$ als 2×2 Matrix geschrieben werden. Werden dazu die Eigenwerte des Karlsson-Quaternions [mithilfe von Gleichung (2.28) auf Seite 23] berechnet, so ergibt sich

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-i\phi_0} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-i\frac{\Delta\beta L}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{+i\frac{\Delta\beta L}{2}} \end{pmatrix}_{\pm}. \quad (2.50)$$

Der Jones-Operator liegt dann als Jones-Matrix in Diagonalform vor, wobei die beiden Eigenwerte in der Diagonale stehen. Wirkt diese Jones-Matrix auf einen Jones-Vektor $|S\rangle$, dargestellt als Spaltenvektor im VON-System $|+\rangle$, $|-\rangle$ gemäß

$$|S\rangle = \mathbf{1}|S\rangle = |+\rangle \underbrace{\langle +|S\rangle}_{\equiv S_+} + |-\rangle \underbrace{\langle -|S\rangle}_{\equiv S_-} = \begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \end{pmatrix}_{\pm}, \quad (2.51)$$

so bewirkt dies eine unterschiedliche Phasenverschiebung der beiden Polarisationskomponenten S_+ und S_- .

Darstellung der Rotation auf der Poincaré-Kugel

Die Auswirkung eines doppelbrechenden Elements auf eine Frequenzkomponente des Signals lässt sich einfach visualisieren. Für allgemeine unitäre Operatoren wurde dies bereits im Zusammenhang mit Abb. 2.3 auf Seite 28 durchgeführt: Die Anwendung des Jones-Operators der Gleichung (2.48) auf einen Jones-Vektor $|s\rangle$ entspricht einer rechtshändigen Rotation des zugehörigen Stokes-Vektors $\hat{s} \equiv \langle s|\vec{\sigma}|s\rangle$ auf der Poincaré-Kugel um die Achse $\hat{s}_+ \equiv \langle +|\vec{\sigma}|+\rangle$ mit dem Winkel $\Delta\beta L = \Delta\tau\omega = \Delta\bar{n}(\omega/c)L$. Der Rotationswinkel ist also bei gegebener Länge L und festgelegter Brechzahldifferenz $\Delta\bar{n}$ proportional zur Kreisfrequenz ω . Entsprechend ist er bei konstanter Frequenz ω proportional zur Länge L des Elements. Diese Zusammenhänge sind in Abb. 2.4 dargestellt.

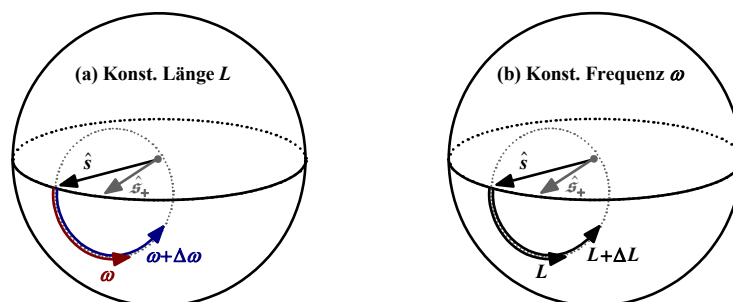


Abb. 2.4: Auswirkung eines doppelbrechenden Elements der Richtung \hat{s}_+ auf die Eingangspolarisation \hat{s} , dargestellt auf der Poincaré-Kugel: (a) Rotation der Stokes-Vektoren zweier Frequenzkomponenten des Signals (Frequenz ω bzw. $\omega + \Delta\omega$) für ein Element der Länge L ; (b) Rotation des Stokes-Vektors einer Frequenzkomponente (Frequenz ω) für unterschiedliche Längen des doppelbrechenden Elements (Länge L bzw. $L + \Delta L$).

Abnahme des Polarisationsgrades

Die Auswirkung eines doppelbrechenden Elements auf den Polarisationszustand einer Frequenzkomponente hängt also von dessen Frequenz ab. Somit haben die einzelnen Frequenzkomponenten eines Signals am Ausgang des Elements unterschiedliche Polarisationszustände, siehe Abb. 2.4(a). Ein vollständig polarisiertes Eingangssignal

wird durch das doppelbrechende Element zu einem gewissen Grad depolarisiert, der Polarisationsgrad nimmt ab, $\mathcal{D} < 1$ (vgl. Kapitel 2.2.6). Dies gilt allerdings nicht, falls die Eingangspolarisation \hat{s} parallel oder antiparallel zur Achse \hat{s}_+ ausgerichtet ist, in diesem Fall bleibt der Polarisationszustand unabhängig von der Frequenz konstant.

Rotation im Grenzfall kleiner Änderungen

Für infinitesimal kleine Änderungen der Frequenz ω oder der Länge L lassen sich die Rotationen in der differentiellen Form der Gleichung (2.44) von Seite 28 schreiben. Dazu soll der Stokes-Vektor am Ausgang des doppelbrechenden Elements mit \hat{t} bezeichnet werden, es gilt also $\hat{t} \equiv \langle s | \mathbf{T}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \mathbf{T} | s \rangle$. Unter Verwendung des Rotationswinkels $\Delta\bar{n}(\omega/c)L$ und der Rotationsachse \hat{s}_+ gilt somit

$$\frac{d}{d\omega} \hat{t} = \underbrace{\left(\frac{\Delta\bar{n}}{c} L \right)}_{\Delta\tau \equiv \vec{\tau}} \hat{s}_+ \times \hat{t}, \quad \frac{d}{dL} \hat{t} = \underbrace{\left(\Delta\bar{n} \frac{\omega}{c} \right)}_{\Delta\beta \equiv \vec{\beta}} \hat{s}_+ \times \hat{t}. \quad (2.52)$$

Dabei wurde der »PMD-Vektor« $\vec{\tau} \equiv \Delta\tau \hat{s}_+$ des doppelbrechenden Elements eingeführt als Produkt aus DGD $\Delta\tau = (\Delta\bar{n}/c)L$ und Richtung \hat{s}_+ des Elements. Es handelt sich dabei um einen Spezialfall des PMD-Vektors verketteter doppelbrechender Elemente, siehe Kapitel 2.3.3. Für ein einzelnes Element hängt er offensichtlich nicht von der Frequenz ab. Zudem wurde der Doppelbrechungsvektor $\vec{\beta} = \Delta\beta \hat{s}_+$ verwendet, welcher bereits weiter oben eingeführt wurde.

Die differentielle Änderung des Stokes-Vektors \hat{t} am Ausgang eines doppelbrechenden Elements hat also die gleiche Struktur für eine Änderung der Frequenz ω wie für eine Änderung der Länge L des Elements. (Eine Änderung der Differenz der effektiven Brechzahlen $\Delta\bar{n}$ bei fester Länge und Frequenz hätte eine entsprechende Auswirkung.)

Auswirkungen im Zeitbereich

Bisher wurden doppelbrechende Elemente dahingehend untersucht, welchen Einfluss sie auf die einzelnen Frequenzkomponenten eines optischen Signals ausüben. Nun sollen die Auswirkungen im Zeitbereich betrachtet werden.

Gemäß Kapitel 2.2.6 ist der nicht normierte Jones-Vektor $|S\rangle$ eines Signals in jedem Fall frequenzabhängig, $|S(\omega)\rangle$. Die Länge des zugehörigen Stokes-Vektors \vec{S} , also $\langle S(\omega) | S(\omega) \rangle$, ist proportional zur spektralen Leistungsdichte des Signals. Durch inverse Fourier-Transformation von $|S(\omega)\rangle$ resultiert der zeitabhängige, nicht normierte Jones-Vektor $|S(t)\rangle$. Die optische Leistung (bzw. Intensität) zu einem Zeitpunkt t_0 ist proportional zu $\langle S(t_0) | S(t_0) \rangle$. Entsprechend sind die momentane Phase und der momentane Polarisationszustand zum Zeitpunkt t_0 in $|S(t_0)\rangle$ enthalten.

Als einfaches Eingangssignal sei ein vollständig polarisierter ($\mathcal{D}=1$) optischer Puls gegeben, beschrieben durch den nicht normierten Jones-Vektor $|S(t)\rangle$. Wird $|S(t)\rangle$ gemäß Gleichung (2.51) als Spaltenvektor bezüglich des VON-Systems $|+\rangle$, $|-\rangle$ dargestellt, so lauten seine Komponenten $S_+(t) \equiv \langle + | S(t) \rangle$ und $S_-(t) \equiv \langle - | S(t) \rangle$, es gilt

also $|S(t)\rangle = S_+(t)|+\rangle + S_-(t)|-\rangle$. Somit sind $S_+(t)$ und $S_-(t)$ die Pulseinhüllenden entlang des »langsamen« Eigenvektors $|+\rangle$ bzw. des »schnellen« Eigenvektors $|-\rangle$ des doppelbrechenden Elements. $\langle S(t)|S(t)\rangle = |S_+(t)|^2 + |S_-(t)|^2$ entspricht dem zeitlichen Verlauf der gesamten optischen Leistung, mit den Leistungsanteilen $|S_+(t)|^2$ und $|S_-(t)|^2$ entlang der beiden »Achsen« des doppelbrechenden Elements. (Diese Achsen entsprechen nur für ein linear doppelbrechendes Element tatsächlichen Achsen in Laborkoordinaten. Im allgemeinen Fall eines elliptisch doppelbrechenden Elements stellen sie Polarisationszustände dar, welche nicht notwendigerweise auf dem Äquator der Poincaré-Kugel liegen.)

Die Ableitung der polarisationsunabhängigen Phasenverschiebung $\phi_0 = [(\beta_+ + \beta_-)/2]L$ des Jones-Operators \mathbf{T} von Gleichung (2.50) nach der Kreisfrequenz ω entspricht im Zeitbereich der polarisationsunabhängigen Gruppenlaufzeit des Pulses, $\tau_0 \equiv \partial_\omega \phi_0$. Die polarisationsabhängige Phasenverzögerung von \mathbf{T} führt dagegen zu unterschiedlichen Gruppenlaufzeiten der beiden Pulseinhüllenden $S_+(t)$ und $S_-(t)$. Die Differenz dieser Gruppenlaufzeiten ist gleich der Ableitung von $\Delta\beta L$ nach der Kreisfrequenz ω , also gleich der DGD $\Delta\beta_\omega L = \Delta\tau = (\Delta\bar{n}/c)L$. Somit ist die Differenz der Gruppenlaufzeiten von $S_+(t)$ und $S_-(t)$ für ein doppelbrechendes Element unabhängig von der Frequenz.

Diese Zusammenhänge sind in der Abb. 2.5 für einen Fall veranschaulicht, bei dem der vollständig polarisierte Eingangspuls so in das doppelbrechende Element eingekoppelt wird, dass sich seine Leistung nahezu gleichmäßig auf die beiden Pulsanteile $S_+(t)$ und $S_-(t)$ aufteilt. Die Eingangspolarisation \hat{s} ist also im Stokes-Raum mehr oder weniger senkrecht zur Achse $\pm\hat{s}_+$ ausgerichtet. Am Ausgang des Elements sind die beiden Pulseinhüllenden dann zeitlich um die DGD $\Delta\tau$ versetzt. Der Puls, dessen gesamter zeitlicher Leistungsverlauf durch $|S_+(t)|^2 + |S_-(t)|^2$ beschrieben wird, ist also am Ausgang verzerrt. Weiterhin macht sich die Abnahme des Polarisationsgrades \mathcal{D} im Frequenzbereich (s. o.) auch im Zeitbereich bemerkbar, nämlich durch einen zeitabhängigen Polarisationszustand: Unabhängig vom Polarisationszustand am Eingang sind die »schnellsten« Anteile am Ausgang gemäß $|-\rangle$ polarisiert, die »langsamsten« gemäß $|+\rangle$. Dazwischen gibt es (mindestens) einen Zeitpunkt, bei dem die Polarisation gleich der Eingangspolarisation ist. Die offensichtliche Ausnahme dieser Regel ist ein Puls, welcher am Eingang den Polarisationszustand $\pm\hat{s}_+$ hat, welcher also entlang einer Achse des doppelbrechenden Elements eingekoppelt wird. Er erreicht unverzerrt und vollständig polarisiert ($\mathcal{D}=1$) nach der maximalen bzw. minimalen Gruppenlaufzeit $\tau_0 \pm \Delta\tau/2$ den Ausgang des Elements.

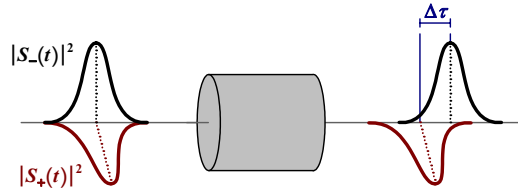


Abb. 2.5: Schematische Darstellung der Transmission eines optischen Pulses durch ein doppelbrechendes Element der DGD $\Delta\tau = (\Delta\bar{n}/c)L$; der vollständig polarisierte Eingangspuls hat in diesem Beispiel einen Polarisationszustand \hat{s} , welcher im Stokes-Raum ungefähr senkrecht zur Achse \hat{s}_+ des Elements steht. Die beiden Pulseinhüllenden $S_+(t)$ und $S_-(t)$ erreichen nach unterschiedlichen Gruppenlaufzeiten $\tau_0 \pm \Delta\tau/2$ den Ausgang des Elements, somit ist der gesamte Puls am Ausgang sowohl verzerrt als auch unvollständig polarisiert.

2.3.2 Verkettung doppelbrechender Elemente

Wenn mehrere doppelbrechende Elemente zur Modellierung einer Faser verkettet werden, führt dies zu weitaus komplexeren Auswirkungen auf das optische Signal. Der gesamte Jones-Operator \mathbf{T} einer Verkettung von N doppelbrechenden Elementen ist gegeben als Produkt der einzelnen Operatoren \mathbf{T}_i ($i = 1, 2, \dots, N$), es gilt also $\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$. Dabei entspricht \mathbf{T}_1 dem ersten Element, welches vom Signal durchlaufen wird, \mathbf{T}_N dem letzten. Da die einzelnen Jones-Operatoren \mathbf{T}_i unitär sind, ist es auch der globale Jones-Operator \mathbf{T} . Entsprechend der allgemein gültigen Aussagen des Kapitels 2.2.5 beschreibt \mathbf{T} somit eine Rotation im Stokes-Raum mit der Rotationsachse \hat{r} entsprechend der Jones-Eigenvektoren von \mathbf{T} . Für verkettete doppelbrechende Elemente sind die Eigenvektoren von \mathbf{T} jedoch von untergeordneter Bedeutung. Stattdessen wird ein anderes Paar ausgezeichnete Polarisationszustände, die sogenannten »PSPs« (engl.: Principal States of Polarization), eine zentrale Rolle einnehmen. Diese sollen im Folgenden definiert und bezüglich ihrer Bedeutung diskutiert werden. Daraufhin folgt in Kapitel 2.3.3 der Beweis ihrer Existenz sowie die Methode zur Berechnung der PSPs.

PSPs für ein doppelbrechendes Element

Für ein einzelnes doppelbrechendes Element existieren gemäß Abb. 2.4 zwei ausgezeichnete Stokes-Vektoren $\hat{s}_\pm = \pm \hat{s}_+$ (entsprechend der orthogonalen Eigenvektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ des Jones-Operators des Elements) mit folgenden Eigenschaften: Wird ein vollständig polarisiertes Signal so in das Element eingekoppelt, dass sein Polarisationszustand einem der Stokes-Vektoren $\pm \hat{s}_+$ entspricht, so ist es auch am Ausgang vollständig polarisiert. Der Polarisationszustand am Ausgang ist in diesem Spezialfall also nicht frequenzabhängig (und ebenso auch nicht zeitabhängig). Diese wichtige Aussage gilt für ein doppelbrechendes Element unabhängig von der Bandbreite des Signals. Gemäß der Diskussion der Abb. 2.5 ist ein optischer Puls am Ausgang des Elements für diese spezielle Einkoppelbedingung nicht nur vollständig polarisiert, er ist auch völlig unverzerrt. Gleiches gilt für Signale beliebiger Bandbreite. Zudem ist seine Gruppenlaufzeit minimal bzw. maximal, ersteres bei der Einkopplung gemäß $\hat{s}_- = -\hat{s}_+$ (Gruppenlaufzeit $\tau_0 - \Delta\tau/2$), letzteres bei der Einkopplung gemäß \hat{s}_+ (Gruppenlaufzeit $\tau_0 + \Delta\tau/2$).

Definition und Bedeutung von PSPs

Diese Aussagen gelten bei einer Verkettung mehrerer doppelbrechender Elemente – zur Modellierung einer Faser – nicht mehr. Keine der genannten Eigenschaften trifft auf die Eigenvektoren des Jones-Operators \mathbf{T} der Verkettung zu. In [28] haben Poole und Wagner jedoch die Existenz zweier anderer ausgezeichnete Polarisationszustände aufgezeigt, für welche der Polarisationszustand am Ausgang ebenfalls – in erster Näherung – nicht frequenzabhängig ist. Diese beiden Polarisationszustände, genannt »Principal States of Polarization« (PSPs), werden sich für Systeme ohne PDL als orthogonal herausstellen. Im Gegensatz zu den Eigenvektoren einzelner doppelbrechender Elemente hängen die PSPs jedoch ihrerseits von der Frequenz ab. Wird nun ein »schmalbandiges« vollständig polarisiertes Signal entlang einem der beiden PSPs in die Faser eingekoppelt, so bleibt es vollständig polarisiert. Zudem erreicht es unverzerrt den Ausgang der Faser, seine Laufzeit ist maximal bzw. minimal.

Grafische Bestimmung von PSPs

Bevor die PSPs allgemein berechnet werden, soll zunächst der einfache Fall *zweier* doppelbrechender Elemente betrachtet werden. Da der triviale Fall zweier Elemente gleicher Richtung einem einzelnen »großen« Element entspricht, wird er nicht weiter berücksichtigt. Auf der Suche nach den PSPs dieser Verkettung ist ein Polarisationszustand am Eingang aufzuspüren, für den benachbarte Frequenzkomponenten nach der Transmission identische Polarisationszustände haben. Genau dann liegt per Definition ein PSP des Systems vor.

Im ersten doppelbrechenden Element rotieren zwei benachbarte Frequenzkomponenten gemäß Abb. 2.4(a) auf Seite 34 mit unterschiedlich großen Rotationswinkeln (proportional zur Kreisfrequenz ω) um die Eigenachse \hat{s}_+ des Elements. Am Ausgang des ersten Elements ist der Polarisationszustand der Frequenzkomponenten also im Allgemeinen unterschiedlich, es sei denn, die Kopplung erfolgte entlang der Eigenachse \hat{s}_+ . Sollte dies erfolgt sein, so haben die beiden Frequenzkomponenten am Eingang des zweiten Elements den gleichen Polarisationszustand. Sie rotieren dann im zweiten Element auf einem Kreis mit gleichem Radius – allerdings mit unterschiedlichen Rotationswinkeln – um dessen Eigenachse. Deshalb haben sie am Ausgang des zweiten Elements in jedem (außer im trivialen) Fall einen unterschiedlichen Polarisationszustand. Die Doppelbrechungsachse des ersten Elements kann also nur dann ein PSP des Gesamtsystems sein, wenn beide Elemente die gleiche Richtung haben.

Zurück zum Fall, bei dem die beiden Frequenzkomponenten nicht entlang der Achse des ersten Elements eingekoppelt werden: Sie haben dann – wie in Abb. 2.4(a) – am Ausgang des ersten Elements und somit am Eingang des zweiten Elements unterschiedliche Polarisationszustände. Damit rotieren sie im zweiten Element im Allgemeinen auf Kreisen unterschiedlicher Radien und mit unterschiedlichen Rotationswinkeln, sie erreichen also den Ausgang wiederum an unterschiedlichen Punkten der Poincaré-Kugel. Die einzige Ausnahme ist in Abb. 2.6 dargestellt, in der sich die Rotationskreise um die Achsen \hat{r}_1 und \hat{r}_2 der beiden Elemente so berühren, dass der verringerte

Rotationswinkel der niederfrequenten Komponente insgesamt ausgeglichen wird. Die Frequenzkomponenten haben somit am Ausgang der Verkettung – in erster Näherung – den gleichen Polarisationszustand, womit die PSPs grafisch bestimmt sind. Die Eingangspolarisation \hat{s}_+ von Abb. 2.6 ist also einer der beiden Eingangs-PSPs, der Polarisationszustand am Ausgang \hat{t}_+ ist der zugehörige Ausgangs-PSP.

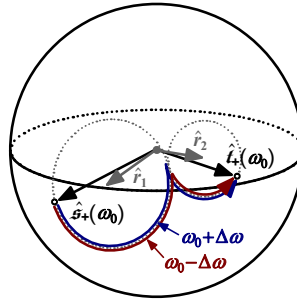


Abb. 2.6: Grafische Bestimmung von PSPs: Rotation zweier Frequenzkomponenten bei der Transmission durch zwei doppelbrechende Elemente im Fall der Einkopplung in einen PSP; \hat{r}_1 und \hat{r}_2 bezeichnen die Rotationsachsen (Eigenachsen) der beiden Elemente, $\hat{s}_+(\omega_0)$ und $\hat{t}_+(\omega_0)$ sind die PSPs der Verkettung am Eingang bzw. am Ausgang bei der Frequenz ω_0 . Der spektrale Abstand $2\Delta\omega$ der Frequenzkomponenten ist in dieser Abbildung als »klein« angenommen.

An diesem einfachen Beispiel wird zudem bereits ersichtlich, dass die PSPs ihrerseits von der Frequenz abhängen werden. Werden nämlich in Abb. 2.6 zwei andere Frequenzkomponenten – beispielsweise jeweils mit erhöhter Frequenz – betrachtet, so folgt im ersten doppelbrechenden Element ein vergrößerter Rotationswinkel. Dieser führt (bei unveränderter Einkopplung) im zweiten Element zu Rotationen auf unterschiedlichen Kreisen, weshalb die Frequenzkomponenten den Ausgang nicht am selben Punkt der Poincaré-Kugel erreichen können. Damit die Konstruktion der Abb. 2.6 bei erhöhter Frequenz wieder PSPs liefert, ist die Eingangspolarisation \hat{s}_+ – also der PSP am Eingang – entsprechend im Urzeigersinn zu verschieben. Für den einfachen Fall *zweier* doppelbrechender Elemente verlaufen die PSPs somit als Funktion der Frequenz entlang eines Kreises auf der Poincaré-Kugel. Schon bei drei doppelbrechenden Elementen gilt dies nicht mehr, der spektrale Verlauf der PSPs nimmt dann komplexere Formen an. (Die Idee für die dargestellte grafische Bestimmung von PSPs geht auf [12] zurück.)

2.3.3 PSPs, DGD und PMD-Vektor

Vorbereitungen und Annahmen

Nach dieser grafischen Konstruktion von PSPs zweier verketteter Elemente soll nun ein allgemeiner unitärer Jones-Operator betrachtet werden, welcher die Verkettung einer beliebigen Anzahl doppelbrechender Elemente beschreibt. Dabei soll ausdrücklich angenommen werden, dass das System frei von PDL ist, andernfalls wäre der Jones-Operator nicht unitär. Entsprechende Überlegungen für den verallgemeinerten Fall mit

PDL erfolgen in Kapitel 3.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Jones-Vektoren hier als normiert angenommen werden, da die Anwendung eines unitären Jones-Operators die Norm eines Jones-Vektors nicht ändert. Die Notation der bisherigen Ausführungen soll konsequent weiterentwickelt werden, sodass sie in wesentlichen Punkten der »modernen« Form entspricht, welche sich seit [2] zunehmend zur Standardnotation im Zusammenhang mit PMD entwickelt.

Gemäß Kapitel 2.2.1 lässt sich jeder unitäre Jones-Operator \mathbf{T} in der Form $\mathbf{T} = e^{-i\phi_0} \mathbf{U}$ schreiben, wobei \mathbf{U} ein unitärer Operator mit $\det(\mathbf{U})=1$ ist und ϕ_0 eine reelle Phase. Der Jones-Vektor vor Anwendung von \mathbf{T} (also am Eingang des Systems) soll wie bisher als $|s\rangle$, das Resultat (also der Jones-Vektor am Ausgang) als $|t\rangle$ bezeichnet werden. Es gilt also $|t\rangle = \mathbf{T}|s\rangle = e^{-i\phi_0} \mathbf{U}|s\rangle$. Im Stokes-Raum entspricht dies den normierten Stokes-Vektoren $\hat{s} = \langle s | \vec{\sigma} | s \rangle$ am Eingang bzw. $\hat{t} = \langle s | \mathbf{T}^\dagger \vec{\sigma} \mathbf{T} | s \rangle$ am Ausgang.

Das Signal am Eingang sei vollständig polarisiert und habe eine frequenzunabhängige gemeinsame Phase. Somit hängen die normierten Jones- und Stokes-Vektoren am Eingang nicht von der Frequenz ab, $|s\rangle_\omega = \hat{s}_\omega = 0$. Gemäß der Definition von PSPs ist ein Polarisationszustand am Ausgang \hat{t} genau dann ein PSP, falls er – bei fester Eingangspolarisation – in erster Ordnung nicht von der Frequenz abhängt, falls also $\hat{t}_\omega = 0$ gilt. Diese Bedingung ist allerdings nicht äquivalent zur Bedingung $|t\rangle_\omega = 0$, da in einem normierten Jones-Vektor als Information nicht nur der Polarisationszustand enthalten ist, sondern auch die gemeinsame Phase ϕ , siehe Kapitel 2.2.2. Stattdessen sind die Aussagen $\hat{t}_\omega = 0$ und $|t\rangle_\omega = -i\phi_\omega |t\rangle$ – mit der gemeinsamen Phase ϕ von $|t\rangle$ – äquivalent, wie sich einfach zeigen lässt. Falls also ein Jones-Vektor $|t\rangle$ am Ausgang des Systems die Relation $|t\rangle_\omega = -i\phi_\omega |t\rangle$ erfüllt, ist sein normierter Stokes-Vektor \hat{t} nicht frequenzabhängig, es handelt sich also um einen PSP des Systems.

PSPs und DGD

Nach diesen Vorbereitungen erweist sich die Berechnung von PSPs als vergleichsweise einfach. Durch Ableitung von $|t\rangle = e^{-i\phi_0} \mathbf{U}|s\rangle$ nach der Kreisfrequenz ω folgt unter Beachtung von $|s\rangle_\omega = 0$, $|s\rangle = e^{+i\phi_0} \mathbf{U}^{-1}|t\rangle$ und $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$ unmittelbar

$$|t\rangle_\omega = -i(\partial_\omega \phi_0 + i\mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger)|t\rangle. \quad (2.53)$$

Somit erfüllt der Jones-Vektor am Ausgang des Systems $|t\rangle$ dann (und genau dann) die Relation $|t\rangle_\omega = -i\phi_\omega |t\rangle$, wenn er Eigenvektor des Operators $i\mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ ist. Es gilt somit die Äquivalenz

$$|t\rangle \text{ ist PSP} \Leftrightarrow |t\rangle_\omega = -i\phi_\omega |t\rangle \Leftrightarrow |t\rangle \text{ ist Eigenvektor von } i\mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger. \quad (2.54)$$

Wie sich einfach zeigen lässt, ist der Operator $i\mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ hermitesch, zudem verschwindet seine Spur [2]. Ersteres führt gemäß der allgemeinen Betrachtungen des Kapitels 2.2.1 zu orthogonalen Eigenvektoren (PSPs) von $i\mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ und zu reellen Eigenwerten. Die verschwindende Spur von $i\mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ hat schließlich zur Folge, dass die beiden reellen Eigenwerte von $i\mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Sie sollen fortan als $\pm\Delta\tau/2$

bezeichnet werden, ihre zugehörigen Eigenvektoren, also die PSPs am Ausgang, als $|\ell_{\pm}\rangle$ (bzw. nach der Transformation in den Stokes-Raum als $\hat{\ell}_{\pm} \equiv \langle \ell_{\pm} | \vec{\sigma} | \ell_{\pm} \rangle$). Es gilt also

$$\mathbf{i}U_{\omega}U^{\dagger}|\ell_{\pm}\rangle = \pm \frac{\Delta\tau}{2}|\ell_{\pm}\rangle. \quad (2.55)$$

Somit lautet Gleichung (2.53) im Fall von PSPs

$$|\ell_{\pm}\rangle_{\omega} = -\mathbf{i} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\partial_{\omega}\phi_0}^{\equiv \tau_0} \pm \Delta\tau/2 \\ \underbrace{\phantom{\partial_{\omega}\phi_0 \pm \Delta\tau/2}}_{=\phi_{\omega} \equiv \tau_g} \end{array} \right) |\ell_{\pm}\rangle. \quad (2.56)$$

Die Ableitung der polarisationsunabhängigen Phasenverschiebung ϕ_0 des Jones-Operators $\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\phi_0}\mathbf{U}$ lässt sich wie in Kapitel 2.3.1 als polarisationsunabhängige Gruppenlaufzeit τ_0 interpretieren. Sie bildet ersichtlich den ersten Summanden der gesamten Gruppenlaufzeit $\phi_{\omega} \equiv \tau_g$ der PSPs, also der Ableitung der gemeinsamen Phase ϕ von $|\ell_{\pm}\rangle$ nach der Kreisfrequenz ω .

Der Eigenvektor $|\ell_{+}\rangle$ von $\mathbf{i}U_{\omega}U^{\dagger}$ (der »langsame« PSP) hat also den Eigenwert $+\Delta\tau/2$ und somit die Gruppenlaufzeit $\tau_g = \tau_0 + \Delta\tau/2$, während der orthogonale Eigenvektor $|\ell_{-}\rangle$ (der »schnelle« PSP) den Eigenwert $-\Delta\tau/2$ und die Gruppenlaufzeit $\tau_g = \tau_0 - \Delta\tau/2$ hat. Die Differenz der Gruppenlaufzeiten der beiden PSPs, die »DGD« (engl.: Differential Group Delay), ist also identisch zu $\Delta\tau$.

PMD-Vektor

Speziell für den langsamen PSP gilt nach Multiplikation mit dem Faktor 2 die Relation

$$2\mathbf{i}U_{\omega}U^{\dagger}|\ell_{+}\rangle = \Delta\tau|\ell_{+}\rangle. \quad (2.57)$$

Mit Hilfe des zugehörigen Stokes-Vektors $\hat{\ell}_{+} \equiv \langle \ell_{+} | \vec{\sigma} | \ell_{+} \rangle$ und der DGD $\Delta\tau$ wird der »PMD-Vektor« am Ausgang definiert als

$$\vec{\tau} \equiv \Delta\tau \hat{\ell}_{+}. \quad (2.58)$$

Alternativ und völlig äquivalent zu dieser Definition kann der PMD-Vektor am Ausgang auch als Vektorteil des Karlsson-Quaternions von $2\mathbf{i}U_{\omega}U^{\dagger}$ eingeführt werden: Da der Operator $2\mathbf{i}U_{\omega}U^{\dagger}$ hermitesch und seine Spur Null ist, verschwindet der Skalarteil seines Karlsson-Quaternions, während die drei Komponenten des Vektorteils reelle Zahlen sind, siehe Kapitel 2.2.3. Wird der Vektorteil $\vec{\tau}$ genannt, lässt sich der Operator $2\mathbf{i}U_{\omega}U^{\dagger}$ also schreiben gemäß

$$\begin{aligned} 2\mathbf{i}U_{\omega}U^{\dagger} &\equiv \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} \\ &= [0, \vec{\tau}]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.57) folgt unter Beachtung der Relation (2.38) ($\hat{\ell}_{+} \cdot \vec{\sigma} | \ell_{+} \rangle = | \ell_{+} \rangle$) unmittelbar die Äquivalenz der Definitionen (2.58) und (2.59). Als alternative Schreibweise der Eigenwertgleichung (2.57) folgt somit

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} | \ell_{+} \rangle = \Delta\tau | \ell_{+} \rangle, \quad (2.60)$$

womit der PMD-Vektor $\vec{\tau}$, der langsame PSP $|\underline{t}_\pm\rangle$ (jeweils am Ausgang des Systems) und die DGD $\Delta\tau$ verknüpft sind.

Die PSPs *am Eingang* des Systems sollen im Jones-Raum als $|\underline{s}_\pm\rangle$ und im Stokes-Raum als $\hat{s}_\pm \equiv \langle \underline{s}_\pm | \vec{\sigma} | \underline{s}_\pm \rangle$ bezeichnet werden. Wie alle anderen Jones-Vektoren auch, sind sie über den Jones-Operator \mathbf{T} mit den PSPs am Ausgang $|\underline{t}_\pm\rangle$ verknüpft, $|\underline{t}_\pm\rangle = \mathbf{T}|\underline{s}_\pm\rangle = e^{-i\phi}\mathbf{U}|\underline{s}_\pm\rangle$. Somit lassen sich die PSPs am Eingang für bekannte PSPs am Ausgang berechnen gemäß $|\underline{s}_\pm\rangle = \mathbf{T}^{-1}|\underline{t}_\pm\rangle$. (Aufgrund häufig anzutreffender Missverständnisse sei noch einmal betont, dass die PSPs *nicht* die Eigenvektoren von \mathbf{T} sind, $|\underline{s}_\pm\rangle$ und $|\underline{t}_\pm\rangle$ sind also im Allgemeinen nicht identisch.) Der PMD-Vektor am Eingang wird dementsprechend definiert als $\vec{\tau}_s \equiv \Delta\tau \hat{s}_+$. Er hat per Definition die gleiche Länge $\Delta\tau$ wie der PMD-Vektor am Ausgang $\vec{\tau}$, während seine Richtung dem Stokes-Vektor des langsamen PSPs am Eingang $\hat{s}_+ \equiv \langle \underline{s}_+ | \vec{\sigma} | \underline{s}_+ \rangle$ entspricht.

Abschließend sollen noch einmal die Eigenschaften des zentralen Operators $2i\mathbf{U}_\omega\mathbf{U}^\dagger$ zusammengefasst werden: $2i\mathbf{U}_\omega\mathbf{U}^\dagger$ ist hermitesch, seine Spur ist Null, seine reellen Eigenwerte ergeben sich zu $\pm\Delta\tau$ (DGD), die zugehörigen orthogonalen Eigenvektoren sind die PSPs am Ausgang $|\underline{t}_\pm\rangle$ und der Vektorteil seines Karlsson-Quaternions ist gleich dem PMD-Vektor am Ausgang $\vec{\tau}$.

Vergleich: Ein doppelbrechendes Element

Ähnliche Notationen und Bezeichnungen wurden bereits in Kapitel 2.3.1 im Zusammenhang mit einzelnen doppelbrechenden Elementen verwendet. Die soeben eingeführten Begriffe und Symbole entsprechen den dortigen im Spezialfall eines einzelnen Elements. Dann – und nur dann – sind die PSPs identisch zu den Eigenvektoren des Jones-Operators \mathbf{T} (Eigenachsen des doppelbrechenden Elements) und nur dann sind die PSPs, die DGD und somit auch der PMD-Vektor unabhängig von der Frequenz. Bei der Darstellung $\mathbf{T} = e^{-i\phi}\mathbf{U} = e^{-i\phi}e^{-i(\phi/2)\hat{r}\cdot\vec{\sigma}}$ des unitären Jones-Operators entspricht die Rotationsachse \hat{r} auch nur im Spezialfall eines einzelnen doppelbrechenden Elements dem langsamen PSP.

Infinitesimale Rotationen

Die Gleichungen (2.52) auf Seite 35 beschreiben für ein einzelnes doppelbrechendes Element die differentielle Änderung von Stokes-Vektoren am Ausgang, wenn sich die Frequenz ω bzw. die Länge des Elements L ändern.

Die Grundstruktur dieser Gleichungen gilt auch für eine Verkettung doppelbrechender Elemente, allerdings mit modifizierter Bedeutung der verwendeten Symbole. So folgt unmittelbar aus Gleichung (2.52), dass eine infinitesimale Änderung der Länge L des *letzten* doppelbrechenden Elements der Verkettung den Stokes-Vektor \hat{t} am Ausgang ändert gemäß

$$\hat{t}_L = \vec{\beta} \times \hat{t}. \quad (2.61)$$

Dabei ist $\vec{\beta}$ der Doppelbrechungsvektor des *letzten* doppelbrechenden Elements. (Für ein kontinuierliches Modell der Faser wäre für $\vec{\beta}$ der zugehörige lokale Doppelbrechungsvektor einzusetzen.)

Die entsprechende Gleichung für eine kleine Änderung der Frequenz folgt durch Ableitung des Stokes-Vektors $\hat{t} \equiv \langle t | \vec{\sigma} | t \rangle$ nach der Kreisfrequenz ω . Mit Hilfe der Gleichung (2.53) für $|t\rangle_\omega$ und der Relation $\mathbf{i} \mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger = \frac{1}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma}$ folgt schließlich

$$\hat{t}_\omega = \vec{\tau} \times \hat{t}. \quad (2.62)$$

Es resultiert somit dieselbe Struktur wie beim einzelnen doppelbrechenden Element, siehe Gleichung (2.52), allerdings ist $\vec{\tau}$ nun der gesamte PMD-Vektor am Ausgang der Verkettung. Der Stokes-Vektor \hat{t} am Ausgang rotiert also bei einer Veränderung der Frequenz um den PMD-Vektor $\vec{\tau}$. Soweit ist das Verhalten analog zum einfachen doppelbrechenden Element. Für verkettete doppelbrechende Elemente ist der PMD-Vektor $\vec{\tau}$ allerdings seinerseits frequenzabhängig, sodass die Rotationsachse in Gleichung (2.62) für jede Frequenzkomponente neu zu bestimmen ist. »Wie schnell« sich der PMD-Vektor mit der Frequenz ändert, wird ausführlich in Kapitel 2.3.5 diskutiert.

Dynamische Gleichung für PMD

Mit Hilfe der infinitesimalen Rotationen (2.61) und (2.62) kann die »dynamische Gleichung für PMD« aufgestellt werden, welche die Entwicklung des PMD-Vektors entlang der Strecke beschreibt. Wird dazu Gleichung (2.61) nach ω und Gleichung (2.62) nach L abgeleitet, so ergibt sich nach kurzer Rechnung [2], [29]

$$\vec{\tau}_L = \vec{\beta}_\omega + \vec{\beta} \times \vec{\tau}. \quad (2.63)$$

Für eine Verkettung doppelbrechender Elemente wird damit die Änderung des PMD-Vektors bei einer infinitesimalen Änderung der Länge L des *letzten* doppelbrechenden Elements beschrieben. Der Doppelbrechungsvektor $\vec{\beta}$ und dessen Ableitung nach der Kreisfrequenz $\vec{\beta}_\omega$ sind dabei auf eben dieses letzte Element bezogen. (Für ein kontinuierliches Modell der Faser wären wiederum die entsprechenden lokalen Größen für $\vec{\beta}$ und $\vec{\beta}_\omega$ einzusetzen.)

Basierend auf Gleichung (2.63) haben Foschini und Poole in [61] die statistische Theorie der PMD entwickelt. Wie im gesamten Kapitel 2.3 wurde jedoch bei der Herleitung von Gleichung (2.63) die Abwesenheit von PDL angenommen. Sind PDL-Elemente im System vorhanden, nimmt sie eine geänderte Form an, womit sich auch eine veränderte Statistik der PMD ergibt. Das Kapitel 3 wird sich eingehend mit dieser Frage auseinandersetzen.

Verkettung von PMD-Vektoren

Der PMD-Vektor am Ausgang einer Verkettung doppelbrechender Elemente lässt sich alternativ auch mithilfe einfacher Verkettungsregeln berechnen. Hier sei nur der Fall zweier doppelbrechender Elemente diskutiert, die Erweiterung für mehr als zwei Elemente ist trivial.

Gegeben seien zwei doppelbrechende Elemente mit den jeweiligen PMD-Vektoren $\vec{\tau}_1$ und $\vec{\tau}_2$, zudem sei die Rotationsmatrix (Müller-Matrix) \mathbf{R}_2 des zweiten Elements gegeben, siehe Gleichung (2.43) auf Seite 28. Nach einfacher Rechnung [2] ergibt sich der gesamte PMD-Vektor am Ausgang der Verkettung zu

$$\vec{\tau}(\omega) = \vec{\tau}_2 + \mathbf{R}_2(\omega) \cdot \vec{\tau}_1. \quad (2.64)$$

Er wird also gebildet aus der Summe der einzelnen PMD-Vektoren, wobei der erste PMD-Vektor zuvor eine frequenzabhängige Rotation mit der Rotationsmatrix \mathbf{R}_2 des zweiten Elements erfährt. Die Rotationsachse von \mathbf{R}_2 ist gemäß Kapitel 2.3.1 parallel zum PMD-Vektor $\vec{\tau}_2$ des zweiten Elements, während der Rotationswinkel durch $\Delta\tau_2 \omega$ gegeben ist. Dabei ist $\Delta\tau_2$ die DGD des zweiten Elements. Im Gegensatz zu den PMD-Vektoren $\vec{\tau}_1$ und $\vec{\tau}_2$ der Elemente ist die Rotationsmatrix \mathbf{R}_2 somit frequenzabhängig. Deshalb ist der gesamte PMD-Vektor $\vec{\tau}$ der Verkettung ebenfalls frequenzabhängig.

Wie in der folgenden Abbildung dargestellt ist, ist zwar die Richtung des gesamten PMD-Vektors $\vec{\tau}$ (und somit auch die Richtung der PSPs der Verkettung), nicht jedoch seine Länge (also die DGD der Verkettung) eine Funktion der Frequenz. Dies gilt allerdings nur für den einfachen Fall *zweier* doppelbrechender Elemente. Werden weitere Elemente hinzugefügt, so hängt auch die DGD der Verkettung von der Frequenz ab. Zudem ist dann der Verlauf des PMD-Vektors $\vec{\tau}$ als Funktion der Frequenz weitaus komplizierter als in Abb. 2.7.

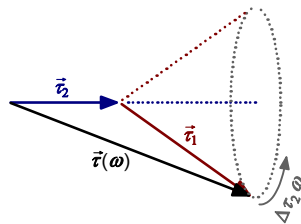


Abb. 2.7: Konstruktion des PMD-Vektors $\vec{\tau}(\omega)$ einer Verkettung zweier doppelbrechender Elemente; $\vec{\tau}_1$ und $\vec{\tau}_2$ sind die PMD-Vektoren der Elemente (nicht frequenzabhängig), $\Delta\tau_2$ ist die Länge von $\vec{\tau}_2$, also die DGD des zweiten Elements. Somit ist $\Delta\tau_2 \omega$ der Rotationswinkel der Müller-Matrix \mathbf{R}_2 .

Statistik der DGD

Im Vorgriff auf die statistischen Untersuchungen des Kapitels 3 sollen hier erste Überlegungen zur Statistik der DGD einer Verkettung von N doppelbrechenden Elementen erfolgen.

Der gesamte PMD-Vektor $\vec{\tau}$ einer solchen Verkettung setzt sich (wie in Abb. 2.7 für zwei Elemente dargestellt) zusammen aus einer Summe von N statistisch unabhängigen Vektoren $\vec{\tau}_i$. Diese Vektoren sind im Stokes-Raum zufällig orientiert, die relative Orientierung hängt ab von der Frequenz ω . Nach dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt im Grenzfalle großer N , dass die Komponenten τ_1 , τ_2 , τ_3 des gesamten PMD-Vektors $\vec{\tau} = (\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3)^T$ gaußverteilt sind. Dies hat zur Folge,

dass die Länge von $\vec{\tau}$, also die DGD $\Delta\tau$ der Verkettung, maxwellverteilt ist. Aus diesen einfachen Überlegungen folgt also bereits, dass bei einer großen Zahl doppelbrechender Elemente die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der gesamten DGD $\Delta\tau$ einer Maxwellverteilung entspricht.

Für die weiteren Betrachtungen sollen die Werte der DGD der einzelnen doppelbrechenden Elemente als $\Delta\tau_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) bezeichnet werden, ihr arithmetisches Mittel als $\langle\Delta\tau_i\rangle$, das arithmetische Mittel von $\Delta\tau_i^2$ als $\langle\Delta\tau_i^2\rangle$ und der entsprechende quadratische Mittelwert als $(\Delta\tau_i)_{\text{rms}}$ (engl.: Root Mean Square, $(\dots)_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle(\dots)^2\rangle}$). Weiterhin soll der Grenzfall einer großen Anzahl doppelbrechender Elemente N angenommen werden.

Das frequenzabhängige Aufsummieren N zufällig orientierter Vektoren gemäß Abb. 2.7 führt dazu, dass das spektral gemittelte Quadrat der Länge des gesamten Vektors $\langle\Delta\tau^2\rangle$ gleich der Summe $\sum\Delta\tau_i^2$ und somit gleich $N\langle\Delta\tau_i^2\rangle$ ist. Deshalb wächst der quadratische Mittelwert $\Delta\tau_{\text{rms}}$ der gesamten DGD gemäß $\Delta\tau_{\text{rms}} = \sqrt{N}(\Delta\tau_i)_{\text{rms}}$ mit \sqrt{N} . Da N proportional ist zur Gesamtlänge L der Verkettung, also zur Länge der modellierten Faser, folgt schließlich, dass der quadratische Mittelwert $\Delta\tau_{\text{rms}}$ proportional ist zu \sqrt{L} . Die Proportionalitätskonstante, welche in der Einheit $\text{ps}/\sqrt{\text{km}}$ angegeben wird, wird »PMD-Koeffizient« \mathcal{P} genannt [1],

$$\Delta\tau_{\text{rms}} \equiv \mathcal{P}\sqrt{L}. \quad (2.65)$$

Gemäß der allgemein gültigen Eigenschaften maxwellverteilter Zufallsvariablen (siehe Anhang) ist der Mittelwert der DGD $\langle\Delta\tau\rangle$ mit dem quadratischen Mittelwert $\Delta\tau_{\text{rms}}$ verknüpft durch $\langle\Delta\tau\rangle = \sqrt{8/(3\pi)}\Delta\tau_{\text{rms}}$. Mit dem zusätzlichen Faktor $\sqrt{8/(3\pi)} \approx 0,92$ gilt die Gleichung (2.65) somit auch für die mittlere DGD $\langle\Delta\tau\rangle$.

Für eine Verkettung $N \gg 1$ doppelbrechender Elemente gelten somit zusammenfassend die Relationen

$$\begin{aligned} \langle\Delta\tau^2\rangle &= \sum_{i=1}^N \Delta\tau_i^2 = N\langle\Delta\tau_i^2\rangle, \\ \Delta\tau_{\text{rms}} &\equiv \sqrt{\langle\Delta\tau^2\rangle} = \sqrt{N}(\Delta\tau_i)_{\text{rms}} \equiv \mathcal{P}\sqrt{L}, \\ \langle\Delta\tau\rangle &= \sqrt{8/(3\pi)}\Delta\tau_{\text{rms}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Im Gegensatz zum Fall eines einzelnen doppelbrechenden Elements wächst die DGD einer Verkettung doppelbrechender Elemente also nicht linear mit der Länge L , sondern – im statistischen Mittel – mit der Wurzel von L . Ältere Fasern können PMD-Koeffizienten von mehr als $\mathcal{P} = 1 \text{ ps}/\sqrt{\text{km}}$ aufweisen, während \mathcal{P} für aktuelle Fasern in der Regel geringer ist als $0,1 \text{ ps}/\sqrt{\text{km}}$, selten jedoch geringer als $0,02 \text{ ps}/\sqrt{\text{km}}$ [62]. Technische Ansätze zur weiteren Reduzierung des PMD-Koeffizienten finden sich beispielsweise in [63].

Wie die Abb. 2.7 bereits erahnen lässt, erweist sich der spektrale Mittelwert der DGD für die Verkettung einer großen Zahl doppelbrechender Elemente als identisch zum

Scharmittelwert, also zur mittleren DGD einer Schar von Realisierungen der Verkettung bei fester Frequenz. Dabei sei für die Realisierungen angenommen, dass sie sich nur durch die Richtung der einzelnen Elemente – nicht jedoch durch deren Stärke – unterscheiden. Der Zufallsprozess $\Delta\tau(\omega)$ ist in diesem Sinne ergodisch [64]. Die obigen Resultate gelten deshalb sowohl für den spektralen Mittelwert einer einzelnen Realisierung als auch für den Scharmittelwert bei fester Frequenz.

2.3.4 PMD erster und zweiter Ordnung

Gemäß der Diskussion der Abb. 2.7 hängt der PMD-Vektor $\vec{\tau}$ der Verkettung einer großen Zahl doppelbrechender Elemente nichttrivial von der Frequenz ab. Gleiches gilt für seine Länge, die DGD $\Delta\tau$, sowie für seine Richtung, den langsamen PSP \hat{t}_+ . Die Frequenzkomponenten eines Signals »sehen« also unterschiedliche PMD-Vektoren.

PMD erster Ordnung

Im Grenzfall geringer Signalbandbreite ist der PMD-Vektor $\vec{\tau}(\omega)$ über den Bereich der Frequenzkomponenten des Signals näherungsweise konstant. Er kann dann in guter Näherung ersetzt werden durch den PMD-Vektor bei der Zentralfrequenz ω_0 des Signals, also durch $\vec{\tau}(\omega_0)$. Für diese Näherung »PMD erster Ordnung« hat die Verkettung doppelbrechender Elemente praktisch die gleichen Eigenschaften wie ein einzelnes doppelbrechendes Element: Die PSPs der Verkettung, $|\mathcal{S}_\pm\rangle$ am Eingang und $|\mathcal{t}_\pm\rangle = \mathbf{T}|\mathcal{S}_\pm\rangle$ am Ausgang, sind dann für alle Frequenzkomponenten identisch, sie nehmen die Rolle der Eigenvektoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ des doppelbrechenden Elements an. Wird ein vollständig polarisiertes Signal entlang einem der beiden PSPs $\hat{\mathcal{S}}_\pm \equiv \langle \mathcal{S}_\pm | \vec{\sigma} | \mathcal{S}_\pm \rangle$ in die Verkettung der Elemente eingekoppelt, so bleibt es vollständig polarisiert, der Polarisationszustand am Ausgang ist nicht frequenzabhängig (und auch nicht zeitabhängig). Zudem ist das Signal am Ausgang im Fall der »PSP-Kopplung« unverzerrt und seine Ankunftszeit ist maximal bzw. minimal, je nachdem in welchen PSP eingekoppelt wurde.

Auch wenn das schmalbandige Signal nicht in einen PSP eingekoppelt wird, verhält es sich wie bei einem doppelbrechenden Element: Die Komponenten des Signals entlang der beiden orthogonalen PSPs $|\mathcal{S}_\pm\rangle$ breiten sich unabhängig voneinander und mit unterschiedlicher Gruppengeschwindigkeit aus, sie erreichen den Ausgang zeitversetzt um die Differenz $\Delta\tau$, genau wie in Abb. 2.5 auf Seite 37. Somit ist das Signal am Ausgang umso stärker verzerrt, je größer die DGD $\Delta\tau$ (bei der Zentralfrequenz ω_0) ist. Ferner verläuft auch die Rotation der Frequenzkomponenten des Signals um den PMD-Vektor im Grenzfall PMD erster Ordnung völlig analog zu Abb. 2.4(a) auf Seite 34.

Das Kapitel 2.3.5 wird sich ausführlich mit der Frage beschäftigen, unter welchen Bedingungen die Näherung PMD erster Ordnung sinnvoll ist.

Eine wesentliche Aufgabe des Kapitels 4 wird darin bestehen zu untersuchen, inwieweit das soeben beschriebene Verhalten eines Signals im Grenzfall »PMD erster Ordnung« noch gegeben ist, sobald nennenswert PDL im System vorhanden ist. Dabei

werden sich deutliche Abweichungen zum hier beschriebenen einfachen Fall ohne PDL ergeben.

PMD zweiter Ordnung

Falls die Signalbandbreite für die Näherung PMD erster Ordnung zu groß wird, muss die Frequenzabhängigkeit des PMD-Vektors $\vec{\tau}(\omega)$ berücksichtigt werden. Die DGD $\Delta\tau(\omega)$ sowie die PSPs am Eingang $|\hat{t}_{\pm}(\omega)\rangle$ und am Ausgang $|\hat{t}_{\pm}(\omega)\rangle$ dürfen dann entlang des Signalspektrums nicht mehr als konstant angesetzt werden. Diese Frequenzabhängigkeiten führen zu zusätzlichen Signalverzerrungen, welche weitaus komplizierter sind als im Fall eines einfachen doppelbrechenden Elements. Ohne zunächst auf den PMD-Vektor an sich eingehen zu müssen, können diese komplizierten Signalverzerrungen bereits anhand der Darstellung der Pulsverzerrung in Abb. 2.5 auf Seite 37 veranschaulicht werden: Folgt nämlich auf das dort abgebildete doppelbrechende Element ein weiteres, so spalten sich die beiden zeitversetzten Pulscomponenten jeweils entlang der Achsen des zweiten Elements auf. Dieses zweite Element wird erneut mit unterschiedlichen Gruppenlaufzeiten – gemäß der DGD des zweiten Elements – durchlaufen. Folgen weitere Elemente, ist der Puls am Ausgang der gesamten Verkettung nichttrivial verzerrt.

Als ausreichend gute Näherung der Frequenzabhängigkeit des PMD-Vektors $\vec{\tau}(\omega)$ erweist sich häufig die Näherung »PMD zweiter Ordnung«. Sie erfolgt durch Abbruch der Taylor-Reihe von $\vec{\tau}(\omega)$ um die Zentralfrequenz ω_0 des Signals nach dem zweiten Glied gemäß

$$\vec{\tau}(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \vec{\tau}(\omega_0) + \underbrace{\vec{\tau}_{\omega}(\omega_0)}_{\text{PMD-Vektor zweiter Ordnung}} \Delta\omega. \quad (2.67)$$

Dabei wird die Ableitung des PMD-Vektors $\vec{\tau}$ nach der Kreisfrequenz ω »PMD-Vektor zweiter Ordnung« $\vec{\tau}_{\omega}$ genannt. Der PMD-Vektor am Ausgang $\vec{\tau}$ besteht gemäß Gleichung (2.58) aus dem Produkt der DGD $\Delta\tau$ und des langsamen PSPs am Ausgang \hat{t}_{+} . Da diese jeweils frequenzabhängig sind, ist die Ableitung von $\vec{\tau}$, also der PMD-Vektor zweiter Ordnung $\vec{\tau}_{\omega} = \partial_{\omega}(\Delta\tau \hat{t}_{+})$, aus zwei Summanden aufgebaut,

$$\vec{\tau}_{\omega} = \partial_{\omega}(\Delta\tau \hat{t}_{+}) = \underbrace{\Delta\tau_{\omega}}_{\text{PCD}} \hat{t}_{+} + \Delta\tau \underbrace{(\partial_{\omega} \hat{t}_{+})}_{\text{PSP-Depolarisation}}. \quad (2.68)$$

Der erste Summand ist ersichtlich parallel zum PSP \hat{t}_{+} und somit zum PMD-Vektor $\vec{\tau}$, während die Ableitung $\partial_{\omega} \hat{t}_{+}$ des Einheitsvektors \hat{t}_{+} nach der Kreisfrequenz ω senkrecht zu \hat{t}_{+} steht. Somit ist der zweite Summand senkrecht zum PMD-Vektor $\vec{\tau}$. Die Gleichungen (2.67) und (2.68) sind in der folgenden Abbildung veranschaulicht.

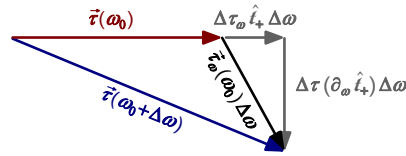


Abb. 2.8: Darstellung zweier spektral benachbarter PMD-Vektoren $\vec{\tau}(\omega_0)$ und $\vec{\tau}(\omega_0 + \Delta\omega)$ sowie des zugehörigen PMD-Vektors zweiter Ordnung $\vec{\tau}_\omega(\omega_0)$ und dessen parallele $\Delta\tau_\omega \hat{t}_+$ und senkrechte $\Delta\tau(\partial_\omega \hat{t}_+)$ Komponente.

Die beiden Summanden $\Delta\tau_\omega \hat{t}_+$ und $\Delta\tau(\partial_\omega \hat{t}_+)$ des PMD-Vektors zweiter Ordnung sollen im Folgenden näher betrachtet werden.

PCD

Die Länge $\Delta\tau_\omega$ des ersten Summanden $\Delta\tau_\omega \hat{t}_+$ entspricht einer Änderung der DGD mit der Frequenz, also einer spektralen Änderung der Differenz der Gruppenlaufzeiten der beiden Pulsanteile entlang der PSPs. So erfährt der Pulsanteil entlang des langsamen PSPs eine Frequenzabhängigkeit seiner Gruppenlaufzeit gemäß $\frac{1}{2}\Delta\tau_\omega$, der Anteil entlang des schnellen PSPs hingegen gemäß $-\frac{1}{2}\Delta\tau_\omega$. Der erste Summand des PMD-Vektors zweiter Ordnung erzeugt also eine polarisationsabhängige chromatische Dispersion [65], sein Betrag $\Delta\tau_\omega$ wird entsprechend PCD genannt (engl.: Polarization-Dependent Chromatic Dispersion). Falls die »gewöhnliche« chromatische Dispersion eines faseroptischen Systems vollständig kompensiert ist, wie es für diese Arbeit angenommen wurde, erzeugt die PCD $\Delta\tau_\omega$ chromatische Dispersion. Diese hängt vom Polarisationszustand und von der Frequenz ab und führt zu einer Verbreiterung der Pulse eines Signals. Ist die »gewöhnliche« chromatische Dispersion hingegen nicht vollständig kompensiert, wird sie aufgrund von PCD polarisationsabhängig (und frequenzabhängig) verstärkt bzw. abgeschwächt. Häufig wird statt der Frequenzableitung $\Delta\tau_\omega$ die Ableitung der DGD nach der Wellenlänge $\Delta\tau_\lambda = -(2\pi c/\lambda^2)\Delta\tau_\omega$ betrachtet. Sie wird dann in ps/nm angegeben und verändert das Produkt aus Dispersionsparameter D (in ps/(nm·km)) [48] und Systemlänge L zu $DL \pm \frac{1}{2}\Delta\tau_\lambda$. Dieses effektive Produkt aus D und L schwankt offenbar aufgrund von $\Delta\tau_\lambda$ mit der Frequenz.

PSP-Depolarisation

Der zweite Summand $\Delta\tau(\partial_\omega \hat{t}_+)$ des PMD-Vektors zweiter Ordnung entsteht aufgrund der Abhängigkeit der Richtung der PSPs von der Frequenz. Ein Maß für diese Abhängigkeit ist Länge $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$, also der Betrag der Ableitung des langsamen PSPs \hat{t}_+ nach der Kreisfrequenz ω . Häufig wird dieser Betrag $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ »(Stärke der) PSP-Depolarisation« genannt.

PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ führt zu unterschiedlichen Arten von Signalverzerrungen, Details – für Systeme ohne PDL und ohne PMD-Kompensation – finden sich beispielsweise in [12]. Werden am Ausgang des Systems PMD-Kompensatoren eingesetzt [10], so wird deren Wirksamkeit durch PSP-Depolarisation reduziert. Dies wird in Kapitel 5 näher untersucht, auch bezüglich des Einflusses von PDL.

Das Kapitel 3 wird sich unter anderem mit der Frage beschäftigen, welchen Einfluss die Anwesenheit von PDL auf die Statistik von PCD und PSP-Depolarisation ausübt.

2.3.5 Bandbreite der PSPs

Der PMD-Vektor $\vec{\tau}(\omega)$ ist eine Funktion der Frequenz. Für die Praxis von großem Interesse ist, *wie* er von der Frequenz abhängt. Dabei erweist sich sein spektraler Verlauf als äußerst komplex, er kann zudem empfindlich beeinflusst werden durch verhältnismäßig geringe Änderungen im System, wie z. B. durch eine Änderung der Stärke oder Richtung eines einzelnen doppelbrechenden Elements aufgrund von Temperaturänderungen oder mechanischen Bewegungen.

Dennoch können wichtige *statistische* Aussagen über den spektralen Verlauf des PMD-Vektors getroffen werden. Dazu soll seine spektrale Autokorrelationsfunktion (AKF) betrachtet werden, welche durch den spektralen Mittelwert $\langle \vec{\tau}(\omega + \Delta\omega) \cdot \vec{\tau}(\omega) \rangle$ definiert ist. (Die statistischen Eigenschaften des PMD-Vektors $\vec{\tau}(\omega)$ einer Verkettung doppelbrechender Elemente sind invariant gegenüber Verschiebungen der Frequenz, der Zufallsprozess $\vec{\tau}(\omega)$ ist somit stationär [12]. Deshalb hängt die AKF $\langle \vec{\tau}(\omega + \Delta\omega) \cdot \vec{\tau}(\omega) \rangle$ nur vom spektralen Abstand $\Delta\omega$ und nicht von der gewählten Frequenz ω ab [64].)

Karlsson *et al.* haben die spektrale AKF des PMD-Vektors in [66] berechnet. Dabei stellt sich heraus, dass der Mittelwert der DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ als einziger freier Parameter verbleibt. Noch aussagekräftiger als in [66] lässt sich die AKF darstellen durch Einführung der zentral wichtigen »Bandbreite der PSPs« [1]

$$\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv \frac{\pi/4}{\langle \Delta\tau \rangle}, \quad (2.69)$$

deren Bedeutung im Laufe dieses Kapitels verdeutlicht wird. Schließlich soll die AKF in normierter Form angegeben werden (normiert auf ihren Wert bei $\Delta\omega = 0$, also auf $\langle \vec{\tau}(\omega) \cdot \vec{\tau}(\omega) \rangle = \langle \Delta\tau^2 \rangle$). Dann wird sie bezeichnet als $\text{AKF}_{\vec{\tau}}(\Delta\omega)$ und ergibt sich zu

$$\text{AKF}_{\vec{\tau}}(\Delta\omega) = \frac{128}{\pi^3 (\Delta\omega/\Delta\omega_{\text{PSP}})^2} \left(1 - e^{-\frac{\pi^3}{128} (\Delta\omega/\Delta\omega_{\text{PSP}})^2} \right). \quad (2.70)$$

Die normierte AKF des PMD-Vektors hängt also nicht vom spektralen Abstand $\Delta\omega$ an sich ab, sondern nur vom Verhältnis $\Delta\omega/\Delta\omega_{\text{PSP}}$. Wie in Abb. 2.9 ersichtlich wird, hat sie bei $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}$ einen Wert von etwa 89 % des Maximalwerts, bei $\Delta\omega = 6\Delta\omega_{\text{PSP}}$ ist sie auf ungefähr 11 % abgefallen.

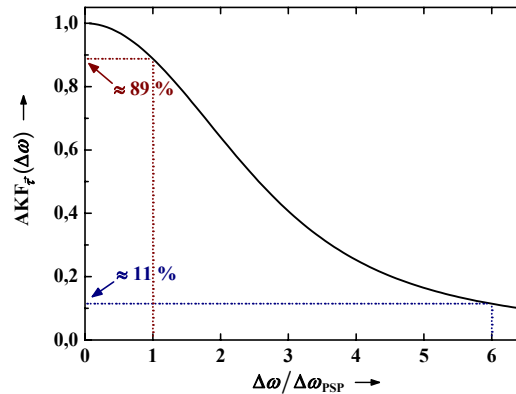


Abb. 2.9: Normierte spektrale AKF des PMD-Vektors, aufgetragen über das Verhältnis aus spektralem Abstand $\Delta\omega$ und PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$.

Zwei PMD-Vektoren im spektralen Abstand $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ sind also stark korreliert, während sie beim Abstand $6\Delta\omega_{\text{PSP}}$ praktisch unkorreliert sind. Gleiches gilt für den Betrag des PMD-Vektors, also für die DGD $\Delta\tau$, sowie für seine Richtung, den PSP \hat{t}_+ . Ein PMD-Vektor hängt also – im statistischen Mittel – über die Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ praktisch nicht von der Frequenz ab. Somit kann der PMD-Vektor für ein Signal, dessen Bandbreite kleiner ist als die PSP-Bandbreite, in sehr guter Näherung durch den PMD-Vektor bei der Zentralfrequenz ersetzt werden. Dies entspricht der Näherung PMD erster Ordnung.

Diese Resultate sind beispielsweise bei einer experimentellen oder simulatorischen Bestimmung von PMD- (und PDL-) Größen zu beachten. Ein typisches Beispiel ist die Messung der mittleren DGD $\langle\Delta\tau\rangle$ durch Messung und Mittelung über einen endlichen Frequenzbereich ω_{min} bis ω_{max} bzw. über den entsprechenden Wellenlängenbereich. Unabhängig von der Messmethode enthält dieser Frequenzbereich nur ungefähr $(\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}})/(6\Delta\omega_{\text{PSP}})$ statistisch unabhängige Stichproben, somit ist die Mittelung mit einem entsprechenden Fehler behaftet. Weitere Details finden sich in [67] und in [11].

Das Kapitel 3.4 wird zeigen, dass die AKFs aller relevanten PMD- und PDL-Größen derjenigen von Abb. 2.9 ähneln. Dabei gilt für Größen mit endlichem Mittelwert, dass die AKF asymptotisch nicht auf Null sondern auf das Quadrat des Mittelwerts abfällt (wie es sich für eine AKF gehört). Somit bestimmt einzig die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} = (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$ die Stärke der spektralen Änderung dieser Größen. Der Einfluss von PDL auf den Verlauf dieser AKFs ist bisher in der Literatur kaum beschrieben. Er soll in Kapitel 3.4 ausführlich untersucht werden.

2.4 PDL-Elemente

Die Polarisationsabhängigkeit der Dämpfung (PDL) einer gewöhnlichen Einmodenfaser ist vernachlässigbar gering. Dies gilt jedoch nicht für eine Reihe optischer Komponenten, welche vom Signal entlang der Strecke durchlaufen werden. So kann eine Transoceanverbindung mehrere hundert optische Verstärker enthalten, welche wiederum aus diversen optischen Komponenten aufgebaut sind, von denen ein Teil polarisations-

abhängig dämpft. Zwar werden bei Landverbindungen (selbst wenn sie mehrere tausend Kilometer lang sein sollten) weitaus weniger optische Verstärker eingesetzt. Aus Kostengründen haben die dort verwendeten optischen Komponenten jedoch – im Vergleich zu Unterseeverbindungen – häufig erhöhte Werte der PDL.

Einige der Komponenten, welche zur PDL des Systems beitragen können, sind in der folgenden Tabelle aufgeführt. Als Maß für die Stärke der PDL wird die Größe PDL_{dB} verwendet, welche in Kapitel 2.4.1 definiert werden soll.

Tab. 2.1: Auswahl typischer Komponenten, welche zur PDL eines faser-optischen Systems beitragen; die angegebenen Wertebereiche dienen zur groben Orientierung, praktisch eingesetzte Komponenten können durchaus davon abweichen.

Optische Komponente	Stärke der PDL	
Koppler	$0,1 \text{ dB} < PDL_{\text{dB}} < 0,3 \text{ dB}$	[15], [19]
Isolator	$0,05 \text{ dB} < PDL_{\text{dB}} < 0,3 \text{ dB}$	[19], [68]
Filter	$0,2 \text{ dB} < PDL_{\text{dB}} < 0,4 \text{ dB}$	[15]
Zirkulator	$0,1 \text{ dB} < PDL_{\text{dB}} < 0,2 \text{ dB}$	[19], [69]
Multiplexer	$0,05 \text{ dB} < PDL_{\text{dB}} < 0,1 \text{ dB}$	[19]
Optischer Verstärker (einschließlich aller Komponenten)	$0,1 \text{ dB} < PDL_{\text{dB}} < 0,5 \text{ dB}$	[38], [22]

Unabhängig von der Art der Komponente und der physikalischen Ursache ihrer PDL lässt sich die Polarisationsabhängigkeit der Dämpfung mithilfe des gleichen Formalismus beschreiben. Dieser soll im Kapitel 2.4.1 dargestellt werden.

2.4.1 Ein PDL-Element

Definition und Jones-Operator

Eine polarisationsabhängig dämpfende Komponente ist charakterisiert durch die Abhängigkeit ihres Transmissionskoeffizienten (bezüglich der optischen Leistung) \mathcal{T} vom Polarisationszustand am Eingang. Die Dämpfung eines Signals hängt also von dessen Polarisationszustand ab. Der maximale Transmissionskoeffizient soll als \mathcal{T}_{max} , der minimale als \mathcal{T}_{min} bezeichnet werden, ihr Wertebereich sei als $0 < \mathcal{T}_{\text{min}} \leq \mathcal{T}_{\text{max}} \leq 1$ angenommen. Polarisationsabhängige Verstärkung (PDG) ist in diesem Zusammenhang völlig äquivalent zu polarisationsabhängiger Dämpfung, der einzige Unterschied ist ein polarisationsunabhängiger Faktor, welcher durch die gewöhnliche Dämpfung des Systems berücksichtigt werden kann. Die Beschreibungen von PDL-Elementen in der Literatur ([13], [14], [15], [12]) lassen sich zur folgenden Definition zusammenführen:

Ein »Element mit reiner PDL« sei definiert als optisches Element, dessen Jones-Operator orthogonale Eigenvektoren $|\mathcal{s}_{\text{max}}\rangle$ und $|\mathcal{s}_{\text{min}}\rangle$ aufweist, welche durch die Transmissionskoeffizienten \mathcal{T}_{max} bzw. \mathcal{T}_{min} charakterisiert sind. Weder \mathcal{T}_{max} und \mathcal{T}_{min} noch die Eigenvektoren $|\mathcal{s}_{\text{max}}\rangle$ und $|\mathcal{s}_{\text{min}}\rangle$ eines reinen PDL-Elements hängen von der

Frequenz ab. Die Eigenvektoren $|\mathfrak{s}_{\max}\rangle$ und $|\mathfrak{s}_{\min}\rangle$ seien als normiert angenommen, sie bilden somit ein VON-System des Jones-Raums. Die zugehörigen Stokes-Vektoren $\hat{\mathfrak{s}}_{\max} \equiv \langle \mathfrak{s}_{\max} | \vec{\sigma} | \mathfrak{s}_{\max} \rangle$ und $\hat{\mathfrak{s}}_{\min} \equiv \langle \mathfrak{s}_{\min} | \vec{\sigma} | \mathfrak{s}_{\min} \rangle$ sind demnach normiert und antiparallel, $\hat{\mathfrak{s}}_{\max} = -\hat{\mathfrak{s}}_{\min}$.

Mit dem »differenziellen Dämpfungskoeffizienten« $\Delta\alpha$, welcher definiert ist durch die Relation

$$\mathcal{T}_{\min} \equiv \mathcal{T}_{\max} e^{-2\Delta\alpha}, \quad (2.71)$$

ist der Jones-Operator \mathbf{T} eines reinen PDL-Elements per Definition gegeben durch

$$\mathbf{T} = \sqrt{\mathcal{T}_{\max}} e^{-\frac{\Delta\alpha}{2}} e^{\frac{\Delta\alpha}{2} \hat{\mathfrak{s}}_{\max} \cdot \vec{\sigma}}. \quad (2.72)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (2.31) von Seite 23 lässt sich der Jones-Operator auch durch ein Karlsson-Quaternion ausdrücken,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \sqrt{\mathcal{T}_{\max}} e^{-\frac{\Delta\alpha}{2}} \left(\cosh\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \mathbf{1} + \sinh\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) (\hat{\mathfrak{s}}_{\max} \cdot \vec{\sigma}) \right) \\ &= \sqrt{\mathcal{T}_{\max}} e^{-\frac{\Delta\alpha}{2}} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right), \sinh\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \hat{\mathfrak{s}}_{\max} \right]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die Komponenten des Karlsson-Quaternions sind reelle Zahlen. Gemäß Kapitel 2.2.3 ist der Jones-Operator \mathbf{T} eines Elements mit reiner PDL somit hermitesch, er hat orthogonale Eigenvektoren und reelle Eigenwerte.

Abschließend soll der Jones-Operator \mathbf{T} bezüglich »seines eigenen« VON-Systems $|\mathfrak{s}_{\max}\rangle, |\mathfrak{s}_{\min}\rangle$ als 2×2 Jones-Matrix geschrieben werden. Durch Anwendung der Gleichung (2.28) von Seite 23 ergeben sich die Eigenwerte des Quaternions $[\cosh(\Delta\alpha/2), \sinh(\Delta\alpha/2) \hat{\mathfrak{s}}_{\max}]$ zu $e^{\pm\Delta\alpha/2}$. Somit ergibt sich der Jones-Operator eines Elements mit reiner PDL, dargestellt bezüglich »seines eigenen« VON-Systems $|\mathfrak{s}_{\max}\rangle, |\mathfrak{s}_{\min}\rangle$, zu

$$\mathbf{T} = \sqrt{\mathcal{T}_{\max}} e^{-\frac{\Delta\alpha}{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{\Delta\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\Delta\alpha}{2}} \end{pmatrix}_{\max \min} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{T}_{\max}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathcal{T}_{\min}} \end{pmatrix}_{\max \min}. \quad (2.74)$$

Bezüglich dieser Basis liegt \mathbf{T} erwartungsgemäß in Diagonalform vor, die beiden Eigenwerte $\sqrt{\mathcal{T}_{\max}}$ und $\sqrt{\mathcal{T}_{\min}}$ stehen in der Diagonale.

PDL-Größen

Alternativ zum differenziellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$ werden häufig die PDL in dB oder die PDL Γ verwendet [13], welche definiert sind gemäß

$$PDL_{\text{dB}} \equiv 10 \log_{10} \left(\frac{\mathcal{T}_{\max}}{\mathcal{T}_{\min}} \right), \quad \Gamma \equiv \frac{\mathcal{T}_{\max} - \mathcal{T}_{\min}}{\mathcal{T}_{\max} + \mathcal{T}_{\min}}. \quad (2.75)$$

Die Größe PDL_{dB} wird häufig zur Vereinfachung der Schreibweise als PDL (ohne Index) geschrieben. Da \mathcal{T}_{max} und \mathcal{T}_{min} für ein Element mit reiner PDL als nicht frequenzabhängig angenommen wurden, hängen $\Delta\alpha$, PDL_{dB} und Γ ebenfalls nicht von der Frequenz ab. Experimentelle Untersuchungen in [70] bestätigen dies für einfache Elemente in guter Näherung. In Abb. 2.10 sind diese drei Größen als Funktion des Verhältnisses $\mathcal{T}_{\text{min}}/\mathcal{T}_{\text{max}}$ dargestellt. Sie haben die Wertebereiche $\Delta\alpha \geq 0$, $PDL_{\text{dB}} \geq 0$ und $0 \leq \Gamma < 1$. Hilfreich zur Durchführung von Umrechnungen zwischen diesen Größen sind schließlich die Relationen

$$PDL_{\text{dB}} = \frac{20}{\underbrace{\ln(10)}_{\approx 8,686}} \Delta\alpha, \quad \Gamma = \frac{10^{PDL_{\text{dB}}/10} - 1}{10^{PDL_{\text{dB}}/10} + 1}, \quad (2.76)$$

$$PDL_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \right) = \frac{20}{\underbrace{\ln(10)}_{\approx 8,686}} \left(\Gamma + \frac{1}{3}\Gamma^3 + O(\Gamma^5) \right).$$

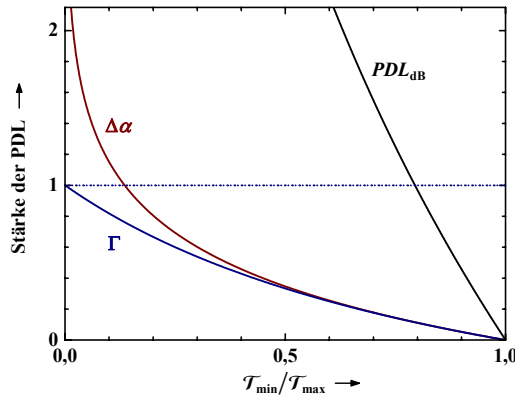


Abb. 2.10: PDL-Größen als Funktion des Verhältnisses $\mathcal{T}_{\text{min}}/\mathcal{T}_{\text{max}}$; die PDL in dB ist direkt proportional zum differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$ gemäß $PDL_{\text{dB}} \approx 8,686 \Delta\alpha$. Im Grenzfall schwacher PDL gilt zudem, dass $\Delta\alpha$ und die PDL Γ nahezu identisch sind, $\Delta\alpha \approx \Gamma$.

Mit Hilfe der PDL Γ und der Richtung des am wenigsten gedämpften Polarisationszustands im Stokes-Raum $\hat{\mathbf{s}}_{\text{max}} \equiv \langle \mathbf{s}_{\text{max}} | \vec{\sigma} | \mathbf{s}_{\text{max}} \rangle$ wird schließlich der »PDL-Vektor« des Elements mit reiner PDL definiert zu $\vec{\Gamma} \equiv \Gamma \hat{\mathbf{s}}_{\text{max}}$. Dieser enthält die vollständige Information über die Stärke und die Richtung der PDL. Da der Stokes-Vektor $\hat{\mathbf{s}}_{\text{max}}$ dem Eigenvektor $|\mathbf{s}_{\text{max}}\rangle$ des Jones-Operators \mathbf{T} entspricht, ändert er sich bei der Transmission durch das Element nicht.

Quaternion der Leistungstransmission

Gemäß der Vereinbarungen des Kapitels 2.2.4 sollen normierte Jones- und normierte Stokes-Vektoren durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet werden, während für ihre nicht normierten Entsprechungen Großbuchstaben verwendet werden. Ein Jones-Vektor am Eingang wird dementsprechend als $|s\rangle$ bzw. $|S\rangle$ geschrieben, am Ausgang als $|t\rangle$ bzw.

$|T\rangle$. Die zugehörigen Stokes-Vektoren lauten \hat{s} bzw. \vec{S} am Eingang und \hat{t} bzw. \vec{T} am Ausgang.

Wirkt der Jones-Operator \mathbf{T} eines PDL-Elements auf den normierten Jones-Vektor am Eingang $|s\rangle$, so ist der Jones-Vektor am Ausgang $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ im Allgemeinen nicht normiert (im Gegensatz zum Fall eines doppelbrechenden Elements). Die optische Intensität am Eingang entspricht $\langle s|s\rangle = 1$ (siehe Kapitel 2.2.2), am Ausgang fällt sie ab auf $\langle T|T\rangle \leq 1$. Der Transmissionskoeffizient \mathcal{T} ist somit gegeben durch $\mathcal{T} = \langle T|T\rangle = \langle s|\mathbf{T}^\dagger\mathbf{T}|s\rangle$. Für ein einzelnes Element mit *reiner* PDL ist der Jones-Operator \mathbf{T} definitionsgemäß hermitesch (s. o.), es gilt in diesem Fall $\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T}$. Um die Gültigkeit der nachfolgenden Betrachtungen nicht unnötig einzuschränken, soll zwischenzeitig auf die Annahme reiner PDL verzichtet werden. Die folgenden Aussagen sind damit sowohl für Elemente mit reiner PDL gültig als auch beispielsweise für eine Verkettung derartiger Elemente oder für eine Verkettung doppelbrechender Elemente mit verschachtelten PDL-Elementen. Global betrachtet sind all diese Systeme polarisationsabhängig dämpfende »Elemente«, ihr Jones-Operator \mathbf{T} ist jedoch im Allgemeinen nicht hermitesch, sie sind also nicht Elemente mit reiner PDL.

Unabhängig von der Art des PDL-Elements ist das Operatorprodukt $\mathbf{T}^\dagger\mathbf{T}$ aber in jedem Fall hermitesch, gemäß Kapitel 2.2.3 lässt es sich deshalb als Karlsson-Quaternion mit *reellen* Komponenten schreiben,

$$\mathbf{T}^\dagger\mathbf{T} \equiv p_0\mathbf{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} = [p_0, \vec{p}]. \quad (2.77)$$

Dieses spezielle Quaternion wird »Quaternion der Leistungstransmission« genannt [14]. Wird es in $\mathcal{T} = \langle s|\mathbf{T}^\dagger\mathbf{T}|s\rangle$ eingesetzt, so folgt mit dem normierten Stokes-Vektor am Eingang $\hat{s} = \langle s|\vec{\sigma}|s\rangle$ unmittelbar der Transmissionskoeffizient eines PDL-Elements zu $\mathcal{T} = p_0 + \hat{s} \cdot \vec{p}$. Somit beschreibt der Skalarteil p_0 den polarisationsunabhängigen Teil des Transmissionskoeffizienten, er entspricht gleichsam dem gesamten Transmissionskoeffizienten eines vollständig depolarisierten Signals (DOP $\mathcal{D} = 0$). Deshalb wird p_0 auch häufig als $\mathcal{T}_{\text{depol}} \equiv p_0$ bezeichnet [13].

Schließlich erweist sich das Verhältnis \vec{p}/p_0 als identisch zum PDL-Vektor $\vec{\Gamma}$, also zum Produkt aus PDL Γ und Richtung des am wenigsten gedämpften Polarisationszustands im Stokes-Raum \hat{s}_{max} [14]. Für ein Element mit *reiner* PDL entspricht der Stokes-Vektor \hat{s}_{max} per Definition dem Jones-Eigenvektor $|s_{\text{max}}\rangle$ des Jones-Operators. Dies gilt im allgemeinen Fall eines nicht notwendigerweise *reinen* PDL-Elements nicht mehr. Die Richtung des am wenigsten gedämpften Polarisationszustands am Eingang \hat{s}_{max} wird dann auf einen geänderten Stokes-Vektor $\hat{t}_{\text{max}} \neq \hat{s}_{\text{max}}$ am Ausgang abgebildet. In diesem Fall ist die Richtung des PDL-Vektors am Eingang $\vec{\Gamma}_{\text{in}} \equiv \Gamma\hat{s}_{\text{max}}$ nicht identisch zur Richtung des PDL-Vektors am Ausgang $\vec{\Gamma}_{\text{out}} \equiv \Gamma\hat{t}_{\text{max}}$. Dies wird in der Literatur häufig nicht berücksichtigt, soll hier aber streng beachtet werden. Die einfache Bezeichnung $\vec{\Gamma}$ kann deshalb nur für ein Element mit reiner PDL verwendet werden, da dann $\vec{\Gamma}_{\text{in}} = \vec{\Gamma}_{\text{out}} \equiv \vec{\Gamma}$ gilt. Bei der Identifizierung des Verhältnisses \vec{p}/p_0 mit dem PDL-

Vektor in [14] (bzw. entsprechend in [12] oder [13]) handelt es sich um den PDL-Vektor am Eingang, $\vec{p}/p_0 = \vec{\Gamma}_{\text{in}}$.

Somit kann der Transmissionskoeffizient eines allgemeinen PDL-Elements zusammenfassend geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\hat{s}) &= p_0 + \hat{s} \cdot \vec{p} \\ &= \mathcal{T}_{\text{depol}} (1 + \hat{s} \cdot \vec{\Gamma}_{\text{in}}). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Er ist maximal bzw. minimal, wenn der Polarisationszustand am Eingang \hat{s} parallel bzw. antiparallel zum PDL-Vektor $\vec{\Gamma}_{\text{in}}$ bzw. zum Vektorteil \vec{p} des Quaternions $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} = [p_0, \vec{p}]$ steht,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{max/min}} &= p_0 \pm \|\vec{p}\| \\ &= \mathcal{T}_{\text{depol}} (1 \pm \Gamma). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Änderung des Polarisationszustands

Durch die polarisationsabhängige Transmission wird gleichzeitig der Polarisationszustand geändert. Zur Untersuchung dieses Effekts sei ein einzelnes Element mit *reiner* PDL angenommen, der Jones-Operator \mathbf{T} sei also durch Gleichung (2.72) gegeben. Da dieser nicht unitär ist, wirkt er sich im Stokes-Raum auch nicht als Rotation von Stokes-Vektoren aus. Die entsprechenden Betrachtungen des Kapitels 2.2.5 sind somit für ein PDL-Element – im Gegensatz zum doppelbrechenden Element – nicht anwendbar.

Gesucht ist der normierte Stokes-Vektor \hat{t} am Ausgang eines Elements mit reiner PDL für den Polarisationszustand \hat{s} am Eingang. Im Jones-Raum lautet dieser Zusammenhang $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$, wobei $|T\rangle$ im Allgemeinen nicht normiert ist, $\langle T|T\rangle \leq 1$. Der normierte Stokes-Vektor \hat{t} ist gemäß Gleichung (2.34) von Seite 25 gegeben durch $\hat{t} = \langle T|\vec{\sigma}|T\rangle / \langle T|T\rangle$. Durch Einsetzen von $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ und der Darstellung (2.73) des Jones-Operators \mathbf{T} folgt unter Beachtung der Regeln (2.22) von Seite 21 für Pauli-Matrizen schließlich [12]

$$\hat{t} = \frac{\sqrt{1-\Gamma^2}}{1+\hat{s}\cdot\vec{\Gamma}} \hat{s} + \frac{1+\hat{s}\cdot\vec{\Gamma}(1-\sqrt{1-\Gamma^2})}{1+\hat{s}\cdot\vec{\Gamma}} \frac{1}{\Gamma^2} \vec{\Gamma}. \quad (2.80)$$

Ersichtlich sind die Polarisationszustände am Eingang und am Ausgang nicht durch eine einfache Rotation im Stokes-Raum verknüpft. Stattdessen ergibt sich der normierte Stokes-Vektor \hat{t} am Ausgang gemäß einer Summe $\hat{t} = \dots \hat{s} + \dots \vec{\Gamma}$, wobei die ausgelassenen Faktoren abhängen vom Skalarprodukt des Stokes-Vektors am Eingang \hat{s} mit dem PDL-Vektor $\vec{\Gamma}$. Die Auswirkungen dieser Gleichung sind in der folgenden Abbildung auf der Poincaré-Kugel dargestellt.

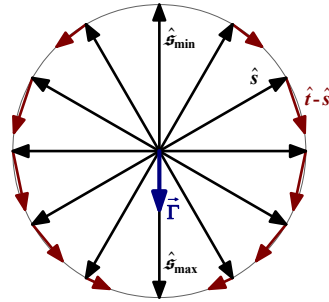


Abb. 2.11: Auswirkung eines Elements mit reiner PDL auf den normierten Stokes-Vektor \hat{s} , dargestellt auf einem Querschnitt der Poincaré-Kugel; der PDL-Vektor des Elements ist in diesem Beispiel als $\vec{\Gamma} = (0 \ 0 \ -0,4)^T$ angenommen, somit werden die Polarisationszustände $\hat{s}_{\min} = (0 \ 0 \ 1)^T$ und $\hat{s}_{\max} = (0 \ 0 \ -1)^T$ nicht durch das Element verändert (sie entsprechen den Jones-Eigenvektoren). Alle anderen Polarisationszustände werden »in Richtung PDL-Vektor $\vec{\Gamma}$ gezogen«.

In [13] wird gezeigt, dass die Relation (2.80) nicht nur für normierte Stokes-Vektoren, sondern auch für DOP-Vektoren (vgl. Kapitel 2.2.6) gilt. Die normierten Stokes-Vektoren \hat{i} und \hat{s} der Gleichung (2.80) sind dann durch die entsprechenden DOP-Vektoren $\vec{t}_{\mathcal{D}}$ und $\vec{s}_{\mathcal{D}}$ zu ersetzen. Durch Bestimmung der Länge $\|\vec{t}_{\mathcal{D}}\|$ des DOP-Vektors am Ausgang lässt sich dann die Auswirkung des Elements auf den Polarisationsgrad (DOP) berechnen. Für Details sei auf [13] oder [12] verwiesen, hier sei nur erwähnt, dass die DOP eines vollständig polarisierten Signals erhalten bleibt ($\mathcal{D} = 1$ am Eingang führt zu $\mathcal{D} = 1$ am Ausgang) und dass ein vollständig depolarisiertes Signal ($\mathcal{D} = 0$ am Eingang) am Ausgang des Elements die DOP $\mathcal{D} = \Gamma$ hat.

Zwar wurde zur Herleitung von Gleichung (2.80) ein Element mit *reiner* PDL angenommen, sie gilt jedoch ebenso für allgemeine polarisationsabhängig dämpfende Komponenten und Systeme [13], also beispielsweise auch für eine Verkettung doppelbrechender Elemente mit verschachtelten PDL-Elementen. Der PDL-Vektor $\vec{\Gamma}$ in Gleichung (2.80) ist dann durch den PDL-Vektor am Eingang $\vec{\Gamma}_{\text{in}}$ zu ersetzen, obgleich in der Literatur nicht explizit darauf hingewiesen wird.

2.4.2 Verkettung von PDL-Elementen

Die Verkettung zweier Elemente mit reiner PDL ist wiederum ein PDL-Element in dem Sinne, dass sie polarisationsabhängig dämpft. Ihr Jones-Operator \mathbf{T} ist allerdings im Allgemeinen nicht hermitesch, die Verkettung lässt sich somit nicht durch ein einzelnes Element mit *reiner* PDL ersetzen. (Dies wird in der Literatur häufig übersehen, lässt sich jedoch einfach zeigen: Das Produkt zweier hermitescher Operatoren ist gemäß Kapitel 2.2.1 nur dann hermitesch, wenn die beiden Operatoren kommutieren. Zwei Jones-Operatoren der Form (2.72) kommutieren jedoch im Allgemeinen nicht. Noch einfacher kann dies mithilfe der Produktregel für Quaternionen (2.29) von Seite 23 gezeigt werden: Da ein Karlsson-Quaternion genau dann hermitesch ist, falls es ausschließlich reelle Quaternion-Komponenten hat, müssen die Vektorteile der beiden

hermiteschen Operatoren gemäß Gleichung (2.29) parallel oder antiparallel sein, damit das Produkt wieder hermitesch ist.)

Verkettung von PDL-Vektoren

Zur Beurteilung der gesamten PDL einer Verkettung von PDL-Elementen ist der globale PDL-Vektor zu berechnen. Zunächst seien zwei Elemente mit reiner PDL angenommen. Ohne auf Details der Herleitung einzugehen (welche in [13] und in [14] auf unterschiedliche Weise erfolgt), sei hier nur das Ergebnis genannt: Mit den PDL-Vektoren $\vec{\Gamma}_1$ und $\vec{\Gamma}_2$ der einzelnen Elemente folgt der globale PDL-Vektor am Ausgang der Verkettung zu

$$\vec{\Gamma}_{\text{out}} = \frac{\sqrt{1-\Gamma_2^2}}{1+\vec{\Gamma}_1 \cdot \vec{\Gamma}_2} \vec{\Gamma}_1 + \frac{1+\vec{\Gamma}_1 \cdot \vec{\Gamma}_2 (1-\sqrt{1-\Gamma_2^2})}{1+\vec{\Gamma}_1 \cdot \vec{\Gamma}_2} \frac{1}{\Gamma_2^2} \vec{\Gamma}_2 \quad (2.81)$$

$$\approx \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 \quad \text{für } \Gamma_1, \Gamma_2 \ll 1.$$

Der gesamte PDL-Vektor ist also nur im Grenzfall schwacher PDL gleich der Summe der beiden PDL-Vektoren $\vec{\Gamma}_1$ und $\vec{\Gamma}_2$. Dies gilt entsprechend für eine Verkettung von mehr als zwei Elementen mit reiner PDL.

Statistik der globalen PDL

Im Grenzfall schwacher PDL setzt sich der gesamte PDL-Vektor einer Verkettung also zusammen aus einer Summe zufällig im Stokes-Raum orientierter statistisch unabhängiger Vektoren $\vec{\Gamma}_i$. Das gleiche statistische Verhalten wurde bereits in Kapitel 2.3.3 beim globalen PMD-Vektor einer Verkettung doppelbrechender Elemente beobachtet. Aus dieser Analogie folgt, dass die Länge des PDL-Vektors (also die PDL Γ) – genau wie die Länge des PMD-Vektors (also die DGD $\Delta\tau$) – maxwellverteilt ist. Dabei ist in beiden Fällen der Grenzfall einer großen Zahl N Elemente angenommen, beim PDL-Vektor jedoch zusätzlich der Grenzfall schwacher PDL.

In der Literatur findet sich bisweilen auch die Aussage, dass die Statistik der globalen PDL einer Rayleighverteilung (siehe Anhang) folgt [16]. Dies setzt jedoch die Annahme voraus, dass die einzelnen Vektoren $\vec{\Gamma}_i$, aus denen sich der globale PDL-Vektor zusammensetzt, nicht zufällig im dreidimensionalen Stokes-Raum orientiert sind, sondern nur auf dem Äquator der Poincaré-Kugel, also in zwei Dimensionen. Die ausgezeichneten Richtungen der PDL-Elemente sind dann auf lineare Polarisationszustände beschränkt. In der Praxis haben polarisationsabhängig dämpfende Komponenten auch tatsächlich zumeist lineare ausgezeichnete Polarisationszustände. Allerdings bewirkt schon ein geringes Maß an Doppelbrechung zwischen den PDL-Elementen (z. B. aufgrund dazwischen liegender Fasern oder doppelbrechender Komponenten), dass Polarisationszustände eine zufällige Rotation (zufällig in drei Dimensionen) erfahren, bevor sie auf das folgende PDL-Element auftreffen. Wird dies berücksichtigt, ist die *relative* Orientierung zweier PDL-Vektoren $\vec{\Gamma}_1$ und $\vec{\Gamma}_2$ in der

Praxis immer in drei Dimensionen zufällig. Dann ist die PDL Γ maxwellverteilt und nicht rayleighverteilt.

Weiterhin bewirkt das zusätzliche Auftreten von Doppelbrechung, dass die relative Orientierung der einzelnen PDL-Vektoren frequenzabhängig wird. Die Rotation von Polarisationszuständen auf Grund von Doppelbrechung ist nämlich gemäß Abb. 2.4(a) auf Seite 34 eine Funktion der Frequenz. Dies führt schließlich dazu, dass auch die *spektrale* Statistik der PDL-Vektoren derjenigen von PMD-Vektoren entspricht. So gilt die spektrale Autokorrelationsfunktion des PMD-Vektors (siehe Abb. 2.9 auf Seite 50) in gleicher Weise für PDL-Vektoren. Eine weitere Folge ist, dass der spektrale Mittelwert der PDL Γ gleich seinem Scharmittelwert (Schar von Realisierungen der Verkettung bei fester Frequenz) wird. Der Zufallsprozess $\Gamma(\omega)$ ist somit – genau wie $\Delta\tau(\omega)$ – ergodisch, falls die einzelnen PDL-Elemente durch Fasern oder andere doppelbrechende Komponenten verbunden sind. Wären sie das nicht, würde der frequenzunabhängige Jones-Operator der PDL-Elemente (2.72) dazu führen, dass die globale PDL der Verkettung nicht von der Frequenz abhängt. Jede Realisierung des Zufallsprozesses $\Gamma(\omega)$ wäre dann als Funktion der Frequenz eine Konstante, $\Gamma(\omega)$ wäre nicht ergodisch.

Gemäß Gleichung (2.76) ist die PDL in dB im Grenzfall schwacher PDL ($\Gamma \ll 1$) proportional zur PDL Γ . Die obigen Aussagen für Γ gelten in diesem Grenzfall also ebenso für PDL_{dB} . Bei der Verkettung einer großen Zahl PDL-Elemente sind also sowohl die PDL Γ als auch PDL_{dB} maxwellverteilt, falls der Grenzfall schwacher PDL gegeben ist.

Bei den folgenden abschließenden Betrachtungen soll für eine vereinfachte Schreibweise der Index »dB« bei PDL_{dB} entfallen. Weiterhin soll die PDL der einzelnen PDL-Elemente als PDL_i ($i = 1, 2, \dots, N$) bezeichnet werden, das zugehörige arithmetische Mittel als $\langle PDL_i \rangle$, das arithmetische Mittel von PDL_i^2 als $\langle PDL_i^2 \rangle$ und der entsprechende quadratische Mittelwert als $(PDL_i)_{\text{rms}}$ (engl.: Root Mean Square, $(\dots)_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle (\dots)^2 \rangle}$). Wie bisher soll sowohl der Grenzfall großer N (große Anzahl PDL-Elemente) angenommen werden als auch der Grenzfall schwacher PDL.

Analog zu den statistischen Betrachtungen zur DGD in Kapitel 2.3.3, siehe Gleichung (2.66), folgt, dass das mittlere Quadrat der gesamten PDL $\langle PDL^2 \rangle$ gleich der Summe $\sum PDL_i^2$ und somit gleich $N \langle PDL_i^2 \rangle$ ist. Der quadratische Mittelwert PDL_{rms} der globalen PDL wächst also gemäß $PDL_{\text{rms}} = \sqrt{N} (PDL_i)_{\text{rms}}$ mit \sqrt{N} . Aufgrund der allgemeingültigen Eigenschaften maxwellverteilter Zufallsvariablen (siehe Anhang) ist der Mittelwert $\langle PDL \rangle$ mit dem quadratischen Mittelwert PDL_{rms} verknüpft über $\langle PDL \rangle = \sqrt{8/(3\pi)} PDL_{\text{rms}}$, somit gilt im Grenzfall schwacher PDL schließlich $\langle PDL \rangle = \sqrt{8/(3\pi)} \sqrt{N} (PDL_i)_{\text{rms}}$.

Zusammenfassend gelten für die globale PDL (in dB) einer Verkettung von $N \gg 1$ PDL-Elementen im Grenzfall schwacher PDL die Relationen

$$\begin{aligned}
\langle PDL^2 \rangle &= \sum_{i=1}^N PDL_i^2 = N \langle PDL_i^2 \rangle, \\
PDL_{\text{rms}} &\equiv \sqrt{\langle PDL^2 \rangle}, \\
\langle PDL \rangle &= \sqrt{8/(3\pi)} PDL_{\text{rms}}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Zwar ist der Grenzfall schwacher PDL in der Praxis häufig gegeben, bei einem faseroptischen System mit einer großen Zahl optischer Verstärker kann jedoch eine genauere Betrachtung notwendig sein. In dem Zusammenhang ist es Galtarossa *et al.* in [18] gelungen, – basierend auf der »dynamischen Gleichung für PDL« (siehe Kapitel 3.1) – die exakte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der PDL (in dB) zu bestimmen. Diese erweist sich für alle praxisrelevanten Fälle als nahezu maxwellverteilt, erst ab einer globalen mittleren PDL von mehr als etwa 15 bis 20 dB weicht die Statistik der PDL nennenswert von einer Maxwellverteilung ab. Da eine derart große globale PDL weder in faseroptischen Systemen der Praxis noch bei den Untersuchungen dieser Arbeit auftritt, wird die PDL in dB von nun an als maxwellverteilt angenommen. Somit gilt nach wie vor der Zusammenhang $\langle PDL \rangle = \sqrt{8/(3\pi)} PDL_{\text{rms}}$. Eine weitergehende Analyse der Ergebnisse von [18] zeigt, dass die Relation $\langle PDL^2 \rangle = N \langle PDL_i^2 \rangle$ hingegen schon ab wenigen dB globaler PDL ungenau wird. Für derartige Systeme, welche in der Praxis durchaus vorkommen, sind dann anstelle der Gleichungen (2.82) die Relationen

$$\begin{aligned}
\langle PDL^2 \rangle &= N \langle PDL_i^2 \rangle + \underbrace{\left(\frac{\ln(10)}{60} \right)^2}_{\approx 0,0015} (N \langle PDL_i^2 \rangle)^2, \\
PDL_{\text{rms}} &\equiv \sqrt{\langle PDL^2 \rangle}, \\
\langle PDL \rangle &= \sqrt{8/(3\pi)} PDL_{\text{rms}}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

zu verwenden. Die erste dieser Gleichungen unterscheidet sich von der entsprechenden Näherungslösung in Gleichung (2.82), sie wurde ohne Zuhilfenahme von Näherungen in [18] hergeleitet, womit sie für beliebig große PDL exakt gültig ist. (Sie entspricht der Gleichung (5) von [18] nach Überführung in die hier verwendete Notation. Dabei lässt sich die Größe $3\gamma^2 t$ von [18] nach kurzer Rechnung als $N \langle PDL_i^2 \rangle$ identifizieren.)

Zusammenfassend gilt für eine Verkettung von PDL-Elementen im Grenzfall schwacher PDL, dass die globale PDL in dB maxwellverteilt ist, mit Erwartungswerten gemäß der Gleichungen (2.82). Wird die mittlere globale PDL der Verkettung größer als etwa 2 bis 3 dB, so kann sie zwar weiterhin als maxwellverteilt angenommen werden, die erste Gleichung von (2.82) verliert jedoch ihre Gültigkeit, sie ist durch die entsprechende Gleichung von (2.83) zu ersetzen. Erst ab einer mittleren PDL von etwa 15 bis 20 dB ist die PDL nicht mehr in guter Näherung maxwellverteilt, in einem solchen Fall ist die exakte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von [18] zu verwenden. Die Überprüfung dieser Aussagen mithilfe von Simulationen erfolgt in Kapitel 3.3.1.

3 Statistik von PMD und PDL

Bisher wurden die Effekte Polarisationsmodendispersion (PMD) und polarisationsabhängige Dämpfung (PDL) getrennt betrachtet. So wurde das Konzept der PSPs, der DGD und des PMD-Vektors in Kapitel 2.3 unter der Annahme eines unitären Systems eingeführt, also eines Systems ohne PDL. Diese Annahme wurde im gesamten Kapitel 2.3 streng vorausgesetzt. Umgekehrt hat der Effekt der Doppelbrechung bei der Beschreibung von PDL-Elementen und ihrer Verkettung in Kapitel 2.4 keine nennenswerte Rolle gespielt. Nur bei der Betrachtung der Frequenzabhängigkeit von PDL-Vektoren in Kapitel 2.4.2 wurde kurzzeitig der Einfluss von Doppelbrechung einbezogen.

Eine konsequente Berücksichtigung von PDL bei der Betrachtung von Polarisationsmodendispersion erfolgt in der Literatur erst seit vergleichsweise kurzer Zeit. Nachdem das Konzept der »Principal States of Polarization« bereits 1986 von Poole *et al.* für unitäre Systeme eingeführt wurde [28], dauerte es bis zum Jahr 1997, bis Gisin und Huttner die Verallgemeinerung für Systeme mit PMD und PDL aufgestellt haben [26], [27]. Auch in den darauffolgenden Jahren wurde PMD zumeist separat betrachtet, wofür es im Wesentlichen zwei Ursachen gibt: Auf der einen Seite lässt sich PMD (die Statistik von PMD und die Auswirkung von PMD auf optische Signale) weitaus einfacher mathematisch beschreiben, falls PDL nicht berücksichtigt wird, da die Jones-Operatoren unitär bleiben. Auf der anderen Seite ist die Berücksichtigung von PDL bei der Untersuchung von PMD bei tatsächlichen Systemen häufig gar nicht notwendig. So werden die folgenden Kapitel zeigen, dass die Berücksichtigung der Wechselwirkung von PMD und PDL nur in verhältnismäßig »langen« Systemen – mit einer Vielzahl optischer Komponenten – oder in Systemen, bei denen die eingesetzten Komponenten aus Kostengründen eine hohe PDL aufweisen, zwingend erforderlich ist.

Analytische Berechnungen unter Berücksichtigung der Wechselwirkung von PMD und PDL sind aufgrund nicht unitärer Jones-Operatoren weitaus schwieriger durchzuführen als im einfachen Fall reiner PMD. Die wenigen Literaturstellen auf diesem Gebiet wurden bei der Diskussion der Literatur in Kapitel 1.1 bereits erwähnt, ihre Ergebnisse werden in diesem und in den folgenden Kapiteln (v. a. in Kapitel 3.1) aufgegriffen. Somit ist die Analyse der Wechselwirkung von PMD und PDL im Wesentlichen auf Messungen, Emulationen und Simulationen angewiesen.

Die Auswirkungen dieser Wechselwirkung lassen sich grob in drei Teilgebiete unterteilen: Als erstes ist der Einfluss von PDL auf die Statistik von PMD-Größen (erster und zweiter Ordnung) zu beachten. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen lassen zum Teil bereits erste Rückschlüsse auf Ausfallwahrscheinlichkeiten des Systems zu, ohne das optische Signal explizit berücksichtigen zu müssen. (Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen dieser Größen folgen direkt aus dem Jones-

Operator des Systems, sie sind somit unabhängig vom Signal.) Entsprechende Untersuchungen werden das Thema des Kapitels 3 sein. Von größter praktischer Bedeutung ist zum Zweiten der Einfluss, den PDL auf Signalverzerrungen ausübt, welche durch PMD ausgelöst werden. Mit dieser Thematik werden sich die Kapitel 4 und 5 auseinandersetzen. Schließlich ist der Einfluss von PDL auf die Wirksamkeit optischer PMD-Kompensatoren zu berücksichtigen, ein häufig nicht beachteter Effekt, welcher ebenfalls in Kapitel 5 untersucht werden soll.

Das Kapitel 3.1 wird zunächst die Theorie der Wechselwirkung von PMD und PDL, welche zu großen Teilen auf [26] beruht, umfassend darlegen. Daraufhin werden in den Kapiteln 3.3 bis 3.5 eine Reihe neuer Ergebnisse zur Statistik von PMD und PDL vorgestellt, welche mithilfe von Simulationen erzeugt wurden. Zuvor sollen jedoch in Kapitel 3.2 das verwendete Modell, dessen Implementierung sowie der Aufbau des verwendeten Systems ausführlich dargelegt und begründet werden.

3.1 Theorie der Wechselwirkung von PMD und PDL

Das zu untersuchende faseroptische System soll sowohl ortsabhängige Doppelbrechung als auch polarisationsabhängige Dämpfung aufweisen. Gemäß der Diskussion der Kapitel 2.3 und 2.4 sind die Fasern vorwiegend für das Auftreten von Doppelbrechung verantwortlich, während andere optische Komponenten – vor allem solche in optischen Verstärkern – zur polarisationsabhängigen Dämpfung beitragen. Das System kann also modelliert werden als eine Verkettung von Elementen mit reiner Doppelbrechung (als Modell der Faser) mit zusätzlich entlang der Strecke eingefügten Elementen reiner PDL. Die »Bauelemente« des Systems sind also diejenigen des Kapitels 2.3.1 (Elemente mit reiner Doppelbrechung) sowie des Kapitels 2.4.1 (Elemente mit reiner PDL). Der gesamte Jones-Operator \mathbf{T} besteht folglich aus einem Produkt einzelner Jones-Operatoren \mathbf{T}_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Dabei ist die Reihenfolge im Produkt $\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$ so festgelegt, dass \mathbf{T}_1 dem ersten Element entspricht, welches vom Signal durchlaufen wird, und \mathbf{T}_N dem letzten. Handelt es sich bei einem Element um ein doppelbrechendes, so ist sein Jones-Operator \mathbf{T}_i durch die Gleichung (2.48) von Seite 33 gegeben. Für ein PDL-Element hingegen bestimmt sich \mathbf{T}_i gemäß Gleichung (2.72) von Seite 52. Die polarisationsunabhängigen Faktoren in diesen Gleichungen – welche eine polarisationsunabhängige Gruppenlaufzeit bzw. Dämpfung bewirken – haben allerdings keinen Einfluss auf die Ergebnisse dieses und der folgenden Kapitel, sie können von nun an ignoriert werden.¹

Somit wird ein doppelbrechendes Element mit dem langsamen Eigenvektor $|+\rangle$ (im Jones-Raum) bzw. $\hat{\mathbf{s}}_+ = \langle + | \hat{\sigma} | + \rangle$ (im Stokes-Raum), der Differenz der effektiven Brech-

¹ Die polarisationsunabhängige Dämpfung jedoch wird zur Skalierung der PDL-Größen \mathcal{T}_{\max} und \mathcal{T}_{\min} benötigt, weshalb sie bei der Implementierung des Computerprogramms nicht verworfen, sondern als einfacher Faktor parallel weiter berücksichtigt wird.

zahlen $\Delta\bar{n}$, der Doppelbrechung $\Delta\beta = \Delta\bar{n}(\omega/c)$, der Länge L und der DGD $\Delta\tau = (\Delta\bar{n}/c)L$ gemäß Gleichung (2.48) berücksichtigt durch den Jones-Operator

$$\mathbf{T}_{\text{DGD}} = \mathbf{e}^{-i\frac{\Delta\beta L}{2}\hat{s}_+ \cdot \vec{\sigma}} = \mathbf{e}^{-i\frac{\Delta\tau\omega}{2}\hat{s}_+ \cdot \vec{\sigma}}. \quad (3.1)$$

Durch Angabe der Richtung \hat{s}_+ der langsamen Achse im Stokes-Raum sowie der DGD $\Delta\tau$ ist ein doppelbrechendes Element eindeutig charakterisiert.

Ein PDL-Element mit dem schwach gedämpften Eigenvektor $|\mathcal{S}_{\text{max}}\rangle$ (im Jones-Raum) bzw. $\hat{\mathcal{S}}_{\text{max}} = \langle \mathcal{S}_{\text{max}} | \vec{\sigma} | \mathcal{S}_{\text{max}} \rangle$ (im Stokes-Raum), dem maximalen Transmissionskoeffizienten \mathcal{T}_{max} , dem minimalen \mathcal{T}_{min} und dem differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$ ($\mathcal{T}_{\text{min}} = \mathcal{T}_{\text{max}} e^{-2\Delta\alpha}$) wird schließlich gemäß Gleichung (2.72) berücksichtigt durch den Jones-Operator

$$\mathbf{T}_{\text{PDL}} = \mathbf{e}^{\frac{\Delta\alpha}{2}\hat{\mathcal{S}}_{\text{max}} \cdot \vec{\sigma}}. \quad (3.2)$$

Zur vollständigen Charakterisierung eines PDL-Elements reicht also die Angabe der Richtung $\hat{\mathcal{S}}_{\text{max}}$ der schwach gedämpften Achse im Stokes-Raum sowie des differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$ aus.

Gemäß der Diskussion des Kapitels 2 ist der Operator (3.1) unitär, während der Operator (3.2) hermitesch ist. Das Produkt derartiger Operatoren $\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$, welches den globalen Jones-Operator darstellt, ist hingegen weder unitär noch hermitesch. Somit ist die zentrale Annahme des Kapitels 2.3 – unitäre globale Jones-Operatoren \mathbf{T} – nicht mehr gegeben. Sämtliche Aussagen der Kapitel 2.3.3 bis 2.3.5 stehen somit unter Vorbehalt.

Vorbereitungen zur Berechnung der PSPs

Bei einer Analyse der Auswirkungen von PMD nehmen zwei ausgezeichnete Polarisationszustände, genannt »Principal States of Polarization« (PSPs), eine zentrale Rolle ein. Sie wurden in Kapitel 2.3.2 so definiert, dass ihr zugehöriger Polarisationszustand am Ausgang in erster Ordnung nicht frequenzabhängig ist. Bei den unitären Systemen des Kapitels 2.3 folgen aus dieser Definition einige Besonderheiten. So haben (schmalbandige) optische Signale, welche entlang einem der beiden PSPs in das System eingekoppelt werden, ausgezeichnete Eigenschaften bezüglich ihrer DOP am Ausgang, ihrer Laufzeit und des Ausmaßes ihrer Verzerrung.

Für ein System mit PMD und PDL ist zunächst die Frage der Existenz von PSPs gemäß der bisherigen Definition zu klären. Gisin und Huttner haben diese Existenz in [26] und in [27] nachgewiesen und daraufhin Begriffe wie »DGD« und »PMD-Vektor« für allgemeine (nicht unitäre) Systeme eingeführt. Die folgenden Betrachtungen basieren auf diesen Ausführungen von Gisin und Huttner, sie sollen hier allerdings möglichst analog zu den Überlegungen des Kapitels 2.3.3 entwickelt werden, unter anderem durch den Einsatz von Karlsson-Quaternionen. Dabei soll zudem die Notation und die Begriffsbildung des Kapitels 2 übernommen und fortgeführt werden.

Wie beim bisherigen Vorgehen sollen nicht normierte Jones-Vektoren als $|S\rangle$ (Eingang) bzw. $|T\rangle$ (Ausgang) und ihre normierten Entsprechungen als $|s\rangle$ bzw. $|t\rangle$ geschrieben werden. Entsprechendes gilt für die zugehörigen Stokes-Vektoren, welche in normierter Form \hat{s} bzw. \hat{t} lauten und in nicht normierter Form \vec{S} bzw. \vec{T} . Da der Jones-Operator \mathbf{T} des Systems – im Gegensatz zu Kapitel 2.3 – nicht unitär ist, beeinflusst er die Norm eines Jones-Vektors. Ein normierter Jones-Vektor am Eingang $|s\rangle$ wird somit auf einen nicht normierten Jones-Vektor am Ausgang $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ abgebildet, womit der Transmissionskoeffizient zu $\mathcal{T} = \langle T|T\rangle$ folgt, vgl. Kapitel 2.4.1.

Zur Berechnung der PSPs wird – genau wie in Kapitel 2.3.3 – ein vollständig polarisiertes Eingangssignal mit frequenzunabhängiger gemeinsamer Phase angesetzt. Die normierten Jones- und Stokes-Vektoren $|s\rangle$ und $\hat{s} = \langle s|\vec{\sigma}|s\rangle$ am Eingang werden somit als unabhängig von der Frequenz angenommen, $|s\rangle_\omega = \hat{s}_\omega = 0$. Ein Polarisationszustand am Ausgang \hat{t} ist per Definition genau dann ein PSP, falls er (bei fester Eingangspolarisation) in erster Ordnung nicht von der Frequenz abhängt, falls also $\hat{t}_\omega = 0$ gilt. Da der zugehörige Jones-Vektor am Ausgang $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ als Information nicht nur den Polarisationszustand enthält, sondern ebenso die gemeinsame Phase und den Transmissionskoeffizienten $\mathcal{T} = \langle T|T\rangle$, folgt aus $\hat{t}_\omega = 0$ nicht notwendigerweise $|T\rangle_\omega = 0$. Ähnlich zum Vorgehen des Kapitels 2.3.3 lässt sich stattdessen zeigen, dass die Aussagen $\hat{t}_\omega = 0$ und $|T\rangle_\omega = -i(\kappa/2)|T\rangle$ mit einer komplexen Zahl $\kappa \in \mathbb{C}$ äquivalent sind [26]. Falls also ein Jones-Vektor $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ am Ausgang des Systems die Relation $|T\rangle_\omega = -i(\kappa/2)|T\rangle$ mit $\kappa \in \mathbb{C}$ erfüllt, ist sein normierter Stokes-Vektor \hat{t} nicht frequenzabhängig, es handelt sich also um einen PSP des Systems.

PSPs, DGD und DAS

Nach diesen Vorbereitungen können die PSPs einfach berechnet werden. Wird dazu $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ nach der Kreisfrequenz ω abgeleitet, so folgt mit $|s\rangle_\omega = 0$ und $|s\rangle = \mathbf{T}^{-1}|T\rangle$ unmittelbar

$$|T\rangle_\omega = \mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1} |T\rangle = -i \left(\frac{2i \mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}}{2} \right) |T\rangle. \quad (3.3)$$

Wenn also der Jones-Vektor am Ausgang $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ Eigenvektor des Operators $2i \mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}$ ist, erfüllt er die Relation $|T\rangle_\omega = -i(\kappa/2)|T\rangle$ mit $\kappa \in \mathbb{C}$. Es gilt somit die Äquivalenz

$$|T\rangle \text{ ist PSP} \Leftrightarrow |T\rangle \text{ ist Eigenvektor von } 2i \mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}. \quad (3.4)$$

Der Operator $2i \mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}$ nimmt für ein nicht unitäres System (ein System mit PMD und PDL) also die Rolle des Operators $2i \mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ des unitären Systems an, vgl. Kapitel 2.3.3. Im Gegensatz zum Operator $2i \mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ ist $2i \mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}$ allerdings in Allgemeinen nicht hermitesch. Somit sind seine Eigenvektoren, die PSPs am Ausgang, im Allgemeinen *nicht orthogonal* und die zugehörigen Eigenwerte sind *komplexe* Zahlen. Die Berechnung der Spur von $2i \mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}$ ergibt, dass sie – genau wie die Spur von $2i \mathbf{U}_\omega \mathbf{U}^\dagger$ – verschwindet [26]. Dies hat zur Folge, dass sich die beiden *komplexen* Eigenwerte nur

durch ihr Vorzeichen unterscheiden, sie können als $\pm(\Delta\tau + \mathfrak{i}\Delta\eta)$ bezeichnet werden. Ihre zugehörigen normierten Eigenvektoren (die PSPs am Ausgang) sollen – wie in Kapitel 2.3.3 – als $|\mathfrak{t}_{\pm}\rangle$ geschrieben werden. Im Stokes-Raum lauten sie entsprechend $\hat{\mathfrak{t}}_{\pm} \equiv \langle \mathfrak{t}_{\pm} | \vec{\sigma} | \mathfrak{t}_{\pm} \rangle$. Somit gilt schließlich die Eigenwertgleichung

$$2\mathfrak{i}\mathbf{T}_{\omega}\mathbf{T}^{-1}|\mathfrak{t}_{\pm}\rangle = \pm(\Delta\tau + \mathfrak{i}\Delta\eta)|\mathfrak{t}_{\pm}\rangle. \quad (3.5)$$

Mit der gleichen Argumentation wie in Kapitel 2.3.3 folgt dann, dass der Realteil $\Delta\tau$ des Eigenwerts die Gruppenlaufzeit der PSPs bestimmt.¹ Der langsame PSP hat entsprechend die Gruppenlaufzeit $+\Delta\tau/2$, während der schnelle PSP die Gruppenlaufzeit $-\Delta\tau/2$ aufweist. Die Differenz der Gruppenlaufzeiten der beiden PSPs ist also – wie in Kapitel 2.3.3 – gleich der »DGD« $\Delta\tau$.

Der Imaginärteil $\Delta\eta$ des Eigenwerts ist offenbar nur dann ungleich Null, wenn der Jones-Operator \mathbf{T} des Systems nicht unitär ist, wenn also PDL im System auftritt. Er lässt sich interpretieren als Ableitung (bezüglich der Frequenz) der differentiellen Dämpfung zwischen den beiden PSPs [31] und wird häufig als »DAS« (engl.: Differential Attenuation Slope) bezeichnet.

Komplexer PMD-Vektor

Da die Spur des Operators $2\mathfrak{i}\mathbf{T}_{\omega}\mathbf{T}^{-1}$ gleich Null ist, verschwindet gemäß Gleichung (2.27) von Seite 22 der Skalarteil des Karlsson-Quaternions von $2\mathfrak{i}\mathbf{T}_{\omega}\mathbf{T}^{-1}$. Analog zu Kapitel 2.3.3 kann dann der »PMD-Vektor« am Ausgang $\vec{\tau}$ als Vektorteil des Karlsson-Quaternions von $2\mathfrak{i}\mathbf{T}_{\omega}\mathbf{T}^{-1}$ definiert werden,

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{i}\mathbf{T}_{\omega}\mathbf{T}^{-1} &\equiv \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} \\ &= [0, \vec{\tau}]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Im Gegensatz zum Operator $2\mathfrak{i}\mathbf{U}_{\omega}\mathbf{U}^{\dagger}$ des Kapitels 2.3.3 ist $2\mathfrak{i}\mathbf{T}_{\omega}\mathbf{T}^{-1}$ allerdings im Allgemeinen nicht hermitesch, sodass der PMD-Vektor $\vec{\tau}$ nun ein komplexer Vektor ist,

$$\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + \mathfrak{i}\vec{\tau}_{\text{Im}}. \quad (3.7)$$

Damit kann die Eigenwertgleichung (3.5) auch geschrieben werden als

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} |\mathfrak{t}_{\pm}\rangle = \pm(\Delta\tau + \mathfrak{i}\Delta\eta) |\mathfrak{t}_{\pm}\rangle. \quad (3.8)$$

Sie verknüpft den komplexen PMD-Vektor $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + \mathfrak{i}\vec{\tau}_{\text{Im}}$ mit den (nicht orthogonalen) PSPs am Ausgang $|\mathfrak{t}_{\pm}\rangle$, der DGD $\Delta\tau$ und der DAS $\Delta\eta$.

Die Eigenwerte $\pm(\Delta\tau + \mathfrak{i}\Delta\eta)$ des Quaternions $\vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} = [0, \vec{\tau}]$ schließlich lassen sich mithilfe von Gleichung (2.28) von Seite 23 direkt berechnen zu

¹ Dabei ist zu beachten, dass die polarisationsunabhängige Phasenverschiebung des Jones-Operators – gemäß der einleitenden Diskussion – nicht berücksichtigt wurde, gleiches gilt somit für die polarisationsunabhängige Gruppenlaufzeit. Deshalb sind die Gruppenlaufzeiten hier als relativ zur polarisationsunabhängigen Gruppenlaufzeit zu interpretieren.

$$\Delta\tau + \mathbf{i}\Delta\eta = \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}. \quad (3.9)$$

Die Beziehung zwischen dem komplexen PMD-Vektor $\vec{\tau}$ und der DGD $\Delta\tau$ ist also für ein System mit PDL komplizierter als für ein unitäres System, bei dem der einfache Zusammenhang $\Delta\tau = \|\vec{\tau}\|$ gilt.

Wichtige PMD-Größen zweiter Ordnung basieren auf einer Ableitung der Größe $\Delta\tau \hat{t}_+$, also auf einer Ableitung des Produkts aus DGD $\Delta\tau$ und dem langsamen PSP am Ausgang \hat{t}_+ . Evident stimmt der komplexe PMD-Vektor $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + \mathbf{i}\vec{\tau}_{\text{Im}}$ im Grenzfall unitärer Systeme mit dem Produkt $\Delta\tau \hat{t}_+$ überein, dies gilt jedoch nicht für ein System mit PMD *und* PDL, bei dem die beiden Größen streng auseinanderzuhalten sind. In den folgenden Kapiteln kommt das Produkt $\Delta\tau \hat{t}_+$ nur im Zusammenhang mit dem verallgemeinerten »PMD-Vektor zweiter Ordnung« zum Einsatz, welcher analog zu Gleichung (2.68) auf Seite 47 als $\partial_\omega(\Delta\tau \hat{t}_+)$ definiert sein soll.

Abschließend sollen die Eigenschaften des wichtigen Operators $2\mathbf{i}\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ noch einmal zusammengefasst werden: $2\mathbf{i}\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ ist im Allgemeinen *nicht* hermitesch, hat also komplexe Eigenwerte und nicht orthogonale Eigenvektoren. Die Spur von $2\mathbf{i}\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ ist Null, sodass sich die beiden komplexen Eigenwerte $\pm(\Delta\tau + \mathbf{i}\Delta\eta)$ nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Der Realteil $\Delta\tau$ der Eigenwerte entspricht der DGD, der Imaginärteil $\Delta\eta$ der DAS. Die zugehörigen Eigenvektoren sind die nicht orthogonalen PSPs am Ausgang $|\hat{t}_\pm\rangle$. Schließlich ist der Vektorteil des Karlsion-Quaternions von $2\mathbf{i}\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ gleich dem komplexen PMD-Vektor am Ausgang $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + \mathbf{i}\vec{\tau}_{\text{Im}}$.

Infinitesimale Rotationen

Zur geometrischen Interpretation des komplexen PMD-Vektors sei zunächst an die Gleichung (2.62) auf Seite 43 erinnert: Die spektrale Änderung eines Stokes-Vektors \hat{t} am Ausgang eines *unitären* Systems kann als Rotation von \hat{t} um den *reellen* PMD-Vektor $\vec{\tau}$ interpretiert werden, $\hat{t}_\omega = \vec{\tau} \times \hat{t}$.

Für den Fall eines *nicht unitären* Systems gilt dieser einfache Zusammenhang nicht mehr. Um den dann gültigen Zusammenhang aufzustellen, ist die Ableitung des normierten Stokes-Vektors am Ausgang \hat{t} nach der Kreisfrequenz ω zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass der Jones-Vektor $|T\rangle = \mathbf{T}|s\rangle$ am Ausgang im Allgemeinen nicht normiert ist, sodass der normierte Stokes-Vektor am Ausgang gemäß $\hat{t} = \langle T|\vec{\sigma}|T\rangle / \langle T|T\rangle$ zu berechnen ist, siehe Gleichung (2.34) auf Seite 25. Mit Hilfe der Relation (3.3) für $|T\rangle_\omega$ und unter Verwendung der Definition $2\mathbf{i}\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1} \equiv \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma}$ des komplexen PMD-Vektors $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + \mathbf{i}\vec{\tau}_{\text{Im}}$ folgt schließlich die allgemeingültige Relation [22], [37], [12]

$$\hat{t}_\omega = \vec{\tau}_{\text{Re}} \times \hat{t} - (\vec{\tau}_{\text{Im}} \times \hat{t}) \times \hat{t}. \quad (3.10)$$

Eine Änderung der Frequenz führt also – bei festem Polarisationszustand am Eingang – zu einer Änderung des Stokes-Vektors \hat{t} am Ausgang, welche nicht als einfache Rotation um den PMD-Vektor beschrieben werden kann. Nur im Spezialfall eines Systems

ohne PDL verschwindet der Imaginärteil $\vec{\tau}_{\text{Im}}$, woraufhin die bekannte Form $\hat{t}_\omega = \vec{\tau}_{\text{Re}} \times \hat{t}$ resultiert.

Basierend auf Gleichung (3.10) haben Eyal *et al.* in [22] ein Verfahren zur Messung des komplexen PMD-Vektors (und somit indirekt zur Messung der PSPs und ihrer DGD) entwickelt, welches auch für nicht unitäre Systeme gültig ist. Es kann als Weiterentwicklung der klassischen »Poincaré-Kugel Methode« von Poole *et al.* [71], welche nur für Systeme ohne PDL korrekte Ergebnisse liefert, aufgefasst werden. Noch weiter verfeinert wurde das Messverfahren schließlich durch Chen *et al.* in [25].

Verkettung von PMD-Vektoren

Wird ein doppelbrechendes Element (mit dem PMD-Vektor $\vec{\tau}_2$) zu einem unitären System hinzugefügt, ändert es den globalen PMD-Vektor gemäß Gleichung (2.64) auf Seite 44. Das Hinzufügen eines PDL-Elements hat ebenfalls Auswirkungen auf den globalen *komplexen* PMD-Vektor, die entsprechende Verkettungsregel wurde in [27] aufgestellt. Ohne auf die Herleitung einzugehen, soll hier nur das Ergebnis diskutiert werden.

Analog zu Gleichung (2.64) soll der (komplexe) PMD-Vektor am Ausgang des Systems als $\vec{\tau}_1$ bezeichnet werden, solange noch kein zusätzliches Element hinzugefügt wurde. Wird nun ein doppelbrechendes Element der Richtung \hat{s}_+ (im Stokes-Raum), der DGD $\Delta\tau_2$ und des PMD-Vektors $\vec{\tau}_2 = \Delta\tau_2 \hat{s}_+$ hinzugefügt, so resultiert der gesamte (komplexe) PMD-Vektor am Ausgang zu

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\tau}_2 + \cos(\Delta\tau_2 \omega) \vec{\tau}_1 + (1 - \cos(\Delta\tau_2 \omega)) \hat{s}_+ (\hat{s}_+ \cdot \vec{\tau}_1) + \sin(\Delta\tau_2 \omega) \hat{s}_+ \times \vec{\tau}_1 \\ &\equiv \vec{\tau}_2 + \mathbf{R}_2 \cdot \vec{\tau}_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dabei wurde im zweiten Schritt die Rotationsmatrix (Müller-Matrix) \mathbf{R}_2 des hinzugefügten doppelbrechenden Elements verwendet, mit dem Rotationswinkel $\Delta\tau_2 \omega$ und der Rotationsachse \hat{s}_+ , siehe Kapitel 2.2.5. Das Hinzufügen eines doppelbrechenden Elements lässt sich also völlig analog zu Gleichung (2.64) als Rotation des ursprünglichen PMD-Vektors $\vec{\tau}_1$ um die Rotationsachse \hat{s}_+ mit anschließender Addition des PMD-Vektors $\vec{\tau}_2$ des hinzugefügten Elements beschreiben. Für ein System mit PMD und PDL ist allerdings darauf zu achten, dass der ursprüngliche PMD-Vektor $\vec{\tau}_1$ (der PMD-Vektor vor dem Hinzufügen des Elements) bereits ein *komplexer* Vektor sein kann. War er vorher reell, so bleibt er gemäß Gleichung (3.11) auch nach dem Hinzufügen des doppelbrechenden Elements reell.

Wird stattdessen ein Element mit reiner PDL hinzugefügt, so resultiert am Ausgang im Allgemeinen ein komplexer PMD-Vektor: Das PDL-Element habe die Richtung \hat{s}_{max} des am wenigsten gedämpften Polarisationszustands und den differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha_2$. Damit folgt der gesamte komplexe PMD-Vektor am Ausgang zu [27]

$$\vec{\tau} = \cosh(\Delta\alpha_2) \vec{\tau}_1 + (1 - \cosh(\Delta\alpha_2)) \hat{s}_{\text{max}} (\hat{s}_{\text{max}} \cdot \vec{\tau}_1) + \mathfrak{i} \sinh(\Delta\alpha_2) \hat{s}_{\text{max}} \times \vec{\tau}_1 \quad (3.12)$$

Im Grenzfall schwacher PDL des hinzugefügten Elements ($\Delta\alpha_2 \rightarrow 0$) folgt als PMD-Vektor am Ausgang der triviale Fall $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1$. Andernfalls bewirkt der dritte Summand auf der rechten Seite einen komplexen globalen PMD-Vektor $\vec{\tau}$.

Dynamische Gleichungen für PMD und PDL

Abschließend sollen die beiden Gleichungen diskutiert werden, mit denen die Entwicklung des komplexen PMD-Vektors $\vec{\tau}$ sowie des PDL-Vektors $\vec{\Gamma}$ bei einer infinitesimalen Änderung der Länge L des letzten Elements einer Verkettung beschrieben werden kann. Diese Gleichungen sind die Basis für die analytischen Berechnungen zur Statistik der PDL [17], [18] und zur Statistik der kombinierten PMD und PDL [37], [38].

Angenommen sei eine infinitesimale Änderung der Länge L des letzten Elements, welches entweder ein Element mit reiner Doppelbrechung oder ein Element mit reiner PDL ist. Für den Fall eines Elements mit reiner PDL sei angenommen, dass dieses eine Länge L aufweist und einen differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$, welcher proportional ist zu L . Unter Verwendung der Richtung \hat{s}_{\max} dieses Elements (Richtung des am wenigsten gedämpften Polarisationszustands im Stokes-Raum) kann dann ein Vektor $\vec{\alpha}$ parallel zu \hat{s}_{\max} eingeführt werden, dessen Betrag per Definition gleich dem differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$ *pro Länge* ist.¹ Ist das letzte Element hingegen ein doppelbrechendes, so soll es durch seinen Doppelbrechungsvektor $\vec{\beta}$ und dessen Ableitung nach der Kreisfrequenz $\vec{\beta}_\omega$ berücksichtigt werden, siehe Kapitel 2.3.1.

Damit folgt schließlich die »dynamische Gleichung für PMD«, welche die Änderung des komplexen PMD-Vektors (am Ausgang) $\vec{\tau}$ bei einer infinitesimalen Änderung der Länge L des letzten Elements beschreibt [26],

$$\partial_L \vec{\tau} = \vec{\beta}_\omega + \vec{\beta} \times \vec{\tau} + i \vec{\alpha} \times \vec{\tau}. \quad (3.13)$$

Im Vergleich zur »dynamischen Gleichung für PMD« eines unitären Systems [Gleichung (2.63) auf Seite 43] ist der letzte Summand hinzugekommen. Er bewirkt, dass der PMD-Vektor in Anwesenheit von PDL zu einer komplexen Größe wird.

Ebenso lässt sich eine »dynamische Gleichung für PDL« aufstellen, welche die Änderung des PDL-Vektors (am Ausgang) $\vec{\Gamma}_{\text{out}}$ bei einer infinitesimalen Änderung der Länge L des letzten Elements beschreibt [26],

$$\partial_L \vec{\Gamma}_{\text{out}} = \vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\Gamma}_{\text{out}}) \vec{\Gamma}_{\text{out}} + \vec{\beta} \times \vec{\Gamma}_{\text{out}}. \quad (3.14)$$

¹ Dieser Vektor $\vec{\alpha}$ soll hier nur temporär verwendet werden, um die dynamischen Gleichungen in einer in der Literatur üblichen Form darstellen zu können. Bei der in dieser Arbeit ansonsten gewählten Darstellung ist die »Länge« eines PDL-Elements indes irrelevant, da es eindeutig durch seine Richtung \hat{s}_{\max} und seine Stärke $\Delta\alpha$ charakterisiert wird.

Auffällig ist auch hier der letzte Summand, welcher eine Rotation des PDL-Vektors um den lokalen Doppelbrechungsvektor $\vec{\beta}$ hervorruft und somit eine zufällige Richtung von $\vec{\Gamma}_{\text{out}}$ im dreidimensionalen Stokes-Raum bewirkt.

3.2 Modellierung, Implementierung und Aufbau des Systems

Die eigentliche Aufgabe des Kapitels 3 wird darin bestehen, die Statistik von PMD und PDL – unter dem Einfluss ihrer Wechselwirkung – mithilfe numerischer Simulationen zu untersuchen. Um dies zu ermöglichen, sind die bisherigen theoretischen Betrachtungen in ein Computerprogramm zu integrieren, welches zur Durchführung der Simulationen eingesetzt wird. Eine detaillierte Beschreibung der Implementierung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deshalb soll hier nur die Struktur der Implementierung soweit skizziert werden, dass eindeutig festgelegt ist, *wie* die Ergebnisse dieses und der nachfolgenden Kapitel zustande gekommen sind. Das Kapitel 3.2.1 beschreibt dazu das Verfahren zur Berechnung der Systemgrößen, also der Größen, die sich direkt aus dem Jones-Operator \mathbf{T} des Systems ergeben. In den Kapiteln 3.2.2 und 3.2.3 werden daraufhin der Aufbau des zu simulierenden Systems sowie die Strategie zur Erzielung möglichst universell einsetzbarer Ergebnisse diskutiert.

3.2.1 Berechnung von Systemgrößen

Die theoretischen Betrachtungen der bisherigen Kapitel haben ergeben, dass sämtliche Systemgrößen direkt oder indirekt aus dem Jones-Operator \mathbf{T} des Systems folgen. Somit ist zunächst dieser Operator \mathbf{T} (als Funktion der Frequenz) zu bestimmen, bevor die Systemgrößen (als Funktion der Frequenz) berechnet werden können. Das Vorgehen dabei soll nun beschrieben werden.

Skizze des Systemaufbaus

Gemäß der einleitenden Diskussion des Kapitels 3.1 soll das System modelliert werden als Verkettung von insgesamt N Elementen mit reiner Doppelbrechung (als Modell der Faser) bzw. mit reiner PDL (als Modell für polarisationsabhängig dämpfende Komponenten). Letztere sollen – mehr oder weniger periodisch – entlang der Strecke eingefügt werden. Jedes doppelbrechende Element ist vollständig beschrieben durch seine Richtung \hat{s}_+ im Stokes-Raum (beispielsweise durch Angabe zweier Winkel auf der Poincaré-Kugel) und durch die Stärke seiner Doppelbrechung, also durch seine DGD $\Delta\tau$. Entsprechend ist ein PDL-Element eindeutig bestimmt durch seine Richtung \hat{s}_{max} im Stokes-Raum (wiederum beschreibbar durch zwei Winkel auf der Poincaré-Kugel) und durch die Stärke seiner PDL (ausgedrückt als PDL in dB oder – proportional dazu – durch den differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$). Jedes Element ist also durch die Angabe drei reeller Zahlen eindeutig bestimmt.

Zur Nachbildung eines Systems der Praxis muss weiterhin gewährleistet sein, dass die Richtungen und die Stärken der Elemente entlang der Strecke zufällig sind. Dazu werden die Richtungen zufällig auf der Poincaré-Kugel (oder wahlweise auf dessen

Äquator) gewählt, während die Stärke der Doppelbrechung bzw. der PDL zufällig um einen mittleren Wert herum verteilt sein soll (beispielsweise gaußverteilt mit einer einstellbaren Standardabweichung). Um dies zu erreichen, sind Algorithmen zur Erzeugung gleich- bzw. gaußverteilter Zufallszahlen zu implementieren, beispielsweise basierend auf [72]. (Detaillierte Angaben zum Systemaufbau folgen in den Kapiteln 3.2.2 und 3.2.3.)

Berechnung des globalen Jones-Operators

Sind die Parameter der Elemente festgelegt, so folgen ihre jeweiligen Jones-Operatoren gemäß Gleichung (3.1) (doppelbrechende Elemente) und Gleichung (3.2) (PDL-Elemente). Durch Angabe ihrer Reihenfolge lässt sich schließlich der gesamte Jones-Operator des Systems $\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$ berechnen. Dies geschieht intern dadurch, dass alle Jones-Operatoren bezüglich einer festgelegten Basis als komplexe 2×2 Jones-Matrizen dargestellt werden, siehe Gleichung (2.13) auf Seite 17. Der globale Jones-Operator \mathbf{T} in Matrixform folgt dann durch Multiplikation der einzelnen Jones-Matrizen \mathbf{T}_i .

Berechnung der Frequenzabhängigkeiten

Der Jones-Operator eines Elements mit reiner PDL hängt gemäß Gleichung (3.2) nicht von der Frequenz ab. Da ein Element mit reiner Doppelbrechung jedoch gemäß Gleichung (3.1) einen frequenzabhängigen Jones-Operator hat, gilt dies auch für den gesamten Jones-Operator $\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$ sowie für alle PMD- und PDL-Größen, die aus diesem Operator folgen. Zur Bestimmung dieser Größen als Funktion der Frequenz ist somit der globale Jones-Operator \mathbf{T} entlang der Frequenz zu berechnen. In der Praxis wird \mathbf{T} an M Stellen des Spektrums – im spektralen Abstand $\Delta\omega$ – bestimmt. Somit ist die gesamte untersuchte Bandbreite gegeben durch das Produkt $M \Delta\omega$. Eine sinnvolle Wahl der Schrittweite $\Delta\omega$ und der Anzahl M zu berechnender Stellen lässt sich durch Betrachtung der mittleren DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ des Systems treffen:¹ $\langle \Delta\tau \rangle$ legt die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ fest über die Beziehung $\Delta\omega_{\text{PSP}} = (\pi/4)/\langle \Delta\tau \rangle$. Gemäß der Diskussion des Kapitels 2.3.5 (sowie des Kapitels 3.4) regelt $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ das spektrale Verhalten aller PMD- und PDL-Größen. So ist die AKF beispielsweise des PMD-Vektors bei $6\Delta\omega_{\text{PSP}}$ auf ungefähr 11 % abgefallen, während sie bei $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ noch etwa 89 % des Maximalwerts beträgt. Zur Erzielung einer ausreichenden Genauigkeit numerischer Ableitungen nach der Frequenz muss die Schrittweite $\Delta\omega$ deshalb (deutlich) unterhalb der Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ liegen. Ist die Schrittweite einmal festgelegt, folgt die Zahl statistisch unabhängiger Stellen im Spektrum aus der Gesamtzahl M berechneter Stellen: Die Bandbreite $M \Delta\omega$ enthält – gemäß der Diskussion des Kapitels 2.3.5 – etwa $M \Delta\omega / (6\Delta\omega_{\text{PSP}})$ statistisch unabhängige Stichproben. Deren Anzahl ist also proportional sowohl zu M also auch zum Verhältnis $\Delta\omega / \Delta\omega_{\text{PSP}}$. Eine Erhöhung der

¹ Die mittlere DGD des Systems $\langle \Delta\tau \rangle$ kann vor der eigentlichen Berechnung direkt aus den Parametern der doppelbrechenden Elemente bestimmt werden mithilfe von Gleichung (2.66) auf Seite 45.

Genauigkeit numerischer Ableitungen durch Reduzierung der Schrittweite $\Delta\omega$ führt somit – bei festgelegter Zahl M berechneter Stellen – zu einer Abnahme der Anzahl statistisch unabhängiger Stichproben.

Berechnung der Scharstatistik bei fester Frequenz

Bei der Untersuchung der Scharstatistik von PMD- und PDL-Größen bei fester Frequenz ist die Frequenzabhängigkeit des globalen Jones-Operators \mathbf{T} auf den ersten Blick ohne Bedeutung. Die Ableitung von \mathbf{T} nach der Kreisfrequenz wird allerdings bei der Berechnung von PMD-Größen (wie beispielsweise der PSPs und ihrer DGD) benötigt, siehe unten. Deshalb muss \mathbf{T} zumindest an zwei Stellen des Spektrums berechnet werden. Sind zudem PMD- und PDL-Größen höherer Ordnung von Interesse, ist \mathbf{T} an entsprechend mehr Stellen zu bestimmen. Die Genauigkeit der numerischen Ableitungen ist dabei wiederum durch die Schrittweite $\Delta\omega$ festgelegt. Wird diese reduziert, kann die Genauigkeit beliebig erhöht werden.

Schema zur Berechnung wichtiger Systemgrößen

Sobald der globale Jones-Operator \mathbf{T} als Funktion der Frequenz vorliegt, können sämtliche PMD- und PDL-Größen berechnet werden.¹ Die Rechenwege zur Bestimmung dieser Größen sind in der folgenden Abbildung schematisch dargestellt. Eine ausführliche Diskussion folgt im Anschluss.

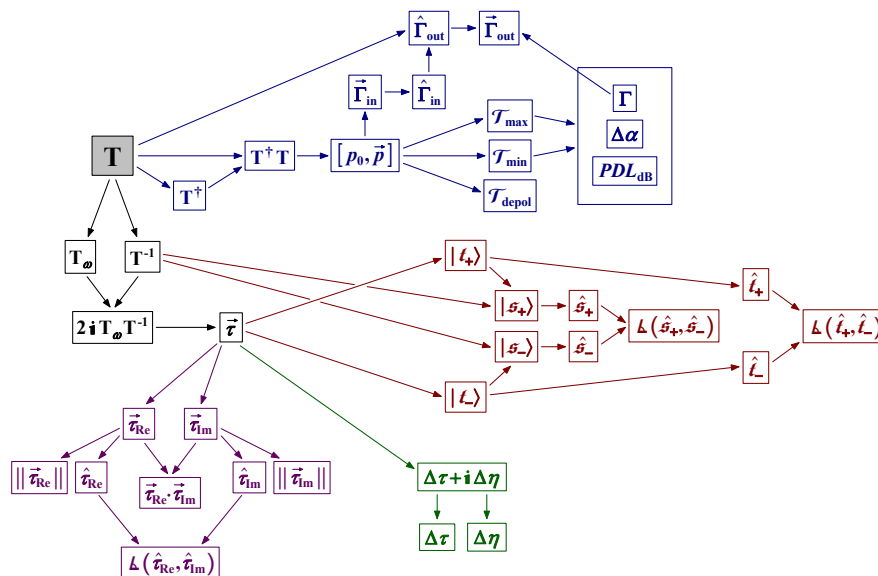


Abb. 3.1: Rechenwege zur Bestimmung wichtiger PMD- und PDL-Größen aus der globalen (frequenzabhängigen) Jones-Matrix \mathbf{T} ; nicht dargestellt sind Größen höherer Ordnung, diese lassen sich durch numerische Differentiation der abgebildeten Größen bestimmen.

¹ Dabei werden die Jones-Operatoren intern wiederum entsprechend einer festgelegten Basis als komplexe 2×2 Jones-Matrizen dargestellt.

Berechnung von PDL-Größen

Gemäß der Diskussion des Kapitels 2.4.1 folgen sämtliche PDL-Größen direkt aus dem Quaternion der Leistungstransmission $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \equiv p_0 \mathbf{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} = [p_0, \vec{p}]$. Deshalb ist zu Beginn aller Berechnungen die zu \mathbf{T} adjungierte Jones-Matrix \mathbf{T}^\dagger zu bestimmen, welche sich durch Vertauschen von Zeilen und Spalten und Übergang zum konjugiert Komplexen ergibt. Durch Multiplikation (von rechts) mit \mathbf{T} folgt $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}$, womit sich gemäß Gleichung (2.27) von Seite 22 die Komponenten des Quaternions $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} \equiv [p_0, \vec{p}]$ berechnen lassen zu $p_0 = \frac{1}{2} \text{Sp}(\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T})$ und $\vec{p} = \frac{1}{2} \text{Sp}(\vec{\sigma}(\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}))$.

Unter Verwendung von p_0 und \vec{p} können dann der maximale \mathcal{T}_{\max} und der minimale \mathcal{T}_{\min} Transmissionskoeffizient direkt bestimmt werden zu $\mathcal{T}_{\max/\min} = p_0 \pm \|\vec{p}\|$, siehe Gleichung (2.79) auf Seite 55. Zudem folgt unmittelbar der Transmissionskoeffizient eines depolarisierten Signals zu $\mathcal{T}_{\text{depol}} = p_0$. Schließlich lassen sich die PDL Γ , der differenzielle Dämpfungskoeffizient $\Delta\alpha$ sowie die PDL in dB (Größen, welche die Stärke der globalen PDL beschreiben) unter Verwendung der Gleichungen (2.71) und (2.75) direkt aus \mathcal{T}_{\max} und \mathcal{T}_{\min} bestimmen.

Zur vollständigen Beschreibung der PDL fehlt noch der PDL-Vektor am Eingang $\vec{\Gamma}_{\text{in}}$ und am Ausgang $\vec{\Gamma}_{\text{out}}$ des Systems. Gemäß der Diskussion des Kapitels 2.4.1 ergibt sich $\vec{\Gamma}_{\text{in}}$ direkt aus dem Quaternion $[p_0, \vec{p}]$ zu $\vec{\Gamma}_{\text{in}} = \vec{p}/p_0$. Daraus folgt die Richtung des PDL-Vektors am Eingang $\hat{\Gamma}_{\text{in}}$ durch Normierung von $\vec{\Gamma}_{\text{in}}$. Die Richtung des PDL-Vektors am Ausgang $\hat{\Gamma}_{\text{out}}$ kann dann auf unterschiedliche Art und Weise berechnet werden. Der einfachste Weg ist, $\hat{\Gamma}_{\text{in}}$ zunächst in den Jones-Raum zu überführen. Wird die globale Jones-Matrix \mathbf{T} auf den resultierenden Jones-Vektor (dargestellt als Spaltenvektor bzgl. der gegebenen Basis) angewendet, so folgt der zugehörige Jones-Vektor am Ausgang. Dieser erlaubt – durch Überführung in den Stokes-Raum mit anschließender Normierung – die Bestimmung von $\hat{\Gamma}_{\text{out}}$. Schließlich kann der PDL-Vektor am Ausgang $\vec{\Gamma}_{\text{out}}$ durch Multiplikation von $\hat{\Gamma}_{\text{out}}$ mit der PDL Γ ermittelt werden.

Berechnung von PMD-Größen

Zur Berechnung der PMD-Größen ist zunächst die Matrix $2i\mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}$ zu ermitteln. Dazu wird die Ableitung der globalen Jones-Matrix \mathbf{T} nach der Kreisfrequenz ω benötigt. Gemäß der oben diskutierten Vorarbeiten liegt \mathbf{T} an M Stellen des Spektrums $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$ vor, mit einer Schrittweite $\Delta\omega \ll \Delta\omega_{\text{PSP}}$. Durch numerische Differentiation folgt \mathbf{T}_ω an der Stelle ω_i zu

$$\mathbf{T}_\omega(\omega_i) \equiv \frac{\mathbf{T}(\omega_i + \Delta\omega) - \mathbf{T}(\omega_i - \Delta\omega)}{2\Delta\omega}, \quad i = 2, 3, \dots, M-1. \quad (3.15)$$

Somit liegen alle Größen, welche direkt oder indirekt auf \mathbf{T}_ω basieren, an $M-2$ Stellen des Spektrums $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{M-1}$ vor. Wird schließlich die zu \mathbf{T} inverse Matrix \mathbf{T}^{-1} berechnet, so folgt durch Multiplikation von \mathbf{T}_ω und \mathbf{T}^{-1} – unter Berücksichtigung des Faktors $2i$ – die Matrix $2i\mathbf{T}_\omega \mathbf{T}^{-1}$.

Der komplexe PMD-Vektor am Ausgang $\vec{\tau}$ ist gemäß Gleichung (3.6) als Vektorteil des Karllsson-Quaternions von $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ definiert, es gilt also $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1} \equiv \vec{\tau} \cdot \vec{\sigma} = [0, \vec{\tau}]$. Somit lässt sich $\vec{\tau}$ mithilfe von Gleichung (2.27) auf Seite 22 direkt bestimmen zu $\vec{\tau} = \frac{1}{2}\text{Sp}(\vec{\sigma}(2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}))$. Ausgehend vom komplexen PMD-Vektor $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + i\vec{\tau}_{\text{Im}}$ lassen sich dann alle weiteren PMD-Größen bestimmen. So folgen sein Realteil $\vec{\tau}_{\text{Re}}$ und sein Imaginärteil $\vec{\tau}_{\text{Im}}$ unmittelbar. Damit können das Skalarprodukt $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}}$, die Länge des Real- $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ und des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ sowie deren Richtungen im Stokes-Raum $\hat{\tau}_{\text{Re}}$ und $\hat{\tau}_{\text{Im}}$ berechnet werden. Mit Hilfe dieser Richtungen kann ferner der Winkel $\angle(\hat{\tau}_{\text{Re}}, \hat{\tau}_{\text{Im}})$ zwischen dem Real- und dem Imaginärteil im Stokes-Raum bestimmt werden.

Ausgehend vom komplexen PMD-Vektor $\vec{\tau}$ lassen sich zudem die DGD, die DAS und die PSPs ermitteln: Die DGD $\Delta\tau$ sowie die DAS $\Delta\eta$ folgen direkt aus Gleichung (3.9), also aus der Relation $\Delta\tau + i\Delta\eta = \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}$. Dabei sei $\sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}$ per Definition die Wurzel mit positivem Realteil. Die PSPs am Ausgang im Jones-Raum $|\underline{t}_\pm\rangle$ sind gemäß Gleichung (3.8) die Eigenvektoren von $\vec{\tau} \cdot \vec{\sigma}$. Mit $\vec{\tau} \equiv (\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3)^T$ und unter Berücksichtigung aller Sonderfälle lassen sich die PSPs am Ausgang – dargestellt als Spaltenvektoren bzgl. der gegebenen Basis – schließlich berechnen zu

$$|\underline{t}_\pm\rangle = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } \tau_2 = \tau_3 = 0 \text{ und } \text{Re}(\tau_1) > 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } \tau_2 = \tau_3 = 0 \text{ und } \text{Re}(\tau_1) < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{\tau_1 \pm \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}}}{\tau_2 + i\tau_3} \right|^2}} \begin{pmatrix} \tau_1 \pm \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}} \\ \tau_2 + i\tau_3 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Durch Transformation in den Stokes-Raum folgen die zugehörigen PSPs $\hat{t}_\pm \equiv \langle \underline{t}_\pm | \vec{\sigma} | \underline{t}_\pm \rangle$, womit der Winkel zwischen den PSPs im Stokes-Raum $\angle(\hat{t}_+, \hat{t}_-)$ berechnet werden kann (jeweils am Ausgang des Systems).

Mit Hilfe der inversen Jones-Matrix \mathbf{T}^{-1} können dann auch die PSPs am Eingang im Jones-Raum gemäß $|\underline{s}_\pm\rangle = \mathbf{T}^{-1}|\underline{t}_\pm\rangle$ berechnet werden. (Bei dieser Relation ist streng genommen noch ein Normierungsfaktor einzufügen, um die Normierung von $|\underline{s}_\pm\rangle$ zu gewährleisten.) Schließlich folgen die zugehörigen PSPs im Stokes-Raum am Eingang $\hat{s}_\pm \equiv \langle \underline{s}_\pm | \vec{\sigma} | \underline{s}_\pm \rangle$ sowie der Winkel zwischen diesen PSPs $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$.

Berechnung von PMD- und PDL-Größen höherer Ordnung

Aus der Frequenzabhängigkeit der soeben berechneten Größen lassen sich PMD- und PDL-Größen höherer Ordnung ermitteln. Mit einem Verfahren entsprechend Gleichung (3.15) folgt beispielsweise die polarisationsabhängige chromatische Dispersion (PCD) $\Delta\tau_\omega$ aus den Daten der DGD $\Delta\tau$ gemäß

$$\Delta\tau_{\omega}(\omega_i) \equiv \frac{\Delta\tau(\omega_i + \Delta\omega) - \Delta\tau(\omega_i - \Delta\omega)}{2\Delta\omega}, \quad i = 3, 4, \dots, M-2. \quad (3.17)$$

Entsprechend folgt die PSP-Depolarisation $\|\partial_{\omega}\hat{\boldsymbol{\tau}}_{+}\|$ aus den Daten des langsamen PSPs am Ausgang $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{+}$ zu

$$\|\partial_{\omega}\hat{\boldsymbol{\tau}}_{+}\|(\omega_i) \equiv \left\| \frac{\hat{\boldsymbol{\tau}}_{+}(\omega_i + \Delta\omega) - \hat{\boldsymbol{\tau}}_{+}(\omega_i - \Delta\omega)}{2\Delta\omega} \right\|, \quad i = 3, 4, \dots, M-2. \quad (3.18)$$

Auch andere PMD- und PDL-Größen höherer Ordnung werden nach diesem Schema berechnet. Dabei liegen solche Größen zweiter Ordnung, welche direkt oder indirekt auf \mathbf{T}_{ω} basieren (siehe Abb. 3.1), an $M-4$ Stellen im Spektrum $\omega_3, \omega_4, \dots, \omega_{M-2}$ vor. Wird ihre Berechnung nicht von \mathbf{T}_{ω} beeinflusst, so lassen sie sich an $M-2$ Stellen $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{M-1}$ berechnen.

Berechnung von spektralen Autokorrelationsfunktionen

Sind die PMD- und PDL-Größen gemäß Abb. 3.1 als Funktion der Frequenz bestimmt, so können ihre spektralen Autokorrelationsfunktionen unmittelbar berechnet werden. Die spektrale AKF beispielsweise des Realteils $\bar{\tau}_{\text{Re}}$ des komplexen PMD-Vektors ist gegeben durch den spektralen Mittelwert $\langle \bar{\tau}_{\text{Re}}(\omega+x) \cdot \bar{\tau}_{\text{Re}}(\omega) \rangle$, wobei die Variable x ein Vielfaches der Schrittweite $\Delta\omega$ sein muss mit einer oberen Grenze, welche festgelegt ist durch die Zahl der Stellen im Spektrum, an denen $\bar{\tau}_{\text{Re}}$ vorliegt.¹ Wird die AKF normiert auf ihren Wert bei $x=0$ angegeben, so soll sie als $\text{AKF}_{\bar{\tau}_{\text{Re}}}(x)$ bezeichnet werden. Entsprechendes gilt für andere PMD- und PDL-Größen.

Um die tatsächliche AKF gut anzunähern, sollte die spektrale Mittelung über eine möglichst große Bandbreite mit einer möglichst großen Zahl statistisch unabhängiger Frequenzen erfolgen. Zusätzlich oder alternativ kann die AKF für eine große Zahl von Realisierungen (jeweils über eine endliche Bandbreite) berechnet und anschließend gemittelt werden.

3.2.2 Allgemeine Überlegungen zur Modellierung und zum Aufbau des Systems

Das Vorgehen zur Berechnung von Systemgrößen, welches in Kapitel 3.2.1 erläutert wurde, kann für ein beliebiges System angewendet werden, unabhängig von Anzahl, Typ, Richtung, Stärke und Reihenfolge der einzelnen Elemente. Als einzige Annahme wurde eine Verkettung von N Elementen mit reiner Doppelbrechung bzw. mit reiner PDL vorausgesetzt.

Für tatsächliche Simulationen sind die Parameter der Verkettung – möglichst praxisnah – festzulegen. Eine Möglichkeit für das weitere Vorgehen wäre nun, eine Reihe von

¹ In der Regel wird die Variable der Autokorrelationsfunktion als $\Delta\omega$ bezeichnet, da sie einen spektralen Abstand darstellt. Um Verwechslungen mit der Schrittweite $\Delta\omega$ (spektraler Abstand zweier Stellen im Spektrum, an denen der Jones-Operator \mathbf{T} vorliegt) zu vermeiden, wird sie hier temporär als x bezeichnet.

typischen Systemen nachzubilden und die damit erzielten Ergebnisse zu präsentieren. Aufgrund einer Vielzahl einstellbarer Parameter wäre durch dieses Vorgehen allerdings nur ein winziger Ausschnitt aller möglichen Systemkonfigurationen erfasst. Da zudem nur wenige der Parameter unabhängig voneinander sind, käme es vermutlich zu unnötigen Simulationen statistisch gleichwertiger Systeme. Von größter Wichtigkeit ist es deshalb, *vor* Beginn des Systementwurfs alle wählbaren Parameter auf ihre Relevanz und auf gegenseitige Abhängigkeiten hin zu untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, dass es durch Verwendung normierter Darstellungen und durch einen wohlüberlegten Aufbau des Systems möglich wird, dass nur sehr wenige relevante Parameter verbleiben. So wird beispielsweise in diesem Kapitel 3 nur ein einziger Parameter Einfluss auf die Ergebnisse der statistischen Untersuchungen haben, siehe unten. Durch diese Vorüberlegungen lässt sich erreichen, dass die Resultate universell auf nahezu alle Systeme der Praxis anwendbar sind. Unter anderem in diesem Punkt unterscheiden sich die Analysen dieser Arbeit grundlegend von bereits in der Literatur beschriebenen Simulationen und Messungen auf dem Gebiet der wechselwirkenden PMD und PDL.

In diesem Kapitel 3 soll die Statistik von Systemgrößen analysiert werden. Die Anforderung der universellen Anwendbarkeit der Ergebnisse lässt sich unter anderem dadurch erfüllen, dass möglichst viele Größen in normierter Form angegeben werden. Das ist deshalb sinnvoll möglich, weil die mittlere DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ die PMD- und PDL-Größen sowie deren Frequenzabhängigkeit skaliert [15], [38], [39], [45], [73]. Die Größen an sich werden (bis auf wenige Ausnahmen) normiert auf die mittlere DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ bzw. – bei geeigneten Größen zweiter Ordnung – auf das Quadrat der mittleren DGD $\langle \Delta\tau \rangle^2$ angegeben. Durch diese Maßnahme werden die Ergebnisse zum Beispiel unabhängig von der Länge des Systems oder vom PMD-Koeffizienten der Faser. Bei der Untersuchung einer Realisierung des Systems entlang der Frequenz wird zudem die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} = (\pi/4)/\langle \Delta\tau \rangle$ (siehe Kapitel 2.3.5) zur Normierung der Frequenz eingesetzt. Da die statistischen Eigenschaften der PMD- und PDL-Größen zudem invariant sind gegenüber Verschiebungen der Frequenz (siehe Kapitel 2.3.5), hat schließlich auch die Wahl der absoluten Lage des betrachteten Frequenzbereichs keinen Einfluss auf die Statistik der Ergebnisse.

Ebenso hängt die Statistik weder ab von der genauen Anzahl der doppelbrechenden Elemente noch von derjenigen der PDL-Elemente, falls die Anzahl jeweils »groß genug« gewählt wird. Genauer formuliert bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der PMD- und PDL-Größen im Grenzfall einer großen Anzahl Elemente nicht mehr von dieser Anzahl abhängen (bei festgehaltener mittlerer DGD und mittlerer PDL des Systems). Weitergehende Untersuchungen zu dieser Thematik (beispielsweise in [7]) haben ergeben, dass dieser Grenzfall für $N \gg 10$ Elemente in guter Näherung gegeben ist – selbst bei Größen zweiter Ordnung. In diesem Grenzfall sind die Resultate zudem unabhängig davon, ob die Richtungen der Elemente zufällig auf der Poincaré-Kugel liegen oder ob sie beschränkt werden auf die Äquatorebene der Poincaré-Kugel [1].

Bei der Wahl der Stärke der einzelnen doppelbrechenden Elemente ist darauf zu achten, dass die Elemente nicht allesamt die gleiche DGD $\Delta\tau_i$ haben dürfen. Dies würde nämlich dazu führen, dass der globale Jones-Operator der Verkettung – und somit auch sämtliche PMD- und PDL-Größen – periodisch im Spektrum wären. (Die Periodizität des Jones-Operators eines einzelnen doppelbrechenden Elements lässt sich – unter Beachtung der Relation $\Delta\beta L = \Delta\tau\omega$ – an Gleichung (2.50) auf Seite 34 erkennen.) Wird die DGD $\Delta\tau_i$ der einzelnen Elemente hingegen beispielsweise als gaußverteilte Zufallsvariable mit einer relativen Standardabweichung von 20 % oder 30 % modelliert, so führt dies zu einer praktisch vollständigen Beseitigung der Periodizität [1]. Andererseits sollte die Streuung der DGD pro Element $\Delta\tau_i$ um den Mittelwert $\langle\Delta\tau_i\rangle$ auch nicht zu groß gewählt werden, um eine Verfälschung der Ergebnisse der Scharstatistik des Systems zu verhindern [1]. Dieser unerwünschte Nebeneffekt lässt sich jedoch dadurch verringern, dass die Stärken der Elemente zu Beginn der Simulationsreihen einmal zufällig bestimmt werden und daraufhin konstant verbleiben. Die einzelnen Simulationen zur Scharstatistik unterscheiden sich dann nur noch dadurch, dass die einzelnen Elemente jeweils eine neue zufällige Richtung im Stokes-Raum erhalten. Genau dieses Vorgehen wird bei den Simulationen dieser Arbeit angewendet.

Da sowohl die zu untersuchenden Größen als auch die Frequenzachse in normierter Form angegeben werden, verbleibt als einziger freier Parameter die globale PDL des Systems. Die einzelnen PDL-Elemente, welche die globale PDL hervorrufen, müssen dabei entlang der Strecke *verteilt* werden. Eine Konzentration aller PDL-Elemente beispielsweise am Ende der Strecke würde nämlich die Statistik merklich beeinflussen [31].

3.2.3 Aufbau und Parameter des Systems

Werden die allgemeinen Regeln des Kapitels 3.2.2 beachtet, ist die tatsächliche Konstruktion sowie die Wahl der Parameter des untersuchten Systems von untergeordneter Bedeutung. Dennoch soll das System, welches in diesem und in den nachfolgenden Kapiteln zum Einsatz kommt, detailliert vorgestellt und diskutiert werden.

Alle Simulationen dieser Arbeit basieren auf einer Verkettung von 8 000 doppelbrechenden Elementen mit 200 PDL-Elementen. (Dies ist ein gutes Modell für ein langes System mit einer großen Zahl optischer Verstärker.) Von diesen 8 200 Elementen ist sowohl das erste als auch das letzte ein PDL-Element, es verbleiben also 198 »innere« PDL-Elemente. Diese 198 Elemente werden nahezu gleichmäßig entlang der Strecke eingefügt, im Mittel befinden sich also $\approx 40,2$ doppelbrechende Elemente (»DGD-Elemente«) zwischen zwei PDL-Elementen. Die Streuung dieser Anzahl um den Mittelwert 40,2 erfolgt näherungsweise gemäß einer Gaußverteilung, mit einer relativen Standardabweichung von etwa 13,8 %, siehe Abb. 3.2(c).

Die Stärke und die genaue Reihenfolge der Elemente wird zu Beginn der Simulationen zufällig bestimmt und verbleibt daraufhin konstant. Dabei wird sowohl die DGD $\Delta\tau_i$ der doppelbrechenden Elemente als auch die PDL PDL_i der PDL-Elemente als gauß-

verteilte Zufallsvariable angesetzt, mit einer Standardabweichung von etwa 30 % im Fall der DGD (ein relativ großer Wert zur Vermeidung von Periodizitäten im Spektrum) bzw. $\approx 8,6\%$ im Fall der PDL. Die entsprechenden Histogramme sind in Abb. 3.2(a) und (b) dargestellt. Zusätzlich wird die PDL des ersten und des letzten Elements um etwa 50 % angehoben, da die Komponenten am Eingang und am Ausgang eines Systems der Praxis (wie Multiplexer und Demultiplexer) häufig eine erhöhte PDL aufweisen [34]. Diese beiden ausgezeichneten Ereignisse der Zufallsvariablen PDL_i sind im Histogramm der Abb. 3.2(b) eingekreist dargestellt.

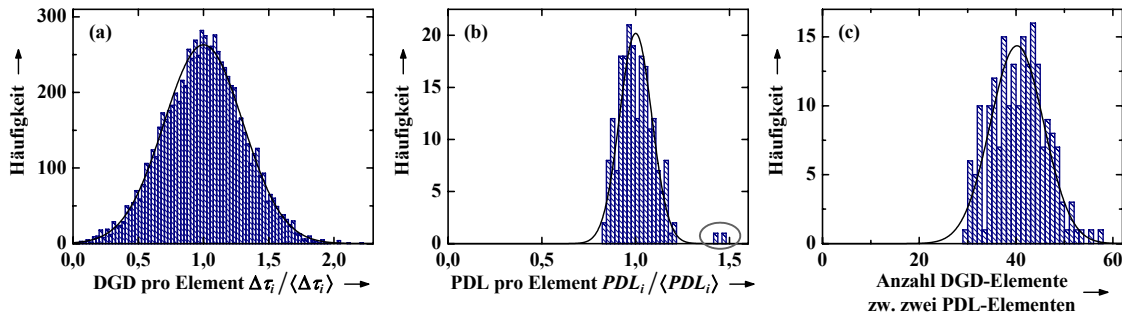


Abb. 3.2: Histogramme der Parameter des Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen: (a) DGD der doppelbrechenden Elemente, gaußverteilt mit einer Standardabweichung von $\approx 30\%$ zur Vermeidung von Periodizitäten im Spektrum; (b) PDL der PDL-Elemente, ebenfalls gaußverteilt, jedoch mit einer geringeren Standardabweichung von $\approx 8,6\%$; die Stärke der PDL des ersten und des letzten Elements der Verkettung wird zusätzlich um etwa 50 % erhöht, dies führt zu den beiden eingekreisten Ereignissen des mittleren Bildes. (c) Anzahl doppelbrechender Elemente zwischen zwei PDL-Elementen: Zwischen zwei PDL-Elementen liegen im Mittel $\approx 40,2$ DGD-Elemente, gaußverteilt mit einer Standardabweichung von $\approx 13,8\%$.

Nachdem die relative Verteilung der Werte $\Delta\tau_i$ um ihren Mittelwert $\langle\Delta\tau_i\rangle$ festgelegt wurde [Abb. 3.2(a)], fehlt noch die Angabe des absoluten Wertes der DGD. Bei der hier betrachteten Verkettung wird die mittlere *globale* DGD des Systems zu $\langle\Delta\tau\rangle = 4$ ps festgelegt, sodass die mittlere DGD pro Element $\langle\Delta\tau_i\rangle$ – mithilfe von Gleichung (2.66) auf Seite 45 – entsprechend zu skalieren ist. Aus der Angabe $\langle\Delta\tau\rangle = 4$ ps folgt die Bandbreite der PSPs zu $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle = 2\pi \cdot 31,25$ GHz.¹

Somit verbleibt in diesem Kapitel 3 als einziger freier Parameter die globale PDL des Systems.² Ihren Einfluss auf die Statistik gilt es zu untersuchen. Dabei wird die mittlere PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle$ so skaliert, dass sie einen der Werte 0 dB, 0,05 dB, 0,1 dB, 0,2 dB, 0,4 dB, 0,6 dB oder 0,8 dB annimmt. (Genauer formuliert, handelt es sich um die mittlere PDL der »inneren« 198 Elemente, die erhöhte PDL des ersten und des letzten Elements ist zusätzlich zu berücksichtigen.) Die resultierenden Werte der

¹ Es sei aber noch einmal betont, dass – aufgrund der normierten Darstellungen – $\langle\Delta\tau\rangle$ willkürlich wählbar ist. Die Festlegung auf $\langle\Delta\tau\rangle = 4$ ps wird weder in diesem noch in den folgenden Kapiteln die allgemeine Anwendbarkeit der Ergebnisse einschränken.

² In Kapitel 4 kommen die Bandbreite des optischen Signals, dessen Trägerfrequenz sowie dessen Polarisationszustand als freie Parameter hinzu.

mittleren *globalen* PDL $\langle PDL \rangle$ lassen sich dann mithilfe der Gleichungen (2.82) bzw. (2.83) des Kapitels 2.4.2 berechnen. Das Kapitel 3.3.1 wird näher auf diese Zusammenhänge eingehen, siehe Tab. 3.1 auf Seite 80.

Bei der Untersuchung einer Schar von Realisierungen des Systems bei fester Frequenz muss die Jones-Matrix \mathbf{T} an wenigen benachbarten Stellen des Spektrums berechnet werden. Der spektrale Abstand zweier Stellen kann dabei sehr gering sein, hier wird er auf $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}/500$ festgelegt. Allerdings würde auch eine Erhöhung dieses Abstandes um mehr als eine Größenordnung die Genauigkeit der Ergebnisse nicht nennenswert beeinflussen. Als einzige Ausnahme sind Unstetigkeitsstellen bestimmter Größen zu erwähnen, welche aufgrund der Anwesenheit von PDL auftreten werden. Der Einfluss der Schrittweite $\Delta\omega$ auf die Messergebnisse an diesen Stellen wird in Kapitel 3.5 ausführlich analysiert.

Soll hingegen die Statistik einer einzelnen Realisierung im Frequenzbereich untersucht werden, ist die Jones-Matrix \mathbf{T} an weitaus mehr Stellen des Spektrums zu berechnen. Im Vorgriff auf das Kapitel 4 sei darauf hingewiesen, dass die Frequenzabhängigkeit dieser Realisierung dort weiter untersucht werden soll bezüglich ihres Einflusses auf das optische Signal. Die in Kapitel 4 verwendete Untersuchungsmethode unter Einbeziehung aller freien Parameter ist allerdings verhältnismäßig rechenaufwendig, weshalb der betrachtete spektrale Bereich nicht beliebig groß sein kann: Die zur Verfügung stehende Rechenkapazität ließ die Analyse eines Frequenzbereichs der Breite $108 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$ zu. Das bedeutet für die Untersuchungen dieses Kapitels, dass die Jones-Matrix \mathbf{T} zumindest entlang der spektralen Breite $108 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$ zu bestimmen ist. Dazu soll sie mit der (im Vergleich zur Scharstatistik leicht erhöhten) Schrittweite $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}/200$ an $M = 2^{15} = 32\,768$ Stellen berechnet werden, womit die gesamte in Kapitel 3 untersuchte Bandbreite zu $M \Delta\omega \approx 163,8 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$ folgt. Das entspricht gemäß der Diskussion des Kapitels 2.3.5 ungefähr $163,8 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}} / (6 \Delta\omega_{\text{PSP}}) \approx 27$ statistisch unabhängigen Stellen im Spektrum. Diese beiden Frequenzbereiche ($108 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$ bzw. $163,8 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$) werden so im Spektrum angeordnet, dass sie zentriert um die Frequenz $\omega = 2\pi \cdot 193,1$ THz (entsprechend der Vakuumwellenlänge $\lambda \approx 1552,5$ nm) liegen. Wie bereits diskutiert wurde, hat diese absolute Lage im Spektrum aber keinen Einfluss auf die Statistik der Ergebnisse. Deshalb ist es sinnvoll, die Frequenz – zusätzlich zur Normierung auf die PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ – *relativ* zu einer Referenzfrequenz ω_0 anzugeben. Diese kann beliebig gewählt werden, hier soll sie den unteren Rand eines spektralen Bereichs der Breite $163 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$ um die Frequenz $2\pi \cdot 193,1$ THz markieren. Es gilt also definitionsgemäß $\omega_0 = 2\pi \cdot 193,1$ THz $- 81,5 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$. Unter Verwendung dieser Referenzfrequenz ω_0 und der PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ kann somit eine normierte Frequenz definiert werden gemäß $w \equiv (\omega - \omega_0) / \Delta\omega_{\text{PSP}}$. Damit erstreckt sich der in diesem Kapitel untersuchte Frequenzbereich ungefähr von $w = 0$ bis $w = 163$, während die Trägerfrequenzen der optischen Signale des Kapitels 4 zwischen $w = 27,5$ und $w = 27,5 + 108 = 135,5$ liegen werden.

Das allgemeine Verfahren zur Berechnung von Autokorrelationsfunktionen von PMD- und PDL-Größen wurde in Kapitel 3.2.1 beschrieben. Hier wird die spektrale Mittelung der AKF für jede Realisierung über die Bandbreite $163 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$ erfolgen. Da diese Bandbreite nur eine verhältnismäßig geringe Anzahl statistisch unabhängiger Stellen enthält, soll die AKF für 500 Realisierungen berechnet und anschließend gemittelt werden.

3.3 Statistik einer Schar von Realisierungen bei fester Frequenz

Die Statistik des in Kapitel 3.2.3 beschriebenen Systems soll zunächst bei konstanter Frequenz betrachtet werden. Dazu wird eine Schar von 500 000 Realisierungen dieses Systems per Monte-Carlo Simulation generiert und bezüglich der Statistik wichtiger PMD- und PDL-Größen analysiert. Um den Einfluss des einzigen freien Parameters, der mittleren PDL, zu erfassen, werden diese 500 000 Realisierungen für sieben unterschiedliche Fälle erzeugt, jeweils mit einem veränderten Wert der mittleren PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle$.

3.3.1 PDL

Als erste Größe soll die globale PDL in dB betrachtet werden, sie wird für jede der $7 \times 500\,000$ Realisierungen gemäß dem Berechnungsschema der Abb. 3.1 von Seite 71 bestimmt. Es folgen $7 \times 500\,000$ Werte der globalen PDL, welche zur Erzeugung entsprechender Histogramme sowie zur Berechnung der arithmetischen Mittelwerte $\langle PDL \rangle$ verwendet werden. Diese Ergebnisse können dann mit den analytischen Resultaten verglichen werden, welche in Kapitel 2.4.2 beschrieben wurden. Demnach ist die globale PDL die einzige Größe eines Systems mit wechselwirkender PMD und PDL, dessen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion streng analytisch aufgestellt werden kann. Darauf basierend ergaben sich die Gleichungen (2.82) und (2.83) des Kapitels 2.4.2, welche die analytische Berechnung der mittleren globalen PDL $\langle PDL \rangle$ im Grenzfall schwacher PDL [Gleichung (2.82)] bzw. im allgemeinen Fall [Gleichung (2.83)] ermöglichen. Angewendet auf das hier betrachtete System ergeben sich die in der zweiten und dritten Spalte der folgenden Tabelle aufgeführten Werte. Zum Vergleich sind in der vierten Spalte die Resultate der Monte-Carlo Simulationen, also die arithmetischen Mittelwerte der globalen PDL, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems, eingetragen. Die Daten der zweiten und der vierten Spalte der Tabelle sind zusätzlich in Abb. 3.3(b) grafisch dargestellt.

Ein Vergleich der Spalten der Tabelle zeigt, dass die Aussagen des Kapitels 2.4.2 durch die Simulationen bestätigt werden: Die einfache Gleichung (2.82) zur Berechnung der mittleren globalen PDL $\langle PDL \rangle$, welche in der Literatur nahezu ausschließlich verwendet wird, stellt nur im Grenzfall schwacher PDL eine gute Näherung dar. Sobald die mittlere globale PDL größer als einige dB wird, ist stattdessen Gleichung (2.83) anzuwenden, dessen Ergebnisse nahezu exakt mit den arithmetischen Mittelwerten der $7 \times 500\,000$ Realisierungen übereinstimmen. Bei diesem Vergleich ist jedoch zu

beachten, dass eine Abschätzung der mittleren globalen PDL $\langle PDL \rangle$ durch Betrachtung einer endlichen Anzahl von Stichproben (500 000 in diesem Fall) mit einer Unsicherheit behaftet ist, welche in der Tab. 3.1 nicht aufgeführt ist. Diese Unsicherheit lässt sich unter der Annahme einer maxwellverteilten globalen PDL (s. u.) jedoch einfach bestimmen: Die relative Standardabweichung (Standardabweichung normiert auf den Mittelwert) einer einzelnen Messung des Mittelwerts einer maxwellverteilten Zufallsvariablen ergibt sich zu $\sqrt{(3\pi/8)-1} \approx 0,422$, siehe Anhang. Die relative Standardabweichung von $N = 500\,000$ statistisch unabhängigen Messungen des Mittelwerts folgt dann zu $\approx 0,422/\sqrt{N} \approx 0,0006$. Multipliziert mit dem Mittelwert (vierte Spalte der Tab. 3.1) ergibt sich schließlich die zugehörige Standardabweichung der Abschätzung des Mittelwerts, sie kann hier ersichtlich in guter Näherung vernachlässigt werden.

Tab. 3.1: Abhängigkeit der mittleren globalen PDL $\langle PDL \rangle$ von der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ von 200 PDL-Elementen zufälliger Richtung und Stärke (gemäß des in Kapitel 3.2.3 beschriebenen Systems); die beiden mittleren Spalten enthalten analytisch berechnete Ergebnisse, während in der letzten Spalte die arithmetischen Mittelwerte von jeweils 500 000 Realisierungen des Systems dargestellt sind, basierend auf Monte-Carlo Simulationen. Der Wert $\langle PDL_i \rangle$ der ersten Spalte ist streng genommen die mittlere PDL pro Element der 198 »inneren« PDL-Elemente. Das erste Element der Verkettung hat gemäß Kapitel 3.2.3 einen zusätzlich um $\approx 42,5\%$ erhöhten Wert, das letzte einen um $\approx 46,6\%$. Dies wurde bei den Berechnungen berücksichtigt.

$\langle PDL_i \rangle$ in dB	$\langle PDL \rangle$ in dB Gleichung (2.82)	$\langle PDL \rangle$ in dB Gleichung (2.83)	$\langle PDL \rangle$ in dB 500 000 Realisierungen
0	0	0	0
0,05	0,657	0,658	0,658
0,1	1,315	1,317	1,317
0,2	2,629	2,645	2,649
0,4	5,259	5,384	5,379
0,6	7,888	8,303	8,305
0,8	10,518	11,483	11,497

Gemäß Kapitel 2.4.2 ist zu erwarten, dass die globale PDL in dB nahezu maxwellverteilt ist. Um diese Aussage zu überprüfen, sind auf der linken Seite der Abb. 3.3 die Histogramme der globalen PDL dargestellt, wie sie sich aus der Auswertung der $7 \times 500\,000$ Realisierungen ergeben. (Die Histogramme der Fälle $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB und $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB sind zur Verbesserung der Übersicht nicht abgebildet.) Die Ergebnisse der Simulationen bestätigen in sehr guter Näherung die Annahme einer maxwellverteilten globalen PDL, selbst im kritischen Bereich der Ausläufer der Verteilungen.

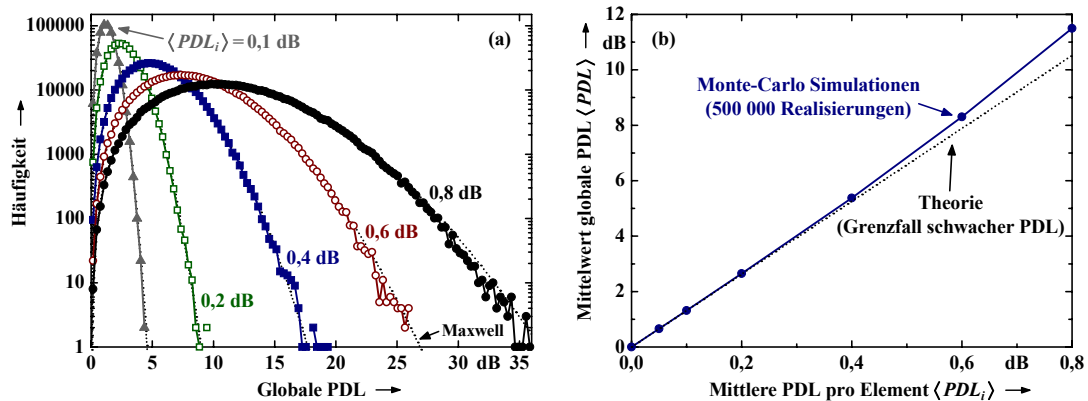


Abb. 3.3: Statistik der globalen PDL für ein System mit 200 PDL-Elementen zufälliger Richtung und Stärke gemäß Kapitel 3.2.3: (a) Histogramme der globalen PDL in dB für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems; die gestrichelten Kurven entsprechen analytisch erzeugten Maxwellverteilungen mit Mittelwerten gemäß Gleichung (2.83), also gemäß der dritten Spalte der Tab. 3.1. (Eine Maxwellverteilung hat generell nur einen einzigen freien Parameter, siehe Anhang.) (b) Mittelwert der globalen PDL $\langle PDL \rangle$ als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ entsprechend der zweiten und der vierten Spalte der Tab. 3.1; die analytisch berechneten Ergebnisse der Gleichung (2.83) (dritte Spalte der Tab. 3.1) sind hier nicht abgebildet, da sie in dieser Darstellung nicht von den Resultaten der Monte-Carlo Simulationen (vierte Spalte der Tab. 3.1) zu unterscheiden wären.

3.3.2 DGD und DAS

DGD

Die Differenz der Gruppenlaufzeiten der beiden PSPs, also die DGD $\Delta\tau$, ist die zentrale Größe des Systems. Gemäß der Diskussion des Kapitels 2.3 bewirkt sie direkt eine Verzerrung optischer Signale. Ihre Statistik wurde in Kapitel 2.3.3 für ein System ohne PDL diskutiert. Dabei ergab sich als wesentliches Ergebnis, dass $\Delta\tau$ maxwellverteilt ist, mit einem Mittelwert, welcher mithilfe von Gleichung (2.66) auf Seite 45 berechnet werden kann. Somit ist die Statistik der DGD für Systeme *ohne* PDL vollständig analytisch beschreibbar.

Weitaus schwieriger gestaltet sich die analytische Berechnung bei einem System mit PMD und PDL. So gibt es bisher keine Veröffentlichung, bei der die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der DGD analytisch aufgestellt werden konnte. Näherungsweise kann sie jedoch – für ein gegebenes System – bestimmt werden mithilfe von Simulationen, Emulationen und Messungen. Entsprechende Untersuchungen wurden bereits von einigen Autoren durchgeführt [32], [34], [38], [39], eine systematische Analyse der erzielten Ergebnisse steht jedoch noch aus.¹ Das soll die Aufgabe dieses Teilkapitels sein.

¹ In jeder der genannten Literaturstellen sind die Histogramme mit linearer Ordinatenachse dargestellt, sodass kaum Aussagen über die Ausläufer der Verteilung zu großen Ereignissen der DGD möglich sind. Auch eine Analyse beispielsweise der kumulativen Verteilung der DGD ist in der Literatur bisher nicht beschrieben.

Die $7 \times 500\,000$ Realisierungen, welche in Kapitel 3.3.1 bezüglich ihrer globalen PDL untersucht wurden, sollen nun zur Bestimmung der Statistik der DGD $\Delta\tau$ ausgewertet werden. Dazu wird wiederum das allgemeine Berechnungsschema der Abb. 3.1 von Seite 71 angewendet. Die Resultate sind in der folgenden Abbildung als Histogramme der DGD dargestellt. Dabei sind die Bereiche sehr kleiner und sehr großer Ereignisse zusätzlich vergrößert abgebildet. Zum Vergleich ist die analytische Maxwellverteilung eingetragen, wie sie sich aus der Theorie unitärer Systeme ergibt. Sie stimmt erwartungsgemäß in sehr guter Näherung mit den Resultaten des Falls $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB überein, auch im Bereich sehr großer und sehr kleiner Ereignisse. Wenn jedoch die PDL des Systems nicht Null ist, zieht dies eine modifizierte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der DGD nach sich. Vor allem im Bereich kleiner Ereignisse weicht die Verteilung dann deutlich von der Maxwellverteilung ab, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer sehr geringen DGD wird also stark erhöht. Diese Beeinträchtigung der Verteilungsfunktion ist auch bei nichtlogarithmischen Darstellungen deutlich erkennbar, sie wurde in der Literatur bereits ausführlich beschrieben [32], [34], [38], [39]. Von größerer Bedeutung für die Praxis ist jedoch der Ausläufer der Verteilung zu großen Ereignissen, denn diese Ereignisse sind primär für Systemausfälle aufgrund von PMD verantwortlich. In der logarithmischen Darstellung der Abb. 3.4(a) ist deutlich erkennbar, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer sehr großen DGD bei Systemen mit starker mittlerer PDL deutlich ansteigt.

Weiterhin verdeutlicht Abb. 3.4(b), dass eine Erhöhung der mittleren PDL einen (moderaten) Anstieg der Standardabweichung der DGD nach sich zieht, während der Mittelwert der DGD praktisch nicht beeinflusst wird. (Dabei soll die Größe $\langle \Delta\tau \rangle$ per Definition die mittlere DGD gemäß Gleichung (2.66) darstellen, also die mittlere DGD eines Systems ohne PDL. Diese Vereinbarung soll für alle weiteren Betrachtungen dieser Arbeit gelten.)

Die Beobachtung, dass der Mittelwert der DGD selbst für Systeme mit sehr starker mittlerer PDL praktisch konstant bleibt, wird in der Literatur häufig insofern vorschnell interpretiert, als dass der Einfluss von PDL auf die DGD des Systems vernachlässigt werden könnte. Eine weitergehende Analyse der Histogramme soll diese Vermutung widerlegen: Dazu werden die Histogramme zunächst normiert, sodass sie Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $p_\chi(x)$ der Zufallsvariablen $\chi \equiv \Delta\tau / \langle \Delta\tau \rangle$ darstellen, womit die Bedingung $\int_0^\infty p_\chi(\eta) d\eta = 1$ erfüllt ist. Damit kann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses $\Delta\tau > x \cdot \langle \Delta\tau \rangle$ numerisch berechnet werden zu $P(\Delta\tau / \langle \Delta\tau \rangle > x) = \int_x^\infty p_\chi(\eta) d\eta$. Dies entspricht der komplementären kumulativen Verteilungsfunktion der normierten DGD $\chi \equiv \Delta\tau / \langle \Delta\tau \rangle$.

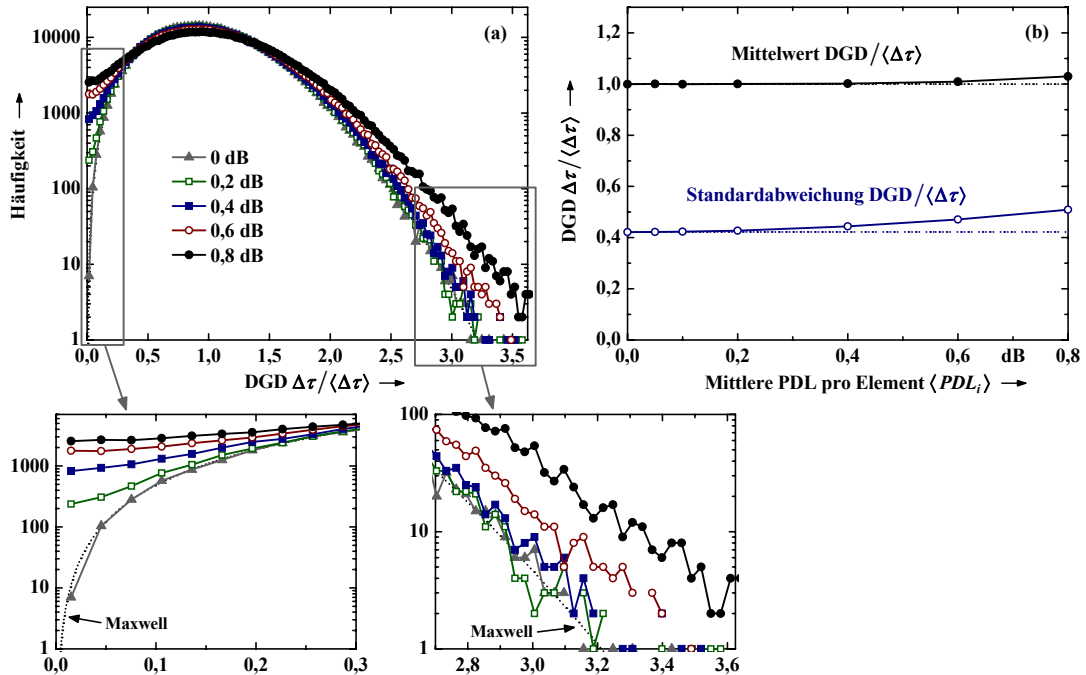


Abb. 3.4: Statistik der DGD des Systems des Kapitels 3.2.3, also eines Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen zufälliger Richtung und Stärke: (a) Histogramme der DGD für unterschiedliche mittlere PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems; die gestrichelte Kurve entspricht der im unitären Fall zu erwartenden Maxwellverteilung, siehe Kapitel 2.3.3. (b) Arithmetisches Mittel und Standardabweichung der DGD dieser Schar von Realisierungen als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; dabei ist $\langle\Delta\tau\rangle$ per Definition der Mittelwert gemäß Gleichung (2.66), also die mittlere DGD des Systems ohne PDL.

Das Ergebnis dieser Berechnungen ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Die Skalierung der Ordinatenachse wurde dabei so gewählt, dass sie bis zum Wert 10^{-5} reicht, noch geringere Wahrscheinlichkeiten wären statistisch nicht von Bedeutung. (Genauer formuliert, entspricht ein einzelnes von 500 000 statistisch unabhängigen Ereignissen der Wahrscheinlichkeit $2 \cdot 10^{-6}$. Deshalb werden die Kurven für Wahrscheinlichkeiten kleiner als etwa 10^{-5} stark durch das Auftreten einzelner Ereignisse beeinflusst.) In der Abb. 3.5 ist zudem mit der Beschriftung »Theorie« die komplementäre kumulative Verteilungsfunktion eingetragen, wie sie sich analytisch aus der Maxwellverteilung berechnen lässt. Sie stimmt in guter Näherung mit den Resultaten der 500 000 Realisierungen überein, falls die mittlere PDL des Systems schwach ist, falls also $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB oder $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB gilt. Schon bei Systemen mit moderater mittlerer PDL ($\langle PDL_i \rangle = 0,2$ dB bzw. $\langle PDL_i \rangle = 0,4$ dB) steigt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer sehr großen DGD merklich an, bei Systemen mit starker mittlerer PDL ($\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB oder höher) schließlich ist die Wahrscheinlichkeit deutlich erhöht. So ist beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses $\Delta\tau > 3 \cdot \langle\Delta\tau\rangle$ bei einer PDL von $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB um etwa eine Größenordnung erhöht, mit entsprechenden Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeit eines Systemausfalls aufgrund von PMD.

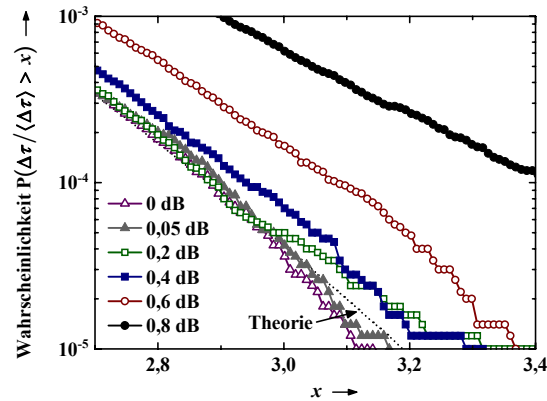


Abb. 3.5: Komplementäre kumulative Verteilungsfunktion der DGD für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf den gleichen Daten, wie sie zur Erstellung der Histogramme der Abb. 3.4 verwendet wurden. In diesem Bild ist also die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer großen DGD $\Delta\tau > x \cdot \langle \Delta\tau \rangle$ aufgetragen über den Parameter x . Die gestrichelte Kurve (»Theorie«) ist die analytisch berechnete komplementäre kumulative Verteilungsfunktion einer maxwellverteilten Zufallsvariablen, siehe Anhang.

DAS

Der Imaginärteil $\Delta\eta$ der »komplexen DGD« $\Delta\tau + i\Delta\eta$ wurde in Kapitel 3.1 eingeführt und diskutiert. Er tritt nur in Systemen mit PMD *und* PDL auf und wird häufig als »DAS« bezeichnet. In der Literatur wurde die Statistik der DAS bisher kaum untersucht, nur in [74] finden sich erste Ansätze.

Zur Durchführung entsprechender Analysen soll die DAS $\Delta\eta$ nun für jede der $7 \times 500\,000$ Realisierungen gemäß dem Berechnungsschema der Abb. 3.1 bestimmt werden. Die Ergebnisse dieser Auswertungen sind auf der linken Seite der folgenden Abbildung als Histogramme dargestellt. Ein Vergleich dieser Histogramme mit unterschiedlichen analytischen Verteilungsfunktionen zeigt, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der DAS in guter Näherung durch eine sech^2 -Verteilung (siehe Anhang) beschreiben lässt. Dies gilt auch im kritischen Bereich der Ausläufer der Verteilung, falls die mittlere PDL des Systems nicht zu groß wird. Dieses bisher in der Literatur noch nicht bekannte phänomenologische Ergebnis wurde in [35] veröffentlicht.

Zusätzlich ist in Abb. 3.6(b) der Mittelwert und die Standardabweichung des Betrags der DAS $|\Delta\eta|$ als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ aufgetragen. Erwartungsgemäß verschwinden beide im Grenzfall geringer mittlerer PDL und steigen monoton mit $\langle PDL_i \rangle$ an. Für ein System mit sehr starker PDL ($\langle PDL_i \rangle = 0,8$ dB) ist der Mittelwert von $|\Delta\eta|$ auf etwa 28 % der mittleren DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ angewachsen.

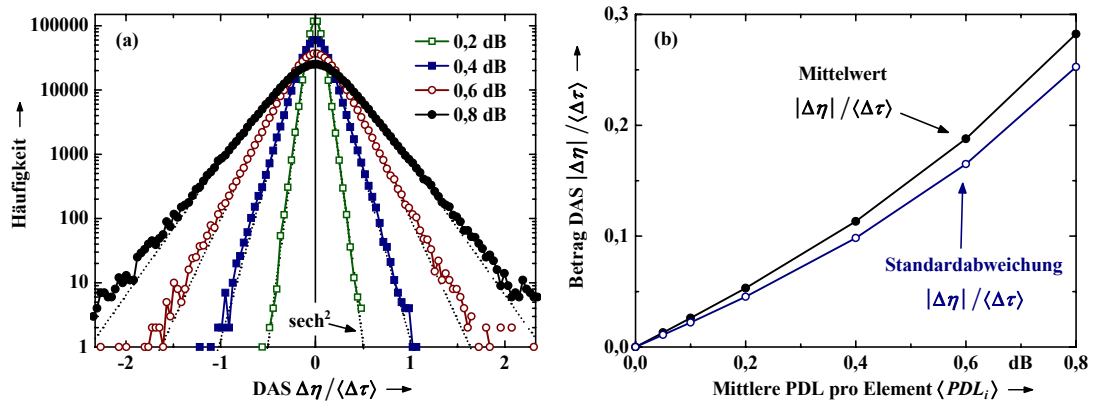


Abb. 3.6: Statistik der DAS $\Delta\eta$ (Imaginärteil der komplexen DGD) des in Kapitel 3.2.3 beschriebenen Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen: (a) Histogramme der DAS für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems; die gestrichelten Kurven sind analytisch berechnete sech^2 -Verteilungen, wobei die jeweiligen Standardabweichungen an die Ergebnisse der Simulationen angepasst wurden. (b) Arithmetisches Mittel und Standardabweichung des Betrags der DAS $|\Delta\eta|$ als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$.

Die DAS $\Delta\eta$ ist offenbar eine Größe, welche skaliert wird sowohl durch die mittlere DGD $\langle\Delta\tau\rangle$ des Systems als auch durch die mittlere globale PDL $\langle PDL \rangle$. Ist einer dieser beiden Mittelwerte Null, so ist es auch der Mittelwert der DAS. Deshalb liegt die Vermutung nahe, dass der *momentane* Wert der DAS $\Delta\eta$ (also der Wert für eine bestimmte Realisierung bei gegebener Frequenz) ebenfalls direkt zusammenhängt mit dem momentanen Wert der DGD $\Delta\tau$ und dem momentanen Wert der PDL. Zur Klärung dieser Frage sind in der folgenden Abbildung Streudiagramme der DAS $\Delta\eta$ in Abhängigkeit von der DGD $\Delta\tau$ bzw. von der globalen PDL dargestellt für das Beispiel $\langle PDL_i \rangle = 0,4$ dB. Für andere Fälle der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ ergeben sich ähnliche Diagramme. Offensichtlich werden die eingangs erwähnten Vermutungen nicht bestätigt. Zwar zeigt sich eine gewisse statistische Tendenz dahingehend, dass der Betrag der momentanen DAS $\Delta\eta$ umso größer ist, je größer die momentane PDL des Systems ist, siehe Abb. 3.7(b). Allerdings gibt es durchaus auch Realisierungen, bei denen der Betrag der DAS sehr klein und die momentane PDL gleichzeitig verhältnismäßig groß ist und umgekehrt. Ähnlich verhält es sich beim Streudiagramm der DAS $\Delta\eta$ in Abhängigkeit von der DGD $\Delta\tau$ [Abb. 3.7(a)], dort lässt sich sogar zu einem gewissen Grad ein umgekehrter statistischer Zusammenhang identifizieren: Für große momentane Werte der DGD ist der Betrag der DAS tendenziell gering, während die Wahrscheinlichkeit einer großen DAS mit abnehmender DGD zunimmt. Bei sehr geringer DGD ist die Wahrscheinlichkeit eines geringen Betrags der DAS sogar ausgesprochen klein.

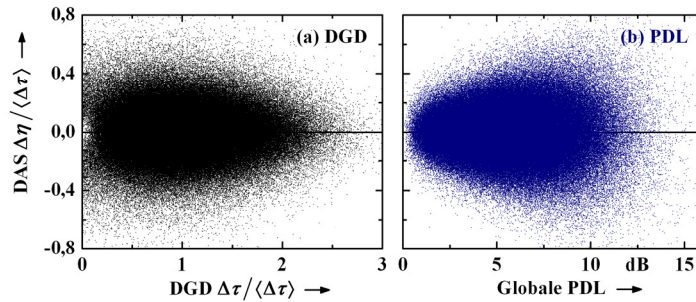


Abb. 3.7: Streudiagramme für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0,4$ dB des in Kapitel 3.2.3 beschriebenen Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen, basierend auf 500 000 Realisierungen: (a) Streudiagramm der DAS $\Delta\eta$ in Abhängigkeit von der DGD $\Delta\tau$, (b) Streudiagramm der DAS $\Delta\eta$ in Abhängigkeit von der globalen PDL in dB.

3.3.3 PSPs

Gemäß Kapitel 2.3.3 sind die PSPs eines unitären Systems (eines Systems ohne PDL) immer orthogonal. Übersetzt in den Stokes-Raum bedeutet dies, dass die beiden PSPs in entgegengesetzte Richtungen der Poincaré-Kugel weisen, womit der Winkel zwischen ihnen im Stokes-Raum 180° beträgt. Für ein System mit PMD *und* PDL gilt dieser einfache Zusammenhang nicht mehr. So hat die Diskussion des Kapitels 3.1 ergeben, dass der Operator $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ (mit dem globalen Jones-Operator \mathbf{T}) bei einem System mit PMD und PDL nicht hermitesch ist, wodurch die Orthogonalität der PSPs aufgehoben wird. Die daraus resultierenden Auswirkungen auf optische Signale und auf die Wirksamkeit optischer PMD-Kompensatoren sollen in den Kapiteln 4 und 5 analysiert werden. Zur Vorbereitung dieser Untersuchungen soll hier eine Analyse der Statistik der relativen Lage der PSPs erfolgen. Erste Ergebnisse auf diesem Gebiet finden sich in [39], weitere wurden basierend auf den Resultaten dieses Kapitels in [35] und in [36] veröffentlicht. Eine umfassende Analyse – auch unter Berücksichtigung statistischer Abhängigkeiten zu anderen Größen – soll nun erfolgen.

Dazu werden die $7 \times 500\,000$ Realisierungen erneut betrachtet, welche in diesem Kapitel bereits in anderen Zusammenhängen ausgewertet wurden. Für jede dieser Realisierungen wird – gemäß Abb. 3.1 auf Seite 71 – der Winkel zwischen den PSPs am Eingang $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$ sowie am Ausgang $\angle(\hat{t}_+, \hat{t}_-)$ bestimmt. Die Resultate dieser Berechnungen sollen als Histogramme dargestellt werden. Diese erweisen sich – in den statistisch relevanten Bereichen – als unabhängig davon, ob der Winkel am Eingang oder am Ausgang betrachtet wird. Deshalb sind in der folgenden Abbildung [Abb. 3.8(a)] nur die Histogramme für den Winkel am Ausgang gezeigt. Weiterhin sind auf der rechten Seite der Abbildung das arithmetische Mittel des Winkels sowie die zugehörige Standardabweichung als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ dargestellt.

Offenbar sind die PSPs – selbst bei verhältnismäßig schwacher mittlerer PDL – nur mit geringer Wahrscheinlichkeit streng orthogonal. Ihr Winkel im Stokes-Raum ist also zumeist geringer als 180° , er kann sogar deutlich geringer ausfallen. Mit zunehmender Stärke der mittleren PDL pro Element wächst die Wahrscheinlichkeit geringer Winkel

zwischen den PSPs stark an, siehe Abb. 3.8(a). Entsprechend ist der Mittelwert des Winkels umso geringer, je größer die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ ist, die zugehörige Standardabweichung steigt derweil monoton mit $\langle PDL_i \rangle$ an, siehe Abb. 3.8(b). Bei sehr starker mittlerer PDL nähert sich der Mittelwert des Winkels dem Wert 90° , die Wahrscheinlichkeit antiparalleler PSPs auf der Poincaré-Kugel ist dann geringer als die Wahrscheinlichkeit senkrechter PSPs (senkrecht im Stokes-Raum).

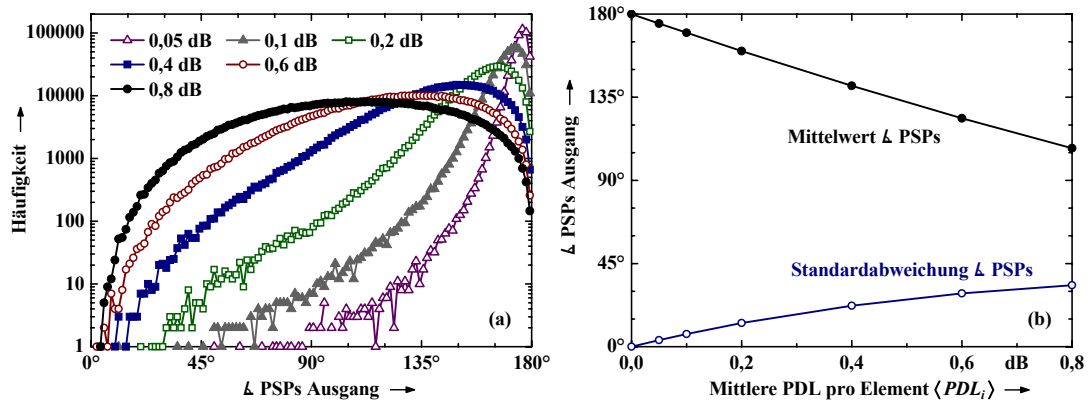


Abb. 3.8: Statistik des Winkels zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang des Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen: (a) Histogramme des Winkels für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems; (b) Arithmetisches Mittel und Standardabweichung des Winkels für diese Schar von Realisierungen als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$.

Wie bereits angemerkt wurde, unterscheidet sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Winkels zwischen den PSPs am Eingang nicht nennenswert von derjenigen am Ausgang. Dies muss aber nicht notwendigerweise bedeuten, dass die Winkel am Eingang und am Ausgang für jede Realisierung identisch sind. Zur Untersuchung dieser Frage sollen diese beiden Winkel für jede der $7 \times 500\,000$ Realisierungen verglichen werden. Die Resultate sind auf der linken Seite der folgenden Abbildung für $\langle PDL_i \rangle = 0,1$ dB (oben) und $\langle PDL_i \rangle = 0,4$ dB (unten) als Streudiagramme dargestellt. Ersichtlich gibt es einen merklichen statistischen Zusammenhang zwischen dem Winkel am Eingang und demjenigen am Ausgang. So tritt ein sehr geringer Winkel am Ausgang nur dann auf, wenn der Winkel am Eingang auch gering ist. Das bedeutet aber offenbar nicht, dass die beiden Winkel für jede Realisierung identisch sind, wie es bei einem unitären System der Fall wäre.

Derartige Ergebnisse wurden in der Literatur bisher noch nicht beschrieben, gleiches gilt für Ergebnisse zu statistischen Abhängigkeiten zwischen der DGD bzw. der PDL einer Realisierung und dem Winkel zwischen den PSPs. Entsprechende Resultate sind in der Mitte und auf der rechten Seite der folgenden Abbildung als Streudiagramme dargestellt. Offenbar tritt ein sehr geringer Winkel zwischen den PSPs nur dann auf, wenn die DGD der Realisierung gering ist. Auch die umgekehrte Aussage gilt: Eine extrem geringe DGD setzt einen kleinen Winkel zwischen den PSPs voraus. Statistische Abhängigkeiten zwischen der PDL einer Realisierung und dem Winkel zwischen den PSPs sind weniger stark ausgeprägt. Eine Tendenz zu geringen Winkeln bei starker

momentaner PDL ist allerdings in Abb. 3.9(f) erkennbar. (All diese Aussagen gelten sowohl für die PSPs am Eingang als auch am Ausgang, obgleich in Abb. 3.9(c) bis (f) nur die Winkel am Ausgang berücksichtigt sind.)

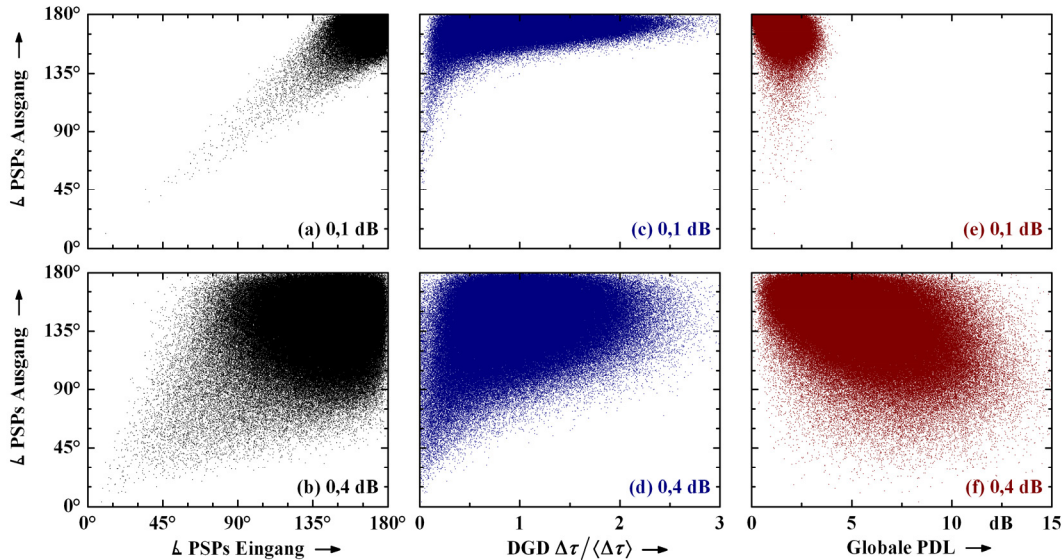


Abb. 3.9: Streudiagramme für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0,1 \text{ dB}$ (oben) bzw. $\langle PDL_i \rangle = 0,4 \text{ dB}$ (unten) des Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen, jeweils basierend auf 500 000 Realisierungen: (a), (b) Streudiagramme des Winkels zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang in Abhängigkeit vom entsprechenden Winkel am Eingang; (c), (d) Winkel zwischen den PSPs am Ausgang in Abhängigkeit von der DGD der Realisierung; (e), (f) Winkel zwischen den PSPs am Ausgang in Abhängigkeit von der momentanen PDL.

3.3.4 Komplexer PMD-Vektor

Der PMD-Vektor $\vec{\tau}$ eines unitären Systems ist ein reeller Vektor im Stokes-Raum, dessen Länge durch die DGD und dessen Richtung durch den langsamen PSP bestimmt sind. Dieser einfache Zusammenhang ist bei einem System mit PMD *und* PDL nicht mehr gegeben, der PMD-Vektor ist dann ein komplexer Vektor $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + i\vec{\tau}_{\text{Im}}$ (siehe Kapitel 3.1). Beispielsweise bestimmt er die spektrale Entwicklung eines Polarisationszustands gemäß Gleichung (3.10) auf Seite 66. Aufgrund der zentralen Bedeutung des komplexen PMD-Vektors sind seine statistischen Eigenschaften von großem Interesse. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Realteils $\vec{\tau}_{\text{Re}}$ sowie des Imaginärteils $\vec{\tau}_{\text{Im}}$ konnten allerdings bisher nicht analytisch aufgestellt werden. Li und Yariv [37] sowie Feded *et al.* [38] ist es jedoch zumindest gelungen, durch Analyse der dynamischen Gleichung für PMD [Gleichung (3.13) auf Seite 68] einige skalare Erwartungswerte zu ermitteln. Deren Ergebnisse sollen nun mit den Resultaten der Monte-Carlo Simulationen verglichen werden. Zusätzlich wird es durch weitergehende Analysen der Simulationsergebnisse möglich sein, eine Reihe neuer statistischer Zusammenhänge aufzuzeigen.

Zu diesem Zweck soll der komplexe PMD-Vektor $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\text{Re}} + i\vec{\tau}_{\text{Im}}$ für jede der $7 \times 500\,000$ Realisierungen des Systems des Kapitels 3.2.3 bestimmt werden. Damit lassen sich jeweils die Länge des Real- $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ und des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$, das Skalarprodukt $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}}$ sowie der Winkel $\angle(\hat{\tau}_{\text{Re}}, \hat{\tau}_{\text{Im}})$ zwischen dem Real- und dem Imaginärteil im Stokes-Raum errechnen. Die resultierenden Histogramme sind in der folgenden Abbildung auf der linken Seite und in der Mitte dargestellt. Werden sie weiter ausgewertet bezüglich ihres jeweiligen arithmetischen Mittelwerts, ihrer Standardabweichung sowie ihres quadratischen Mittelwerts (engl.: Root Mean Square, rms), so folgen die Kurven auf der rechten Seite der Abb. 3.10.

Da die Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ im Grenzfall schwacher PDL gleich der DGD $\Delta\tau$ des Systems ist, sind die Histogramme von $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ und $\Delta\tau$ für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB erwartungsgemäß identisch, vgl. Abb. 3.10(a) und Abb. 3.4(a). In diesem Fall verschwindet der Imaginärteil des komplexen PMD-Vektors. Mit zunehmender mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ steigt die Wahrscheinlichkeit eines sehr großen Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ deutlich an. Gleichzeitig nähert sich die Verteilung des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ derjenigen des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$, siehe Abb. 3.10(a) und (b). Eine weitergehende Analyse dieser Histogramme, dargestellt in Abb. 3.10(c), zeigt entsprechend, dass das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und das quadratische Mittel (rms) sowohl des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ als auch des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ mit der mittleren PDL pro Element ansteigen. Dieser Anstieg ist beim Imaginärteil ausgeprägter als beim Realteil. Zusätzlich sind in Abb. 3.10(c) die analytischen Ergebnisse zum quadratischen Mittelwert (rms), welche von Li und Yariv in [37] abgeleitet wurden, als gestrichelte Kurven eingetragen. Sie stimmen ersichtlich in sehr guter Näherung mit den Ergebnissen der Monte-Carlo Simulationen (Scharmittlung über jeweils 500 000 Realisierungen) überein.

Weiterhin zeigt die Abb. 3.10(d) eine deutliche Tendenz dahingehend, dass der Realteil $\vec{\tau}_{\text{Re}}$ des komplexen PMD-Vektors im Stokes-Raum senkrecht zum Imaginärteil $\vec{\tau}_{\text{Im}}$ ausgerichtet ist. Die Wahrscheinlichkeit eines Winkels $\angle(\hat{\tau}_{\text{Re}}, \hat{\tau}_{\text{Im}}) \approx 90^\circ$ ist deutlich höher als die Wahrscheinlichkeit paralleler oder antiparalleler Vektoren $\vec{\tau}_{\text{Re}}$ und $\vec{\tau}_{\text{Im}}$. Die Abb. 3.10(e) bestätigt diese Zusammenhänge auf andere Weise: Die Histogramme des Skalarprodukts $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}}$ nehmen ihr Maximum bei $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}} = 0$ an und sind symmetrisch zur Ordinatenachse. Der arithmetische Mittelwert von $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}}$, welcher in Abb. 3.10(f) als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ aufgetragen ist, verschwindet also unabhängig von der Stärke der mittleren PDL. Dieses Ergebnis wurde bereits in [37] und [38] analytisch aufgestellt. Weiterhin ist in Abb. 3.10(f) die Standardabweichung des Skalarprodukts $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}}$ als Funktion der mittleren PDL pro Element aufgetragen. Die zugehörigen analytischen Ergebnisse von [37] und [38], welche wiederum als gestrichelte Kurve eingetragen sind, stimmen sehr gut mit den Resultaten der Monte-Carlo Simulationen überein.

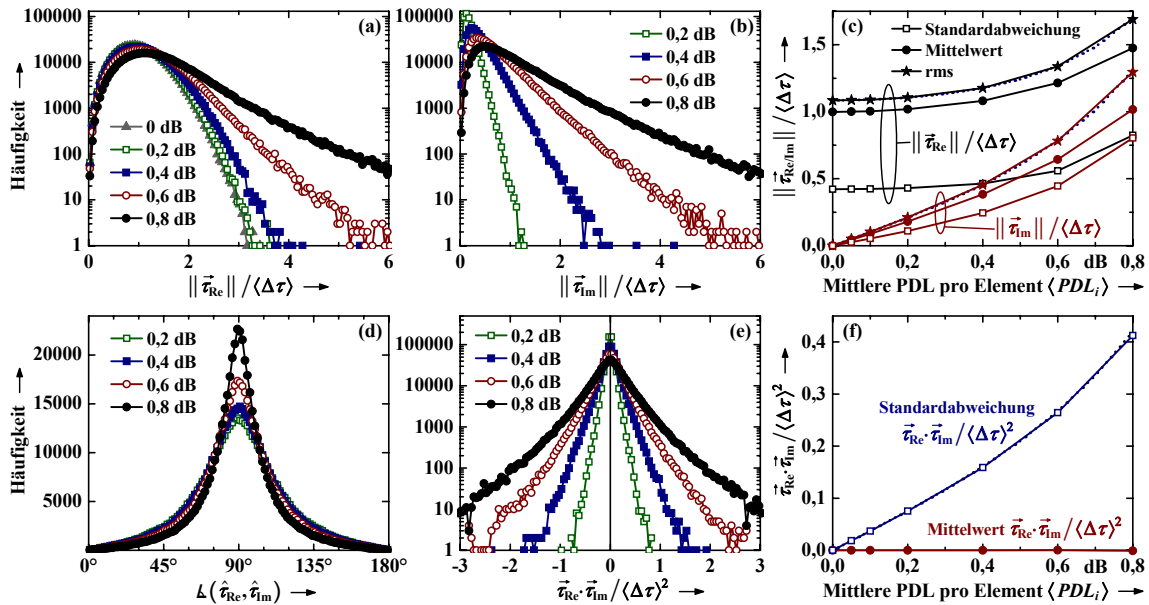


Abb. 3.10: Statistik des komplexen PMD-Vektors $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\text{Re}} + i\vec{\tau}_{\text{Im}}$ des Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen: (a), (b) Histogramme der Länge des Real- bzw. des Imaginärteils für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems; (c) Auswertung dieser Histogramme: Arithmetischer Mittelwert, Standardabweichung und quadratischer Mittelwert (rms) der Länge des Real- und des Imaginärteils als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; die gestrichelten Kurven stellen die analytischen Ergebnisse für den quadratischen Mittelwert gemäß [37] und [38] dar. (d) Histogramme des Winkels zwischen dem Real- und dem Imaginärteil im Stokes-Raum; (e) Histogramme des Skalarprodukts $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}}$; (f) Analyse der Histogramme von (e): Arithmetischer Mittelwert und Standardabweichung des Skalarprodukts $\vec{\tau}_{\text{Re}} \cdot \vec{\tau}_{\text{Im}}$ als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; die gestrichelten Kurven sind wiederum gemäß [37] und [38] berechnet.

Statistische Abhängigkeiten zwischen dem komplexen PMD-Vektor und anderen PMD- und PDL-Größen sind in der Literatur bisher kaum beschrieben. Die Streudiagramme der folgenden Abbildung zeigen jedoch eine Reihe derartiger Zusammenhänge. Sie basieren auf einer Auswertung der 500 000 Realisierungen für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0,4 \text{ dB}$. (Ähnliche Streudiagramme ergeben sich auch für andere Werte der mittleren PDL pro Element.) So zeigt das Streudiagramm der Abb. 3.11(a), dass die Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ des komplexen PMD-Vektors bei jeder Realisierung mindestens so groß ist wie die DGD $\Delta\tau$, sie kann – in Anwesenheit starker mittlerer PDL – auch deutlich größer sein. Anders verhält es sich beim Imaginärteil des komplexen PMD-Vektors: Gemäß Abb. 3.11(b) lässt sich nur ein relativ schwacher statistischer Zusammenhang zwischen der DGD $\Delta\tau$ und der Länge des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ feststellen. Der Wert von $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ hat eine leichte Tendenz, dann groß zu sein, wenn auch die DGD $\Delta\tau$ der Realisierung groß ist.

Weiterhin zeigt Abb. 3.11(c), dass der Imaginärteil der »komplexen DGD« $\Delta\tau + i\Delta\eta$, also die DAS $\Delta\eta$, praktisch nicht mit der Länge des Realteils des PMD-Vektors $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ korreliert ist. Die Länge des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ hingegen hängt gemäß Abb. 3.11(d) sehr wohl mit dem Betrag der DAS zusammen: $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ ist bei jeder Realisierung mindestens so groß wie der Betrag der DAS $|\Delta\eta|$, häufig sogar weitaus größer.

In Abb. 3.11(e) und (f) sind die Streudiagramme von $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ bzw. $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ in Abhängigkeit von der momentanen PDL dargestellt. Ersichtlich hängt die Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ nicht nennenswert mit der momentanen Stärke der PDL zusammen, während die Länge des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ tendenziell umso größer ist, je stärker die PDL einer Realisierung ist. So tritt ein sehr großer Wert von $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ nur auf bei Realisierungen mit großer PDL.

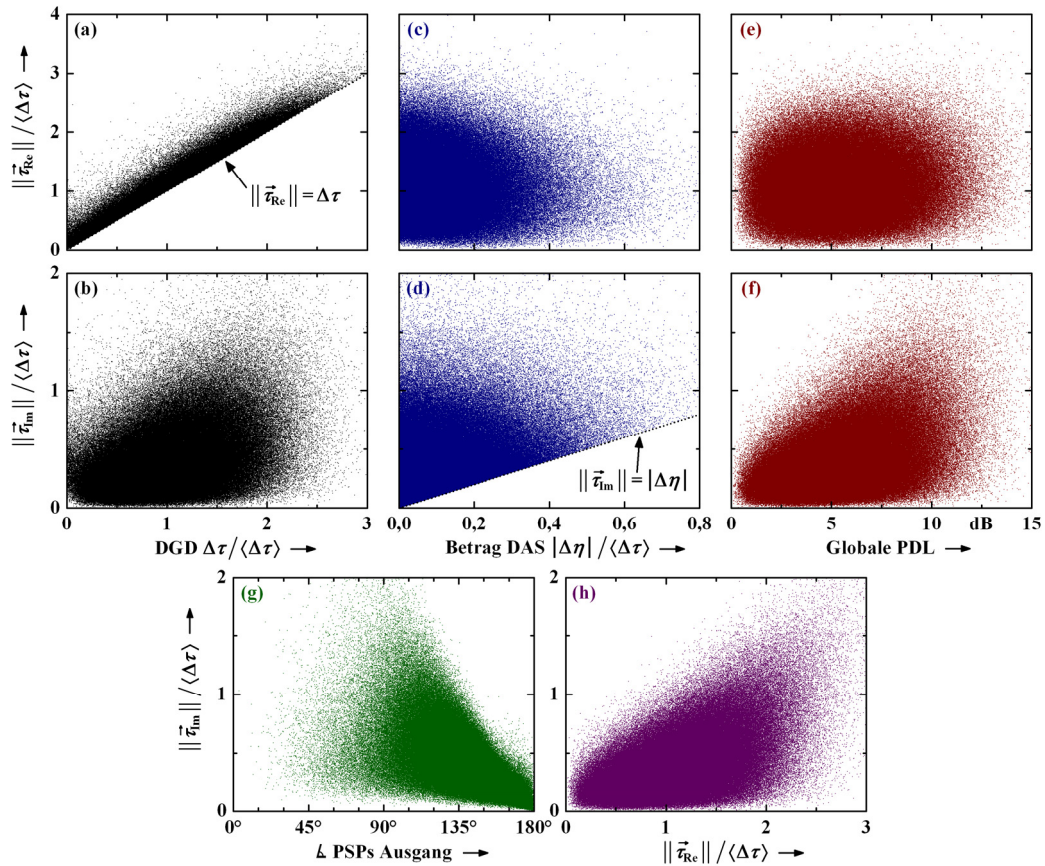


Abb. 3.11: Streudiagramme, basierend auf 500 000 Realisierungen des in Kapitel 3.2.3 beschriebenen Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0,4$ dB: (a), (b) Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ bzw. des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ des komplexen PMD-Vektors in Abhängigkeit von der DGD $\Delta\tau$ der Realisierung; (c), (d) $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ bzw. $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ in Abhängigkeit vom Betrag der DAS $|\Delta\eta|$ (Betrag des Imaginärteils der »komplexen DGD«); (e), (f) $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ bzw. $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ in Abhängigkeit von der momentanen PDL in dB; (g) $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ in Abhängigkeit vom Winkel zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang; (h) $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ in Abhängigkeit von $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$.

Weiterhin verdeutlicht Abb. 3.11(g) einen interessanten statistischen Zusammenhang zwischen dem Winkel zwischen den PSPs am Ausgang und der Länge $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ des Imaginärteils: Orthogonale PSPs am Ausgang (orthogonal im Jones-Raum, Winkel 180° im Stokes-Raum) treten offenbar nur dann auf, wenn die Länge des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ der Realisierung gering ist. Ein sehr großer Wert von $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ führt also zwingend zu einem kleinen Winkel zwischen den PSPs am Ausgang. Umgekehrt zieht jedoch ein kleiner Winkel zwischen den PSPs nicht notwendigerweise eine sehr große Länge $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ nach

sich. (Diese Zusammenhänge gelten nur für den Winkel zwischen den PSPs *am Ausgang*, der entsprechende Winkel am Eingang ist kaum mit der Länge $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ korreliert.)

Schließlich ist in Abb. 3.11(h) das Streudiagramm der Länge des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ in Abhängigkeit von der Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ aufgetragen. Offenbar kann die Länge $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ nur dann sehr groß sein, wenn auch die Länge $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ der Realisierung groß ist. Die umgekehrte Schlussfolgerung gilt jedoch nicht, die Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ kann auch bei geringer Länge des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ groß sein.

3.3.5 PMD und PDL zweiter Ordnung

PCD und PSP-Depolarisation

Die Frequenzabhängigkeit des PMD-Vektors unitärer Systeme wurde in Kapitel 2.3.4 diskutiert. Dabei haben sich die »PCD« $\Delta\tau_\omega$ (Änderung der DGD mit der Frequenz) und die »PSP-Depolarisation« $\|\partial_\omega \hat{\tau}_+\|$ (Änderung des langsamen PSPs mit der Frequenz) als zentral wichtige Größen herausgestellt. Für Systeme mit PMD *und* PDL hängen diese Größen nicht mehr über eine einfache Relation mit der Ableitung des (komplexen) PMD-Vektors zusammen. Sie sind aber nach wie vor durch Gleichung (2.68) von Seite 47 mit dem verallgemeinerten »PMD-Vektor zweiter Ordnung« $\partial_\omega(\Delta\tau \hat{\tau}_+)$ verknüpft. Auch ihr Einfluss auf Signale großer Bandbreite – diskutiert in Kapitel 2.3.4 – bleibt grundsätzlich bestehen. Eine systematische Analyse des Einflusses von PDL auf die Statistik der PCD und der PSP-Depolarisation ist in der Literatur bisher nicht beschrieben, sie soll nun durchgeführt werden. Ein wesentlicher Teil der dabei erzielten Ergebnisse wurde in [36] veröffentlicht.

Zur Untersuchung der Statistik der PCD $\Delta\tau_\omega$ und der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\tau}_+\|$ sollen die $7 \times 500\,000$ Realisierungen des Systems des Kapitels 3.2.3 ein weiteres Mal betrachtet werden. Zunächst sind die DGD $\Delta\tau$ sowie der langsame PSP am Ausgang $\hat{\tau}_+$ an zwei »benachbarten« Stellen des Spektrums zu bestimmen (mit dem Verfahren der Abb. 3.1 auf Seite 71). Mit diesen Daten können die PCD $\Delta\tau_\omega$ und die PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\tau}_+\|$ durch numerische Differentiation berechnet werden, siehe Gleichung (3.17) und Gleichung (3.18) auf Seite 74. Der spektrale Abstand¹ $\Delta\omega$, welcher in den beiden Gleichungen auftritt, wird gemäß der Diskussion des Kapitels 3.2.3 festgelegt auf den Wert $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}/500$.

Die resultierenden Histogramme der PCD $\Delta\tau_\omega$ sowie der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\tau}_+\|$ sind in der Abb. 3.12 dargestellt. Offenbar steigt die Wahrscheinlichkeit eines großen Betrags der PCD deutlich an, wenn die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ erhöht wird, mit entsprechenden Auswirkungen auf die Verzerrung optischer Signale sowie auf die Wirksamkeit optischer PMD-Kompensatoren. Derweil wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der PSP-Depolarisation (anscheinend) kaum durch PDL beeinflusst: Das

¹ Abstand der beiden Stellen im Spektrum, an denen die globale Jones-Matrix \mathbf{T} und somit auch die DGD $\Delta\tau$ und der langsame PSP $\hat{\tau}_+$ berechnet wurden.

Histogramm von $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ in Abb. 3.12(b) ändert sich – auch bei sehr starker mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ – nur geringfügig.

Eine weitergehende Analyse der Histogramme der PSP-Depolarisation zeigt jedoch die Existenz einiger außergewöhnlicher Ereignisse. So ist erwartungsgemäß bei einem System ohne PDL die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer extrem großen PSP-Depolarisation verschwindend gering: Keine der 500 000 Realisierungen des Systems mit $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB hatte eine PSP-Depolarisation größer als $\|\partial_\omega \hat{t}_+\| / \langle \Delta \tau \rangle \approx 21,5$, nur bei zweien war dieser Wert größer als 15. Mit steigender mittlerer PDL treten jedoch zunehmend Realisierungen auf, bei denen die PSP-Depolarisation um mehr als eine Größenordnung erhöht ist. Diese ungewöhnlichen und zugleich seltenen Ereignisse sind in der kleinen eingefügten Grafik in Abb. 3.12(b) deutlich zu erkennen, dort sind die Histogramme der PSP-Depolarisation mit geänderter Skalierung der Achsen aufgetragen. (Die Abszissenachse beispielsweise ist dort bis zum Wert $\|\partial_\omega \hat{t}_+\| / \langle \Delta \tau \rangle = 650$ dargestellt.) Für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB treten insgesamt mehr als 35 Ereignisse »extrem groß« PSP-Depolarisation auf, für $\langle PDL_i \rangle = 0,8$ dB sind es dann mehr als 50. Scheinbar gibt es jedoch eine obere Grenze für den Wert der PSP-Depolarisation: Keines der Ereignisse hatte einen Wert größer als $\|\partial_\omega \hat{t}_+\| / \langle \Delta \tau \rangle \approx 624$.

Um den Einfluss der spektralen Schrittweite $\Delta\omega$ auf die Histogramme zu erkunden, wurden weitere Vergleichssimulationen mit veränderter Schrittweite durchgeführt. Erwartungsgemäß werden die Histogramme der Abb. 3.12(a) und (b) nicht von der Schrittweite $\Delta\omega$ beeinflusst, solange die Bedingung $\Delta\omega \ll \Delta\omega_{\text{PSP}}$ erfüllt ist. Das Histogramm der eingefügten Grafik in Abb. 3.12(b) hingegen hängt sehr stark von der Schrittweite $\Delta\omega$ ab: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten außergewöhnlich hoher Werte der PSP-Depolarisation wächst linear mit der Schrittweite $\Delta\omega$, während die obere Grenze von $\|\partial_\omega \hat{t}_+\| / \langle \Delta \tau \rangle$ ungefähr antiproportional zu $\Delta\omega$ ist.

Die vollständige Begründung für das Auftreten dieser Ereignisse sowie der oberen Grenze erfolgt in Kapitel 3.5, dort wird dieser Effekt umfassend analysiert. Hier sei nur erwähnt, dass ein plötzlicher Sprung der PSPs auf der Poincaré-Kugel von einer Frequenzkomponente zur nächsten dafür ursächlich ist. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens derartiger Sprünge wächst mit zunehmender mittlerer PDL des Systems.

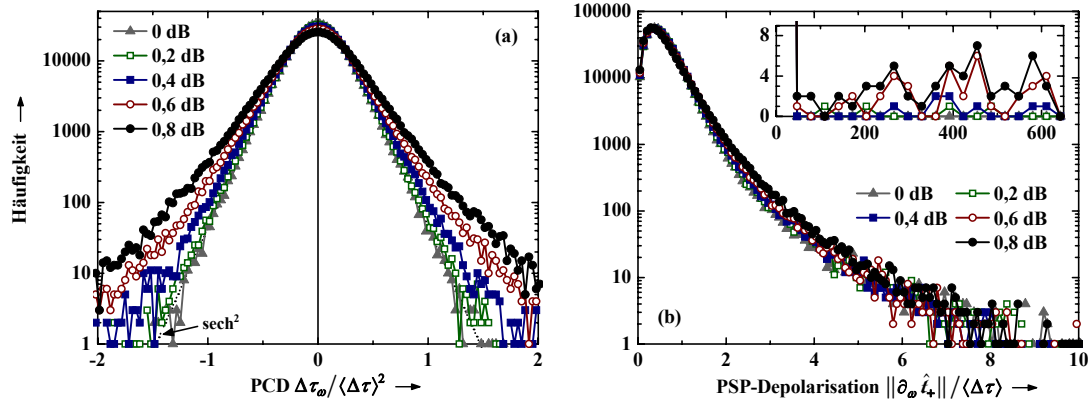


Abb. 3.12: Statistik der PCD und der PSP-Depolarisation des Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen gemäß Kapitel 3.2.3: (a) Histogramme der PCD $\Delta\tau_\omega$ für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems; (b) Histogramme der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$; die kleine eingefügte Grafik auf der rechten Seite zeigt die Histogramme der PSP-Depolarisation mit veränderter Skalierung der Achsen (und mit veränderter »Balkenbreite« der Histogramme) ein zweites Mal. Seltene Ereignisse extrem großer PSP-Depolarisation werden damit deutlich erkennbar. Die spektrale Schrittweite der zugrundeliegenden Simulationen – wichtig zur Interpretation der eingefügten Grafik – war festgelegt auf $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}/500$.

Statistische Abhängigkeiten zwischen der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ und der DGD $\Delta\tau$ wurden bereits in [73] und in [1] mithilfe von Messungen analysiert, allerdings nur für Systeme ohne PDL. Der Einfluss von PDL auf diese Zusammenhänge soll nun untersucht werden, zudem sollen statistische Abhängigkeiten zwischen der PCD $\Delta\tau_\omega$ und der DGD $\Delta\tau$ aufgestellt werden. Die zugehörigen Streudiagramme sind in der folgenden Abbildung dargestellt, sie basieren auf einer Analyse der 500 000 Realisierungen mit $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB [Abb. 3.13(a) und (c)] bzw. mit $\langle PDL_i \rangle = 0,8$ dB [Abb. 3.13(b) und (d)].

Das Ergebnis der Abb. 3.13(c) stimmt mit den Messergebnissen von [73] überein: Die PSP-Depolarisation eines Systems ohne PDL kann nur dann sehr große Werte annehmen, wenn die momentane DGD klein ist. Für ein System mit starker mittlerer PDL verändert sich diese bekannte »L-Form« des Streudiagramms, große Werte der PSP-Depolarisation treten dann auch bei etwas größeren Werten der DGD auf, siehe Abb. 3.13(d). Diese modifizierte statistische Abhängigkeit hat Einfluss auf die Wirksamkeit optischer PMD-Kompensatoren, siehe Kapitel 5. Zusätzlich ist in Abb. 3.13(d) der Bereich sehr kleiner Werte der DGD vergrößert – und mit veränderter Skalierung der Ordinatenachse – dargestellt. Offenbar treten die weiter oben diskutierten Ereignisse extrem großer PSP-Depolarisation allesamt bei äußerst geringer DGD auf. Mit der gleichen Skalierung der Ordinatenachse ist dann in Abb. 3.13(e) das Streudiagramm der PSP-Depolarisation in Abhängigkeit vom Winkel zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang dargestellt. Offenbar sind die Ereignisse extrem großer PSP-Depolarisation streng mit dem Winkel zwischen den PSPs korreliert. Der zugehörige analytische Zusammenhang, welcher in Abb. 3.13(e) als gestrichelte Kurve eingetragen ist, wird in Kapitel 3.5 hergeleitet, siehe Gleichung (3.19) auf Seite 107.

Statistische Abhängigkeiten zwischen der PCD und der DGD werden in Abb. 3.13(a) und (b) untersucht. Im unitären Fall der Abb. 3.13(a) sind derartige Abhängigkeiten nicht nennenswert zu beobachten. Ist die mittlere PDL des Systems jedoch sehr ausgeprägt [Abb. 3.13(b)], so treten größere Werte der PCD gehäuft bei geringen Werten der DGD auf. Problematisch für die Wirksamkeit optischer PMD-Kompensatoren ist jedoch vor allem, dass sehr große Werte der PCD nicht *nur* bei geringen Werten der DGD auftreten, sondern auch bei mittleren Werten.

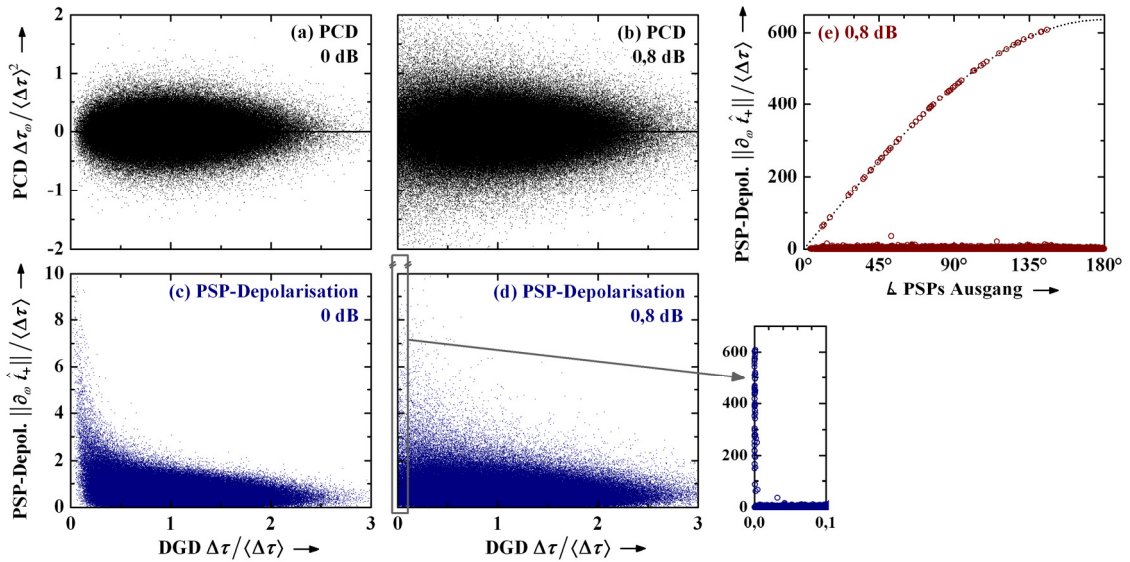


Abb. 3.13: Streudiagramme für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB (links) bzw. $\langle PDL_i \rangle = 0,8$ dB (Mitte und rechts) des in Kapitel 3.2.3 beschriebenen Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen: (a), (b) Streudiagramme der PCD $\Delta\tau_\omega$ in Abhängigkeit von der DGD der Realisierung; (c), (d) PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ in Abhängigkeit von der DGD; (e) PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ in Abhängigkeit vom Winkel zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang; die gestrichelte Kurve basiert dabei auf der in Kapitel 3.5.5 analytisch hergeleiteten Relation (3.19).

Weitere Größen zweiter Ordnung

Abschließend sollen die Histogramme einiger weiterer PMD- und PDL-Größen zweiter Ordnung diskutiert werden. Deren Berechnung erfolgt völlig analog zum Vorgehen bei der PCD und der PSP-Depolarisation.

In Abb. 3.14(a) sind die Histogramme der Länge des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung $\|\partial_\omega(\Delta\tau \hat{t}_+)\|$ dargestellt, vgl. die Diskussion dieser Größe in Kapitel 3.1. Weiterhin sind in Abb. 3.14(b) die Histogramme der Größe $\Delta\tau \|\partial_\omega \hat{t}_+\|$, also der Länge der senkrechten Komponente des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung, aufgetragen. Im Grenzfall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB stimmen die Histogramme in guter Näherung mit den Ergebnissen der Theorie unitärer Systeme [1] überein. Dazu ist in Abb. 3.14(a) der bekannte »tanh-sech«-Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Länge des PMD-Vektors zweiter Ordnung als gestrichelte Kurve eingezeichnet. Mit wachsender mittlerer PDL steigt sowohl für $\|\partial_\omega(\Delta\tau \hat{t}_+)\|$ also auch für $\Delta\tau \|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ die Wahrscheinlichkeit des Auftretens sehr großer Werte. Dabei ist eine ausgeprägte

Ähnlichkeit der Histogramme der Abb. 3.14(a) und (b) zu beobachten, welche unabhängig von der Stärke der mittleren PDL gegeben ist. Dies entspricht dem bekannten Ergebnis unitärer Systeme, dass eine spektrale Änderung des PMD-Vektors $\Delta\tau\hat{\xi}_+$ eine starke Tendenz zeigt, sich in einer Änderung der Richtung $\hat{\xi}_+$ auszudrücken und weniger in einer Änderung der Länge $\Delta\tau$. Die senkrechte Komponente $\Delta\tau\|\partial_\omega\hat{\xi}_+\|$ des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung überwiegt also in aller Regel, dies gilt offenbar nicht nur im bekannten Fall unitärer Systeme [73], [12], [1], sondern auch für Systeme mit PDL.

Die Histogramme der spektralen Ableitung des Winkels zwischen den PSPs im Stokes-Raum sind in Abb. 3.14(c) dargestellt. Für ein System ohne PDL ist der Winkel an sich immer gleich 180° , sodass die Ableitung $\partial_\omega(\angle\text{PSPs})$ im unitären Fall verschwindet. Mit steigender mittlerer PDL wächst jedoch die Wahrscheinlichkeit eines Winkels kleiner als 180° deutlich an, siehe Abb. 3.8 auf Seite 87. Die Abb. 3.14(c) zeigt nun, dass auch die spektrale Änderung dieses Winkels mit steigender mittlerer PDL zunimmt. Allerdings geht diese Zunahme für sehr starke mittlere PDL in Sättigung, die Histogramme von $\partial_\omega(\angle\text{PSPs})$ hängen dann kaum noch von der mittleren PDL ab.

Weiterhin sind in Abb. 3.14(d) die Histogramme der spektralen Ableitung der PDL (in dB) dargestellt. Wie die Diskussion des Kapitels 2.4.2 erwarten lässt, hängt die PDL in Anwesenheit von Doppelbrechung von der Frequenz ab, die Ableitung $\partial_\omega PDL_{\text{dB}}$ verschwindet also nicht. Dabei wird erwartungsgemäß nicht nur die globale PDL an sich, sondern auch der Betrag ihrer Steigung $\partial_\omega PDL_{\text{dB}}$ durch die Stärke der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ skaliert.

Schließlich zeigt Abb. 3.14(e) die Histogramme der »PDL-Depolarisation« $\|\partial_\omega\hat{\Gamma}_{\text{out}}\|$, also der Länge der Ableitung der Richtung des PDL-Vektors am Ausgang. Diese Histogramme sind nahezu identisch zu den Histogrammen der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega\hat{\xi}_+\|$ in Abb. 3.12(b). Allerdings treten bei der PDL-Depolarisation $\|\partial_\omega\hat{\Gamma}_{\text{out}}\|$ – im Gegensatz zur PSP-Depolarisation – keine »extrem großen« Werte auf, plötzliche spektrale Sprünge der Richtung des PDL-Vektors lassen sich also nicht beobachten.

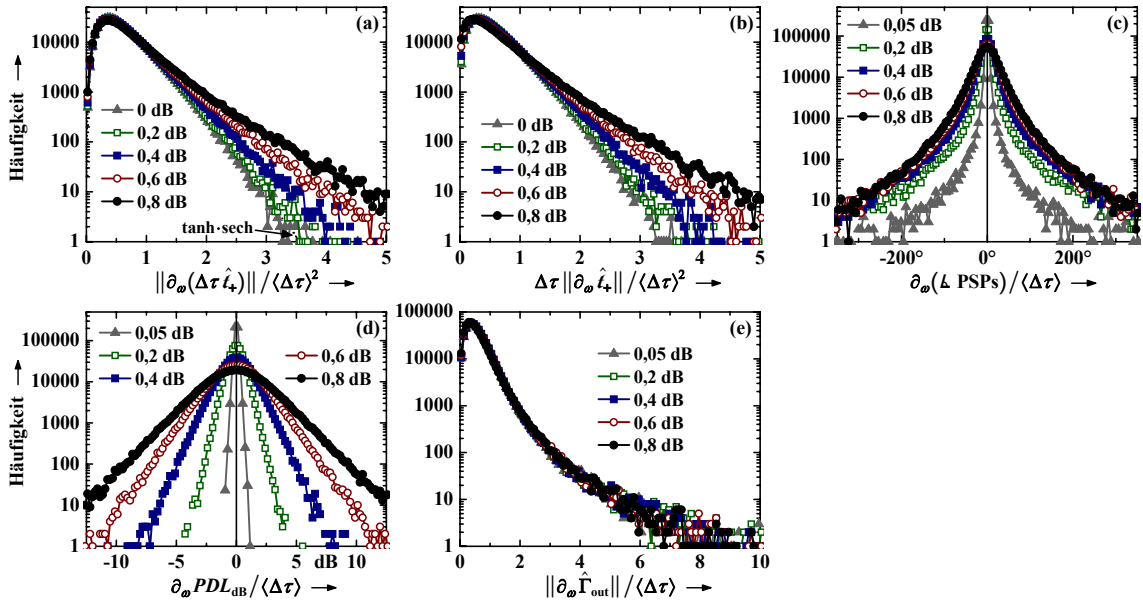


Abb. 3.14: Statistik von PMD- und PDL-Größen zweiter Ordnung für ein System aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen gemäß Kapitel 3.2.3: (a) Histogramme der Länge des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung $\|\partial_\omega(\Delta\tau\hat{\xi}_+)\|$ für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf jeweils 500 000 Realisierungen des Systems; (b) Histogramme der Länge der senkrechten Komponente des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung $\Delta\tau\|\partial_\omega\hat{\xi}_+\|$; (c) Histogramme der spektralen Ableitung des Winkels zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang; (d) Histogramme der Ableitung der PDL in dB nach der Frequenz; (e) Histogramme der »PDL-Depolarisation« $\|\partial_\omega\hat{\Gamma}_{\text{out}}\|$.

3.4 Autokorrelationsfunktionen

Eine ergänzende Beschreibung der Statistik wechselwirkender PMD und PDL ist mithilfe von spektralen Autokorrelationsfunktionen möglich. Diese enthalten alle Ordnungen der PMD bzw. der PDL unmittelbar. Die AKF des PMD-Vektors eines unitären Systems konnte auf Seite 49 als analytisches Resultat angegeben werden, siehe Gleichung (2.70). Autokorrelationsfunktionen dieser und anderer PMD- und PDL-Größen unter dem Einfluss von PDL wurden in der Literatur jedoch bisher kaum untersucht, nur in [38] finden sich erste Ansätze. Entsprechende Analysen sollen nun durchgeführt werden, wobei erneut das System des Kapitels 3.2.3 betrachtet werden soll.

Das allgemeine Verfahren zur simulatorischen Bestimmung von spektralen Autokorrelationsfunktionen wurde in Kapitel 3.2.1 beschrieben, ergänzt in Kapitel 3.2.3 um systemspezifische Details. Demnach soll die Berechnung der AKF einer PMD- oder PDL-Größe hier durch eine spektrale Mittelung über die Bandbreite $163 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$ einer Realisierung des Systems erfolgen. Zur Erhöhung der Anzahl statistisch unabhängiger Stichproben soll dieses Verfahren für insgesamt 500 Realisierungen durchgeführt werden, mit anschließender Mittelung der AKFs. Um den Einfluss der PDL auf die AKFs zu untersuchen, wird die gesamte Berechnung für unterschiedliche Fälle der

mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ durchgeführt. Die Resultate für eine Auswahl wichtiger PMD- und PDL-Größen sind in der folgenden Abbildung aufgeführt. So ist die normierte AKF des Realteils des komplexen PMD-Vektors in Abb. 3.15(a) dargestellt, diejenige des PDL-Vektors in Abb. 3.15(b). Ein Vergleich dieser Kurven mit der analytischen Gleichung (2.70) zeigt in beiden Fällen eine nahezu exakte Übereinstimmung im Grenzfall schwacher PDL. Bei starker mittlerer PDL resultiert dann eine leichte Verringerung der Korrelationsbandbreite der AKF des PMD-Vektors [Abb. 3.15(a)], in Übereinstimmung mit den Aussagen von [38]. Das Gegenteil gilt jedoch für die Bandbreite der AKF des PDL-Vektors, sie wird durch starke mittlere PDL leicht erhöht, siehe Abb. 3.15(b). Ähnliche Verläufe wie in Abb. 3.15(a) und (b) ergeben sich auch für den Imaginärteil des komplexen PMD-Vektors, für die PSPs sowie für weitere mittelwertfreie PMD- und PDL-Größen, auch wenn sie hier nicht gesondert abgebildet sind. Die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$, welche in Kapitel 2.3.5 eingeführt wurde, ist somit auch in Systemen mit sehr starker mittlerer PDL ein gutes Maß zur Beurteilung des spektralen Abstands korrelierter bzw. unkorrelierter Stellen im Spektrum.

Die normierten AKFs der DGD sowie der PDL in dB sind in Abb. 3.15(c) und (d) dargestellt. Erwartungsgemäß fallen sie für große spektrale Abstände $\Delta\omega$ nicht auf Null ab, sondern nähern sich einem endlichen Wert, welcher durch das Quadrat ihres Mittelwerts bestimmt wird. Dieser asymptotische Wert lässt sich einfach berechnen, falls es sich um eine maxwellverteilte Größe handelt: Aufgrund des allgemeingültigen Zusammenhangs $\langle \chi^2 \rangle = (3\pi/8) \langle \chi \rangle^2$ zwischen dem zweiten Moment $\langle \chi^2 \rangle$ einer maxwellverteilten Zufallsvariablen χ und dessen Mittelwert $\langle \chi \rangle$ (siehe Anhang) nähert sich die normierte AKF von χ gemäß [64] asymptotisch dem Wert $8/(3\pi) \approx 0,849$.¹

Da die DGD $\Delta\tau$ im Grenzfall geringer PDL maxwellverteilt ist, sollte sich ihre normierte AKF also asymptotisch dem Wert $8/(3\pi)$ annähern, die Resultate der Abb. 3.15(c) bestätigen dies. Die globale PDL in dB ist gemäß Kapitel 3.3.1 ebenfalls maxwellverteilt (unabhängig von der Stärke der mittleren PDL), somit ist das gleiche asymptotische Verhalten auch für deren AKF zu erwarten. Wie Abb. 3.15(d) zeigt, ist auch dies erfüllt. Dabei zeigt sich zudem, dass nicht nur der asymptotische Wert der normierten AKF der globalen PDL unabhängig ist von der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, sondern nahezu der gesamte Verlauf dieser AKF. Anders verhält es sich bei der AKF der DGD $\Delta\tau$. Da die DGD gemäß Abb. 3.4 auf Seite 83 nicht maxwellverteilt ist, falls die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ große Werte annimmt, ändert sich auch der asymptotische Wert ihrer normierten AKF, siehe Abb. 3.15(c). Die grundsätzliche Bedeutung der Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ als Maß für die Korrelationsbandbreite der AKF ist aber ersichtlich auch bei der DGD $\Delta\tau$ gegeben, unabhängig von der Stärke der mittleren PDL.

¹ Dabei wurde die statistische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen χ an weit entfernten Stellen des Spektrums vorausgesetzt.

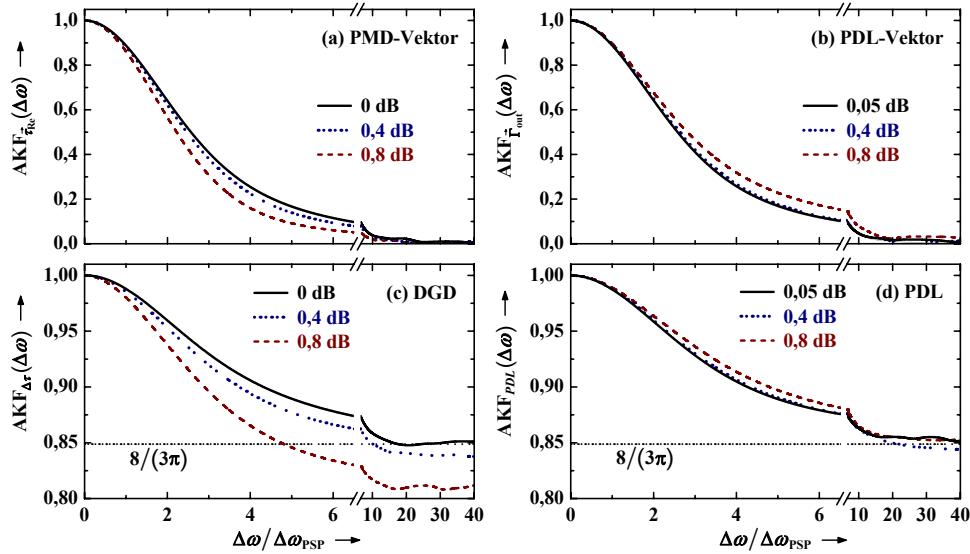


Abb. 3.15: Normierte spektrale Autokorrelationsfunktionen, gemittelt über 500 Realisierungen des Systems des Kapitels 3.2.3 (welches aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen aufgebaut ist) für unterschiedlich starke mittlere PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle$: (a) AKF des Realteils $\bar{\tau}_{\text{Re}}$ des komplexen PMD-Vektors; (b) AKF des PDL-Vektors am Ausgang $\bar{\Gamma}_{\text{out}}$; (c) AKF der DGD $\Delta\tau$; (d) AKF der globalen PDL in dB.

3.5 Analyse einer Realisierung entlang der Frequenz

Abschließend soll aus der Schar aller möglichen Realisierungen des Systems des Kapitels 3.2.3 eine herausgegriffen und entlang der Frequenz analysiert werden.¹ Gemäß der ausführlichen Diskussion des Kapitels 3.2.3 wird sich der dabei betrachtete Frequenzbereich von der normierten Frequenz $w \equiv (\omega - \omega_0)/\Delta\omega_{\text{PSP}} = 0$ bis zur normierten Frequenz $w = 163$ erstrecken, wobei die PMD- und PDL-Größen im spektralen Abstand $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}/200$ berechnet werden. Die folgenden Graphen bestehen somit jeweils aus mehr als 32 000 Messpunkten, wovon etwa $163\Delta\omega_{\text{PSP}}/(6\Delta\omega_{\text{PSP}}) \approx 27$ als statistisch unabhängig betrachtet werden können.

Eine systematische Analyse der Frequenzabhängigkeit aller relevanten PMD- und PDL-Größen unter dem Einfluss unterschiedlich starker PDL wurde in der Literatur bisher nicht beschrieben. Die nun folgende Diskussion soll diese Lücke schließen.

3.5.1 PDL

Die Frequenzabhängigkeit der globalen PDL ist in der folgenden Abbildung – für unterschiedliche Stärken der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ – dargestellt. Sie gilt in dieser Form allerdings nur für die hier betrachtete Realisierung, andere Realisie-

¹ Tatsächlich wurden zwölf verschiedene Realisierungen entlang der Frequenz analysiert, erwartungsgemäß erwiesen sich ihre spektralen Eigenschaften als statistisch gleichwertig. Eine dieser Realisierungen – diejenige mit dem größten aufgetretenen Wert der momentanen PDL – soll hier vorgestellt werden. In Kapitel 4 schließlich wird diese eine Realisierung ein weiteres Mal analysiert, und zwar bezüglich ihres Einflusses auf die Verzerrung optischer Signale.

rungen des Systems zeigen jedoch ähnliche Verläufe. Die Resultate stimmen ersichtlich mit den Erwartungen überein, welche sich aus den Histogrammen der Abb. 3.3(a) auf Seite 81 sowie aus den spektralen Autokorrelationsfunktionen der Abb. 3.15(d) ergeben: Die Werte der globalen PDL fügen sich ein in die Histogramme der Abb. 3.3(a), zudem ist die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ offensichtlich ein gutes Maß für den spektralen Abstand korrelierter bzw. unkorrelierter Stellen im Spektrum, vgl. Abb. 3.15(d).

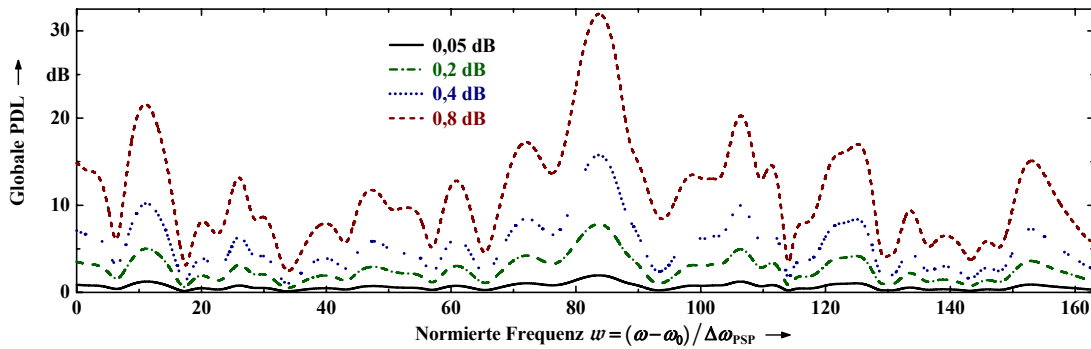


Abb. 3.16: Globale PDL in dB als Funktion der normierten Frequenz $w \equiv (\omega - \omega_0) / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; vorausgesetzt ist eine Realisierung des Systems des Kapitels 3.2.3, bestehend aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen. (Eine ausführliche Diskussion des Systems, des betrachteten Frequenzbereichs, des Begriffs der »normierten Frequenz« w sowie der spektralen Schrittweite der Simulationen findet sich in Kapitel 3.2.3. Der Zusammenhang zwischen der mittleren PDL $\langle PDL_i \rangle$ der 200 PDL-Elemente und der mittleren globalen PDL wurde in Kapitel 3.3.1 diskutiert, siehe Tab. 3.1 auf Seite 80.)

Der maximale Wert der globalen PDL in dem betrachteten Frequenzbereich liegt bei der normierten Frequenz $w \approx 83,72$ vor, er entspricht ungefähr dem 2,8-fachen der mittleren globalen PDL (vgl. Tab. 3.1 auf Seite 80). Ein so großer Wert tritt – gemäß der komplementären kumulativen Verteilungsfunktion maxwellverteilter Zufallsvariablen – mit einer Wahrscheinlichkeit von $\approx 2 \times 10^{-4}$ auf. Da der Frequenzbereich der Abb. 3.16 ungefähr $163/6 \approx 27$ statistisch unabhängige Frequenzen enthält, kann ein so großer Wert der globalen PDL nur in etwa 0,5 % aller Realisierungen vorkommen. (Dieser Prozentsatz steigt natürlich linear mit der Größe des betrachteten Spektralbereichs.) Die hier und im Folgenden analysierte Realisierung hat also die besondere Eigenschaft, dass sie auch Werte der globalen PDL aus dem Ausläufer der Verteilung enthält.

3.5.2 DGD und DAS

Für die gleiche Realisierung des Systems sind in der folgenden Abbildung die spektralen Verläufe der DGD $\Delta\tau$ (oben) sowie der DAS $\Delta\eta$ (unten) abgebildet, also die Verläufe des Real- und des Imaginärteils der »komplexen DGD« $\Delta\tau + i\Delta\eta$. Die Ergebnisse stehen im Einklang mit den Histogrammen des Kapitels 3.3.2 sowie mit den Autokorrelationsfunktionen der Abb. 3.15(c). Für ein System ohne PDL ist die DGD $\Delta\tau$ um ihren Mittelwert herum verteilt (gemäß einer Maxwellverteilung, d. h. der Wert $\Delta\tau = 0$ tritt nicht auf), während die DAS $\Delta\eta$ identisch Null ist. Dabei bestimmt die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ das Ausmaß der spektralen Änderung der DGD. Mit

steigender mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ haben kleine Werte der DGD die Tendenz, noch kleiner zu werden, während große Werte weiter anwachsen. Dies zeigen sowohl die spektralen Verläufe der Abb. 3.17(a) als auch die Histogramme der Abb. 3.4(a). Offenbar tritt diese Veränderung der Werte der DGD entlang des gesamten Spektrums auf, also nicht nur bei Frequenzen, bei denen die PDL in Abb. 3.16 relativ groß ist. Somit ist die Voraussetzung für eine Vergrößerung bzw. Verkleinerung der DGD bei einer bestimmten Frequenz nicht ein großer Wert der PDL bei derselben Frequenz, sondern ein großer Wert der *mittleren* PDL des Systems.

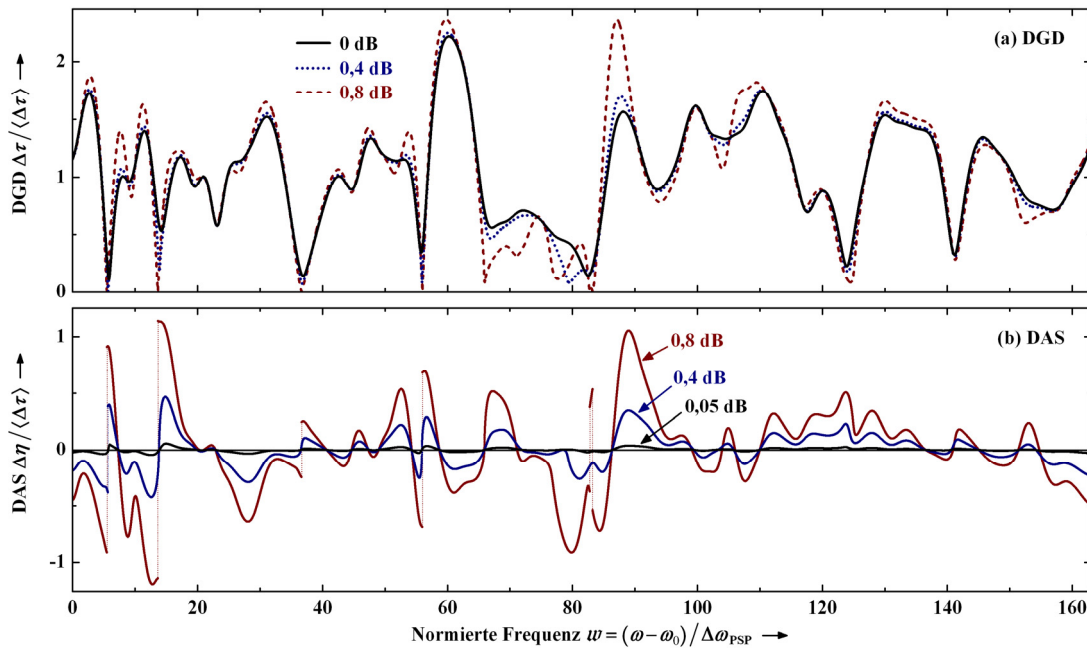


Abb. 3.17: (a) DGD $\Delta\tau$ und (b) DAS $\Delta\eta$ als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; dabei wurde die gleiche Realisierung wie in Abb. 3.16 analysiert, also eine Realisierung eines Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen.

Da ein geringer Wert der DGD offenbar in der Regel weiter verringert wird, wenn die mittlere PDL ansteigt, stellt sich die Frage, ob die DGD soweit abfallen kann, dass sie vollständig verschwindet. Eine Analyse der Verläufe der Abb. 3.17(a) zeigt dies eindeutig: Die DGD erreicht tatsächlich mit zunehmender Stärke der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ an einigen Stellen des Spektrums den Wert Null. [Die Abb. 3.27(a) auf Seite 111 zeigt dazu einen stark vergrößerten Ausschnitt der Abb. 3.17(a).] Sobald dieser Fall eintritt, ändert sich – wie Abb. 3.17(b) zeigt – das Vorzeichen der DAS $\Delta\eta$ abrupt, während der Verlauf des *Betrags* der DAS stetig bleibt. (Der plötzliche Vorzeichenwechsel der DAS $\Delta\eta$ beim Verschwinden der DGD $\Delta\tau$ könnte ggf. dazu verwendet werden, den Effekt des Auftretens von $\Delta\tau = 0$ indirekt experimentell nachzuweisen.)

3.5.3 PSPs

Der spektrale Verlauf der relativen Lage der PSPs am Ausgang des Systems ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Erwartungsgemäß lässt sich eine deutliche Tendenz dahingehend erkennen, dass der Winkel zwischen den PSPs im Stokes-Raum umso mehr vom Wert 180° abweicht, je größer die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ ist. Dies stimmt überein mit den Histogrammen der Abb. 3.8(a) auf Seite 87, welche auf einer Schar von Realisierungen bei fester Frequenz basieren. Weiterhin zeigt sich, dass die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ in weiten Teilen des Spektrums ein gutes Maß für das Ausmaß der spektralen Änderung des Winkels ist. Bei einigen Frequenzen jedoch treten wesentliche Änderungen des Winkels über sehr kleine spektrale Bereiche (kleiner als $\Delta\omega_{\text{PSP}}$) auf, dies soll in Kapitel 3.5.6 näher untersucht werden. Schließlich zeigt ein Vergleich mit den spektralen Verläufen der DGD und der PDL, dass sehr geringe Winkel zwischen den PSPs vorwiegend bei solchen Frequenzen auftreten, bei denen die DGD gering und die PDL groß ist. Dieses Verhalten deckt sich mit den Streudiagrammen der Abb. 3.9 auf Seite 88.

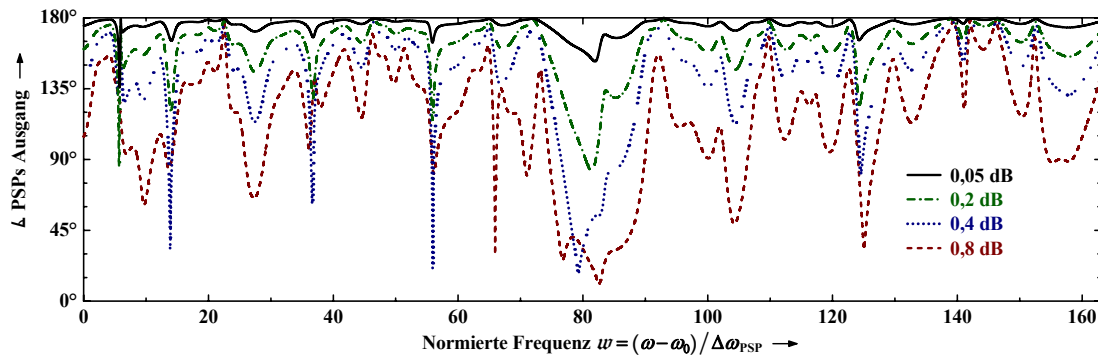


Abb. 3.18: Winkel zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang des Systems als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; die untersuchte Realisierung ist die gleiche wie bei den bisherigen Betrachtungen.

In der Abb. 3.18 ist nur der spektrale Verlauf des Winkels zwischen den PSPs *am Ausgang* dargestellt. Der entsprechende Verlauf am Eingang ist ähnlich (aber nicht identisch), siehe auch die Streudiagramme auf der linken Seite der Abb. 3.9. Alle hier getroffenen Aussagen gelten gleichermaßen für den Winkel zwischen den PSPs am Eingang.

3.5.4 Komplexer PMD-Vektor

Die Statistik der Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ sowie des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ des komplexen PMD-Vektors $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\text{Re}} + j\vec{\tau}_{\text{Im}}$ wurde in Kapitel 3.3.4 für eine Schar von Realisierungen bei fester Frequenz analysiert. Die resultierenden Histogramme, dargestellt in Abb. 3.10(a) und (b) auf Seite 90, nähern sich mit zunehmender mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ einander an, während die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten sehr großer Werte $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ und $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ stark wächst. Die folgende Abbildung zeigt den zugehörigen spektralen Verlauf des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ und des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ für die hier angenom-

mene Realisierung des Systems. Wird die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ erhöht, so wächst der Realteil $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ in einigen Frequenzbereichen stark an. Gleichzeitig steigt die Länge des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ so sehr, dass sich die Verläufe von $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ und $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ mehr und mehr angleichen.

Ein Vergleich mit den spektralen Verläufen der DGD [Abb. 3.17(a)] und der PDL (Abb. 3.16) zeigt zudem, dass die Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ vorwiegend bei solchen Frequenzen ansteigt, bei denen sowohl die DGD groß ist als auch die PDL. So ist beispielsweise der Wert der DGD in Abb. 3.17(a) bei der Frequenz des Maximums der PDL (also bei $\omega \approx 83,72$) recht gering, weshalb die Werte von $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ und $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ bei dieser Frequenz zwar recht groß aber nicht maximal werden. Sie erreichen ihr Maximum stattdessen ungefähr bei der normierten Frequenz $\omega \approx 86,65$, bei der sowohl die DGD als auch die PDL sehr große Werte annehmen. Ein Vergleich mit der Abb. 3.18 zeigt ferner, dass der Winkel zwischen den PSPs bei dieser Frequenz $\omega \approx 86,65$ gering aber nicht minimal ist. Diese Zusammenhänge stimmen in wesentlichen Punkten mit den Streudiagrammen der Abb. 3.11 auf Seite 91 überein.

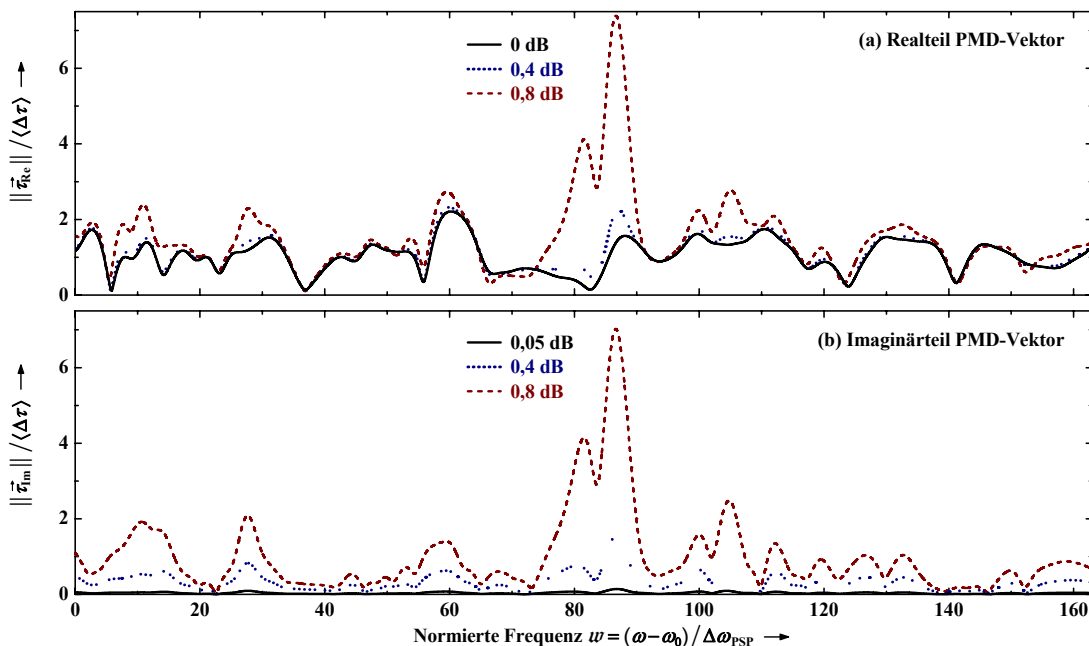


Abb. 3.19: (a) Länge des Realteils $\|\vec{\tau}_{\text{Re}}\|$ sowie (b) des Imaginärteils $\|\vec{\tau}_{\text{Im}}\|$ des komplexen PMD-Vektors als Funktion der normierten Frequenz ω für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; die verwendete Realisierung ist die gleiche wie zuvor, sie setzt sich also aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen zusammen.

Schließlich ist in Abb. 3.20 der spektrale Verlauf des Winkels zwischen dem Real- und dem Imaginärteil dargestellt. In Übereinstimmung mit den Histogrammen der Abb. 3.10(d) auf Seite 90 sind die beiden Vektoren $\vec{\tau}_{\text{Re}}$ und $\vec{\tau}_{\text{Im}}$ im Mittel im Stokes-Raum senkrecht zueinander. Dabei ergibt sich eine leichte Tendenz dahingehend, dass der Winkel umso näher an 90° liegt, je größer die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ ist.

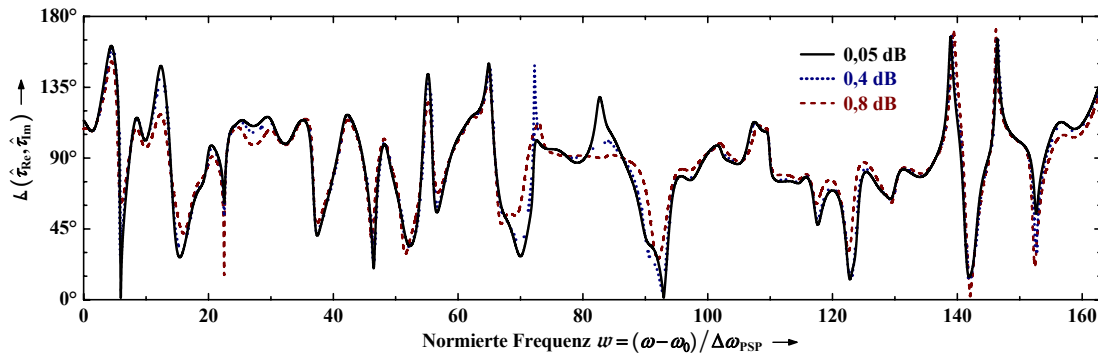


Abb. 3.20: Winkel zwischen dem Real- und dem Imaginärteil des komplexen PMD-Vektors als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; die betrachtete Realisierung ist wiederum die gleiche wie bisher.

3.5.5 PMD und PDL zweiter Ordnung

PCD

Das Histogramm der PCD $\Delta\tau_\omega$, also der Ableitung der DGD $\Delta\tau$ nach der Kreisfrequenz, wird deutlich von der Stärke der mittleren PDL beeinflusst, siehe Abb. 3.12(a) auf Seite 94. So wächst die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines großen Betrags der PCD stark an, wenn die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ erhöht wird. Der spektrale Verlauf der PCD, dargestellt in der folgenden Abbildung, bestätigt dies. Zwar zieht eine Erhöhung der mittleren PDL in einigen Bereichen des Spektrums nur sehr geringfügige Änderungen des Verlaufs nach sich, in anderen kommt es aber zu stark erhöhten Werten der PCD. Ein Vergleich der Abb. 3.21 mit dem spektralen Verlauf der DGD [Abb. 3.17(a)] zeigt ferner, dass Veränderungen der PCD vorwiegend bei solchen Frequenzen auftreten, bei denen der Wert der DGD gering ist. Dies stimmt überein mit den Ergebnissen der Streudiagramme in Abb. 3.13(a) und (b) auf Seite 95. Fällt die DGD in Abb. 3.17(a) auf Null ab, so ändert sich ihre Steigung – und somit die PCD $\Delta\tau_\omega$ – abrupt. Dies führt zu einem plötzlichen Vorzeichenwechsel der PCD, wie er an mehreren Stellen des Spektrums in Abb. 3.21 zu beobachten ist. Eine weitergehende Analyse zeigt, dass sich an diesen Stellen nicht nur das Vorzeichen der PCD, sondern auch dessen Betrag ändert.

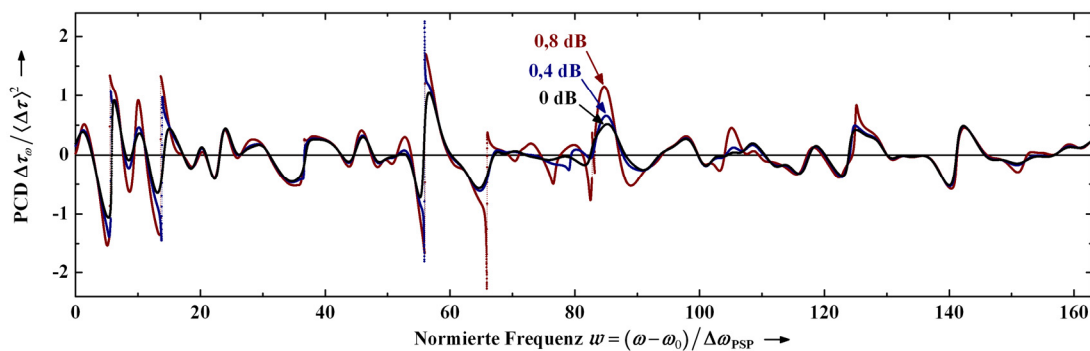


Abb. 3.21: PCD $\Delta\tau_\omega$ als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$, basierend auf der gleichen Realisierung des Systems des Kapitels 3.2.3 wie bisher.

PSP-Depolarisation

Das Histogramm der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\xi}_+\|$ in Abb. 3.12(b) auf Seite 94 zeigt auf den ersten Blick nur eine sehr geringfügige Abhängigkeit von der Stärke der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$. Allerdings können in Anwesenheit starker mittlerer PDL seltene Ereignisse auftreten, bei denen der gemessene Wert der PSP-Depolarisation um mehr als eine Größenordnung über den gewöhnlich registrierten Werten liegt. Dieser Effekt wurde in Kapitel 3.3.5 beschrieben, ohne ihn dort vollständig interpretieren zu können. Die nun folgende Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der PSP-Depolarisation (sowie der Richtung der PSPs auf der Poincaré-Kugel) ermöglicht jedoch eine umfassende Analyse. Dazu ist in der folgenden Abbildung der spektrale Verlauf der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\xi}_+\|$ für die hier betrachtete Realisierung dargestellt.

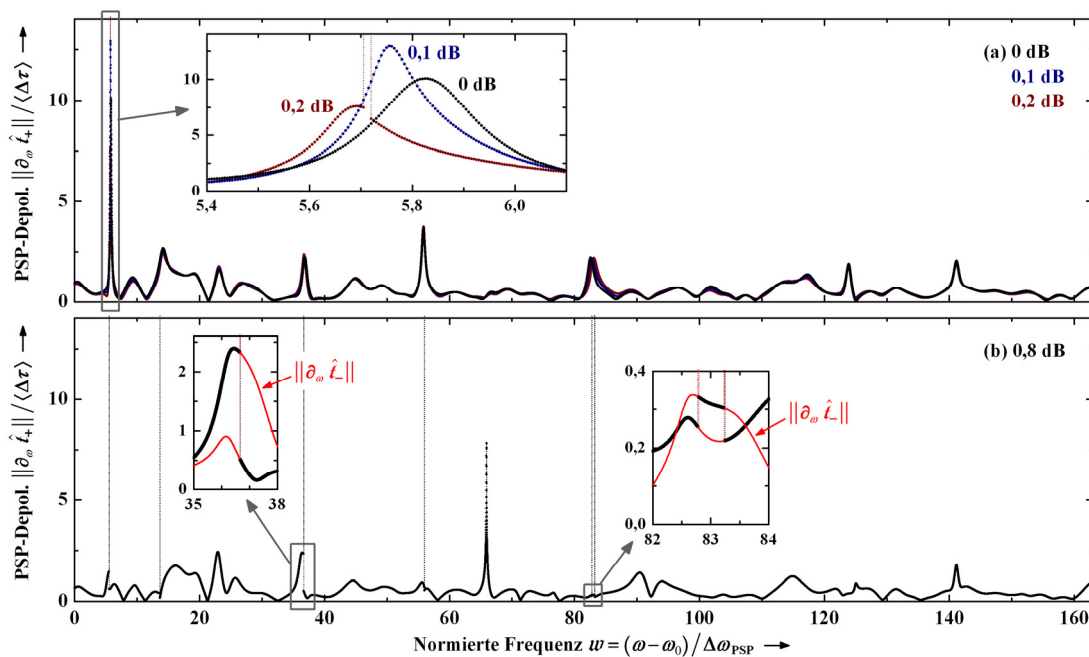


Abb. 3.22: PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\xi}_+\|$ als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element: (a) $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB, 0,1 dB und 0,2 dB; (b) $\langle PDL_i \rangle = 0,8$ dB; dabei ist die betrachtete Realisierung die gleiche wie bisher, es handelt sich also um eine Realisierung des Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen. Zusätzlich sind hier einige interessante Stellen vergrößert dargestellt, wobei in der unteren Hälfte nicht nur die »gewöhnliche« PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\xi}_+\|$ (mit dem langsamen PSP $\hat{\xi}_+$), sondern auch die komplementäre PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\xi}_-\|$ eingetragen ist, welche auf dem schnellen PSP $\hat{\xi}_-$ basiert.

Das obere Teilbild [Abb. 3.22(a)] zeigt erwartungsgemäß, dass eine Erhöhung der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ von 0 dB auf 0,2 dB praktisch keinen Einfluss auf den spektralen Verlauf hat – außer in der Umgebung der normierten Frequenz $w \approx 5,71$. Dort tritt bereits im unitären Fall (also für $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB) ein relativ großer Wert der PSP-Depolarisation auf, welcher in der Literatur als »Spikes« der PSP-Depolarisation bezeichnet wird. Diese »Spikes« führen gemäß [1] und [12] zu Signalverzerrungen und zu Problemen bei optischen PMD-Kompensatoren. Sie sind in der Literatur wohlbekannt und wurden beispielsweise in [73] experimentell nachgewiesen.

Bisher noch nicht in der Literatur beschrieben (und basierend auf den folgenden Ergebnissen in [36] veröffentlicht) ist der Einfluss von PDL auf diese Spikes. Wie die vergrößerte Darstellung in Abb. 3.22(a) zeigt, führt eine Erhöhung der mittleren PDL zu einer starken Veränderung des Spikes und schließlich zum Auftreten einer unendlich großen PSP-Depolarisation. Das Ergebnis einer Messung liefert bei einer solchen Frequenz allerdings einen endlichen Wert der PSP-Depolarisation, dies wird weiter unten ausführlich diskutiert.

Bevor das untere Teilbild der Abb. 3.22 analysiert wird, soll zunächst die Ursache für das ungewöhnliche Verhalten der Spikes geklärt werden. Dazu ist in der folgenden Abbildung der spektrale Verlauf der PSPs auf der Poincaré-Kugel in der Umgebung der normierten Frequenz $w \approx 5,71$ dargestellt.¹

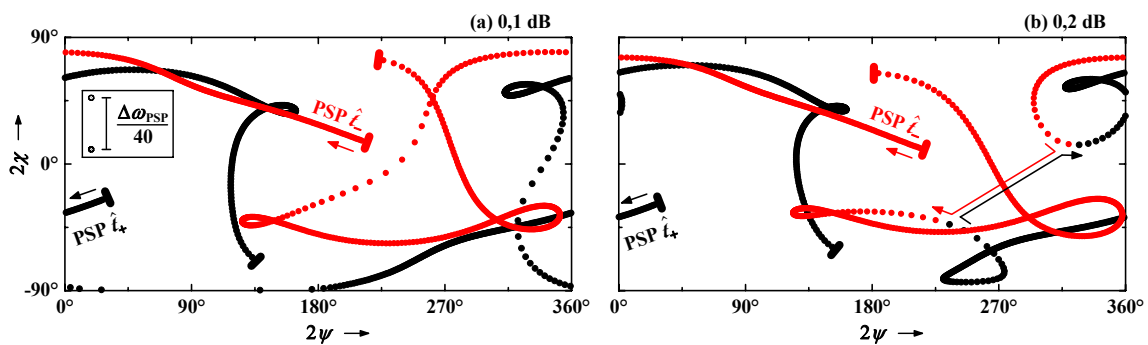


Abb. 3.23: Richtung des langsamen PSPs \hat{e}_+ (schwarz) sowie des schnellen PSPs \hat{e}_- (rot) auf der Poincaré-Kugel als Funktion der Frequenz in der Umgebung der normierten Frequenz $w \approx 5,71$ für die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0,1$ dB (links) bzw. $\langle PDL_i \rangle = 0,2$ dB (rechts); (bei der Frequenz $w \approx 5,71$ kam es in Abb. 3.22(a) beim Übergang von $\langle PDL_i \rangle = 0,1$ dB zu $\langle PDL_i \rangle = 0,2$ dB zur Mutation eines »Spikes« der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{e}_+\|$ in eine Unendlichkeitsstelle.) Zur Verbesserung der Übersicht ist nur jeder fünfte Datenpunkt eingezeichnet, zwei benachbarte Punkte haben also den spektralen Abstand $\Delta\omega_{\text{PSP}}/40$. Der dargestellte Frequenzbereich erstreckt sich von $w = 0,24$ bis $w = 14,21$, wobei die kleinen Balken die Grenzen des Bereichs markieren und die Richtung steigender Frequenz durch Pfeile angedeutet ist.

Im linken Teilbild, also bei $\langle PDL_i \rangle = 0,1$ dB, kommt es in der Nähe von $w \approx 5,71$ zu einer verhältnismäßig schnellen spektralen Änderung der Lage der PSPs auf der Poincaré-Kugel, welche für den »Spike« der PSP-Depolarisation in Abb. 3.22(a) verantwortlich ist. Diese schnelle Änderung mutiert im rechten Teilbild, also bei

¹ Zur besseren Übersicht wird eine zweidimensionale Darstellung der Poincaré-Kugel (siehe Abb. 2.2 auf Seite 27) verwendet, ähnlich einer zweidimensionalen Illustration der Weltkugel. Der Nordpol (rechts-zirkulare Polarisationszustände) markiert als Linie den oberen Rand des Bildes, der Südpol (links-zirkulare Polarisationszustände) entsprechend den unteren Rand. Derweil stellen Punkte auf einer gedachten horizontalen Linie in der Mitte des Bildes den Äquator dar, sie entsprechen somit linearen Polarisationszuständen. Durch diese zweidimensionale Darstellung der Kugeloberfläche kommt es naturgemäß zu Verzerrungen, welche bei der Interpretation derartiger Abbildungen zu beachten sind. Beispielsweise scheinen die Messpunkte am unteren Rand der Abb. 3.23(a) einen großen Abstand voneinander zu haben, obgleich sie allesamt nahezu am Südpol der Kugel liegen und somit denselben Polarisationszustand darstellen.

$\langle PDL_i \rangle = 0,2 \text{ dB}$, zu einem plötzlichen Sprung der PSPs auf der Kugel. Genauer formuliert, kommt es bei $\omega \approx 5,71$ von einer Frequenzkomponente zur nächsten zu einem Austausch der Richtungen des langsamen PSPs \hat{t}_+ (schwarz) und des schnellen PSPs \hat{t}_- (rot). Aufgrund dieser Unstetigkeitsstelle ergibt sich ein unendlich großer Wert der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ bei der Frequenz $\omega \approx 5,71$.

Diese Erkenntnisse ermöglichen eine umfassende Analyse der ungewöhnlichen Messwerte des Kapitels 3.3.5. So beruht die Bestimmung der PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ auf einer numerischen Differentiation der Richtung des langsamen PSPs \hat{t}_+ gemäß Gleichung (3.18) auf Seite 74. Als Voraussetzung für die Anwendung dieser Gleichung müssen die Daten des PSPs \hat{t}_+ im spektralen Abstand $\Delta\omega$ vorliegen – entweder als Ergebnis einer Simulation oder experimentell bestimmt. Da der spektrale Abstand $\Delta\omega$ in der Praxis nicht beliebig gering ist, führt das Auftreten einer unendlich großen PSP-Depolarisation zu einem endlichen Messergebnis von $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$, welches stark von der Schrittweite $\Delta\omega$ abhängt. Unter Verwendung der Gleichung (3.18), des Winkels zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang sowie der Definition der Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle \Delta\tau \rangle$ lässt sich das Resultat einer Messung von $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ bei einer Frequenz unendlich großer PSP-Depolarisation einfach ermitteln zu

$$\frac{\|\partial_\omega \hat{t}_+\|}{\langle \Delta\tau \rangle} = \frac{\Delta\omega_{\text{PSP}}}{\Delta\omega} \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\angle \text{PSPs}}{2}\right). \quad (3.19)$$

Diese Gleichung (welche in [36] veröffentlicht wurde) stimmt mit den Resultaten des Kapitels 3.3.5 überein. So war die Schrittweite der Simulationen in Kapitel 3.3.5 festgelegt auf $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}/500$. Eingesetzt in Gleichung (3.19) führt dies auf einen maximal möglichen Messwert der normierten PSP-Depolarisation von $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|/\langle \Delta\tau \rangle = 500 \cdot 4/\pi \approx 637$. Dieser Wert erklärt die in Kapitel 3.3.5 beobachtete obere Grenze der per Monte-Carlo Simulation ermittelten normierten PSP-Depolarisation. Die dortige Beobachtung, dass sich diese obere Grenze antiproportional zur Schrittweite $\Delta\omega$ verhält, deckt sich ebenfalls mit der Gleichung (3.19). Weiterhin lässt sich auch die Lage der außergewöhnlichen Ereignisse im Streudiagramm der Abb. 3.13(e) auf Seite 95 erklären. Die dort eingezeichnete gestrichelte Linie wurde analytisch mithilfe von Gleichung (3.19) erzeugt.

Schließlich soll das untere Teilbild der Abb. 3.22, in dem der spektrale Verlauf der PSP-Depolarisation für sehr starke mittlere PDL pro Element dargestellt ist, interpretiert werden: Offenbar führt eine deutliche Erhöhung der mittleren PDL dazu, dass sich auch kleine »Spikes« der PSP-Depolarisation zunehmend in Unendlichkeitsstellen verwandeln. Ein Vergleich mit dem spektralen Verlauf der DGD in Abb. 3.17(a) zeigt, dass dieser Effekt genau bei den Frequenzen auftritt, bei denen die DGD Null wird. Dies stimmt mit den Ergebnissen des Streudiagramms der Abb. 3.13(d) auf Seite 95 überein. Ferner zeigen die vergrößerten Ausschnitte in Abb. 3.22(b), dass ein plötzlicher Austausch der Richtungen der PSPs auf der Poincaré-Kugel auch den Austausch der Steigungen $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$ und $\|\partial_\omega \hat{t}_-\|$ nach sich zieht.

PMD-Vektor zweiter Ordnung

Der spektrale Verlauf der Länge des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung $\|\partial_\omega(\Delta\tau\hat{t}_+)\|$ ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Offenbar führt eine Erhöhung der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ zu teils deutlichen Veränderungen des Verlaufs, mit einer gewissen Tendenz zur Vergrößerung des Wertes $\|\partial_\omega(\Delta\tau\hat{t}_+)\|$ bei starker mittlerer PDL. Diese Ergebnisse stimmen mit den Histogrammen der Abb. 3.14(a) auf Seite 97 überein. Weiterhin lässt sich beobachten, dass die Größe $\|\partial_\omega(\Delta\tau\hat{t}_+)\|$ an Stellen des Spektrums, an denen die DGD $\Delta\tau$ verschwindet und die PSPs einen Sprung auf der Poincaré-Kugel ausführen, einen endlichen Wert behält.

Sehr ähnliche Aussagen gelten auch für die Länge der senkrechten Komponente des PMD-Vektors zweiter Ordnung $\Delta\tau\|\partial_\omega\hat{t}_+\|$, dessen Verlauf hier nicht abgebildet ist.

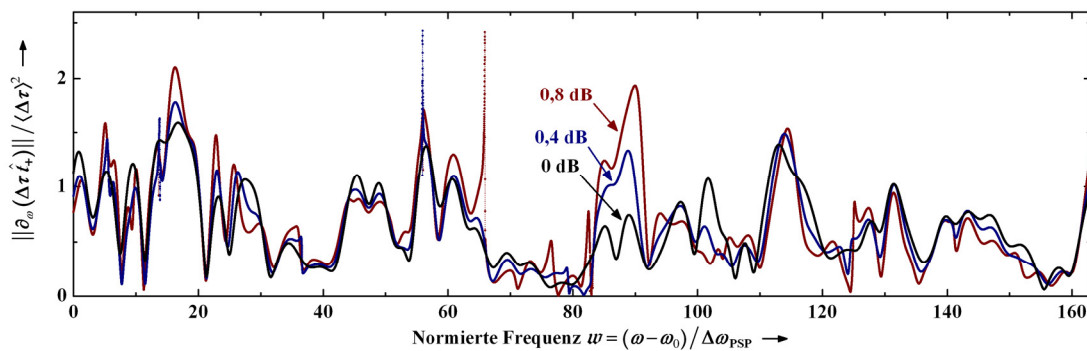


Abb. 3.24: Länge des PMD-Vektors zweiter Ordnung $\|\partial_\omega(\Delta\tau\hat{t}_+)\|$ als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; dabei wurde die gleiche Realisierung des Systems verwendet wie bisher.

Steigung der PDL

Der spektrale Verlauf der globalen PDL in dB wurde in Abb. 3.16 gezeigt. Durch numerische Differentiation nach der Kreisfrequenz folgt der Verlauf der Größe $\partial_\omega PDL_{\text{dB}}$, dargestellt in der folgenden Abbildung.

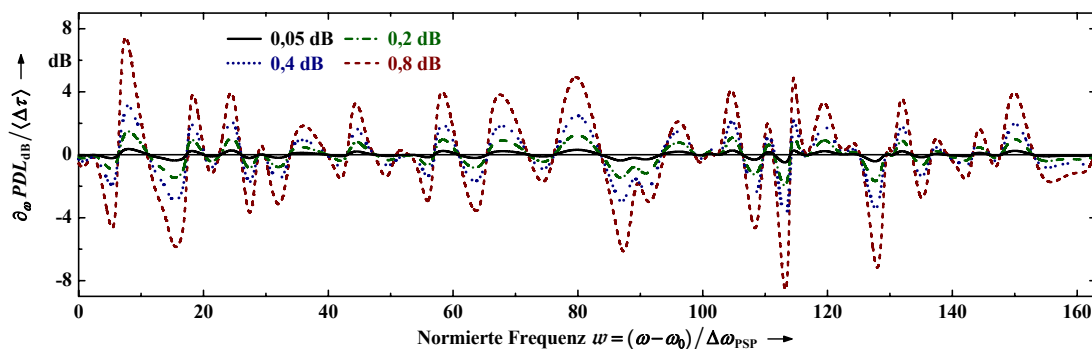


Abb. 3.25: Ableitung der globalen PDL in dB nach der Kreisfrequenz ω als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; die betrachtete Realisierung ist die gleiche wie bisher, sie besteht also aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen.

Erwartungsgemäß skaliert die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ nicht nur den Wert der globalen PDL an sich, sondern gleichermaßen dessen Steigung. Darauf wurde bereits bei den Histogrammen der Abb. 3.14(d) auf Seite 97 hingewiesen.

PDL-Depolarisation

Schließlich ist in der folgenden Abbildung der spektrale Verlauf der »PDL-Depolarisation« $\|\partial_\omega \hat{\Gamma}_{\text{out}}\|$ dargestellt. Passend zu den Histogrammen der Abb. 3.14(e) auf Seite 97 ändert sich der Wert der PDL-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\Gamma}_{\text{out}}\|$ bei einer Erhöhung der mittleren PDL kaum. Im Gegensatz zur PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\xi}_+\|$, bei der diese Aussage ebenfalls zutrifft, kommt es bei der PDL-Depolarisation allerdings nicht zu Unendlichkeitsstellen. Plötzliche Sprünge der Richtung des PDL-Vektors $\vec{\Gamma}_{\text{out}}$ auf der Poincaré-Kugel treten also – auch bei sehr starker mittlerer PDL – nicht auf. Abgesehen von Unendlichkeitsstellen sind die auftretenden Werte der PSP-Depolarisation und der PDL-Depolarisation jedoch vergleichbar, was aufgrund ihrer Histogramme zu erwarten war. Eine nennenswerte Korrelation zwischen den spektralen Verläufen lässt sich allerdings nicht erkennen.

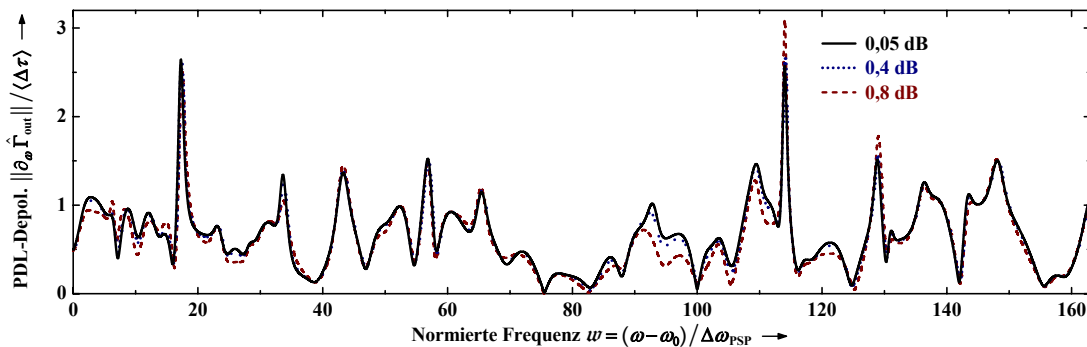


Abb. 3.26: »PDL-Depolarisation« $\|\partial_\omega \hat{\Gamma}_{\text{out}}\|$ als Funktion der normierten Frequenz ω für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; dabei wurde wiederum die gleiche Realisierung analysiert wie bisher.

3.5.6 PMD- und PDL-Größen in der Umgebung einer Nullstelle der DGD

Die auffallendsten Veränderungen der betrachteten spektralen Verläufe ließen sich an Stellen des Spektrums beobachten, an denen die DGD sehr gering ist und schließlich verschwindet. Zum Abschluss dieses Kapitels soll deshalb ein Vergleich des Verhaltens wichtiger PMD- und PDL-Größen in der Nähe einer solchen Stelle erfolgen. Dazu soll beispielhaft der Bereich um die normierte Frequenz $\omega \approx 5,71$ betrachtet werden, also um die Frequenz, bei der in Abb. 3.22(a) aus einem »Spike« der PSP-Depolarisation eine Unendlichkeitsstelle wurde. Der Verlauf wichtiger PMD- und PDL-Größen in der Umgebung dieser Frequenz ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

Offenbar fällt die DGD $\Delta\tau$ bei $\omega \approx 5,71$ auf Null ab, sobald die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ auf den Wert 0,2 dB erhöht wird [Abb. 3.27(a)]. Dies hat zur Folge, dass die Steigung der DGD, also die PCD $\Delta\tau_\omega$, bei der Frequenz $\omega \approx 5,71$ einen plötzlichen Vorzeichenwechsel erfährt und dass der Betrag der PCD in der Umgebung

dieser Frequenz deutlich ansteigt, siehe Abb. 3.27(d). (Dieses Verhalten erklärt auch das modifizierte Streudiagramm der Abb. 3.13(b) auf Seite 95, bei dem die PCD in Abhängigkeit von der DGD dargestellt ist.) Weiterhin kommt es bei der Frequenz $\omega \approx 5,71$ zu einem plötzlichen Sprung der PSPs auf der Poincaré-Kugel (siehe Abb. 3.23) mit der Folge, dass die PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\boldsymbol{\xi}}_+\|$ in Abb. 3.27(g) bei $\omega \approx 5,71$ unendlich wird.

Die Länge des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung $\|\partial_\omega(\Delta\tau \hat{\boldsymbol{\xi}}_+)\|$, dargestellt in Abb. 3.27(b), verändert sich in der Umgebung der Stelle $\omega \approx 5,71$ zwar deutlich. Im Gegensatz zur DGD $\Delta\tau$ und zur PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{\boldsymbol{\xi}}_+\|$ tritt aber weder eine Unendlichkeitsstelle noch eine Nullstelle der Größe $\|\partial_\omega(\Delta\tau \hat{\boldsymbol{\xi}}_+)\|$ auf. Die Abb. 3.27(e) zeigt dagegen, dass sich die Länge der senkrechten Komponente des PMD-Vektors zweiter Ordnung, also die Größe $\Delta\tau \|\partial_\omega \hat{\boldsymbol{\xi}}_+\|$, in der Umgebung der Stelle $\omega \approx 5,71$ dem Wert Null nähert. An der Stelle $\omega = 5,71$ an sich hat die Größe $\Delta\tau \|\partial_\omega \hat{\boldsymbol{\xi}}_+\|$ aber einen endlichen Wert. Allerdings wird dieser Verlauf vermutlich von der Schrittweite $\Delta\omega$ beeinflusst, dies wurde jedoch nicht untersucht.

Die Länge des Realteils $\|\vec{r}_{\text{Re}}\|$ des komplexen PMD-Vektors, welche für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB mit der DGD $\Delta\tau$ übereinstimmt, ist in der Umgebung der Frequenz $\omega \approx 5,71$ praktisch unabhängig von der Stärke der mittleren PDL, siehe Abb. 3.27(h). Die Länge des Imaginärteils $\|\vec{r}_{\text{Im}}\|$ steigt derweil – erwartungsgemäß – mit der Stärke der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ an, sie wird in der Umgebung der Frequenz $\omega \approx 5,71$ sogar größer als die Länge des Realteils $\|\vec{r}_{\text{Re}}\|$. Ansonsten zeigt der Verlauf des Imaginärteils $\|\vec{r}_{\text{Im}}\|$ bei der Frequenz $\omega \approx 5,71$ keinerlei Besonderheiten. Gleiches gilt für die globale PDL, dessen Verlauf in Abb. 3.27(i) dargestellt ist: Bei der Frequenz $\omega \approx 5,71$ ist keine Auffälligkeit im Verhalten der globalen PDL zu erkennen.

Gemäß der Diskussion des Kapitels 3.5.2 kommt es an Stellen verschwindender DGD zu plötzlichen Vorzeichenwechseln der DAS $\Delta\eta$. Dies ist bei der Frequenz $\omega \approx 5,71$ in Abb. 3.27(c) deutlich zu erkennen. Weiterhin verdeutlicht Abb. 3.27(f), dass der Winkel zwischen den PSPs in der Umgebung der Frequenz $\omega \approx 5,71$ sehr gering ist. Ein Vergleich mit den entsprechenden Histogrammen in Abb. 3.8(a) auf Seite 87 zeigt, dass es sich um Winkel aus den Ausläufern der Verteilungen handelt. In der Abb. 3.27(f) ist zwar nur der Winkel zwischen den PSPs *am Ausgang* dargestellt, ähnliche Verläufe ergeben sich jedoch auch für den entsprechenden Winkel am Eingang.

Schließlich gilt für die meisten der betrachteten Größen, dass sie sich in der Umgebung der Frequenz $\omega \approx 5,71$ spektral sehr schnell ändern. Die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ versagt also in diesen Bereichen als Maß für einen spektralen Abstand, über den eine Größe als konstant angenommen werden kann. So verändert sich beispielsweise der Winkel zwischen den PSPs in Abb. 3.27(f) innerhalb von weniger als 20 % der Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ (weniger als 0,2 in normierten Einheiten der Frequenz) um nahezu 90° .

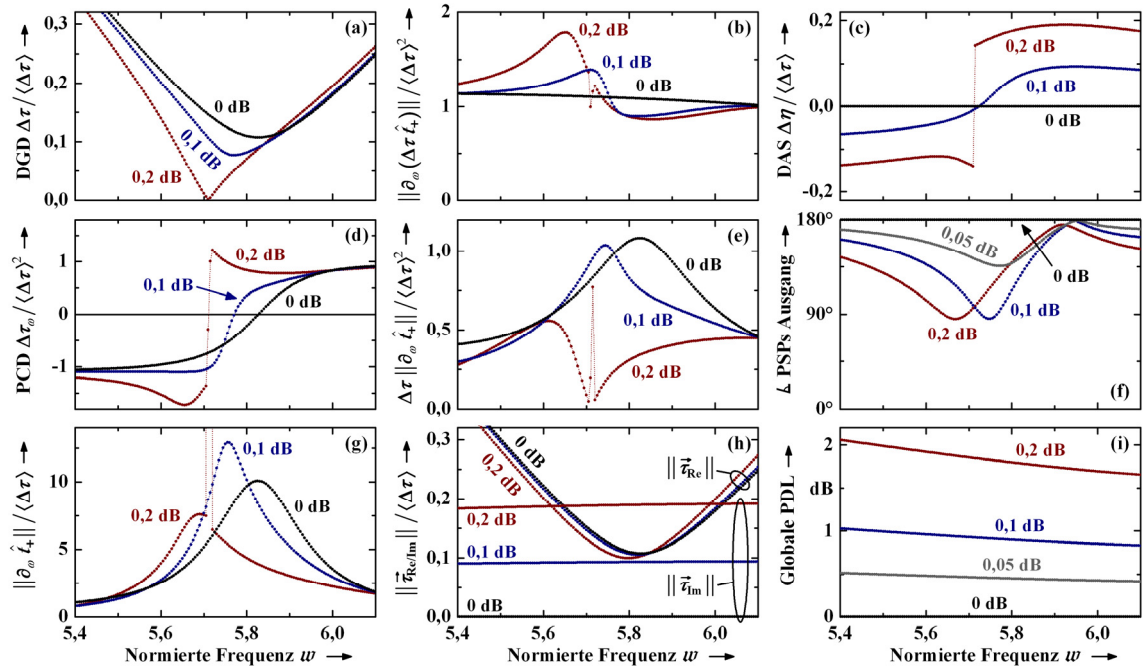


Abb. 3.27: PMD- und PDL-Größen in der Umgebung einer Nullstelle der DGD als Funktion der normierten Frequenz w für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$; der betrachtete Frequenzbereich erstreckt sich von $w = 5,4$ bis $w = 6,1$, er ist also identisch zu dem in Abb. 3.22(a) vergrößert dargestellten Bereich. (a) DGD $\Delta\tau$; (b) Länge des verallgemeinerten PMD-Vektors zweiter Ordnung $\|\partial_\omega(\Delta\tau \hat{t}_+)\|$; (c) DAS $\Delta\eta$; (d) PCD $\Delta\tau_\omega$; (e) Länge der senkrechten Komponente des PMD-Vektors zweiter Ordnung $\Delta\tau \|\partial_\omega \hat{t}_+\|$; (f) Winkel zwischen den PSPs im Stokes-Raum am Ausgang; (g) PSP-Depolarisation $\|\partial_\omega \hat{t}_+\|$; (h) Länge des Realteils $\|\vec{t}_{\text{Re}}\|$ und des Imaginärteils $\|\vec{t}_{\text{Im}}\|$ des komplexen PMD-Vektors; (i) Globale PDL in dB.

4 Signalverzerrungen durch PMD und PDL

Bei den bisherigen Betrachtungen zur Wechselwirkung von PMD und PDL blieb das optische Signal gänzlich unberücksichtigt: Die statistischen Analysen des Kapitels 3 basieren einzig und allein auf einer Auswertung des frequenzabhängigen Jones-Operators \mathbf{T} des Systems. So ist beispielsweise die DGD $\Delta\tau$ eine reine Eigenschaft des Systems, sie folgt aus der Berechnung des Eigenwerts des Operators $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$, womit sie unabhängig ist von den Eigenschaften des Signals wie z. B. der Datenrate, des Modulationsformats oder des Polarisationszustands. Gleiches gilt für alle anderen PMD- und PDL-Größen, welche sich gemäß Abb. 3.1 von Seite 71 direkt aus dem Jones-Operator \mathbf{T} des Systems berechnen lassen. Ihre statistischen Eigenschaften wurden in Kapitel 3 umfassend analysiert.

Die Auswirkungen dieser Ergebnisse auf die Transmission optischer Signale gilt es nun zu untersuchen. Es soll also die Frage geklärt werden, welchen Einfluss das gleichzeitige Auftreten von PMD und PDL auf die Verzerrung der Signale hat. Die Kapitel 4 und 5 werden sich ausführlich mit dieser Problematik auseinandersetzen. Dabei gehen die Untersuchungen weit über das hinaus, was sich zu diesem Thema in der Literatur finden lässt. Einige der relevanten Literaturstellen wurden bereits in Kapitel 1.1 erwähnt, die gesamte Anzahl derartiger Quellen ist bisher allerdings noch recht überschaubar. Nennenswert sind vor allem die Untersuchungen in [14], [30] bis [34], [39], [42], [44] und [45]. Dabei kommen vorwiegend Simulationen und Messungen zum Einsatz, analytische Berechnungen lassen sich nur für stark vereinfachte Systeme durchführen.¹

Aufgrund einer großen Anzahl einstellbarer System- und Signalparameter sowie des innewohnenden statistischen Charakters der Systemeigenschaften ist eine systematische Durchführung derartiger Untersuchungen alles andere als trivial. So kommen bei nahezu allen in der Literatur anzutreffenden Betrachtungen entweder stark vereinfachte (praxisferne) Systeme zum Einsatz oder es werden Ergebnisse mit geringer statistischer Relevanz vorgestellt. Beispielsweise bestehen die in der Literatur betrachteten Systeme häufig nur aus wenigen Elementen. So basiert das Beispiel in [14] auf einer Verkettung eines einzigen DGD-Elements mit nur einem PDL-Element, im ersten Beispiel von [30] sowie bei den Systemen in [32], [33] und [44] kommt ebenfalls nur ein PDL-Element – umgeben von zwei DGD-Elementen – zum Einsatz. Ähnliches gilt für das System in

¹ Zwar kann die Verbreiterung optischer Pulse unter dem Einfluss von PMD und PDL prinzipiell mithilfe der analytischen Resultate von [44] und [14] berechnet werden. Zur Anwendung derartiger Gleichungen müssen allerdings die spektralen Verläufe des Realteils $\bar{\tau}_{\text{Re}}$ und des Imaginärteils $\bar{\tau}_{\text{Im}}$ des komplexen PMD-Vektors, des PDL-Vektors $\bar{\Gamma}$ (jeweils am Eingang des Systems) sowie des Transmissionskoeffizienten depolarisierter Signale $\mathcal{T}_{\text{depol}}$ analytisch vorliegen. Da diese Größen in aller Regel nicht analytisch bekannt sind, sind derartige analytische Berechnungen nur für extrem vereinfachte Systeme durchführbar. Als Werkzeug zur Analyse des Einflusses von PMD und PDL auf Signale in Systemen der Praxis ist deshalb auf numerische Simulationen oder auf Messungen zurückzugreifen.

[42] sowie für den Großteil der Beispiele in [31]. Auch die Ergebnisse eines recht praxisnahen Beispiels in [31] lassen sich nicht verallgemeinern, da sie nur für eine vorgegebene Kombination aus Datenrate und Stärke der mittleren PDL gültig sind. Diese und ähnliche Einschränkungen sind auch in [34], [39] und [45] sowie beim zweiten Beispiel in [30] zu beachten.

Die Vorüberlegungen des Kapitels 4.1 sollen deshalb vor allem dazu dienen, die nachfolgenden Simulationen systematisch zu planen, um möglichst allgemeingültige Resultate hoher statistischer Relevanz zu erzielen. Zusätzlich soll in Kapitel 4.1 ausführlich dargelegt werden, mit welchen Verfahren die Ergebnisse des Kapitels 4 (und Teile der Ergebnisse des Kapitels 5) erzielt wurden, ohne jedoch detailliert auf die Implementierung des Computerprogramms einzugehen.

4.1 Simulationsaufbau, Modellierung und Implementierung

Die Simulationen dieses Kapitels basieren auf dem bekannten System des Kapitels 3.2.3, also auf einem System aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen. Gemäß der Diskussion des Kapitels 3.2.2 lassen sich Ergebnisse, welche mithilfe eines solchen Systems generiert werden, auf nahezu alle in der Praxis auftretenden Systeme verallgemeinern. Die Art des eingespeisten Signals sowie Kriterien für dessen Auswertung am Ausgang sollen im Folgenden (in den Kapiteln 4.1.1 bis 4.1.3) diskutiert werden. Der daraus resultierende Simulationsaufbau ist vorab in Abb. 4.1 zusammenfassend dargestellt.

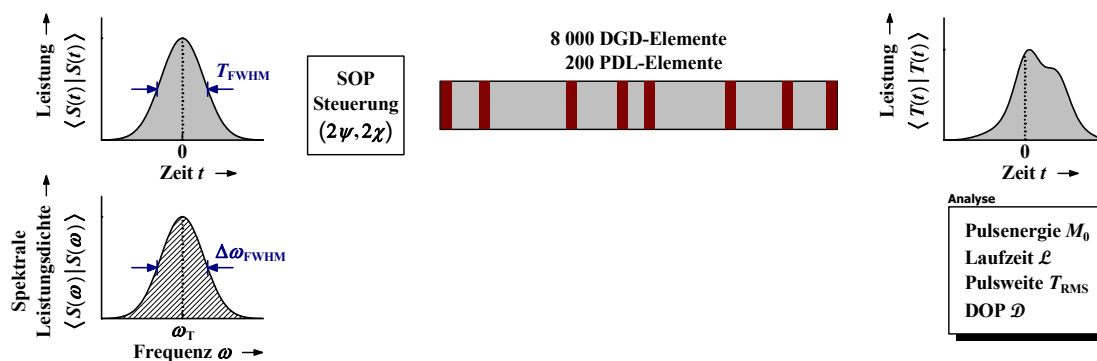


Abb. 4.1: Übersicht über den Aufbau der Simulationen des Kapitels 4, eine ausführliche Beschreibung und Begründung dieses Aufbaus folgt in den Kapiteln 4.1.1 bis 4.1.3. Ein Gauß-Puls der zeitlichen Halbwertsbreite T_{FWHM} (welche sich umrechnen lässt in die spektrale Halbwertsbreite $\Delta\omega_{FWHM}$, siehe Kapitel 4.1.2) und der Trägerfrequenz ω_T wird mit einem bestimmten Polarisationszustand (engl.: State of Polarization, SOP) in eine Realisierung des Systems des Kapitels 3.2.3 eingekoppelt, also in ein System aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen. Am Ausgang des Systems wird der verzerrte Puls bezüglich seiner Energie M_0 , seiner »mittleren Laufzeit« \mathcal{L} , seiner »RMS-Pulswerte« T_{RMS} sowie seines Polarisationsgrades (engl.: Degree of Polarization, DOP) \mathcal{D} analysiert.

4.1.1 Parameterraum

Zunächst sollen sämtliche System- und Signalparameter, welche Einfluss auf das Ausmaß der Signalverzerrung haben, diskutiert werden. Dabei wird sich zeigen, dass sich die Anzahl relevanter Parameter – unter geeigneten Annahmen – auf vier reduzieren lässt.

Parameter Nr. 1: Mittlere PDL des Systems

Bei den statistischen Analysen des Kapitels 3 konnte durch Einsatz normierter Darstellungen erreicht werden, dass nur ein einziger freier Parameter verblieb, die mittlere PDL des Systems. Dieser Parameter wird auch bei den Untersuchungen dieses Kapitels sowie des Kapitels 5 die zentrale Größe darstellen, dessen Einfluss es zu untersuchen gilt.

Vorüberlegungen zur Begrenzung des Parameterraums

Soll nicht nur das System an sich, sondern der Einfluss des Systems auf das optische Signal untersucht werden, so treten eine Vielzahl weiterer möglicher Parameter auf. Erste Vereinfachungen lassen sich dadurch erzielen, dass ausschließlich der übliche Fall eines intensitätsmodulierten Signals [48] betrachtet wird, welches am Eingang des Systems vollständig polarisiert ist ($\text{DOP } \mathcal{D} = 1$ am Eingang, siehe Kapitel 2.2.6) und welches keinen »Frequenz-Chirp« aufweist. (Die letztgenannte Annahme bedeutet, dass die Trägerfrequenz als nicht zeitabhängig angesetzt wird, sie ändert sich also entlang des Signals nicht [48]. Dies ist gleichbedeutend zur Annahme einer verschwindenden zeitlichen Ableitung der gemeinsamen Phase des Jones-Vektors am Eingang.)

Für intensitätsmodulierte Signale sind die Modulationsformate »NRZ« (engl.: Non Return to Zero) und »RZ« (engl.: Return to Zero) zu unterscheiden. Details dazu finden sich in [48] sowie in allen gängigen Büchern zum Themengebiet der (optischen) Nachrichtentechnik. Unabhängig vom tatsächlich gewählten Modulationsformat besteht die Auswirkung von PMD in einer Verbreiterung (Verzerrung) der optischen Pulse, aus denen sich das binäre digitale Signal zusammensetzt. Um den Einfluss von PDL auf diese PMD-bedingten Verzerrungen *isoliert* analysieren zu können, ist es deshalb sinnvoll, auf die Untersuchung von Pulsfolgen zu verzichten und stattdessen die Ausbreitung einzelner optischer Pulse zu betrachten.¹ Eine weitergehende Diskussion zur Motivation und Rechtfertigung dieses Vorgehens findet sich beispielsweise in [39]. Ein gutes Maß zur Beurteilung der Stärke der Signalverzerrungen durch PMD und PDL wird dann der Anstieg der »RMS-Pulsweite« T_{RMS} sein, eine Größe, deren Definition in Kapitel 4.1.3 erfolgt.

¹ Diese Maßnahme führt zudem zu einer deutlichen Einsparung von Rechenzeit, womit – bei gleichbleibender zur Verfügung stehender Rechenkapazität – die Auswertung einer größeren Anzahl statistisch unabhängiger Stichproben des Systems und / oder eine besser aufgelöste Analyse des Parameter-raums ermöglicht wird.

Parameter Nr. 2: Bandbreite des Signals relativ zur Bandbreite der PSPs

Aus der Theorie unitärer Systeme (Systeme ohne PDL) ist wohl bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit eines PMD-bedingten Systemausfalls sowohl von der Stärke der mittleren DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ als auch von der zeitlichen Breite T_{RMS} (bzw. T_{FWHM}) der Pulse des Signals (also von der Datenrate) abhängt. Bei näherer Betrachtung stellt sich heraus, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit nur durch das Verhältnis $\langle \Delta\tau \rangle / T_{\text{RMS}}$ dieser beiden Größen bestimmt wird und nicht durch die Größen an sich [1]. Die Gültigkeit dieser Aussage auch für Systeme mit PMD *und* PDL wurde in [45] nachgewiesen. Somit ist es für die nachfolgenden Untersuchungen nicht erforderlich, den Einfluss sowohl der mittleren DGD des Systems $\langle \Delta\tau \rangle$ als auch der zeitlichen Pulsweite am Eingang T_{RMS} zu analysieren, sondern nur den Einfluss ihres Verhältnisses.

Allerdings muss bei derartigen Betrachtungen auch die Form der Pulseinhüllenden berücksichtigt werden. So ist beispielsweise ein gaußförmiger Puls bei gleicher zeitlicher Breite weniger empfindlich gegenüber PMD-bedingten Verzerrungen als ein Puls mit großer Steilheit der Flanken, da die Bandbreite letztgenannter Pulse größer ist. Um eine weitergehende Unabhängigkeit der Resultate von der gewählten Pulsform zu gewährleisten, kann deshalb – anstelle des Verhältnisses aus mittlerer DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ und zeitlicher Breite – das Verhältnis aus spektraler Breite und Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4) / \langle \Delta\tau \rangle$ (siehe Kapitel 2.3.5) verwendet werden. In diesem Sinne hat eine Verdoppelung der spektralen Breite des Signals (z. B. durch eine Verdoppelung der Datenrate) den gleichen Effekt auf PMD-bedingte Signalverzerrungen wie eine Halbierung der Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$, welche auf eine Verdoppelung der mittleren DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ des Systems zurückzuführen ist.

Bei den Untersuchungen dieses Kapitels (sowie des Kapitels 5) soll die mittlere DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ – und somit die Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ – konstant gehalten werden, während die spektrale Breite des Signals verändert wird. Das umgekehrte Vorgehen (konstante Bandbreite des Signals bei veränderlicher PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}}$) könnte jedoch ebenso gut angewendet werden.

Der zweite in diesem Kapitel zu berücksichtigende Parameter ist also das Verhältnis aus spektraler Breite des Signals und PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ des Systems. Falls einfache Gauß-Pulse zum Einsatz kommen, lässt sich deren spektrale Breite beispielsweise durch die spektrale Halbwertsbreite $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ gemäß Abb. 4.1 sinnvoll quantifizieren. Damit lässt sich der zweite Parameter des Parameterraums ausdrücken durch die Größe $\mathcal{V} \equiv \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$. (Die strenge Definition des Begriffs der spektralen Halbwertsbreite $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ sowie deren Relation zur zeitlichen Halbwertsbreite T_{FWHM} folgt in Kapitel 4.1.2.)

Parameter Nr. 3: Trägerfrequenz des Signals

Je nach Zielsetzung der Untersuchungen kann der Parameterraum damit bereits festgelegt sein, oder es können noch weitere Parameter von Bedeutung sein. Soll zum Beispiel die Statistik der Pulsverbreiterung – oder einer anderen Signaleigenschaft – für eine

Schar von Realisierungen des Systems bei fester Trägerfrequenz untersucht werden, so kommen keine weiteren relevanten Parameter hinzu. Der Parameterraum ist dann zweidimensional, ein Punkt in diesem Raum ist festgelegt durch die Stärke der mittleren PDL des Systems sowie durch das Verhältnis $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$. Derartige Untersuchungen werden das Thema des Kapitels 5 sein (wobei zusätzlich der Einfluss von PDL auf die Wirksamkeit optischer PMD-Kompensatoren erforscht werden soll).

In diesem Kapitel wird ein anderes Vorgehen gewählt, mit der Folge, dass weitere relevante Parameter zu beachten sind. Das Ziel wird darin bestehen, den Einfluss von PDL auf PMD-bedingte Signalverzerrungen *entlang der Frequenz* zu analysieren, wobei eine festgelegte Realisierung des Systems vorausgesetzt wird. Dadurch können Zusammenhänge zwischen der Verzerrung des Signals und den frequenzabhängigen Systemgrößen des Kapitels 3 aufgedeckt werden. Beispielsweise kann durch dieses Vorgehen geklärt werden, welche Auswirkung die PDL-bedingte Verletzung der Orthogonalität der PSPs auf die Ausbreitung des Signals hat. Gemäß der Diskussion des Kapitels 3.2.3 soll dabei die gleiche Realisierung des Systems zum Einsatz kommen wie in Kapitel 3.5.

Der dritte Parameter des Parameterraums ist somit die Trägerfrequenz ω_T des Signals, welche gemäß Kapitel 3.2.3 in normierter Form als $w_T \equiv (\omega_T - \omega_0)/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ geschrieben werden kann.

Parameter Nr. 4: Polarisationszustand des Signals

Noch nicht berücksichtigt wurde bisher der Polarisationszustand des Signals am Eingang, er ist der vierte und letzte relevante Parameter. Beispielsweise hängt die Stärke der Signalverzerrung entscheidend davon ab, ob der Polarisationszustand am Eingang parallel zu einem der beiden PSPs des Systems angeordnet ist oder nicht. Da ein Polarisationszustand festgelegt ist durch Angabe des Winkelpaares 2ψ und 2χ auf der Poincaré-Kugel [siehe Abb. 2.2(a) auf Seite 27], setzt sich dieser vierte Parameter letztlich aus zwei einzelnen Parametern 2ψ und 2χ zusammen.

Für Systeme der Praxis hat das Signal am Eingang in der Regel einen linearen Polarisationszustand. Dies könnte dazu verleiten, den Parameter 2χ konstant auf 0° zu belassen und somit nur den Äquator der Poincaré-Kugel zu betrachten. Allerdings wird die Stärke der Signalverzerrungen nicht durch den Polarisationszustand *an sich* bestimmt, sondern durch seine *relative* Lage beispielsweise zu den PSPs des Systems. Die Position der PSPs auf der Poincaré-Kugel ist jedoch für praxisnahe Systeme vollkommen zufällig, der Äquator der Kugel zeichnet sich in dieser Hinsicht durch nichts gegenüber anderen Punkten der Poincaré-Kugel aus.

Übersicht über den Parameterraum

Die Zusammenfassung aller relevanten Parameter mit ihren im Folgenden verwendeten Wertebereichen ist in der folgenden Tabelle aufgeführt. Der erste Parameter (mittlere PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle$) ist eine reine Eigenschaft des Systems, während in den Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ sowohl System- als auch Signaleigenschaften

einfließen. Die letzten beiden Parameter (normierte Trägerfrequenz w_T und Polarisationszustand am Eingang) schließlich sind Eigenschaften des Signals.

Tab. 4.1: Übersicht über den Parameterraum des Kapitels 4: Wird aus der Schar von Realisierungen des Systems eine herausgegriffen, so ist das Ausmaß der Signalverzerrung eindeutig bestimmt durch Angabe dieser Parameter. Die verwendeten Wertebereiche sind gemäß folgender Kriterien festgelegt: Einerseits sollen möglichst alle Systeme der Praxis durch den Parameterraum erfasst werden, weshalb die Schrittweiten entsprechend gering und die Ausdehnung der Wertebereiche möglichst groß zu wählen sind. Andererseits stand für die Untersuchungen nur eine endliche Rechenkapazität zur Verfügung, wodurch den Wertebereichen Grenzen gesetzt sind.

Parameter	Wertebereich
Mittlere PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle$	0 dB; 0,05 dB; 0,1 dB; 0,2 dB; 0,4 dB; 0,6 dB; 0,8 dB
Bandbreite des Signals relativ zur Bandbreite der PSPs $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$
Trägerfrequenz w_T des Signals	$w_T = 27,5$ bis $w_T = 135,5$ Schrittweite: 0,5 (in normierten Einheiten)
Polarisationszustand des Signals am Eingang, 2ψ und 2χ	$0 \leq 2\psi < 360^\circ, -90^\circ \leq 2\chi \leq 90^\circ$ Schrittweite: 3°

Diskussion der Wertebereiche

Die verwendeten Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ der 200 PDL-Elemente sind nach den gleichen Kriterien festgelegt wie in Kapitel 3. Die ausführliche Begründung dafür findet sich ebenso in Kapitel 3.3.1 wie die Relation dieser Werte zur mittleren *globalen* PDL des Systems, siehe Tab. 3.1 auf Seite 80.

Bei der Festlegung der Werte des Verhältnisses aus Bandbreite des Signals $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ und Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ gilt es, eine möglichst große Anzahl praxisnaher Systeme abzubilden. Beispielsweise führt ein Verhältnis $\mathcal{V} = 1/4$ dazu, dass die PMD- und PDL-Größen des Systems entlang der Bandbreite des Signals praktisch konstant sind. Dies entspricht der Näherung »PMD und PDL erster Ordnung«. Ein solcher Fall tritt ein, wenn die mittlere DGD des Systems recht schwach und die Datenrate gering ist, sodass Signalverzerrungen aufgrund von PMD kaum ins Gewicht fallen. Auf der anderen Seite zieht ein Verhältnis $\mathcal{V} = 4$ massive PMD-bedingte Beeinträchtigungen des Signals nach sich. Effekte höherer Ordnung – wie die polarisationsabhängige chromatische Dispersion PCD und die PSP-Depolarisation – erlangen dann eine große Bedeutung. Derartige Systeme liegen bei hohen Datenraten und / oder großer mittlerer DGD vor.

Um den verwendeten Wertebereich des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ weiter zu veranschaulichen, ist in der folgenden Abbildung ein Ausschnitt des spektralen Verlaufs der DGD dargestellt, entnommen aus Abb. 3.17(a) auf Seite 101 (für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB). Zum Vergleich sind die Spektren der hier verwendeten Signale eingezeichnet für Verhältnisse $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ zwischen $\mathcal{V} = 1/4$ und $\mathcal{V} = 4$. Dabei

wurde die normierte Trägerfrequenz $w_T = (\omega_T - \omega_0) / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ des Signals willkürlich auf $w_T = 50$ gelegt, zudem wurde ein im Zeitbereich (und somit auch im Frequenzbereich) gaußförmiger Puls angesetzt. Offenbar ist der Wert der DGD entlang des Signalspektrums bei $\Upsilon = 1/4$ in jedem Fall praktisch konstant, während es bei einem Verhältnis $\Upsilon = 4$ – je nach Trägerfrequenz – zu deutlichen Schwankungen der DGD über die Bandbreite des Signals kommen kann. Gleiches gilt für andere PMD- und PDL-Größen, siehe Kapitel 3.5.

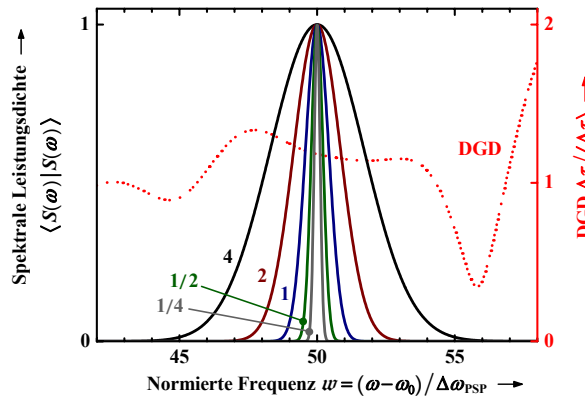


Abb. 4.2: Spektrale Leistungsdichte des in Kapitel 4 verwendeten Signals für unterschiedliche Werte des Verhältnisses Υ aus Bandbreite des Signals $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ und Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}}$; zum Vergleich ist ein Ausschnitt aus dem spektralen Verlauf der DGD $\Delta\tau$ der hier betrachteten Realisierung des Systems eingetragen (für den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB).

Gemäß Tab. 4.1 soll sich der Wertebereich der normierten Trägerfrequenz $w_T = (\omega_T - \omega_0) / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ in diesem Kapitel von $w_T = 27,5$ bis $w_T = 27,5 + 108 = 135,5$ erstrecken und mit der Schrittweite $0,5$ ($\Delta\omega_{\text{PSP}}/2$ in gewöhnlichen Einheiten) abgeschrieben werden. Somit wird das Signal nacheinander mit insgesamt $2 \cdot 108 = 216$ unterschiedlichen Trägerfrequenzen in das System eingekoppelt und daraufhin am Ausgang analysiert. Die absolute Lage dieses Wertebereichs im Spektrum sowie dessen Breite wurden in Kapitel 3.2.3 ausführlich diskutiert. Zwar wäre die Betrachtung eines noch breiteren Bereichs – mit einer größeren Anzahl statistisch unabhängiger Frequenzen – wünschenswert, bei gleichbleibender verfügbarer Rechenkapazität ließe sich dies jedoch nur durch eine weniger fein aufgelöste Analyse des Parameterraums erreichen.

Der Wertebereich des Polarisationszustands am Eingang ist direkt gegeben durch den Wertebereich der beiden Winkel 2ψ und 2χ der Poincaré-Kugel ($0 \leq 2\psi < 360^\circ$ und $-90^\circ \leq 2\chi \leq 90^\circ$), welche mit der Schrittweite 3° abgeschrieben werden sollen. (Dieses Vorgehen führt zwar zu einer unnötig feinen Abtastung der Pole der Poincaré-Kugel und somit zu einer leicht erhöhten Rechenzeit, dieser Nachteil wird jedoch durch den Vorteil einer vereinfachten Weiterverarbeitung der Daten ausgeglichen.)

Das Signal wird also für jede der 216 Trägerfrequenzen w_T sowie für jeden der fünf Werte des Verhältnisses $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ und für jeden der sieben Werte der mittleren PDL pro Element mit 7320 unterschiedlichen Polarisationszuständen in das

System eingekoppelt. Die gesamte Anzahl der durchgeführten Simulationen beläuft sich somit auf etwa $5,5 \cdot 10^7$. Für jede dieser Simulationen ist das Signal am Ausgang – nach unterschiedlichen Kriterien – auszuwerten, siehe Kapitel 4.1.3.

4.1.2 Signal am Eingang

Signal im Zeitbereich

Aufgrund der Verwendung des normierten Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ spielt die Wahl der Pulsform am Eingang – welche im Folgenden gaußförmig sein soll – nur eine untergeordnete Rolle. Die Festlegung auf einen Gauß-Puls bewirkt, dass der zeitabhängige, nicht normierte Jones-Vektor am Eingang $|S(t)\rangle$ durch

$$\begin{aligned} |S(t)\rangle &= \|S(t)\| |s\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}(t/T_0)^2} |s\rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

beschrieben wird. Dabei ist der normierte Jones-Vektor $|s\rangle$ zeitunabhängig, er ist eindeutig bestimmt durch die Winkel 2ψ und 2χ auf der Poincaré-Kugel, siehe Tab. 4.1. Die zeitliche Breite des Gauß-Pulses ist durch den Parameter T_0 festgelegt, dessen Relation zur spektralen Halbwertsbreite $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ weiter unten aufgeführt ist. Zur Skalierung der Höhe des Pulses wäre ein zusätzlicher Faktor erforderlich, dieser hätte jedoch keinerlei Einfluss auf die Ergebnisse dieser Arbeit, da Effekte der nichtlinearen Optik nicht berücksichtigt werden, siehe Kapitel 2.1.

Im Vorgriff auf die Definition der »RMS-Pulsweite« T_{RMS} in Kapitel 4.1.3 sei erwähnt, dass die RMS-Pulsweite des Gauß-Pulses am Eingang über die Beziehung $T_{\text{RMS}} = T_0/\sqrt{2}$ mit der Pulsweite T_0 zusammenhängt. Somit kann der nicht normierte Jones-Vektor am Eingang auch geschrieben werden als

$$|S(t)\rangle = e^{-\frac{1}{4}(t/T_{\text{RMS}})^2} |s\rangle. \quad (4.2)$$

Der zeitliche Verlauf der Leistung (bzw. der Intensität) des Pulses am Eingang ist demnach proportional zu

$$\begin{aligned} \langle S(t)|S(t)\rangle &= e^{-(t/T_0)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(t/T_{\text{RMS}})^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Damit lässt sich die zeitliche Halbwertsbreite T_{FWHM} des Pulses bestimmen, welche definiert ist als zeitlicher Abstand der Stellen, an denen die Leistung auf die Hälfte des Spitzenwertes abgefallen ist, siehe Abb. 4.1 auf Seite 114. Sie ergibt sich zu $T_{\text{FWHM}} = 2\sqrt{\ln(2)} T_0 \approx 1,665 \cdot T_0$.

Signal im Frequenzbereich

Durch Fourier-Transformation des zeitabhängigen, nicht normierten Jones-Vektors $|S(t)\rangle$ folgt der frequenzabhängige, nicht normierte Jones-Vektor $|S(\omega)\rangle$ zu

$$\begin{aligned} |S(\omega)\rangle &= \|S(\omega)\| |s\rangle \\ &= T_0 \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}[\omega/(1/T_0)]^2} |s\rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Seine Norm wird erwartungsgemäß ebenfalls durch eine Gauß-Funktion beschrieben. Analog zur zeitlichen Breite T_0 lässt sich dann die spektrale Breite $\Delta\omega_0 \equiv 1/T_0$ einführen, womit der frequenzabhängige Jones-Vektor am Eingang zu

$$|S(\omega)\rangle = T_0 \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}(\omega/\Delta\omega_0)^2} |s\rangle \quad (4.5)$$

folgt. Die spektrale Leistungsdichte schließlich ist proportional zu

$$\langle S(\omega)|S(\omega)\rangle \sim \mathbf{e}^{-(\omega/\Delta\omega_0)^2}, \quad (4.6)$$

womit sich die spektrale Halbwertsbreite $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ des Eingangssignals bestimmen lässt, welche den Parameter $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ der Tab. 4.1 festlegt. Sie ergibt sich zu $\Delta\omega_{\text{FWHM}} = 2\sqrt{\ln(2)}\Delta\omega_0$, es gilt also der Zusammenhang $\Delta\omega_{\text{FWHM}} = 2\sqrt{\ln(2)}/T_0$ zwischen der zeitlichen Breite T_0 und der spektralen Breite $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$. Wird die zeitliche Breite durch die Halbwertsbreite T_{FWHM} ausgedrückt, folgt entsprechend der Zusammenhang $\Delta\omega_{\text{FWHM}} = 4 \ln(2)/T_{\text{FWHM}}$.

Übersicht über die verwendeten Werte der spektralen und der zeitlichen Breite

In der ersten Spalte der folgenden Tabelle sind noch einmal die verwendeten Werte des Parameters $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ aufgelistet, welche bereits in Tab. 4.1 aufgeführt sind. Weiterhin sind in der zweiten und dritten Spalte zum Vergleich die zugehörigen zeitlichen Verhältnisse $\langle\Delta\tau\rangle/T_{\text{RMS}}$ und $\langle\Delta\tau\rangle/T_{\text{FWHM}}$ eingetragen, welche die Annahme eines Gauß-Pulses voraussetzen. Für das Beispiel der mittleren DGD $\langle\Delta\tau\rangle = 4$ ps (entsprechend der PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}} = 2\pi \cdot 31,25$ GHz) sind zudem in den letzten drei Spalten die spektralen sowie die zeitlichen Breiten in gewöhnlichen Einheiten aufgeführt.

Tab. 4.2: Wertebereich des Parameters »Bandbreite des Signals relativ zur Bandbreite der PSPs« $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ sowie dessen Entsprechungen im Zeitbereich $\langle\Delta\tau\rangle/T_{\text{RMS}}$ und $\langle\Delta\tau\rangle/T_{\text{FWHM}}$ unter der Annahme einer gaußförmigen Pulseinhüllenden; $\langle\Delta\tau\rangle$: Mittlere DGD des Systems; $\Delta\omega_{\text{PSP}} = (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$: PSP-Bandbreite des Systems; $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$: Spektrale Halbwertsbreite des Signals; T_{RMS} : RMS-Pulsweite; T_{FWHM} : Zeitliche Halbwertsbreite. Bei den Angaben der Größen in gewöhnlichen Einheiten in den letzten drei Spalten ist eine mittlere DGD von $\langle\Delta\tau\rangle = 4$ ps angenommen, dies entspricht einer Bandbreite der PSPs von $\Delta\omega_{\text{PSP}} = 2\pi \cdot 31,25$ GHz.

$\mathcal{V} = \frac{\Delta\omega_{\text{FWHM}}}{\Delta\omega_{\text{PSP}}}$	$\frac{\langle\Delta\tau\rangle}{T_{\text{RMS}}}$	$\frac{\langle\Delta\tau\rangle}{T_{\text{FWHM}}}$	$\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ [GHz]	T_{RMS} [ps]	T_{FWHM} [ps]
$\frac{1}{4}$	0,167	0,071	$2\pi \cdot 7,81$	23,99	56,48
$\frac{1}{2}$	0,334	0,142	$2\pi \cdot 15,63$	11,99	28,24
1	0,667	0,283	$2\pi \cdot 31,25$	6,00	14,12
2	1,334	0,567	$2\pi \cdot 62,5$	3,00	7,06
4	2,668	1,133	$2\pi \cdot 125$	1,50	3,53

4.1.3 Transmission des Signals und Analyse am Ausgang

Transmission des Signals

Der frequenzabhängige, nicht normierte Jones-Vektor am Ausgang des Systems $|T(\omega)\rangle$ folgt aus der Anwendung des frequenzabhängigen Jones-Operators des Systems $\mathbf{T}(\omega)$ auf den entsprechenden Jones-Vektor am Eingang $|S(\omega)\rangle$ gemäß

$$|T(\omega)\rangle = \mathbf{T}(\omega)|S(\omega)\rangle. \quad (4.7)$$

Aufgrund der Annahme eines Gauß-Pulses ist $|S(\omega)\rangle$ proportional zu $e^{-\frac{1}{2}(\omega/\Delta\omega_0)^2}|s\rangle$. Der Jones-Operator $\mathbf{T}(\omega)$ ist eindeutig festgelegt durch die Realisierung des Systems, siehe Kapitel 3.2. Im Folgenden soll die gleiche Realisierung betrachtet werden wie in Kapitel 3.5, der dort analysierte Jones-Operator stimmt also mit demjenigen der Gleichung (4.7) überein.

Exkurs: Anmerkungen zur Implementierung

Ohne auf Details der Implementierung des Computerprogramms eingehen zu wollen, sei erwähnt, dass der Jones-Operator \mathbf{T} intern als komplexe 2×2 Jones-Matrix (bezüglich einer festgelegten Basis) dargestellt wird, siehe Gleichung (2.13) auf Seite 17. Entsprechend sind die Jones-Vektoren $|T\rangle$ und $|S\rangle$ als komplexe zweidimensionale Spaltenvektoren implementiert, siehe Gleichung (2.10) auf Seite 17. Die spektrale Abtastung der Jones-Matrix $\mathbf{T}(\omega)$ und der Jones-Vektoren $|S(\omega)\rangle$ und $|T(\omega)\rangle$ – sowie die zeitliche Abtastung der Jones-Vektoren $|S(t)\rangle$ und $|T(t)\rangle$ – erfolgt analog zum Vorgehen des Kapitels 3.2.1. Dabei soll hier eine spektrale Schrittweite von $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{PSP}}/50$ angenommen werden mit insgesamt $2^{13} = 8192$ Abtastwerten. Weitere Informationen zur Abtastung sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich, zu den Folgen für das *diskrete periodische* Zeitsignal und das *diskrete periodische* Spektrum sowie zur verbindenden Transformation, der *diskreten* Fourier-Transformation (welche

hier als »schnelle Fourier-Transformation« gemäß [75] implementiert ist), finden sich beispielsweise in [64] und in [76]. Die nachfolgenden Darstellungen und Beschreibungen sind zwar an den kontinuierlichen Fall angelehnt, die Implementierung der Algorithmen basiert jedoch naturgemäß auf dem diskreten Fall.

Zeitlicher Verlauf der Leistung am Ausgang

Durch inverse Fourier-Transformation von $|T(\omega)\rangle$ folgt der zeitabhängige, nicht normierte Jones-Vektor am Ausgang $|T(t)\rangle$. Daraus resultiert schließlich der zeitliche Verlauf der Leistung am Ausgang (bei entsprechender Skalierung) zu $\langle T(t)|T(t)\rangle$. Dieser Verlauf ist nach geeigneten Kriterien auszuwerten:

Energie, Transmissionskoeffizient und PDL

So entspricht das »nullte Moment« des zeitlichen Leistungsverlaufs

$$M_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \langle T(t)|T(t)\rangle dt \quad (4.8)$$

der gesamten Energie des Pulses am Ausgang. Wird diese Energie ins Verhältnis gesetzt zur Energie des Pulses am Eingang, folgt der Transmissionskoeffizient *des Pulses* \mathcal{J} . Aufgrund von PDL hängt sein Wert – bei festgelegter Trägerfrequenz – ab vom Polarisationszustand am Eingang, also von den Winkeln 2ψ und 2χ der Tab. 4.1. Durch Variation dieses Polarisationszustands über die gesamte Poincaré-Kugel (hier mit der Schrittweite 3°) lassen sich der maximale und der minimale Wert des Transmissionskoeffizienten $\mathcal{J}_{\max/\min}$ – sowie die zugehörigen Polarisationszustände – ermitteln. Unter Verwendung dieser Extremwerte von \mathcal{J} kann schließlich die PDL *des Pulses* bestimmt werden (in [42] »effektive PDL« genannt). Sie wird nur dann mit der PDL *des Systems* (also mit der PDL, welche direkt aus dem Jones-Operator des Systems folgt) bei der Trägerfrequenz übereinstimmen, wenn der Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ (deutlich) kleiner als Eins ist, wenn also die Bandbreite des Signals geringer als die Bandbreite der PSPs ist.

Mittlere Laufzeit, DGD und »Laufzeit-PSPs«

Das »erste Moment« des zeitlichen Leistungsverlaufs ist definiert als

$$M_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t \langle T(t)|T(t)\rangle dt. \quad (4.9)$$

Damit lässt sich das Verhältnis $\mathcal{L} \equiv M_1/M_0$ als mittlere Laufzeit des Pulses identifizieren, also als Ankunftszeit des »Schwerpunkts« des Pulses. (Gemäß der Diskussion des Kapitels 3.1 ist zu beachten, dass es sich dabei um die Laufzeit *relativ* zur polarisationsunabhängigen Laufzeit handelt. Deshalb werden sowohl positive als auch negative Werte von \mathcal{L} auftreten.) Wird diese Laufzeit – bei konstanter Trägerfrequenz – als Funktion des Polarisationszustands am Eingang gemessen, so folgen weitere wichtige Größen: Die Differenz der maximalen \mathcal{L}_{\max} und der minimalen \mathcal{L}_{\min} gemessenen

Laufzeit soll bezeichnet werden als DGD *des Pulses* (in [42] »effektive PMD« genannt), die zugehörigen Polarisationszustände als »Laufzeit-PSPs« des Pulses.¹

RMS-Pulsweite, Verbreiterung und »Verbreiterungs-PSPs«

Wird das »zweite Moment« des zeitlichen Leistungsverlaufs gemäß

$$M_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \langle T(t) | T(t) \rangle dt \quad (4.10)$$

eingeführt, so lässt sich die sogenannte »RMS-Pulsweite« definieren als

$$T_{\text{RMS}} \equiv \sqrt{\frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^2}. \quad (4.11)$$

Auch für stark verzerrte Pulse ist dies ein geeignetes Maß für deren zeitliche Breite. Das Verhältnis der zeitlichen Breite am Ausgang zur entsprechenden Breite am Eingang wird »Verbreiterung des Pulses«

$$\mathcal{V} \equiv \frac{T_{\text{RMS}}(\text{Ausgang})}{T_{\text{RMS}}(\text{Eingang})} \quad (4.12)$$

genannt. Es ist ein sehr gutes Maß zur Beurteilung von PMD- und PDL-bedingten Signalverzerrungen [39]. Wird die Verbreiterung \mathcal{V} als Funktion des Polarisationszustands am Eingang ermittelt, so treten mindestens ein Polarisationszustand mit maximaler Verbreiterung \mathcal{V}_{max} (im unitären Fall ein ganzer Kreis auf der Poincaré-Kugel) sowie zwei Polarisationszustände mit minimaler Verbreiterung $\mathcal{V}_{\text{min}\pm}$ auf. Diese beiden Polarisationszustände minimaler Pulsverbreiterung werden »Verbreiterungs-PSPs« des Pulses genannt. Unter der Annahme eines unitären Systems sowie des Grenzfalles $\mathcal{V} \ll 1$ stimmen die Verbreiterungs-PSPs mit den Laufzeit-PSPs sowie mit den PSPs *des Systems* bei der Trägerfrequenz überein. In diesem Fall gilt $\mathcal{V}_{\text{min}\pm} = 1$, ein derart eingekoppelter Puls erreicht den Ausgang des Systems völlig unverzerrt. Bei größeren Werten des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ oder in Anwesenheit von PDL werden diese Aussagen jedoch ihre Gültigkeit verlieren.

Die Bezeichnungsweise der beiden minimalen Verbreiterungen $\mathcal{V}_{\text{min}\pm}$ soll gemäß der folgenden Konvention erfolgen: Die Pulsverbreiterung desjenigen Minimums, dessen Polarisationszustand näher am *langsamen* PSP des Systems (bei der Trägerfrequenz)

¹ Die Einführung unterschiedlicher PSPs *eines Pulses* (Laufzeit-PSPs sowie weiter unten definierte Verbreiterungs-PSPs und DOP-PSPs) ist nur bei großen Werten des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ und / oder bei Systemen mit PMD und PDL notwendig. Im Grenzfalle $\mathcal{V} \ll 1$ eines Systems *ohne* PDL ist die Laufzeit eines Pulses genau bei den Polarisationszuständen maximal bzw. minimal, bei denen die Pulsverbreiterung minimal und die DOP am Ausgang maximal wird. Dann stimmen die PSPs *des Pulses* auch mit den PSPs *des Systems* bei der Trägerfrequenz überein, also mit den PSPs, welche direkt aus dem Jones-Operator des Systems folgen. Eine der wesentlichen Aufgaben des Kapitels 4 wird darin bestehen, den Einfluss von PDL auf die unterschiedlichen PSPs eines Pulses zu untersuchen.

liegt, wird $\mathcal{V}_{\min+}$ genannt. Entsprechend bezeichnet $\mathcal{V}_{\min-}$ das Minimum mit dem Polarisationszustand in der Nähe des *schnellen* PSPs des Systems.

DOP und »DOP-PSPs«

Die Berechnung der DOP \mathcal{D} eines Signals wurde in Kapitel 2.2.6 ausführlich beschrieben. Entsprechend lässt sich die DOP des Pulses am Ausgang mithilfe des frequenzabhängigen, nicht normierten Jones-Vektors $|T(\omega)\rangle$ bestimmen. Wird der so ermittelte Wert \mathcal{D} als Funktion des Polarisationszustands am Eingang aufgetragen, so ergeben sich mindestens ein Minimum der DOP \mathcal{D}_{\min} sowie zwei Maxima $\mathcal{D}_{\max\pm}$. Die Bezeichnung dieser Maxima erfolgt analog zur Konvention bei der Pulsverbreiterung: Das Maximum mit dem Polarisationszustand nahe dem *langsamen* PSP des Systems (bei der Trägerfrequenz) wird $\mathcal{D}_{\max+}$ genannt. Entsprechend erhält das Maximum in der Nähe des *schnellen* PSPs des Systems die Bezeichnung $\mathcal{D}_{\max-}$. Die zugehörigen Polarisationszustände der beiden Maxima sollen »DOP-PSPs« genannt werden. Wird das Signal also derart in das System eingekoppelt, dass sein Polarisationszustand einem der beiden DOP-PSPs entspricht, so ist sein Polarisationsgrad am Ausgang definitionsgemäß maximal.

Zusammenfassung der Analysemethode

Am Ausgang des Systems werden also die Energie des Pulses M_0 , seine Laufzeit \mathcal{L} , die RMS-Pulsweite T_{RMS} sowie seine DOP \mathcal{D} bestimmt, siehe Abb. 4.1. Aus den Werten von M_0 und T_{RMS} folgen unmittelbar der Transmissionskoeffizient des Pulses \mathcal{T} sowie die Pulsverbreiterung \mathcal{V} . All diese Größen werden für jede der Parameterkombinationen der Tab. 4.1 – also insgesamt für $\approx 5,5 \cdot 10^7$ Kombinationen – berechnet. Durch eine Analyse der Abhängigkeit dieser Größen vom Polarisationszustand am Eingang (also vom vierten Parameter der Tab. 4.1) folgen ihre jeweiligen Maxima und Minima, die PSPs *des Pulses* (Laufzeit-PSPs, Verbreiterungs-PSPs und DOP-PSPs) sowie die PDL und die DGD *des Pulses*. Diese Größen sind offensichtlich nur noch eine Funktion eines dreidimensionalen Parameterraums, bestehend aus den ersten drei Parametern der Tab. 4.1.

Auswertung der Daten

Zur systematischen Auswertung dieser umfangreichen Datensätze wurden Auswertungsroutinen entwickelt, mit denen beispielsweise das Auffinden der globalen und lokalen Extrema sowie die Weiterverarbeitung sämtlicher Daten an diesen Stellen des Parameterraums automatisiert werden konnten. Die so ausgewerteten Daten liefern eine Unmenge interessanter Ergebnisse, von denen bisher nur ein Bruchteil in ähnlicher Form in der Literatur beschrieben wurde. Die Darstellung und Beschreibung all dieser Ergebnisse würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen, deshalb soll vorwiegend eine Konzentration auf neue (zum Teil unerwartete) und gleichsam praxisrelevante Resultate erfolgen.

4.2 Ausgangspunkt und Zielsetzung

Gemäß der Diskussion des Kapitels 2.3.4 verhält sich ein unitäres System (ein System ohne PDL) im Grenzfall geringer Signalbandbreiten wie ein einfaches doppelbrechendes Element: Die beiden PSPs des Systems am Eingang \hat{s}_+ und \hat{s}_- ändern sich entlang der Frequenzkomponenten des Signals nicht. Sie sind orthogonal (im Jones-Raum), zeigen also in entgegengesetzte Richtungen der Poincaré-Kugel, ihr relativer Winkel im Stokes-Raum beträgt 180° . Wird ein vollständig polarisierter Puls so in das System eingekoppelt, dass sein Polarisationszustand einem dieser PSPs \hat{s}_+ und \hat{s}_- entspricht, so erreicht er vollständig polarisiert (DOP $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\max\pm} = 1$) und völlig unverzerrt (Pulsverbreiterung $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\min\pm} = 1$) den Ausgang des Systems. Seine Laufzeit ist entweder maximal ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\max} = +\Delta\tau/2$ bei der Einkopplung in den langsamen PSP \hat{s}_+) oder minimal ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\min} = -\Delta\tau/2$ bei der Einkopplung in \hat{s}_-). Somit stimmen die »DOP-PSPs«, die »Verbreiterungs-PSPs« und die »Laufzeit-PSPs« *des Pulses* allesamt mit den PSPs *des Systems* (bei der Trägerfrequenz) \hat{s}_+ und \hat{s}_- überein. Wird der Puls andererseits so eingekoppelt, dass sein Polarisationszustand im Stokes-Raum senkrecht zu den beiden PSPs \hat{s}_+ und \hat{s}_- steht, so ist er am Ausgang maximal depolarisiert (DOP $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\min}$) und maximal verzerrt (Pulsverbreiterung $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\max}$). Seine Laufzeit ist dann gleich der polarisationsunabhängigen Laufzeit $\mathcal{L} = 0$.

All diese Aussagen sind nur dann streng gültig, wenn das System frei von PDL ist und wenn zugleich die Bandbreite des Signals deutlich kleiner als die PSP-Bandbreite ist, wenn also $\mathcal{V} \equiv \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}} \ll 1$ gilt.¹ Die Auswirkung eines großen Wertes des Parameters \mathcal{V} wurde in der Literatur bereits ausführlich beschrieben, eine umfassende Analyse findet sich beispielsweise in [40]. Im Grenzfall schwacher PDL müssen die Resultate dieses Kapitels entsprechend mit den bekannten Ergebnissen der Literatur übereinstimmen. Die Hauptaufgabe soll jedoch nicht darin bestehen, den Einfluss des Parameters \mathcal{V} zu untersuchen, sondern den Einfluss der PDL, welcher in der Literatur bisher nur unzureichend berücksichtigt wurde.

Weiterhin soll in diesem Kapitel nicht die *Scharstatistik* der Pulsverzerrungen analysiert werden, derartige Untersuchungen sind die Aufgabe des Kapitels 5. Hier soll vielmehr die Frequenz- und die Polarisationsabhängigkeit der Pulsverzerrung analysiert werden. Damit werden beispielsweise Aussagen ermöglicht zur Lage ausgezeichneter Polarisationszustände auf der Poincaré-Kugel sowie zu deren Bedeutung in Anwesenheit starker PDL.

Um die nachfolgend dargestellten Resultate jeweils dem Parameterraum der Tab. 4.1 auf Seite 118 zuordnen zu können, werden die verwendeten Werte der System- und Signalparameter in jedem Bild ausdrücklich benannt. Beispielsweise wird die Angabe der Parameter, welche in einer Abbildung konstant gehalten werden, jeweils mithilfe

¹ Die nachfolgenden Untersuchungen werden allerdings zeigen, dass die Gültigkeit der Aussagen im unitären Fall zumindest bis $\mathcal{V} = 1$ in guter Näherung erfüllt ist, deutliche Abweichungen zeigen sich erst bei $\mathcal{V} = 2$.

kleiner »Textboxen« erfolgen. Die dargestellten Kurven tragen häufig Bezeichnungen wie $\angle(\mathcal{V}_{\max}, \mathcal{J}_{\min})$ oder $\mathcal{V}(\mathcal{L}_{\max})$. Deren Bedeutung ist zusammenfassend im »Verzeichnis der Formelzeichen« im Anhang aufgeführt. So bezeichnet beispielsweise $\angle(\mathcal{V}_{\max}, \dots)$ einen Winkel im Stokes-Raum zwischen zwei Polarisationszuständen am Eingang, von denen der erste die Eigenschaft hat, dass ein entsprechend eingekoppelter Puls maximal verbreitert wird. Ein Ausdruck wie $\mathcal{V}(\mathcal{L}_{\max})$ hingegen kennzeichnet die Verbreiterung eines Pulses, dessen Polarisationszustand am Eingang so ausgerichtet ist, dass seine Laufzeit maximal wird.

4.3 Orientierung ausgezeichneter Polarisationszustände

Der Einfluss von PDL auf die Richtung ausgezeichneter Polarisationszustände auf der Poincaré-Kugel ist für ein Verständnis der Wechselwirkung von PMD und PDL von großer Bedeutung. Unter anderem ist die Frage zu klären, wie die PSPs *des Systems* \hat{s}_+ und \hat{s}_- (basierend auf einer Analyse des Jones-Operators des Systems gemäß Abb. 3.1 auf Seite 71) mit den PSPs *des Pulses* (Verbreiterungs-PSPs, Laufzeit-PSPs und DOP-PSPs) zusammenhängen. Damit die Ergebnisse zunächst nicht durch Effekte höherer Ordnung beeinflusst werden, soll der Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ zu Beginn der Betrachtungen auf den geringen Wert $\mathcal{V} = 1/4$ gesetzt werden. Sämtliche PMD- und PDL-Größen des Systems (also alle Größen der Abb. 3.1 auf Seite 71) haben dann entlang der spektralen Komponenten des Signals einen nahezu konstanten Wert.

Als Vergleichsgröße ist in den ersten drei Teilbildern der nachfolgenden Abbildung (Abb. 4.3) jeweils der spektrale Verlauf des Winkels $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$ zwischen den PSPs *des Systems* am Eingang als dünne blaue Linie eingetragen. Dieser Verlauf wurde mit der bekannten Methode des Kapitels 3 errechnet, siehe Kapitel 3.2.1. Dabei basiert die gepunktete blaue Linie – mit Werten nahe 180° – auf einem System mit schwacher mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB, während die durchgezogene blaue Linie den Fall $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB widerspiegelt.

Winkel zwischen den Verbreiterungs-PSPs

In der Abb. 4.3(a) ist der spektrale Verlauf des Winkels zwischen den »Verbreiterungs-PSPs« des Pulses dargestellt, also des Winkels zwischen den beiden Polarisationszuständen am Eingang, welche die geringste Pulsverbreiterung hervorrufen. Er ist ersichtlich umso geringer, je größer die mittlere PDL pro Element ist – völlig analog zum Verhalten des Winkels $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$. Daneben treten jedoch einige Besonderheiten auf: Zwar stimmt der Winkel zwischen den Verbreiterungs-PSPs in einigen Bereichen des Spektrums näherungsweise mit dem Winkel $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$ überein. In anderen Bereichen jedoch treten deutliche Abweichungen auf. Weiterhin fällt auf, dass nicht für jede Trägerfrequenz ein Winkel eingetragen ist. Bei den betroffenen Frequenzen ist eine Definition des Winkels zwischen den Verbreiterungs-PSPs nicht möglich, da dort nur *ein* Minimum der Pulsverbreiterung – und somit nur *ein* Verbreiterungs-PSP – auftritt. Die beiden Verbreiterungs-PSPs sind dann zu *einem* Verbreiterungs-PSP »verschmol-

zen«, eine Variation des Polarisationszustands am Eingang über die gesamte Poincaré-Kugel fördert also nur ein Minimum der Pulsverbreiterung zutage und nicht deren zwei. Offenbar sind die üblichen Vorstellungen vom Verhalten doppelbrechender Systeme in Anwesenheit starker PDL nachhaltig zu revidieren. Weitere Aspekte dieser unerwarteten Phänomene werden im Verlauf dieses Kapitels näher betrachtet, sie werden dazu beitragen, ein verbessertes Gesamtbild der Zusammenhänge zu erlangen.

Winkel zwischen den Laufzeit-PSPs

Ein ähnlicher spektraler Verlauf wie in Abb. 4.3(a) zeigt sich auch in Abb. 4.3(b), wo der Winkel zwischen den beiden »Laufzeit-PSPs« des Pulses als Funktion der Trägerfrequenz aufgetragen ist, also der Winkel zwischen den Polarisationszuständen, welche die maximale bzw. die minimale Laufzeit bewirken. Wie bei den Verbreiterungs-PSPs zeigt sich auch hier, dass der Winkel umso mehr vom Wert 180° abweicht, je größer die mittlere PDL ist. Auch treten wiederum deutliche Abweichungen vom Verlauf des Winkels $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$ auf. Ein Vergleich der Abb. 4.3(a) und (b) zeigt ferner, dass der Winkel zwischen den Verbreiterungs-PSPs im Allgemeinen nicht mit dem Winkel zwischen den Laufzeit-PSPs übereinstimmt. Die Lage der Verbreiterungs-PSPs auf der Poincaré-Kugel ist also in Anwesenheit von PDL nicht mehr identisch zur Lage der Laufzeit-PSPs. Dies hat zur Folge, dass die Einkopplung eines Pulses mit einem Polarisationszustand, welcher die Laufzeit maximiert bzw. minimiert, nicht notwendigerweise eine minimale Pulsverbreiterung bewirkt. Doch dazu später mehr. Schließlich zeigt Abb. 4.3(b) erwartungsgemäß, dass – im Gegensatz zum Fall der Verbreiterungs-PSPs – immer *zwei* Laufzeit-PSPs existieren und sich somit immer ein Winkel zwischen den Laufzeit-PSPs definieren lässt. Ursächlich dafür ist, dass die beiden Laufzeit-PSPs definiert sind unter Verwendung des *globalen* Maximums und des *globalen* Minimums der Laufzeit – diese treten naturgemäß immer auf.

Winkel zwischen den DOP-PSPs

Der spektrale Verlauf des Winkels zwischen den beiden »DOP-PSPs« des Pulses, also zwischen den beiden Polarisationszuständen, welche maximale DOP am Ausgang bewirken, ist in Abb. 4.3(c) dargestellt. Unabhängig von der Stärke der mittleren PDL stimmt dieser Winkel offensichtlich *immer* mit dem Winkel $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$ zwischen den PSPs des Systems am Eingang überein. Die weiteren Untersuchungen dieses Kapitels werden zudem zeigen, dass nicht nur diese *relativen* Winkel übereinstimmen, sondern auch die absolute Lage der DOP-PSPs des Pulses und der PSPs des Systems – zumindest für den Fall $\mathcal{V} = 1/4$. Somit bewirkt die Einkopplung eines Pulses in einen der beiden PSPs des Systems \hat{s}_+ und \hat{s}_- – unabhängig von der Stärke der mittleren PDL – immer die Maximierung der DOP am Ausgang. Weiterhin zeigt ein Vergleich von Abb. 4.3(c) mit Abb. 4.3(a), dass der Winkel zwischen den DOP-PSPs in der Regel nicht mit dem Winkel zwischen den Verbreiterungs-PSPs übereinstimmt. Ein gemäß der DOP-PSPs eingekoppelter Puls minimiert also nicht notwendigerweise die Pulsverbreiterung. Dies kann zu Problemen bei einfachen Verfahren zur PMD-Kompensation führen: Beispielsweise basiert eines dieser Verfahren darauf, dass der Polarisationszustand am

Eingang solange variiert wird, bis die DOP am Ausgang ein Maximum erreicht, bis also am Eingang einer der beiden DOP-PSPs gefunden ist. Für Systeme ohne PDL ist damit gleichzeitig ein Minimum der Signalverzerrung erreicht (falls der Parameter \mathcal{V} nicht zu groß ist). Dies ist in Anwesenheit von PDL offensichtlich nicht mehr gewährleistet. Diese Problematik wird im Verlauf dieses Kapitels noch näher untersucht.

Die Abb. 4.3(c) zeigt ferner, dass bei jeder Trägerfrequenz immer *beide* DOP-PSPs existieren, der Winkel zwischen den beiden DOP-PSPs ist somit immer definierbar. Eine vollständige Verschmelzung der beiden DOP-PSPs lässt sich also – im Gegensatz zu den Verbreiterungs-PSPs – nicht beobachten. Dies zeigt sich selbst bei Systemen mit noch größeren Werten der mittleren PDL (größer als die hier diskutierten Werte), auf derartige Systeme soll hier aber nicht weiter eingegangen werden, da sie fern der Praxis sind.

Einfluss von PMD und PDL höherer Ordnung

In den ersten drei Teilbildern der Abb. 4.3 wird der Einfluss des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ nicht berücksichtigt, dieser verbleibt konstant auf dem geringen Wert $\mathcal{V} = 1/4$. Wird dieser Wert erhöht, so ändern sich die spektralen Verläufe der Abb. 4.3(a) bis (c) zunächst kaum, bis zum Wert $\mathcal{V} = 1$ lassen sich keine nennenswerten Abweichungen beobachten. Erst für $\mathcal{V} = 2$ – und vor allem für $\mathcal{V} = 4$ – treten deutliche Effekte höherer Ordnung auf. Sie wirken sich beispielsweise dadurch aus, dass der spektrale Verlauf des Winkels zwischen den DOP-PSPs in Abb. 4.3(c) nicht mehr mit dem Verlauf des Winkels $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$ übereinstimmt, er »verwischt« zunehmend. Ähnliches gilt auch für die spektralen Verläufe in Abb. 4.3(a) und (b). Weiterhin zeigt sich bei großen Werten des Parameters \mathcal{V} , dass nicht mehr bei jeder Trägerfrequenz *zwei* DOP-PSPs definiert werden können, es kommt also zu Verschmelzungen der beiden DOP-PSPs – völlig analog zu den Verschmelzungen der Verbreiterungs-PSPs in Abb. 4.3(a). Im Gegensatz zum Fall der Verbreiterungs-PSPs treten diese Verschmelzungen allerdings nur für große Werte sowohl des Parameters \mathcal{V} als auch der mittleren PDL auf.

Winkel zwischen den Extrema des Transmissionskoeffizienten

Schließlich soll die Orientierung der beiden Polarisationszustände betrachtet werden, welche den Transmissionskoeffizienten \mathcal{T} des Pulses maximieren bzw. minimieren, welche also minimale bzw. maximale Dämpfung verursachen. Der spektrale Verlauf des Winkels zwischen diesen beiden Polarisationszuständen ist in Abb. 4.3(d) dargestellt. Er beträgt offenbar immer 180° , unabhängig von allen Parametern des (dreidimensionalen) Parameterraums, also unabhängig von der Trägerfrequenz ω_T , vom Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ sowie von der Stärke der mittleren PDL.

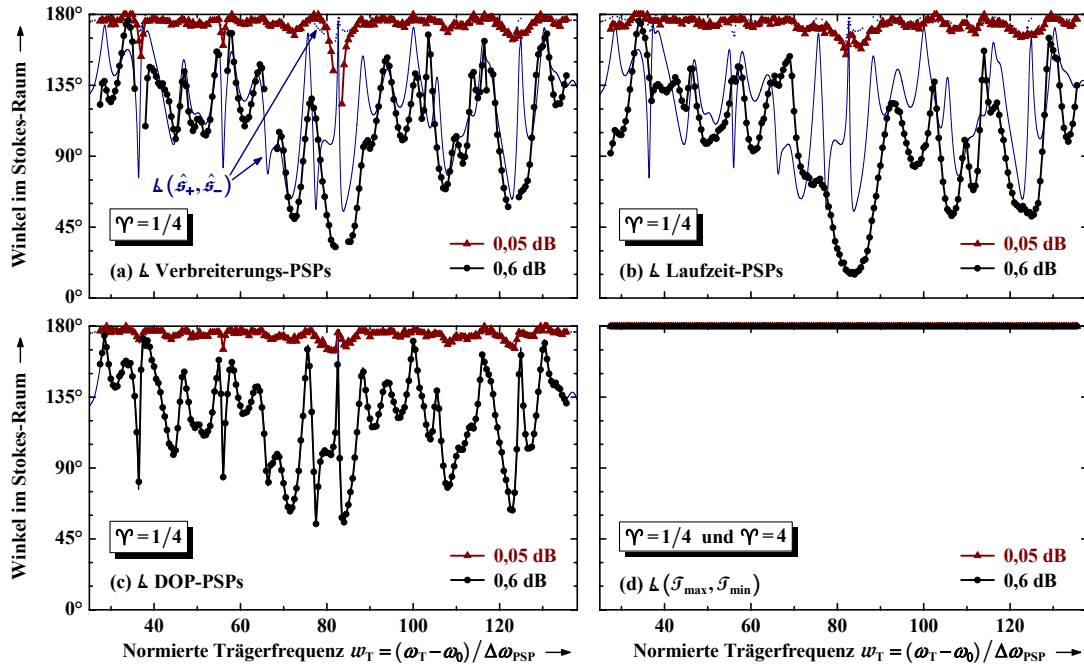


Abb. 4.3: Winkel zwischen (a) den Verbreiterungs-PSPs, (b) den Laufzeit-PSPs und (c) den DOP-PSPs des Pulses im Vergleich zum Winkel $\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$ zwischen den PSPs des Systems am Eingang als Funktion der normierten Trägerfrequenz w_T für zwei Werte der mittleren PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB und 0,6 dB; der Parameter $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ ist dabei festgelegt auf $\gamma = 1/4$. (d) Winkel zwischen den Polarisationszuständen am Eingang, bei denen der Transmissionskoeffizient des Pulses \mathcal{T} maximal bzw. minimal wird, als Funktion der Trägerfrequenz für $\gamma = 1/4$ und für $\gamma = 4$. (Eine ausführliche Diskussion der betrachteten Realisierung des Systems sowie des dargestellten Frequenzbereichs findet sich in den Kapiteln 3.2.3 und 3.5. Der Zusammenhang zwischen der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ und der mittleren globalen PDL wurde in Kapitel 3.3.1 diskutiert.)

Winkel zwischen den PSPs des Systems und den PSPs des Pulses

Bisher wurde die *relative* Orientierung der jeweiligen PSPs des Pulses analysiert. Damit lassen sich jedoch noch keine Aussagen treffen über die *absoluten* Abstände dieser PSPs zu den PSPs des Systems \hat{s}_+ und \hat{s}_- . Diese Abstände sind in der folgenden Abbildung als Funktion der Trägerfrequenz für unterschiedliche Punkte des Parameter-raums dargestellt. So ist in der oberen Hälfte – analog zu Abb. 4.3 – der Fall $\gamma = 1/4$ angenommen. Die dort abgebildeten Verläufe sind ersichtlich konsistent zu den bisherigen Ergebnissen: Beim unitären System der Abb. 4.4(a) stimmen sämtliche PSPs des Pulses (Verbreiterungs-PSPs, Laufzeit-PSPs und DOP-PSPs) mit ihren zugehörigen PSPs des Systems \hat{s}_+ und \hat{s}_- überein. Sobald jedoch nennenswert PDL im System vorhanden ist, gilt diese Übereinstimmung nicht mehr, siehe Abb. 4.4(b). Die Verbreiterungs-PSPs und die Laufzeit-PSPs unterscheiden sich dann je nach Trägerfrequenz deutlich von den PSPs des Systems \hat{s}_+ und \hat{s}_- . Die DOP-PSPs hingegen stimmen auch für Systeme mit sehr starker mittlerer PDL mit den PSPs des Systems \hat{s}_+ und \hat{s}_- überein.

Bei den bisherigen Betrachtungen blieb der Einfluss von PMD und PDL höherer Ordnung unberücksichtigt, da der Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ konstant den geringen Wert $\mathcal{V} = 1/4$ hatte. In der unteren Hälfte der Abb. 4.4 wird dagegen $\mathcal{V} = 4$ angenommen. Die abgebildeten Kurven unterscheiden sich also von denjenigen der oberen Hälfte dadurch, dass entweder die Bandbreite des Signals oder die mittlere DGD des Systems um den Faktor 16 erhöht wurde. Erwartungsgemäß zeigen sich beim unitären System der Abb. 4.4(c) die bekannten Auswirkungen von PMD höherer Ordnung, welche beispielsweise in [40] aufgeführt sind: Die PSPs des Pulses stimmen nicht mehr mit den PSPs des Systems *bei der Trägerfrequenz* \hat{s}_+ und \hat{s}_- überein. Ursächlich dafür ist die Frequenzabhängigkeit der PSPs \hat{s}_+ und \hat{s}_- , welche durch die »PSP-Depolarisation« (siehe Kapitel 2.3.4) ausgedrückt werden kann. Ein Vergleich der Abb. 4.4(c) mit dem spektralen Verlauf der PSP-Depolarisation in Abb. 3.22(a) auf Seite 105 zeigt erwartungsgemäß eine ausgeprägte Ähnlichkeit: Große Winkel in Abb. 4.4(c) treten genau bei solchen Trägerfrequenzen auf, bei denen auch die PSP-Depolarisation in Abb. 3.22(a) groß ist.

Ein weiteres Ergebnis von [40] besagt, dass die Lage der Verbreiterungs-PSPs für unitäre Systeme identisch ist zur Lage der Laufzeit PSPs. Weiterhin ist der Abstand des langsamen Laufzeit-PSPs zum PSP \hat{s}_+ des Systems gemäß [40] genauso groß wie der Abstand des schnellen Laufzeit-PSPs zum PSP \hat{s}_- . Diese Aussagen werden durch die Abb. 4.4(c) bestätigt, sie wirken sich dort als Überlappung aller roten und blauen Kurven aus. Die beiden grünen Kurven repräsentieren den Abstand der DOP-PSPs zu den PSPs \hat{s}_+ und \hat{s}_- des Systems. Sie überlappen in Abb. 4.4(c) ebenfalls, allerdings sind sie nicht identisch zu den anderen Kurven. Bei einem großen Wert des Parameters \mathcal{V} stimmen also die DOP-PSPs nicht mehr mit den anderen PSPs des Pulses überein – selbst in Abwesenheit von PDL.

Ist zudem PDL im System vorhanden wie in Abb. 4.4(d), so werden die Entartungen der Abb. 4.4(c) aufgehoben. Die Verbreiterungs-PSPs stimmen dann nicht mehr mit den Laufzeit-PSPs überein. Auch sind die jeweiligen Abstände von den PSPs des Systems \hat{s}_+ und \hat{s}_- nun abhängig davon, ob der langsame PSP \hat{s}_+ oder der schnelle PSP \hat{s}_- betrachtet wird. Ein Vergleich der Abb. 4.4(d) mit der Abb. 4.4(b) schließlich zeigt als wesentlichen Unterschied, dass die beiden DOP-PSPs bei $\mathcal{V} = 4$ – im Gegensatz zum Fall $\mathcal{V} = 1/4$ – nicht mehr mit den PSPs des Systems \hat{s}_+ und \hat{s}_- (bei der Trägerfrequenz) übereinstimmen.

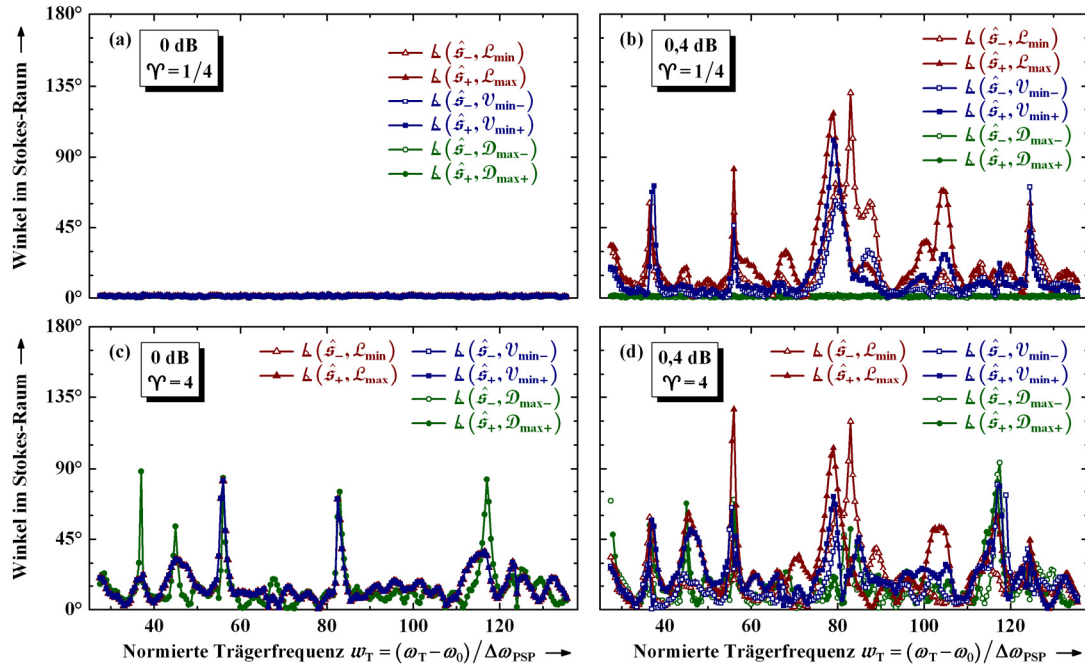


Abb. 4.4: Winkel zwischen dem schnellen \hat{s}_- bzw. dem langsamen \hat{s}_+ PSP des Systems am Eingang (bei der Trägerfrequenz) und den zugehörigen PSPs des Pulses als Funktion der Trägerfrequenz w_T ; *Links*: System ohne PDL; *Rechts*: System mit recht starker PDL, $\langle \text{PDL}_i \rangle = 0,4$ dB; *Oben*: Geringe Signalbandbreite und/oder System mit geringer mittlerer DGD, $\mathcal{V} = 1/4$; *Unten*: Große Signalbandbreite bzw. System mit großer mittlerer DGD, $\mathcal{V} = 4$. (Die betrachtete Realisierung des Systems ist die gleiche wie in Abb. 4.3, sie ist also identisch zur Realisierung des Kapitels 3.5. Dies gilt ebenso für alle weiteren Bilder dieses Kapitels.)

4.4 PDL des Pulses

Wird der Transmissionskoeffizient \mathcal{I} des Pulses bei fester Trägerfrequenz als Funktion des Polarisationszustands am Eingang gemessen, so treten ein Maximum \mathcal{I}_{max} sowie ein Minimum \mathcal{I}_{min} auf. Aus diesen Werten lässt sich die PDL des Pulses bestimmen. Der Zusammenhang zwischen der so ermittelten PDL und der PDL, welche sich gemäß Abb. 3.1 auf Seite 71 unmittelbar aus dem Jones-Operator \mathbf{T} des Systems berechnen lässt, ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Erwartungsgemäß stimmt die PDL des Pulses mit der PDL des Systems (bei der Trägerfrequenz) überein, wenn der Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ (deutlich) kleiner als Eins ist, siehe Abb. 4.5(a). Wie in [42] anhand eines stark vereinfachten Systems bereits gezeigt wurde, ist diese Übereinstimmung bei großen Werten des Parameters \mathcal{V} – aufgrund von PDL höherer Ordnung – gestört. Die PDL des Systems ist dann entlang der Frequenzkomponenten des Signals nicht mehr konstant. Folglich weicht die PDL des Pulses (in [42] »effektive PDL« genannt) von der PDL des Systems bei der Trägerfrequenz ab, siehe Abb. 4.5(b). Entgegen der Aussagen von [42] zeigt die Abb. 4.5(b) zudem, dass die PDL des Pulses nicht notwendigerweise geringer sein muss als die PDL des Systems bei der Trägerfrequenz. In der Nähe lokaler Minima kann sie ersichtlich auch größer sein. (In [42] ist

die PDL des Pulses nur aufgrund des extrem vereinfachten Beispielsystems *immer* geringer als die PDL des Systems bei der Trägerfrequenz.)

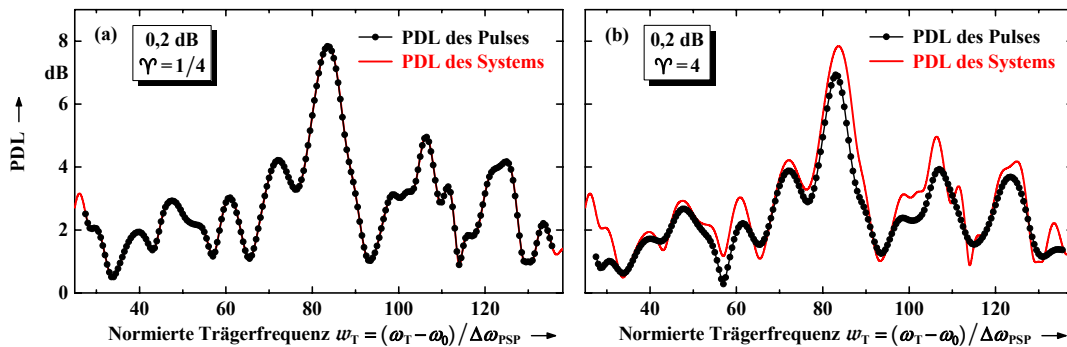


Abb. 4.5: PDL des Pulses und PDL des Systems als Funktion der Trägerfrequenz ω_T für die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0,2$ dB; für andere Werte von $\langle PDL_i \rangle$ sehen die Verläufe nahezu identisch aus, nur die Skalierung der Ordinatenachse verändert sich entsprechend. (a) $\Upsilon = 1/4$ (geringe Signalbandbreite bzw. System mit geringer mittlerer DGD); (b) $\Upsilon = 4$ (große Signalbandbreite bzw. System mit großer mittlerer DGD).

4.5 DGD des Pulses

Einfluss von PMD höherer Ordnung

Wird die Laufzeit \mathcal{L} des Pulses als Funktion des Polarisationszustands am Eingang ermittelt, so resultiert ein globales Maximum \mathcal{L}_{\max} sowie ein globales Minimum \mathcal{L}_{\min} der Laufzeit. Deren Differenz definiert die *DGD des Pulses*, welche in der folgenden Abbildung – zunächst für ein unitäres System – als Funktion der Trägerfrequenz aufgetragen ist. Zum Vergleich ist jeweils der spektrale Verlauf der *DGD des Systems* eingezeichnet, er lässt sich direkt aus dem frequenzabhängigen Jones-Operator \mathbf{T} des Systems berechnen, siehe Abb. 3.1 auf Seite 71. Ist der Wert des Parameters $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ gering, so ist zu erwarten, dass die DGD des Pulses mit der DGD des Systems bei der Trägerfrequenz übereinstimmt. Dies bestätigt sich in der Abb. 4.6(a), bei der $\Upsilon = 1/4$ angenommen wird. Wird die Bandbreite des Signals oder die mittlere DGD des Systems erhöht, so steigt der Wert des Parameters Υ entsprechend an, der Einfluss von PMD höherer Ordnung wächst. Die Auswirkungen auf den spektralen Verlauf der DGD des Pulses zeigen sich in Abb. 4.6(b). Für $\Upsilon = 4$ stimmt der Verlauf offenbar nicht mehr mit dem spektralen Verlauf der DGD des Systems überein. Zumeist ist die DGD des Pulses geringer als die DGD des Systems, bei einigen Trägerfrequenzen (in der Nähe lokaler Minima) kann sie jedoch auch größer sein.

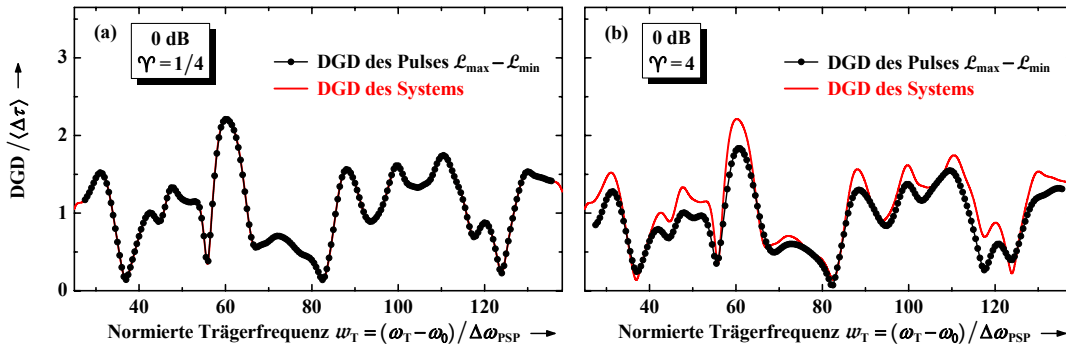


Abb. 4.6: DGD des Pulses (Differenz der maximalen \mathcal{L}_{max} und der minimalen \mathcal{L}_{min} Laufzeit) im Vergleich zur DGD des Systems als Funktion der Trägerfrequenz w_T für ein System ohne PDL; (a) $\mathcal{V} = 1/4$ (geringe Signalbandbreite bzw. System mit geringer mittlerer DGD); (b) $\mathcal{V} = 4$ (große Signalbandbreite bzw. System mit großer mittlerer DGD).

Bei einem unitären System mit $\mathcal{V} = 1/4$ sind die Laufzeit-PSPs eines Pulses nahezu identisch zu den DOP-PSPs, siehe Abb. 4.4(a). Wird also unter dieser Bedingung ein Puls in die DOP-PSPs eingekoppelt, so wird er gleichzeitig in die Laufzeit-PSPs eingekoppelt, seine Laufzeit ist maximal bzw. minimal. Somit könnte in der Abb. 4.6(a) anstelle der DGD des Pulses $\mathcal{L}_{\text{max}} - \mathcal{L}_{\text{min}}$ genauso gut die Laufzeitdifferenz der DOP-PSPs $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\text{max}+}) - \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\text{max}-})$ aufgetragen werden, an dem dargestellten spektralen Verlauf würde sich nichts ändern.

Einfluss von PDL

In Anwesenheit von PDL stellt sich jedoch heraus, dass diese Übereinstimmung nicht mehr gegeben ist. Um dies zu zeigen, soll das System der Abb. 4.6(a) noch einmal betrachtet werden, nun allerdings mit der mittleren PDL pro Element $\langle \text{PDL}_i \rangle = 0,6$ dB. Auf der linken Seite der folgenden Abbildung ist die Laufzeitdifferenz der DOP-PSPs $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\text{max}+}) - \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\text{max}-})$ als Funktion der Trägerfrequenz aufgetragen, auf der rechten die DGD des Pulses $\mathcal{L}_{\text{max}} - \mathcal{L}_{\text{min}}$. Zum Vergleich ist jeweils der spektrale Verlauf der DGD des Systems eingezeichnet, welcher sich aufgrund der Anwesenheit von PDL vom entsprechenden Verlauf der Abb. 4.6 unterscheidet, siehe auch Abb. 3.17(a) auf Seite 101. Wie auf der linken Seite der Abb. 4.7 ersichtlich wird, kann die Laufzeitdifferenz der DOP-PSPs $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\text{max}+}) - \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\text{max}-})$ diesem geänderten Verlauf der DGD des Systems exakt folgen. Die DGD des Systems bestimmt also – für kleine Werte des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ – die Laufzeitdifferenz von Pulsen, welche in die DOP-PSPs eingekoppelt werden. Dies gilt selbst für Systeme mit noch größerer mittlerer PDL, welche hier allerdings nicht dargestellt sind.

Die DGD des Pulses $\mathcal{L}_{\text{max}} - \mathcal{L}_{\text{min}}$ hingegen kann in Anwesenheit von PDL deutlich größer werden als die DGD des Systems, dies zeigt sich in Abb. 4.7(b). Bei einigen Trägerfrequenzen ist die Laufzeitdifferenz des schnellsten und des langsamsten Pulses weitaus größer als es die DGD des Systems vermuten ließe. Die Laufzeit des schnellsten Pulses, der bei einer Variation der Eingangspolarisation auftritt, ist also *geringer als* $-\Delta\tau/2$, die Laufzeit des langsamsten Pulses hingegen ist *größer als* $+\Delta\tau/2$. Ihre Differenz ist somit größer als die DGD $\Delta\tau$ des Systems (bei der Trägerfrequenz). Diese

unerwartet große DGD eines Pulses wurde bereits in [42] anhand eines sehr einfachen Beispielsystems nachgewiesen. Allerdings haben die Autoren die Übereinstimmung der Laufzeitdifferenz der DOP-PSPs $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\max+}) - \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\max-})$ mit der DGD des Systems nicht erkannt bzw. nicht explizit erwähnt.

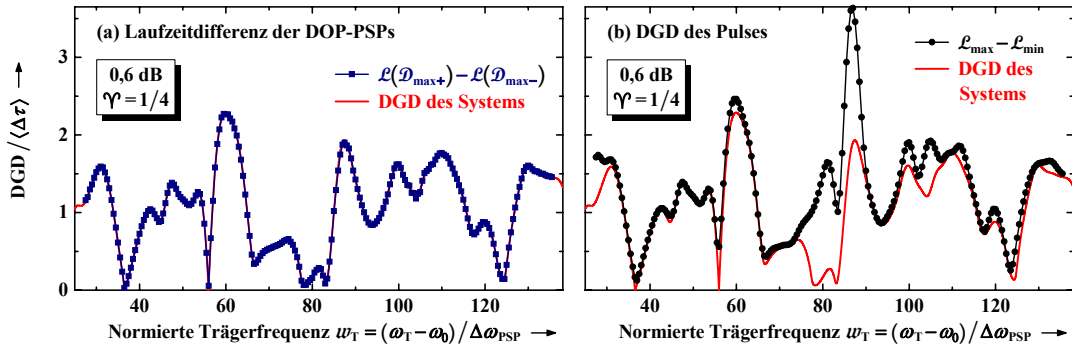


Abb. 4.7: (a) Laufzeitdifferenz der DOP-PSPs des Pulses und (b) DGD des Pulses (Differenz der maximalen \mathcal{L}_{\max} und der minimalen \mathcal{L}_{\min} Laufzeit) im Vergleich zur DGD des Systems als Funktion der Trägerfrequenz w_T für $\mathcal{V} = 1/4$ und $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB.

Wird der Wert des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ in Anwesenheit starker mittlerer PDL erhöht, so ändern sich die Verläufe der Abb. 4.7 zunächst kaum, bis $\mathcal{V} = 1$ treten nur marginale Abweichungen auf. Bei noch größeren Werten von \mathcal{V} machen sich dann – analog zu Abb. 4.5(b) und Abb. 4.6(b) – Effekte höherer Ordnung bemerkbar. Außerdem wird die ungewöhnlich große DGD des Pulses in Abb. 4.7(b) bei großen Werten von \mathcal{V} deutlich abgeschwächt.

4.6 Pulsverbreiterung

Die zentrale Größe zur Beurteilung von PMD-bedingten Pulsverzerrungen ist die Verbreiterung \mathcal{V} eines Pulses. Der Einfluss von PDL auf diese Größe soll nun ausführlich analysiert werden.

4.6.1 Extrema der Verbreiterung

Wird die Pulsverbreiterung \mathcal{V} als Funktion des Polarisationszustands am Eingang gemessen, so treten ein globales Maximum \mathcal{V}_{\max} (im unitären Fall auf einem Kreis der Poincaré-Kugel) sowie (in der Regel) zwei Minima $\mathcal{V}_{\min\pm}$ der Verbreiterung auf. Diese Extremwerte hängen – bei gegebener Realisierung des Systems – ab von der Trägerfrequenz w_T , vom Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ sowie von der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$. Sie sind also eine Funktion des dreidimensionalen Parameterraums, bestehend aus den ersten drei Parametern der Tab. 4.1 von Seite 118. Ihre spektralen Verläufe sind in der folgenden Abbildung (Abb. 4.8) für unterschiedliche Werte der Parameter \mathcal{V} und $\langle PDL_i \rangle$ aufgetragen. Auf der linken Seite ist jeweils der unitäre Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB dargestellt und auf der rechten der Fall starker mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB. Bei den beiden oberen Teilbildern gilt $\mathcal{V} = 1/4$, in der Mitte

$\Upsilon = 1$ und unten $\Upsilon = 4$. Effekte höherer Ordnung sind also in Abb. 4.8(a) und (b) nicht zu erwarten, in Abb. 4.8(e) und (f) hingegen werden sie sehr ausgeprägt sein.

Das unitäre System mit $\Upsilon = 1/4$, welches in Abb. 4.8(a) vorausgesetzt wird, verhält sich erwartungsgemäß im Wesentlichen wie ein einfaches doppelbrechendes Element: Wird der Puls in einen der beiden Verbreiterungs-PSPs eingekoppelt, so erreicht er praktisch unverzerrt den Ausgang des Systems, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\min\pm} = 1$. Steht der Polarisationszustand am Eingang jedoch senkrecht (im Stokes-Raum) zu den beiden Verbreiterungs-PSPs, so wird die Verzerrung des Pulses maximal, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\max}$. Der Wert dieser maximalen Verbreiterung hängt erwartungsgemäß von der Trägerfrequenz ab, er wird bestimmt durch die Stärke der DGD des Systems bei dieser Frequenz. Ein Vergleich des spektralen Verlaufs von \mathcal{V}_{\max} in Abb. 4.8(a) mit dem spektralen Verlauf der DGD in Abb. 3.17(a) auf Seite 101 zeigt entsprechend eine ausgeprägte Korrelation.

Wird in Abwesenheit von PDL der Wert von $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ weiter erhöht, so bewirkt dies zunächst vor allem eine veränderte Skalierung der Ordinatenachse. Der Übergang von $\Upsilon = 1/4$ zu $\Upsilon = 1$ [also der Übergang von Abb. 4.8(a) zu Abb. 4.8(c)] wird entweder durch eine viermal so große mittlere DGD des Systems $\langle\Delta\tau\rangle$ oder durch eine viermal so große Bandbreite des Signals $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ verursacht. Beides bewirkt einen entsprechenden Anstieg der maximal möglichen Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} und somit die veränderte Skalierung der Ordinatenachse. Erst ein Parameter Υ deutlich größer als Eins führt zu merklichen Auswirkungen von PMD höherer Ordnung, siehe Abb. 4.8(e). So wird die Korrelation zwischen der maximalen Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} und der DGD des Systems abgeschwächt. Zusätzlich steigt die minimale Verbreiterung $\mathcal{V}_{\min\pm}$ deutlich an, bei einigen Trägerfrequenzen wird $\mathcal{V}_{\min\pm}$ in Abb. 4.8(e) so groß, dass der Puls *immer* um mindestens 50 % verbreitert wird ($\mathcal{V}_{\min\pm} > 1,5$). Schließlich fällt auf, dass die beiden minimalen Verbreiterungen $\mathcal{V}_{\min\pm}$ immer identisch sind – trotz des großen Wertes des Parameters Υ .

Sobald im System nennenswert PDL vorhanden ist, ändern sich die beschriebenen Verhältnisse maßgeblich. Dies zeigt beispielsweise ein Vergleich der beiden oberen Teilbilder der Abb. 4.8. Die Erhöhung der mittleren PDL pro Element von $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB auf 0,6 dB bewirkt dabei eine Reihe ungewöhnlicher Effekte: So treten bei $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB Trägerfrequenzen auf, bei denen der Puls am Ausgang zeitlich *schmäler* sein kann als er am Eingang war, die Pulsverbreiterung ist in einem solchen Fall geringer als Eins. Dieses Phänomen, welches in unitären Systemen niemals auftreten kann, wurde erstmals in [33] für ein stark vereinfachtes System nachgewiesen. Die Abb. 4.8(b) zeigt, dass es auch in praxisnahen Systemen auftritt. Weiterhin verdeutlicht Abb. 4.8(b) das bereits diskutierte Phänomen des »Verschmelzens« der beiden Verbreiterungs-PSPs: Bei einigen Trägerfrequenzen lässt sich nur noch *ein* Minimum (das globale Minimum) der Pulsverbreiterung nachweisen, ein zweites (lokales) Minimum

tritt nicht auf.¹ Weiterhin haben diese beiden Minima – falls sie denn existieren – in der Regel unterschiedliche Werte, $\mathcal{V}_{\min+} \neq \mathcal{V}_{\min-}$. Von größerer Bedeutung für die Praxis ist jedoch ein weiterer ungewöhnlicher Effekt, welcher sich beim Vergleich der Abb. 4.8(a) und (b) zeigt: Offensichtlich kommt es in Anwesenheit von PDL zu einem massiven Anstieg der maximalen Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} . Dieser Anstieg tritt vorwiegend bei solchen Trägerfrequenzen auf, bei denen der momentane Wert der globalen PDL in Abb. 3.16 auf Seite 100 groß ist. Als Folge dieser zusätzlichen Pulsverbreiterung in Anwesenheit von PDL ist mit einer Zunahme der Wahrscheinlichkeit eines PMD-bedingten Systemausfalls zu rechnen. Weitergehende Untersuchungen zu dieser Thematik – auch unter Berücksichtigung optischer PMD-Kompensatoren – sollen in Kapitel 5 durchgeführt werden.

Ein Vergleich des spektralen Verlaufs von \mathcal{V}_{\max} in Abb. 4.8(b) mit dem spektralen Verlauf der DGD des Systems in Abb. 3.17(a) auf Seite 101 zeigt ferner, dass deren Korrelation in Anwesenheit von PDL massiv gestört ist. Dies hat unmittelbare Konsequenzen für bestimmte PMD-Messverfahren, bei denen die DGD des Systems indirekt über das Ausmaß von Signalverzerrungen ermittelt wird. So sind beispielsweise Messergebnisse der DGD, welche mithilfe der häufig eingesetzten »interferometrischen Methode« [1], [11] erzielt werden, in Anwesenheit starker PDL deutlich verfälscht [30]. Im Gegensatz dazu kann das »JME-Verfahren« von Heffner [20], welches auf einer direkten Auswertung der Jones-Matrix \mathbf{T} des Systems beruht (analog zur Abb. 3.1 auf Seite 71), auch in Anwesenheit starker PDL zur Messung der DGD eingesetzt werden.

Wird der Parameter \mathcal{V} in Anwesenheit von PDL auf den Wert $\mathcal{V} = 1$ erhöht [siehe Abb. 4.8(d)], so treten die diskutierten ungewöhnlichen Phänomene weiterhin auf, zum Teil jedoch in etwas geringerer Ausprägung. Davon abgesehen unterscheiden sich die Abb. 4.8(b) und (d) wiederum durch eine veränderte Skalierung der Ordinatenachse. So beträgt der größte im betrachteten Frequenzbereich aufgetretene Wert der Pulsverbreiterung in Abb. 4.8(b) etwa 8,8 %, in Abb. 4.8(d) hingegen mehr als 58 %. Eine weitere Erhöhung des Parameters \mathcal{V} auf den Wert $\mathcal{V} = 4$ [siehe Abb. 4.8(f)] zeigt vor allem, dass die relative Auswirkung der PDL weiter abgeschwächt wird. Die Pulsverzerrungen aufgrund von PMD sind bei derart großen Werten von \mathcal{V} bereits so ausgeprägt, dass das zusätzliche Auftreten von PDL kaum mehr ins Gewicht fällt.

¹ Da die Bestimmung der Minima der Pulsverbreiterung gemäß Tab. 4.1 auf Seite 118 durch eine Variation des Polarisationszustands am Eingang mit einer Schrittweite von 3° erfolgt, liegt die Vermutung nahe, dass eine zu grobe Abtastung der Poincaré-Kugel für dieses Phänomen verantwortlich ist, zumal es in der Literatur bisher nicht beschrieben wurde. Die Durchführung von Vergleichssimulationen mit einer Schrittweite von $0,5^\circ$ (welche eine um den Faktor 36 erhöhte Rechenzeit benötigen) für einige ausgewählte Trägerfrequenzen hat jedoch in keinem Fall zum Auffinden eines zweiten Minimums geführt.

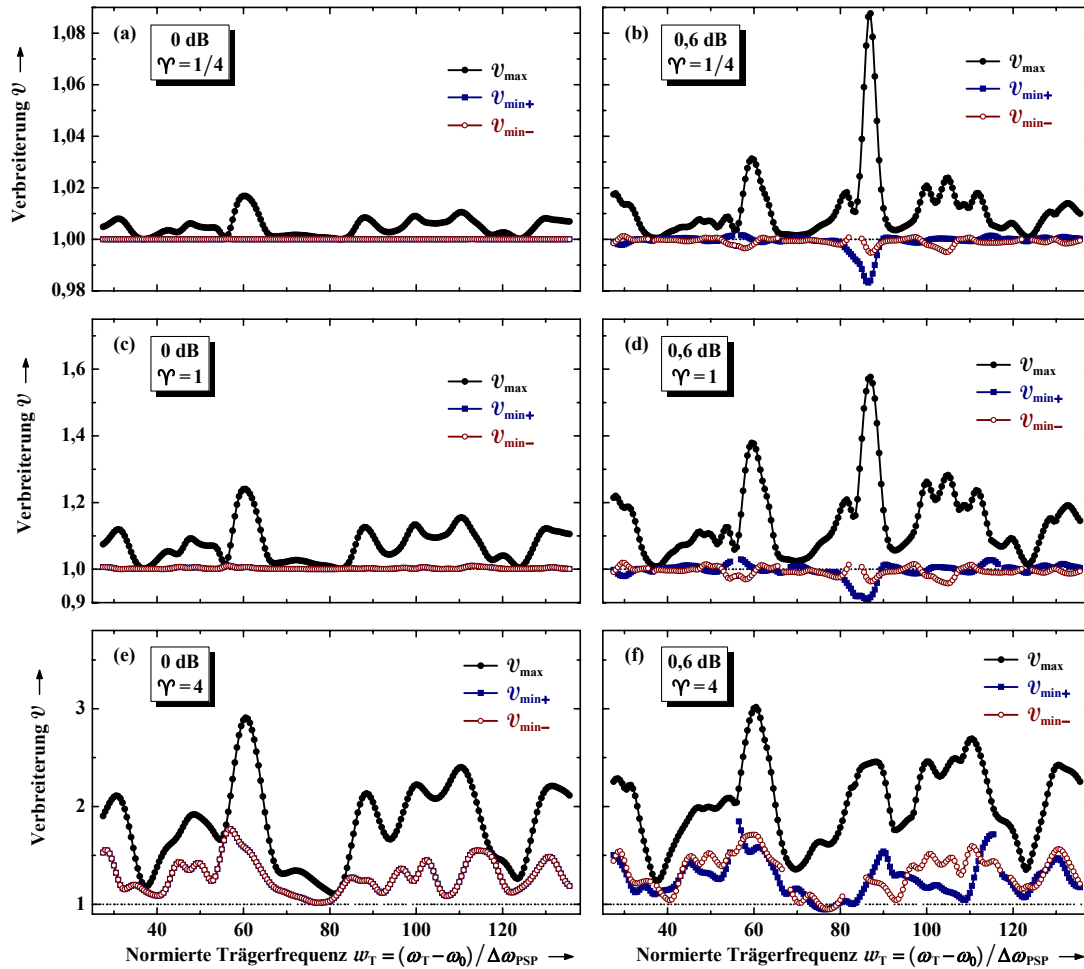


Abb. 4.8: Globales Maximum v_{\max} und (lokale) Minima $v_{\min\pm}$ der Pulsverbreiterung bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang als Funktion der Trägerfrequenz w_T für unterschiedliche Punkte des Parameterraums; *Links*: System ohne PDL; *Rechts*: System mit starker PDL, $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB; *Oben*: $\Upsilon = 1/4$ (geringe Signalbandbreite bzw. geringe mittlere DGD); *Mitte*: $\Upsilon = 1$; *Unten*: $\Upsilon = 4$ (große Signalbandbreite bzw. große mittlere DGD).

4.6.2 Pulsverbreiterung der Laufzeit-PSPs und der DOP-PSPs

Die bisherigen Betrachtungen zur Pulsverbreiterung bezogen sich auf dessen Extremwerte, also auf das Maximum v_{\max} und auf die beiden Minima $v_{\min\pm}$. Die Stärke der Verbreiterung bei einer Einkopplung des Pulses in die DOP-PSPs oder in die Laufzeit-PSPs soll nun untersucht werden, sie ist beispielsweise im Zusammenhang mit Verfahren zur PMD-Kompensation von Interesse.

Für ein unitäres System mit $\Upsilon \ll 1$ stimmen die DOP-PSPs und die Laufzeit-PSPs mit den Verbreiterungs-PSPs überein, siehe Abb. 4.4(a). In diesem Fall erreicht ein in die DOP-PSPs oder in die Laufzeit-PSPs eingekoppelter Puls verzerrungsfrei den Ausgang des Systems, $v = v_{\min\pm} = 1$. Interessanter sind andere Grenzfälle des Parameterraums, sie werden in der folgenden Abbildung näher betrachtet. In der oberen Hälfte ist jeweils der gleiche Fall wie in Abb. 4.8(e) angenommen, also ein unitäres System mit starker

PMD höherer Ordnung ($\mathcal{V} = 4$). Im Gegensatz dazu gilt in der unteren Hälfte der Abb. 4.9 $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB und $\mathcal{V} = 1/4$, dies entspricht der Parameterwahl der Abb. 4.8(b) – allerdings mit vergrößert dargestelltem Bereich um $\mathcal{V} = 1$. Neben der Pulsverbreiterung der Laufzeit-PSPs (links im Bild) sowie derjenigen der DOP-PSPs (rechts) sind jeweils zum Vergleich die Extremwerte der Verbreiterung als graue Linien eingetragen, sie entsprechen den Verläufen der Abb. 4.8(b) und (e).

Der spektrale Verlauf der Verbreiterung eines in die Laufzeit-PSPs eingekoppelten Pulses ist für den Fall eines unitären Systems mit $\mathcal{V} = 4$ in Abb. 4.9(a) dargestellt. Offenbar bestätigt sich ein Ergebnis der Abb. 4.4(c), welches besagt, dass die Laufzeit-PSPs in unitären Systemen immer mit den Verbreiterungs-PSPs übereinstimmen. Wird also ein Puls so in das unitäre System eingekoppelt, dass seine Laufzeit maximal bzw. minimal wird, so ist seine Verbreiterung in jedem Fall minimal. Diese Aussage gilt nicht mehr bei einer Einkopplung in die DOP-PSPs, siehe Abb. 4.9(b). Ein Puls, der so in das System eingekoppelt wird, dass seine DOP am Ausgang maximal wird, erreicht den Ausgang also nicht notwendigerweise mit minimaler Verbreiterung. Allerdings ist die Pulsverbreiterung der DOP-PSPs ersichtlich nur wenig größer als die minimal mögliche Verbreiterung $\mathcal{V}_{\min\pm}$ – selbst bei sehr großen Werten von \mathcal{V} .

Am anderen Ende des Parameterraums – bei $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB und $\mathcal{V} = 1/4$ – liegt eine veränderte Situation vor, dies zeigt sich in Abb. 4.9(c) und (d). Die Laufzeit-PSPs stimmen dann nicht mehr mit den Verbreiterungs-PSPs überein, ein in die Laufzeit-PSPs eingekoppelter Puls wird bei einigen Trägerfrequenzen deutlich stärker verbreitert als ein in die Verbreiterungs-PSPs eingekoppelter. Bei den meisten Trägerfrequenzen der Abb. 4.9(c) ist die Pulsverbreiterung der Laufzeit-PSPs allerdings sehr gering. Noch geringer ist sie in Abb. 4.9(d) bei einer Einkopplung in die DOP-PSPs. Wird also ein Puls so in das System eingekoppelt, dass die DOP am Ausgang ihr Maximum erreicht, so ist die Pulsverbreiterung – auch für Systeme mit starker PDL – nahezu minimal.

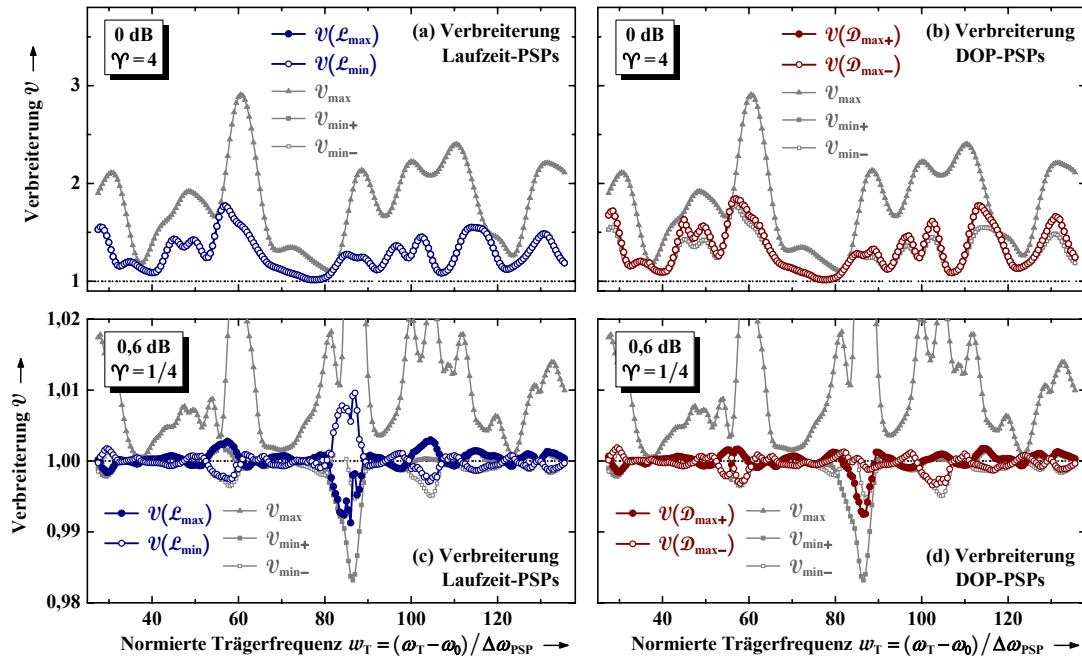


Abb. 4.9: Pulsverbreiterung \mathcal{V} als Funktion der Trägerfrequenz w_T bei einer Einkopplung des Pulses in die Laufzeit-PSPs bzw. in die DOP-PSPs; *Links*: Verbreiterung der Laufzeit-PSPs; *Rechts*: Verbreiterung der DOP-PSPs; *Oben*: System ohne PDL für $\gamma = 4$; *Unten*: System mit $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB und $\gamma = 1/4$. Zum Vergleich sind – mit grauer Farbgebung – das globale Maximum \mathcal{V}_{max} und die beiden Minima $\mathcal{V}_{\text{min}\pm}$ der Pulsverbreiterung aufgeführt, basierend auf Abb. 4.8(b) und (e).

4.7 DOP des Pulses am Ausgang

Der Begriff des Polarisationsgrades \mathcal{D} eines Signals wurde in Kapitel 2.2.6 eingeführt. Ein vollständig polarisiertes Signal hat demnach die DOP $\mathcal{D} = 1$, für ein vollständig depolarisiertes hingegen gilt $\mathcal{D} = 0$, der Wertebereich der DOP ist somit gegeben zu $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$. Neben der Pulsverbreiterung \mathcal{V} ist die DOP \mathcal{D} des Pulses am Ausgang – welche sich einfach mithilfe eines Polarimeters messen lässt – ein gutes Maß zur Beurteilung von PMD-bedingten Signalverzerrungen. Ein wichtiges Anwendungsbeispiel ist der Einsatz als Rückkopplungssignal in optischen PMD-Kompensatoren, siehe Kapitel 5.

4.7.1 Extrema der DOP

Analog zur Pulsverbreiterung \mathcal{V} in Kapitel 4.6 treten bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang ein globales Minimum \mathcal{D}_{min} sowie zwei Maxima $\mathcal{D}_{\text{max}\pm}$ der DOP am Ausgang auf. Die Werte dieser Extrema hängen von der Trägerfrequenz w_T , vom Parameter $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ sowie von der Stärke der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ ab. Ihre spektralen Verläufe sind in der folgenden Abbildung für unterschiedliche Werte der Parameter γ und $\langle PDL_i \rangle$ dargestellt – die Analogie zur Abb. 4.8 ist unverkennbar.

Zunächst soll die linke Seite der Abb. 4.10 betrachtet werden, also der Fall eines unitären Systems. Bei einem geringen Wert des Parameters \mathcal{V} bewirkt die Einkopplung des Pulses in einen der beiden DOP-PSPs, dass der Polarisationsgrad am Ausgang den Wert Eins annimmt, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\max\pm} = 1$, siehe Abb. 4.10(a). Wird der Puls hingegen so in das System eingekoppelt, dass sein Polarisationszustand senkrecht (im Stokes-Raum) zu den beiden DOP-PSPs steht, so wird die DOP am Ausgang minimal, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\min} < 1$. Dieser minimale Wert hängt offensichtlich von der Trägerfrequenz ab. Analog zum Maximum der Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} in Abb. 4.8(a) ist er umso geringer, je größer die DGD des Systems bei der Trägerfrequenz ist, vgl. Abb. 3.17(a) auf Seite 101. Diese Aussagen bleiben im Wesentlichen gültig, solange der Parameter \mathcal{V} die Bedingung $\mathcal{V} \leq 1$ erfüllt. Entsprechend unterscheidet sich die Abb. 4.10(c), bei der $\mathcal{V} = 1$ angenommen wird, praktisch nur durch eine veränderte Skalierung der Ordinatenachse von Abb. 4.10(a). Wird der Parameter \mathcal{V} jedoch noch weiter erhöht, so treten zunehmend Effekte höherer Ordnung auf, siehe Abb. 4.10(e). Je nach Trägerfrequenz sind die Maxima der DOP dann deutlich geringer als Eins, selbst bei optimalen Bedingungen am Eingang ist der Polarisationsgrad am Ausgang dann deutlich reduziert.

Ist zusätzlich PDL im System vorhanden, so hat dies keinen nennenswerten Einfluss auf die beiden Maxima der DOP $\mathcal{D}_{\max\pm}$, solange der Parameter \mathcal{V} nicht zu groß wird. Selbst in Anwesenheit starker mittlerer PDL sind die Maxima der DOP für $\mathcal{V} = 1/4$ und für $\mathcal{V} = 1$ nahezu gleich Eins, siehe Abb. 4.10(b) und (d). Das Minimum der DOP \mathcal{D}_{\min} hingegen wird in Anwesenheit starker PDL deutlich reduziert. Dies führt beispielsweise in Abb. 4.10(d) dazu, dass der Wert von \mathcal{D}_{\min} bei einigen Trägerfrequenzen nahezu Null wird. Bei ungünstiger Wahl des Polarisationszustands am Eingang ist der Puls am Ausgang in einem solchen Fall vollständig depolarisiert, $\mathcal{D} \approx 0$. Da die Maxima der DOP bei derselben Trägerfrequenz kaum geringer als Eins sind, schwankt die DOP am Ausgang in einem solchen Fall – abhängig vom Polarisationszustand am Eingang – zwischen Null und Eins. Bei noch größeren Werten des Parameters \mathcal{V} [z.B. bei $\mathcal{V} = 4$ in Abb. 4.10(f)] bewirkt die Anwesenheit von PDL, dass nicht mehr bei jeder Trägerfrequenz *zwei* Maxima der DOP $\mathcal{D}_{\max\pm}$ existieren. Es treten dann die bereits erwähnten Verschmelzungen der DOP-PSPs auf. Weiterhin ist der Wert der Maxima der DOP – falls sie denn beide existieren – im Allgemeinen nicht identisch, $\mathcal{D}_{\max+} \neq \mathcal{D}_{\max-}$.

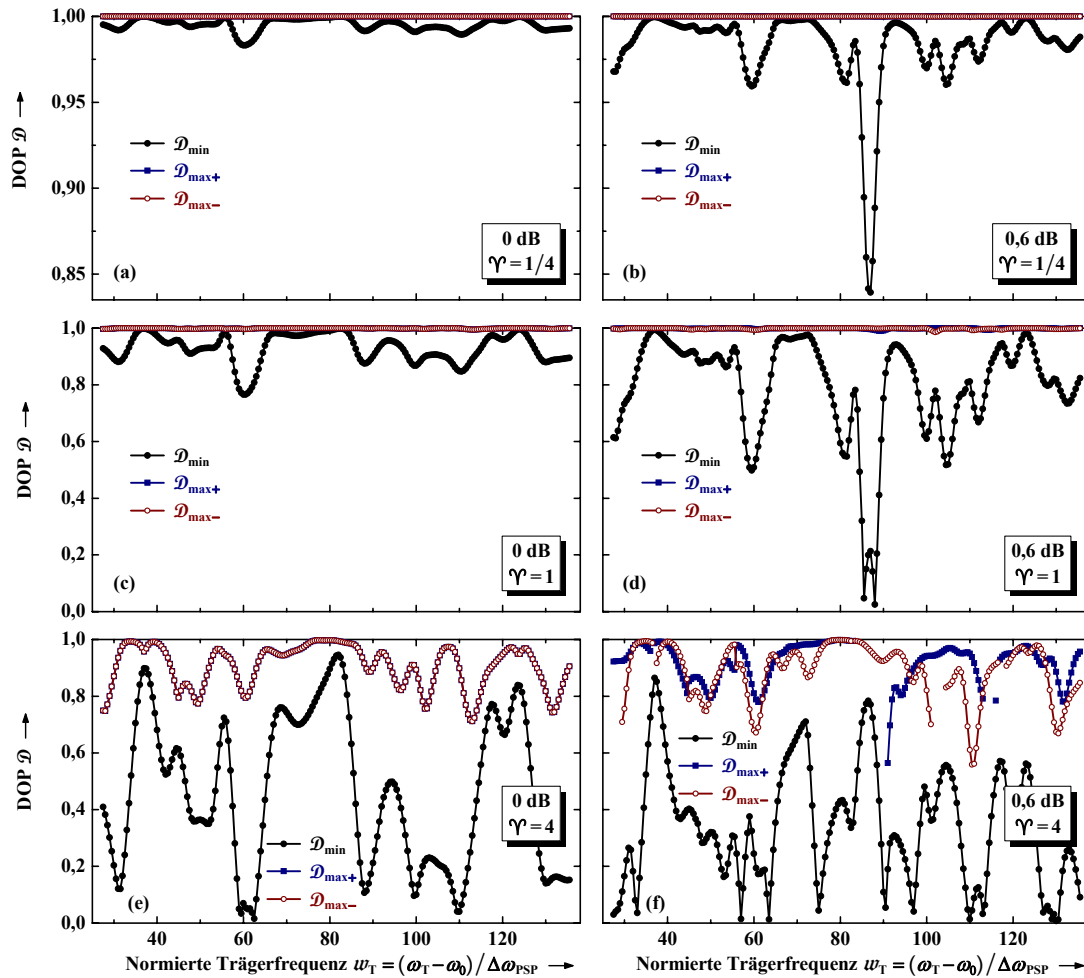


Abb. 4.10: Globales Minimum \mathcal{D}_{\min} und (lokale) Maxima $\mathcal{D}_{\max\pm}$ der DOP am Ausgang bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang als Funktion der Trägerfrequenz w_T ; *Links*: System ohne PDL; *Rechts*: System mit starker PDL, $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB; *Oben*: $\gamma = 1/4$ (geringe Signalbandbreite bzw. geringe mittlere DGD); *Mitte*: $\gamma = 1$; *Unten*: $\gamma = 4$ (große Signalbandbreite bzw. große mittlere DGD).

4.7.2 DOP der Laufzeit-PSPs und der Verbreiterungs-PSPs

Neben den Extremwerten der DOP am Ausgang ist auch die DOP von Interesse, welche bei einer Einkopplung des Pulses in die Laufzeit-PSPs oder in die Verbreiterungs-PSPs resultiert. Um sie zu untersuchen, sollen – analog zu Abb. 4.9 – zwei Grenzfälle des Parameterraums betrachtet werden. In der oberen Hälfte der folgenden Abbildung ist entsprechend der Fall eines unitären Systems mit $\gamma = 4$ angenommen, in der unteren der Fall starker mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB und $\gamma = 1/4$. Neben der DOP, welche sich bei einer Einkopplung in die Laufzeit-PSPs (links im Bild) bzw. in die Verbreiterungs-PSPs (rechts) am Ausgang ergibt, sind zum Vergleich die Extremwerte der DOP – basierend auf Abb. 4.10(b) und (e) – als graue Linien eingezeichnet.

Bei unitären Systemen stimmen die Laufzeit-PSPs gemäß Abb. 4.4(c) immer mit den Verbreiterungs-PSPs überein. Folglich bewirkt eine Einkopplung des Pulses in einen der Laufzeit-PSPs die gleiche DOP am Ausgang wie eine Einkopplung in einen der

Verbreiterungs-PSPs. Der Verlauf der blauen Kurven in Abb. 4.11(a) ist dementsprechend identisch zum Verlauf der roten Kurven in Abb. 4.11(b). Weiterhin zeigt sich bei diesen Kurven, dass die DOP am Ausgang nicht davon abhängt, in *welchen* der beiden Laufzeit-PSPs (oder Verbreiterungs-PSPs) der Puls eingekoppelt wird. Die beiden blauen Kurven in Abb. 4.11(a) überlappen also, gleiches gilt für die beiden roten Kurven in Abb. 4.11(b). Ein Vergleich dieser Kurven mit dem spektralen Verlauf der Maxima der DOP $\mathcal{D}_{\max\pm}$ zeigt schließlich, dass die maximal mögliche DOP am Ausgang häufig (aber nicht immer) nahezu erreicht wird.

In der unteren Hälfte der Abb. 4.11 ist der Fall starker mittlerer PDL angenommen, Effekte höherer Ordnung treten dabei – aufgrund des Parameters $\mathcal{V}=1/4$ – nicht nennenswert auf. Wird der Puls in einen der beiden Laufzeit-PSPs eingekoppelt, so ist die DOP am Ausgang bei einigen Trägerfrequenzen deutlich geringer als $\mathcal{D}_{\max\pm} \approx 1$, siehe Abb. 4.11(c). Demgegenüber zeigt Abb. 4.11(d), dass die Einkopplung in einen der beiden Verbreiterungs-PSPs bei nahezu allen Trägerfrequenzen die maximal mögliche DOP am Ausgang $\mathcal{D}_{\max\pm} \approx 1$ bewirkt.

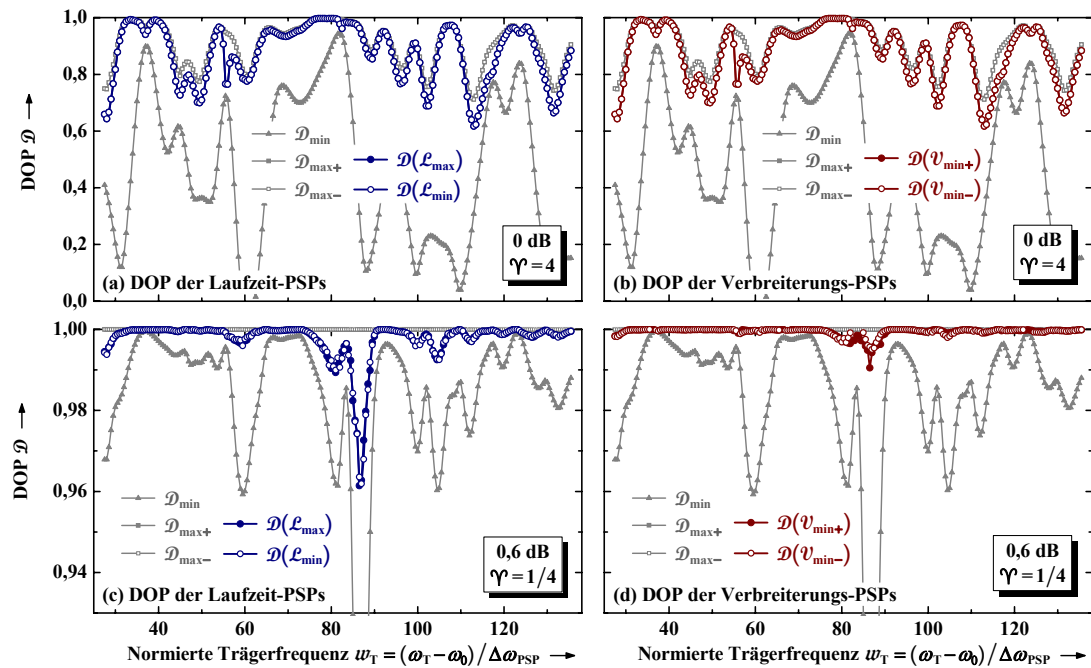


Abb. 4.11: DOP am Ausgang als Funktion der Trägerfrequenz w_T für den Fall der Einkopplung in einen der beiden Laufzeit-PSPs bzw. in einen der beiden Verbreiterungs-PSPs; *Links*: DOP der Laufzeit-PSPs; *Rechts*: DOP der Verbreiterungs-PSPs; *Oben*: System ohne PDL für $\mathcal{V}=4$; *Unten*: System mit $\langle PDL_r \rangle = 0,6$ dB für $\mathcal{V}=1/4$. Zum Vergleich sind – mit grauer Farbgebung – die globalen Maxima $\mathcal{D}_{\max\pm}$ und das globale Minimum \mathcal{D}_{\min} der DOP am Ausgang gemäß Abb. 4.10(b) und (e) eingezeichnet.

4.8 Kontraktion der Poincaré-Kugel

Nur ein geringer Teil der bisher aufgezeigten Phänomene, welche in Anwesenheit von PMD *und* PDL in Erscheinung treten, wurde bisher in der Literatur beschrieben.

Systematische Analysen, wie sie hier durchgeführt wurden, waren bisher nur in Ansätzen bekannt. Ebenfalls noch nahezu unerforscht sind Zusammenhänge zwischen den einzelnen Effekten sowie Regelmäßigkeiten ihres Auftretens. Die nachfolgende Diskussion soll dazu beitragen, diese Lücke zu schließen. Ermöglicht wird dies durch die zusätzliche Berücksichtigung der Eigenschaften der Extrema \mathcal{T}_{\max} und \mathcal{T}_{\min} des Transmissionskoeffizienten sowie der zugehörigen Polarisationszustände am Eingang.

Zunächst sind in der folgenden Abbildung als graue Linien die bekannten spektralen Verläufe der maximalen Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} (oben im Bild) sowie der minimalen DOP am Ausgang \mathcal{D}_{\min} (unten) aufgetragen. Dabei ist auf der linken Seite jeweils eine schwache mittlere PDL pro Element von $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB angenommen, auf der rechten hingegen der Fall starker PDL $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB. (Als Grenzfall schwacher PDL wird hier nicht der Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB betrachtet, da die Extrema des Transmissionskoeffizienten \mathcal{T}_{\max} und \mathcal{T}_{\min} dann undefiniert wären.) Der Parameter $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ wird konstant auf $\mathcal{V} = 1/4$ belassen, dadurch spielen Effekte höherer Ordnung keine nennenswerte Rolle. Die Aufgabe soll nun darin bestehen, die Verzerrung von Pulsen zu analysieren, deren Polarisationszustand am Eingang die Eigenschaft hat, dass die Dämpfung minimal bzw. maximal wird. Für Pulse mit derartigen Polarisationszuständen ist der Transmissionskoeffizient \mathcal{T} maximal bzw. minimal. Die Stärke der Verbreiterung solcher Pulse soll als $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{\max})$ bzw. als $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{\min})$ bezeichnet werden, deren DOP am Ausgang als $\mathcal{D}(\mathcal{T}_{\max})$ bzw. als $\mathcal{D}(\mathcal{T}_{\min})$. Die spektralen Verläufe dieser Größen sind in Abb. 4.12 als blaue bzw. als rote Kurven dargestellt.

Im Grenzfall schwacher PDL überlappen sich jeweils die rote und die blaue Kurve, die Verbreiterung $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{\min})$ ist dann – unabhängig von der Trägerfrequenz – immer genauso groß wie die Verbreiterung $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{\max})$. Gleiches gilt für die DOP am Ausgang $\mathcal{D}(\mathcal{T}_{\min})$ und $\mathcal{D}(\mathcal{T}_{\max})$, siehe Abb. 4.12(a) und (c). Der am stärksten gedämpfte Puls erleidet also – im Grenzfall schwacher PDL – die gleiche Verzerrung wie der am wenigsten gedämpfte. Ursächlich für diese Übereinstimmung ist die bekannte Symmetrie der Poincaré-Kugel: Für unitäre Systeme haben gegenüberliegende Punkte der Poincaré-Kugel identische Eigenschaften bzgl. der Pulsverzerrungen. Aufgrund der Ergebnisse der Abb. 4.3(d) auf Seite 130 müssen somit auch die beiden Polarisationszustände, welche den maximalen \mathcal{T}_{\max} bzw. den minimalen \mathcal{T}_{\min} Transmissionskoeffizienten verursachen, identische Pulsverzerrungen hervorrufen. Weiterhin zeigt sich in Abb. 4.12(a), dass der Wert von $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{\max})$ – und somit auch der Wert von $\mathcal{V}(\mathcal{T}_{\min})$ – abhängig von der Trägerfrequenz zwischen $\mathcal{V} = 1$ und $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\max}$ schwankt. Die Ursache dafür ist das Fehlen einer Korrelation zwischen der Richtung der PSPs auf der Poincaré-Kugel und der Richtung des PDL-Vektors $\vec{\Gamma}_{\text{in}}$ im Grenzfall schwacher PDL. (Der PDL-Vektor am Eingang $\vec{\Gamma}_{\text{in}}$ bestimmt für $\mathcal{V} \ll 1$ die Polarisationszustände, welche \mathcal{T}_{\max} bzw. \mathcal{T}_{\min} bewirken, siehe Kapitel 2.4.) Die Abb. 4.12(c) zeigt wiederum ein analoges Verhalten der DOP am Ausgang.

In Anwesenheit starker mittlerer PDL ändern sich die beschriebenen Verhältnisse maßgeblich, dies zeigt sich in Abb. 4.12(b) und (d). Einerseits wird die Verzerrung von

Pulsen, deren Polarisationszustand am Eingang nur eine geringe Dämpfung verursacht, kaum beeinflusst: Die spektralen Verläufe von $\mathcal{V}(\mathcal{F}_{\max})$ in Abb. 4.12(a) und (b) sind nahezu identisch, gleiches gilt für die Verläufe von $\mathcal{D}(\mathcal{F}_{\max})$ in Abb. 4.12(c) und (d). Selbst eine starke Erhöhung der mittleren PDL wirkt sich also kaum auf die Verzerrung von Pulsen aus, deren Polarisationszustand am Eingang eine geringe Dämpfung verursacht. Auf der anderen Seite steigt die Verzerrung des maximal gedämpften Pulses (Transmissionskoeffizient \mathcal{F}_{\min}) je nach Trägerfrequenz stark an. Der spektrale Verlauf von $\mathcal{V}(\mathcal{F}_{\min})$ nähert sich bei großen Werten der mittleren PDL mehr und mehr dem Verlauf von \mathcal{V}_{\max} , siehe Abb. 4.12(b). Entsprechendes gilt für den spektralen Verlauf von $\mathcal{D}(\mathcal{F}_{\min})$ in Abb. 4.12(d). Der starke Anstieg der Pulsverzerrung in Anwesenheit von PDL macht sich offenbar vorwiegend bei solchen Polarisationszuständen bemerkbar, welche eine starke Dämpfung verursachen. Die Verzerrung von Pulsen mit Polarisationszuständen auf der gegenüberliegenden Seite der Poincaré-Kugel wird hingegen kaum beeinflusst.

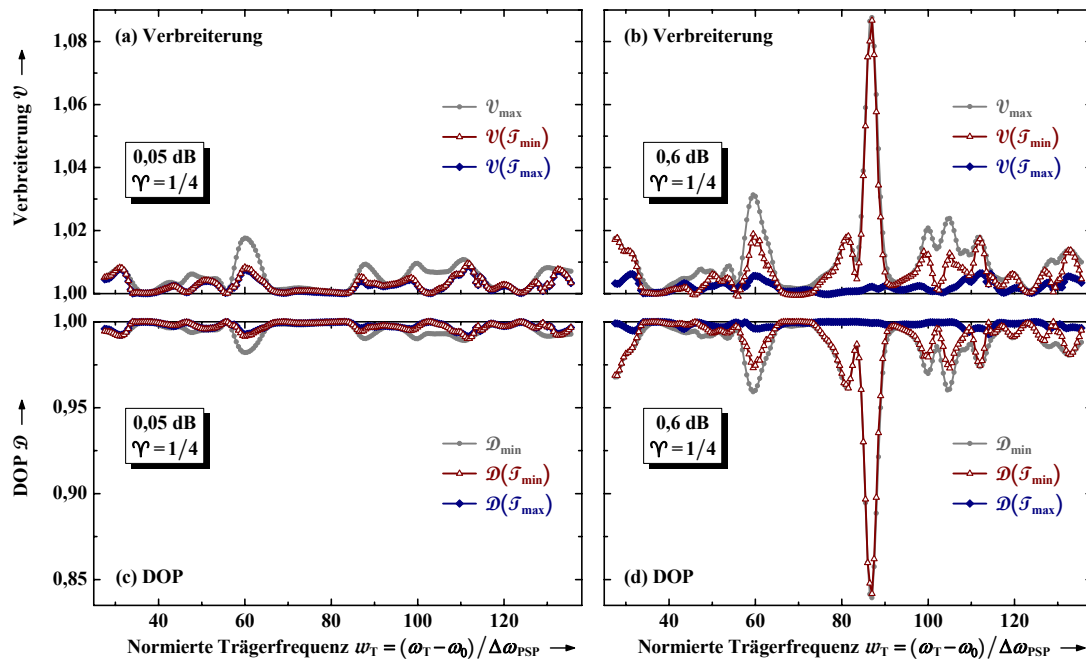


Abb. 4.12: Pulsverbreiterung und DOP am Ausgang als Funktion der Trägerfrequenz w_T für den Fall einer Einkopplung des Pulses mit einem Polarisationszustand, welcher den Transmissionskoeffizienten \mathcal{F} maximiert bzw. minimiert (welcher also die geringste bzw. die größte Dämpfung verursacht); *Oben*: Pulsverbreiterung; *Unten*: DOP am Ausgang; *Links*: System mit schwacher PDL, $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB; *Rechts*: System mit starker PDL, $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB. Zum Vergleich ist – mit grauer Farbgebung – jeweils das globale Maximum der Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} bzw. das globale Minimum der DOP \mathcal{D}_{\min} eingetragen. Der Parameter $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ ist festgelegt auf den Wert $\Upsilon = 1/4$, Effekte höherer Ordnung treten also nicht auf.

Als Ergänzung zu diesen Untersuchungen ist auf der linken Seite der folgenden Abbildung der spektrale Verlauf des Winkels $\angle(\mathcal{V}_{\max}, \mathcal{F}_{\min})$ für zwei Werte der mittleren PDL pro Element dargestellt. Dabei bezeichnet $\angle(\mathcal{V}_{\max}, \mathcal{F}_{\min})$ den Winkel zwischen dem Polarisationszustand, welcher maximale Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} verursacht, und dem

Polarisationszustand, welcher den minimalen Transmissionskoeffizienten \mathcal{J}_{\min} bewirkt. Im Grenzfall schwacher PDL schwankt der Wert dieses Winkels je nach Trägerfrequenz zwischen 0° und 180° . Mit zunehmender Stärke der mittleren PDL wird der Winkel jedoch bei einigen Trägerfrequenzen deutlich reduziert. Der Polarisationszustand, welcher maximale Pulsverbreiterung verursacht, nähert sich dann auf der Poincaré-Kugel demjenigen Polarisationszustand, welcher die größte Dämpfung bewirkt. Diese Annäherung ist bei denjenigen Trägerfrequenzen am meisten ausgeprägt, bei denen der momentane Wert der globalen PDL groß ist – dies zeigt ein Vergleich der Abb. 4.13(a) mit dem spektralen Verlauf der globalen PDL in Abb. 3.16 auf Seite 100. In Abb. 4.13(b) schließlich zeigt sich ein analoges Verhalten für den Winkel $\angle(\mathcal{D}_{\min}, \mathcal{J}_{\min})$.

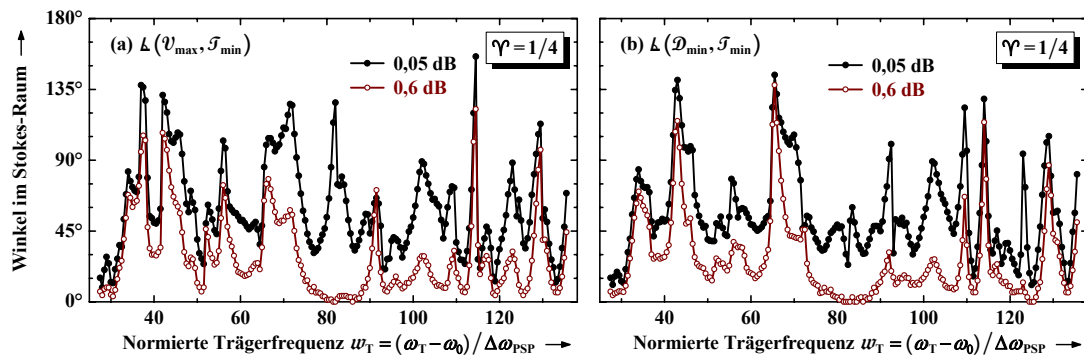


Abb. 4.13: Winkel im Stokes-Raum zwischen dem Polarisationszustand am Eingang, welcher (a) die maximale Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} und (b) die minimale DOP am Ausgang \mathcal{D}_{\min} hervorruft, und dem Polarisationszustand, der die größte Dämpfung verursacht (der also den Transmissionskoeffizienten des Pulses \mathcal{J} minimiert) als Funktion der Trägerfrequenz w_T für zwei Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB und $0,6$ dB; Effekte höherer Ordnung treten nicht auf, da der Parameter $\varphi = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ den geringen Wert $\varphi = 1/4$ hat.

Offenbar entwickelt sich der Polarisationszustand, welcher die größte Dämpfung des Pulses verursacht, mit steigender mittlerer PDL mehr und mehr zu einem zentralen Punkt der Poincaré-Kugel. Die nachfolgenden Untersuchungen werden dies zusätzlich untermauern. Dabei wird sich zeigen, dass sich nicht nur die Polarisationszustände, welche die *größten* Pulsverzerrungen verursachen, diesem zentralen Punkt der Poincaré-Kugel nähern, sondern auch die PSPs des Pulses, also die Polarisationszustände, welche zur *geringsten* Pulsverzerrung führen.

In der folgenden Abbildung werden dazu die Abstände sämtlicher ausgezeichneten Polarisationszustände zu diesem zentralen Punkt der Poincaré-Kugel analysiert. Der Einfluss der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ auf diese Abstände ist dabei für vier ausgesuchte Trägerfrequenzen ($w_T = 34$, $w_T = 85,5$, $w_T = 114$ und $w_T = 124$) dargestellt. Um die Auswahl dieser Frequenzen zu begründen, ist auf der rechten Seite noch einmal der spektrale Verlauf der PDL des Systems qualitativ aufgetragen, vgl. Abb. 3.16 auf Seite 100. Bei zwei der ausgewählten Frequenzen ($w_T = 34$ und $w_T = 114$) ist der momentane Wert der PDL recht gering, bei den anderen beiden ($w_T = 85,5$ und $w_T = 124$) ist er verhältnismäßig groß. In Abb. 4.14(a) und (c) liegt somit der Fall

schwacher momentaner PDL vor, in Abb. 4.14(b) und (d) hingegen der Fall starker momentaner PDL.

Zunächst sind jeweils die Winkel $\angle(\mathcal{D}_{\min}, \mathcal{J}_{\min})$ und $\angle(\mathcal{V}_{\max}, \mathcal{J}_{\min})$ als schwarze Kurven eingetragen, also die Winkel, welche bereits in Abb. 4.13 diskutiert wurden. Zusätzlich sind die Winkel zwischen den PSPs des Pulses (Laufzeit-PSPs, DOP-PSPs und Verbreiterungs-PSPs) und dem Polarisationszustand, welcher den minimalen Transmissionskoeffizienten \mathcal{J}_{\min} bewirkt, aufgeführt. Dabei stellen die roten Kurven die Abstände zu den »langsamen« PSPs des Pulses dar, die blauen entsprechend zu den »schnellen« PSPs. Im Grenzfall schwacher PDL $\langle PDL_i \rangle \rightarrow 0$ fallen die PSPs des Pulses mit den PSPs des Systems zusammen, die schnellen und die langsamen PSPs liegen dann genau an entgegengesetzten Orten der Poincaré-Kugel. Deshalb überschneiden sich die drei blauen Kurven – und ebenso die drei roten Kurven – in diesem Grenzfall, die Summe der Winkel der blauen und der roten Kurven beträgt 180° . Davon unabhängig haben die Winkel $\angle(\mathcal{V}_{\max}, \mathcal{J}_{\min})$ und $\angle(\mathcal{D}_{\min}, \mathcal{J}_{\min})$ im Grenzfall schwacher PDL irgendeinen Wert zwischen 0° und 180° , siehe auch Abb. 4.13.

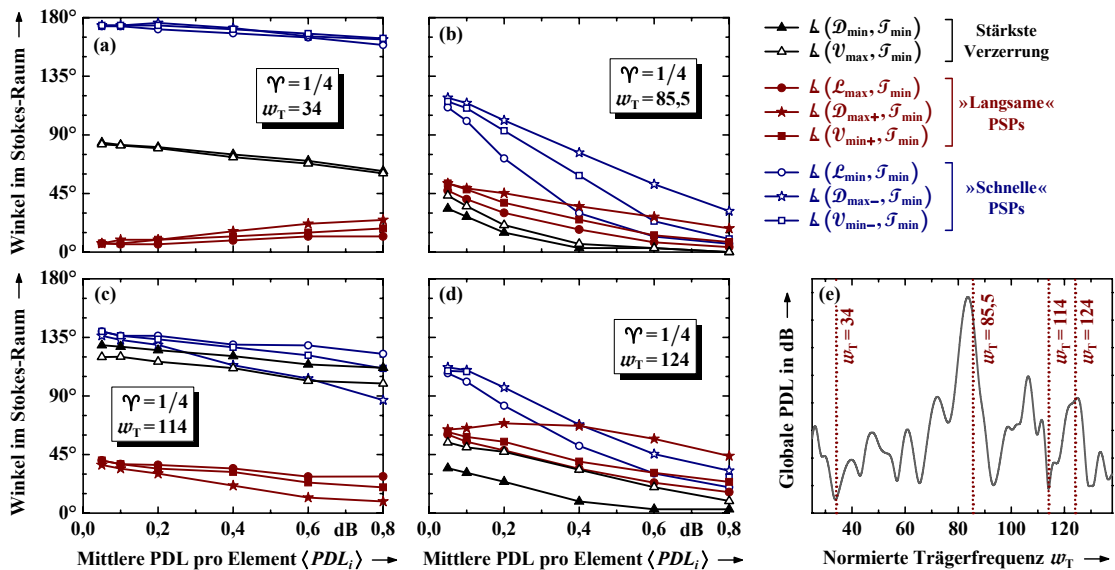


Abb. 4.14: Winkel im Stokes-Raum zwischen ausgezeichneten Polarisationszuständen (Polarisationszuständen, welche die DOP \mathcal{D} , die Pulsverbreiterung \mathcal{V} oder die Laufzeit \mathcal{L} maximieren bzw. minimieren) und dem Polarisationszustand, welcher die größte Dämpfung hervorruft (welcher also den Transmissionskoeffizienten des Pulses \mathcal{J} minimiert) als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ für ausgewählte Trägerfrequenzen: (a) $w_T = 34$, (b) $w_T = 85,5$, (c) $w_T = 114$ und (d) $w_T = 124$; der Parameter $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ hat in allen Fällen den Wert $\gamma = 1/4$. In Teilbild (e) ist zudem der spektrale Verlauf der globalen PDL dargestellt (gemäß Abb. 3.16 auf Seite 100), wobei die genannten Trägerfrequenzen markiert sind. Die momentane globale PDL ist also bei den Frequenzen $w_T = 34$ und $w_T = 114$ [Teilbilder (a) und (c)] gering, während sie bei $w_T = 85,5$ und $w_T = 124$ [Teilbilder (b) und (d)] recht groß ist.

Wird die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ erhöht, so hat dies in Abb. 4.14(a) und (c), also bei Trägerfrequenzen geringer momentaner PDL, nur geringe Auswirkungen. Die dargestellten Winkel ändern sich mit steigender mittlerer PDL kaum. In Abb. 4.14(b)

und (d) hingegen zeigt sich ein deutlicher Abfall sämtlicher Kurven, die ausgezeichneten Polarisationszustände werden allesamt »von \mathcal{J}_{\min} angezogen«. Für derartige Trägerfrequenzen konzentrieren sich also – bei starker mittlerer PDL – alle ausgezeichneten Polarisationszustände auf eine relativ kleine Fläche der Poincaré-Kugel.

Dies zeigt sich auch sehr anschaulich in der folgenden Abbildung, bei der die ausgezeichneten Polarisationszustände direkt auf der Oberfläche der Poincaré-Kugel markiert sind. Dabei wird als Trägerfrequenz $\omega_T = 85,5$ angenommen, also der gleiche Wert wie in Abb. 4.14(b). Der Einfluss der mittleren PDL pro Element auf die Lage der ausgezeichneten Polarisationszustände auf der Poincaré-Kugel wird in Abb. 4.15 direkt sichtbar. So zeigt beispielsweise die kurze dunkelgraue Linie auf der »Südhalkugel« die Abhängigkeit desjenigen Polarisationszustands, welcher die geringste Dämpfung des Pulses verursacht (Transmissionskoeffizient \mathcal{J}_{\max}), vom Wert der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$. Genau auf der gegenüberliegenden Seite der Poincaré-Kugel verläuft die Kurve des Polarisationszustands, der die größte Dämpfung (Transmissionskoeffizient \mathcal{J}_{\min}) bewirkt. Die »schnellen« PSPs des Pulses liegen bei dieser Frequenz für $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB etwas unterhalb des Äquators in der Mitte des Bildes. Die zugehörigen blauen Kurven haben ihren Ausgangspunkt also an diesem Ort der Kugeloberfläche. Auf der gegenüberliegenden Seite der Kugel (im Winkel 180° zu den »schnellen« PSPs), leicht oberhalb des Äquators rechts im Bild, befinden sich für $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB die »langsamen« PSPs des Pulses. Hier starten die drei roten Kurven. Die Polarisationszustände, welche die maximale Pulsverbreiterung \mathcal{V}_{\max} bzw. die minimale DOP \mathcal{D}_{\min} hervorrufen, bilden für $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB einen Kreis auf der Poincaré-Kugel, welcher hier zur besseren Übersicht nicht eingezeichnet ist. Dieser Kreis besteht aus allen Polarisationszuständen, welche einen Winkel von 90° zu beiden PSPs aufweisen. Mit steigender mittlerer PDL bilden sich aus diesem Kreis zwei ausgezeichnete Polarisationszustände für \mathcal{V}_{\max} und \mathcal{D}_{\min} heraus. Diese beiden Zustände liegen in diesem Beispiel für $\langle PDL_i \rangle = 0,05$ dB in der Nähe des Nordpols (also in der Nähe rechts-zirkularer Polarisationszustände), im Fall von \mathcal{V}_{\max} links oben im Bild, im Fall von \mathcal{D}_{\min} rechts oben in der Ecke.

Wird nun die mittlere PDL pro Element nach und nach bis auf $\langle PDL_i \rangle = 0,8$ dB erhöht, so »wandern« sämtliche ausgezeichnete Polarisationszustände in Richtung des Polarisationszustands, der die größte Dämpfung verursacht (Transmissionskoeffizient \mathcal{J}_{\min}). Die Polarisationszustände, welche die Pulsverbreiterung minimieren ($\mathcal{V}_{\min\pm}$) und die DOP am Ausgang maximieren ($\mathcal{D}_{\max\pm}$), liegen schließlich ganz in der Nähe der Polarisationszustände, welche die größte Pulsverzerrung (also \mathcal{V}_{\max} und \mathcal{D}_{\min}) verursachen. Geringe Schwankungen des Polarisationszustands am Eingang oder kleine Änderungen der Eigenschaften des Systems (z. B. aufgrund von Temperaturschwankungen) können dann völlig veränderte Signaleigenschaften am Ausgang bewirken.

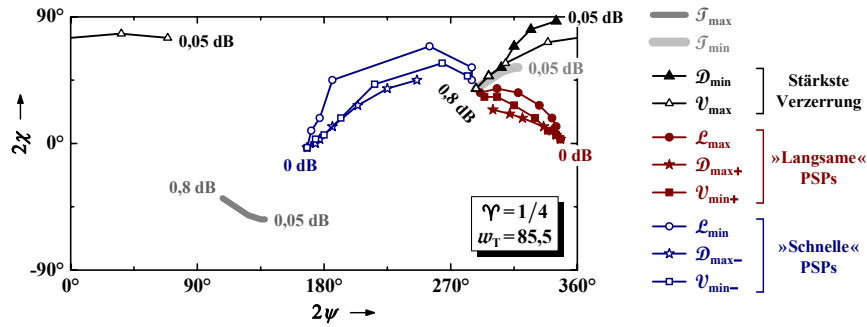


Abb. 4.15: Ausgezeichnete Polarisationszustände auf der Oberfläche der Poincaré-Kugel als Funktion der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ für die Trägerfrequenz $\omega_T = 85,5$ [siehe Markierung in Abb. 4.14(e)]; der Parameter $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ hat den Wert $\gamma = 1/4$.

4.9 Polarisationsabhängigkeit der Signalverzerrungen – ein Beispiel

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen die beschriebenen Phänomene noch einmal anhand eines Beispiels veranschaulicht werden. Dabei soll wiederum – genau wie in der Abb. 4.15 – die normierte Trägerfrequenz $\omega_T = 85,5$ betrachtet werden. Ebenso gut könnte aber auch die Frequenz $\omega_T = 124$ oder eine andere der Frequenzen großer momentaner PDL zum Einsatz kommen. Einige der im Folgenden dargestellten Effekte wären dann allerdings weniger stark ausgeprägt. Ferner wird der Parameter $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ auf den Wert $\gamma = 1$ gesetzt. Dies entspricht dem praxisrelevanten Fall, bei dem PMD-bedingte Signalverzerrungen nicht mehr vernachlässigt werden können, gleichzeitig spielen Effekte höherer Ordnung allerdings noch keine nennenswerte Rolle. Würde stattdessen beispielsweise $\gamma = 1/4$ gelten, so hätte dies im Wesentlichen Einfluss auf die Skalierungen der Größenachsen in Abb. 4.17 und in Abb. 4.18 – grundsätzliche Änderungen wären ansonsten nicht zu beobachten.

Bei den nachfolgenden Abbildungen ist jeweils die Polarisationsabhängigkeit einer Größe für verschiedene Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ zwischen 0 dB und 0,6 dB dargestellt. So zeigt Abb. 4.16 die Abhängigkeit der Laufzeit \mathcal{L} des Pulses vom Polarisationszustand am Eingang. Entsprechend werden in Abb. 4.17 die Pulsverbreiterung \mathcal{V} und in Abb. 4.18 die DOP am Ausgang \mathcal{D} betrachtet.

Für $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB zeigen sich die hinlänglich bekannten Auswirkungen eines unitären Systems, welche – aufgrund des moderaten Wertes von γ – völlig analog zum einfachen doppelbrechenden Element sind: In Abb. 4.16(a) lassen sich zwei ausgezeichnete Polarisationszustände am Eingang identifizieren, die Laufzeit-PSPs des Pulses. Ihr relativer Winkel beträgt 180° , der schnelle Laufzeit-PSP befindet sich in diesem Beispiel etwas »südlich vom Äquator«, der langsame entsprechend auf der gegenüberliegenden Seite leicht »nördlich vom Äquator«. Die Laufzeit des Pulses wird minimal (\mathcal{L}_{\min}) bzw. maximal (\mathcal{L}_{\max}), wenn der Puls in einen der beiden Laufzeit-PSPs eingekoppelt wird. Liegt die Eingangspolarisation genau dazwischen, so gilt $\mathcal{L} = 0$. Ein

Vergleich der Abb. 4.16(a) mit Abb. 4.17(a) und Abb. 4.18(a) zeigt ferner, dass die beiden Laufzeit-PSPs – wie erwartet – identisch sind zu den Verbreiterungs-PSPs sowie zu den DOP-PSPs. Ein entsprechend eingekoppelter Puls erreicht praktisch unverzerrt den Ausgang des Systems, es gilt $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\min\pm} \approx 1$ und $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\max\pm} \approx 1$. Alle Polarisationszustände, die einen Winkel von 90° zu den beiden PSPs bilden, bewirken maximale Pulsverbreiterung $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\max}$ und minimale DOP am Ausgang $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\min}$.

Die Auswirkung einer Erhöhung der mittleren PDL zeigt sich jeweils in den Teilbildern (b) bis (d). So verringert sich der Abstand der beiden Laufzeit-PSPs in Abb. 4.16 deutlich, ihr relativer Winkel fällt von 180° in Abb. 4.16(a) bis auf etwa 25° in Abb. 4.16(d) ab. Gleichzeitig steigt der Wert der maximalen Laufzeit \mathcal{L}_{\max} , während der Wert der minimalen Laufzeit \mathcal{L}_{\min} abnimmt. Die Differenz $\mathcal{L}_{\max} - \mathcal{L}_{\min}$, also die DGD des Pulses, nimmt entsprechend zu.

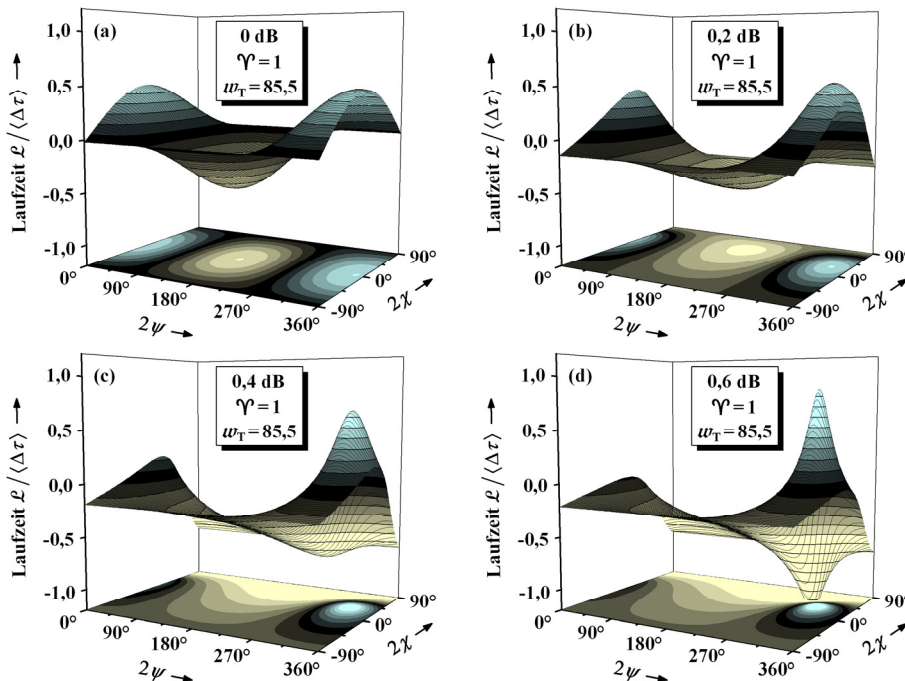


Abb. 4.16: Laufzeit \mathcal{L} des Pulses als Funktion des Polarisationszustands am Eingang (repräsentiert durch die beiden Winkel 2ψ und 2χ der Poincaré-Kugel) für die normierte Trägerfrequenz $w_T = 85,5$ [siehe Markierung in Abb. 4.14(e)] und für $\gamma \equiv \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}} = 1$; (a) Mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB; (b) 0,2 dB; (c) 0,4 dB; (d) 0,6 dB.

Ähnliche Auswirkungen starker mittlerer PDL zeigen sich auch in Abb. 4.17 bei der Polarisationsabhängigkeit der Pulsverbreiterung \mathcal{V} . So bewirkt eine Erhöhung der mittleren PDL pro Element von $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB auf 0,6 dB eine Annäherung der beiden Verbreiterungs-PSPs, welche schließlich (nahezu) verschmelzen. Dabei bildet sich ein wachsender Bereich von Polarisationszuständen, welche eine Pulsverbreiterung geringer als Eins ($\mathcal{V} < 1$) bewirken. Ein entsprechend eingekoppelter Puls verlässt das System also *schmäler* als er am Eingang war. Ganz in der Nähe dieser ungewöhnlichen Polarisationszustände auf der Poincaré-Kugel gibt es einen Bereich von Zuständen, bei

denen genau das Gegenteil eintritt: Derart eingekoppelte Pulse werden extrem stark verzerrt, ihre Verbreiterung \mathcal{V} erreicht inakzeptabel große Werte.

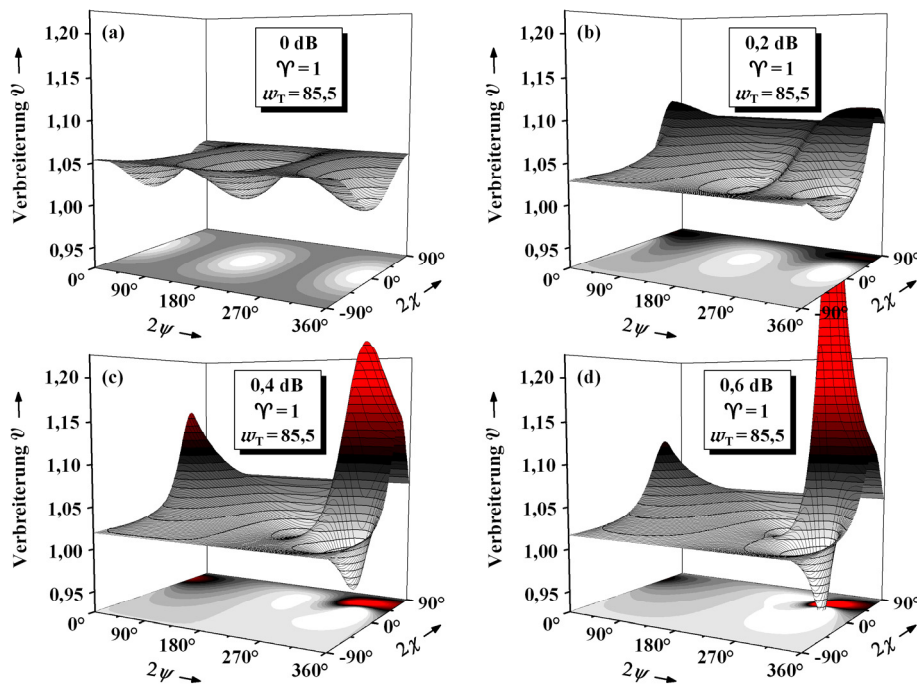


Abb. 4.17: Entsprechend Abb. 4.16, jedoch für die Pulsverbreiterung \mathcal{V} anstelle der Laufzeit \mathcal{L} .

Die Abb. 4.18 schließlich zeigt das entsprechende Verhalten der DOP am Ausgang. Am auffälligsten dabei ist die Herausbildung eines kleinen Bereichs von Polarisationszuständen, welche einen völligen Einbruch der DOP am Ausgang bewirken. Dieser Bereich der Poincaré-Kugel ist identisch zum Bereich extrem starker Pulsverbreiterungen in Abb. 4.17. Weiterhin zeigt die Abb. 4.18, dass eine Erhöhung der mittleren PDL pro Element bei den meisten Polarisationszuständen sogar dazu führt, dass die DOP am Ausgang nahezu optimal ($\mathcal{D} = 1$) wird. Im Vergleich zum unitären System ist die DOP am Ausgang bei diesen Polarisationszuständen also nicht geringer, sondern größer geworden. Dies zeigt sich in der Abbildung daran, dass die weiß markierte Fläche, welche Polarisationszustände sehr großer DOP am Ausgang kennzeichnet, beim Anstieg von $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB auf 0,6 dB anwächst.

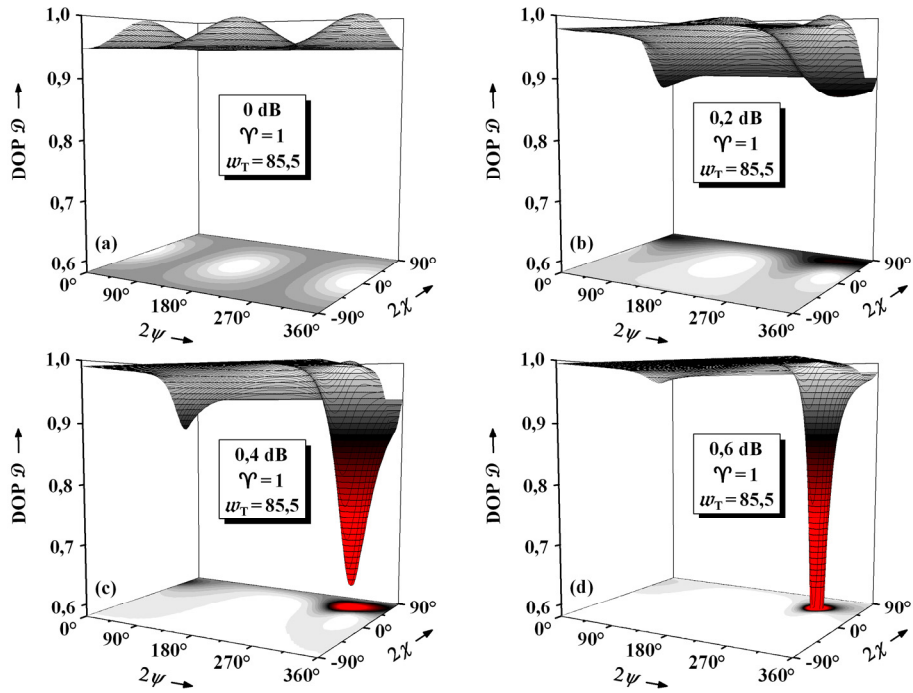


Abb. 4.18: Entsprechend Abb. 4.16 und Abb. 4.17, jedoch für die DOP \mathcal{D} des Pulses am Ausgang.

5 PMD-Kompensation und Statistik der Signalverzerrungen

Der Einfluss wechselwirkender PMD und PDL auf die Verzerrung optischer Signale wurde bisher anhand einer einzelnen Realisierung des Systems des Kapitels 3.2.3 untersucht. Damit war es möglich, die Abhängigkeit der Verzerrung sowohl von der Trägerfrequenz als auch vom Polarisationszustand am Eingang zu analysieren. Aufgrund der endlichen Breite des dabei betrachteten Frequenzbereichs wurde allerdings nur eine begrenzte Anzahl statistisch unabhängiger Frequenzen erfasst. Die *statistischen* Eigenschaften der Signalverzerrungen aufgrund von PMD und PDL wurden insofern nur unzureichend berücksichtigt. Um sie bei einer Anwendung des bisherigen Verfahrens ausreichend zu erfassen, müsste ein weitaus größerer spektraler Bereich analysiert werden.

In diesem Kapitel soll jedoch ein anderer Ansatz verfolgt werden, bei dem die *Scharstatistik* der Verzerrungen betrachtet wird. (Aufgrund der Ergodizität der PMD- und PDL-Größen werden damit statistisch gleichwertige Resultate erzielt, siehe Kapitel 2.3.3 und 2.4.2.) Im Gegensatz zum Vorgehen des Kapitels 4 soll also nicht eine Realisierung aus der Schar aller möglichen Realisierungen des Systems ausgewählt und entlang der Frequenz untersucht werden. Stattdessen soll die Statistik der Signalverzerrungen bei fester (beliebig wählbarer) Trägerfrequenz anhand einer Schar von Realisierungen analysiert werden.

Die resultierenden Histogramme der Signalverzerrung werden Ausläufer zu großen Werten aufweisen. Diese Ausläufer können zu Systemausfallwahrscheinlichkeiten führen, welche gegebenenfalls in der Praxis nicht toleriert werden können. Um diese Ausfallwahrscheinlichkeiten zu reduzieren, werden in der Praxis »optische PMD-Kompensatoren« eingesetzt. Die Untersuchungen der Kapitel 3 und 4 haben bereits einige Hinweise darauf gegeben, dass die Wirksamkeit derartiger Kompensatoren in Anwesenheit von PDL beeinträchtigt sein könnte. Diese sehr praxisrelevante Frage wird das zentrale Thema dieses Kapitels sein. Nach einer Analyse der Statistik der Signalverzerrungen »unkompensierter« Systeme wird dann die entsprechende Statistik beim Einsatz optischer PMD-Kompensatoren betrachtet. Untersuchungen auf diesem Gebiet – in Anwesenheit von PDL – sind in der Literatur bisher kaum beschrieben. Nennenswert sind vor allem die Beiträge in [39], [46] und in [77], welche allerdings jeweils sehr spezielle Systemkonfigurationen voraussetzen. Unter anderem aus diesem Grund sind die Schlussfolgerungen, welche in den genannten Quellen gezogen werden, zum Teil widersprüchlich. Die Aufgabe dieses Kapitels wird dagegen ausdrücklich darin bestehen – analog zu den Kapiteln 3 und 4 – *allgemeingültige* Ergebnisse zu erzielen, also Ergebnisse, welche sich auf eine möglichst große Zahl von Systemen der Praxis anwenden lassen. Die Vorüberlegungen des Kapitels 5.1 werden unter anderem dazu

dienen, die darauf folgenden Simulationen entsprechend systematisch zu planen. Zudem wird eine kurze Einführung in die Grundprinzipien der optischen PMD-Kompensation erfolgen, weitergehende Ausführungen finden sich beispielsweise in [1], [10] und [78].

5.1 Simulationsaufbau, Modellierung und Implementierung

5.1.1 Optische PMD-Kompensatoren – Übersicht

Die Konzepte und Ergebnisse des Kapitels 4 erlauben eine sehr prägnante Formulierung des Funktionsprinzips optischer PMD-Kompensatoren, welche auch in Anwesenheit von PDL gültig ist. Wird nämlich das Signal so in das System eingekoppelt, dass sein Polarisationszustand parallel zu einem der beiden Verbreiterungs-PSPs – oder zu einem der beiden DOP-PSPs – ausgerichtet ist, so erreicht es gemäß Kapitel 4 den Ausgang mit minimaler Verzerrung. Bei einer Einkopplung in die Verbreiterungs-PSPs ist die Pulsverbreiterung minimal, bei einer Einkopplung in die DOP-PSPs dagegen ist der Polarisationsgrad am Ausgang maximal und mit ihm die Pulsverbreiterung *nahezu* minimal. Die Idee der optischen PMD-Kompensation lässt sich damit folgendermaßen skizzieren: Das Ziel besteht entweder darin, den Polarisationszustand entlang der PSPs auszurichten, oder die PSPs entlang des Polarisationszustands.

Einige Typen von PMD-Kompensatoren sollen im Folgenden kurz erläutert werden, sie basieren alle auf dem genannten Grundprinzip. Die beiden Verfahren mit der größten Praxisrelevanz werden dann im weiteren Verlauf dieses Kapitels näher untersucht, vor allem soll ihre Wirksamkeit in Anwesenheit von PDL geklärt werden.

PSP-Methode

PMD- und PDL-bedingte Signalverzerrungen können – auf den ersten Blick mit geringem Aufwand – durch den Einsatz der sogenannten PSP-Methode wirksam abgemildert werden. Der Polarisationszustand am Eingang ist dazu so einzustellen, dass die Pulsverbreiterung minimal wird, dass also das Signal in einen der beiden Verbreiterungs-PSPs eingekoppelt wird. Gemäß Abb. 4.8 auf Seite 138 wird damit – auch in Anwesenheit starker PDL – das Auftreten sehr großer Signalverzerrungen vermieden. Da mit dieser Methode im Wesentlichen »PMD erster Ordnung« kompensiert wird, ist sie dann besonders wirksam, wenn die mittlere DGD $\langle \Delta \tau \rangle$ des Systems nicht allzu groß (die Bandbreite der PSPs $\Delta \omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle \Delta \tau \rangle$ nicht allzu gering) ist und gleichzeitig die Bandbreite des Signals $\Delta \omega_{\text{FWHM}}$ in Grenzen bleibt. Ist also der Wert des Parameters $\mathcal{V} \equiv \Delta \omega_{\text{FWHM}}/\Delta \omega_{\text{PSP}}$ nicht wesentlich größer als Eins, so ist gemäß Abb. 4.8 eine gute Wirksamkeit der PSP-Methode in jedem Fall gewährleistet. Vorteilhaft ist weiterhin, dass bei diesem Verfahren keine zusätzlichen doppelbrechenden Elemente verwendet werden müssen. Die mittlere DGD $\langle \Delta \tau \rangle$ des Systems wird also nicht zusätzlich erhöht.

In der Praxis ergeben sich jedoch aufgrund der Zeitabhängigkeit der Systemeigenschaften Probleme, welche die Vorteile dieser Methode mehr als aufwiegen: Die Lage der Verbreiterungs-PSPs auf der Poincaré-Kugel ändert sich nämlich zeitlich, weshalb

der Polarisationszustand am Eingang entsprechend nachgeregelt werden muss. Dazu ist eine permanente Messung der Signalverzerrung am Ausgang erforderlich. Diese Information ist zum Eingang des Systems zurückzuführen, wo der Polarisationszustand mit einem geeigneten Verfahren nachzuregeln ist. Bei plötzlichen Änderungen des Systemzustands, welche in der Praxis durchaus auftreten können [1], muss bei der Regelung also ein Informationsaustausch zwischen Ausgang und Eingang des Systems erfolgen. Da all dies »bei laufendem System« durchzuführen ist, ist die vergleichsweise langsame PSP-Methode in der Praxis von geringer Relevanz.

3FG-Kompensator: Grundprinzip

Wichtiger für den praktischen Einsatz sind PMD-Kompensatoren, bei denen am Ausgang des Systems ein zusätzliches doppelbrechendes Element (»DGD-Element«) – im Idealfall mit variabler Stärke der Doppelbrechung – eingefügt wird. Damit kann eine Umkehrung der Strategie der PSP-Methode bewirkt werden: Das Ziel besteht nicht mehr darin, den Polarisationszustand entlang der PSPs auszurichten, sondern die PSPs entlang des Polarisationszustands. Genauer formuliert, verändert das Einfügen eines doppelbrechenden Elements die Eigenschaften des gesamten Systems und somit auch die Lage der Verbreiterungs-PSPs (wie auch den spektralen Verlauf der globalen DGD). Falls damit erreicht werden kann, dass die Verbreiterungs-PSPs parallel zum Polarisationszustand am Eingang ausgerichtet werden, ist indirekt die PSP-Methode realisiert. Dazu müssen die Eigenschaften des eingefügten Elements, also dessen Richtung der Doppelbrechung \hat{s}_+ sowie dessen DGD $\Delta\tau_K$ [siehe Gleichung (3.1) auf Seite 63], geeignet angepasst werden. Die Richtung \hat{s}_+ im Stokes-Raum lässt sich durch zwei Winkel auf der Poincaré-Kugel beschreiben, zusammen mit der DGD $\Delta\tau_K$ hat dieser Typ PMD-Kompensator also drei Freiheitsgrade. Entsprechend wird er häufig »3FG-Kompensator« genannt. Eine weitergehende Diskussion seiner Funktionsweise – allerdings unter der Annahme unitärer Systeme – findet sich beispielsweise in [1] und in [10].

Da eine Variation der Richtung \hat{s}_+ des DGD-Elements über die gesamte Poincaré-Kugel technisch nicht direkt realisierbar ist, werden in der Praxis Elemente *konstanter* Richtung verwendet. Eine Anpassung der Richtung erfolgt dann indirekt über einen Polarisationssteller unmittelbar vor dem Element, siehe Abb. 5.1(a). Mit den Mitteln des Kapitels 2.3 lässt sich einfach zeigen, dass der Jones-Operator dieser Kombination aus Polarisationssteller und DGD-Element konstanter Richtung dem Jones-Operator eines DGD-Elements *variabler* Richtung \hat{s}_+ entspricht, siehe Abb. 5.1(b). Schließlich muss bei einem 3FG-Kompensator auch die Stärke des Elements, also dessen DGD $\Delta\tau_K$, variierbar sein. Dazu wurden diverse Verfahren entwickelt, deren technische Realisierung beispielsweise in [7], [79] und [80] beschrieben ist.

3FG-Kompensator: Rückkopplungssignal und Kontrollalgorithmus

Wie bei der PSP-Methode ist auch beim 3FG-Kompensator das Problem der Zeitabhängigkeit der Systemeigenschaften zu beachten. Entsprechend muss am Ausgang des

gesamten Systems eine geeignete Größe gemessen werden, welche Auskunft über die Stärke der Signalverzerrung gibt. Die Parameter des DGD-Elements sind dann bezüglich dieser Größe zu optimieren. Im Gegensatz zur PSP-Methode muss das Rückkopplungssignal allerdings nicht zum Eingang des Systems zurückgeführt werden, ein wichtiger Vorteil dieser Methode. Bei Systemsimulationen wird als Rückkopplungssignal häufig die Pulsweite T_{RMS} am Ausgang verwendet [10], [39]. Die Regelung des DGD-Elements erfolgt also mit dem Ziel, die Pulsweite zu minimieren, wodurch das Signal indirekt in einen der beiden Verbreiterungs-PSPs eingekoppelt wird. In der Praxis wird jedoch stattdessen zumeist als Rückkopplungssignal die DOP \mathcal{D} des Signals am Ausgang verwendet, da sie sehr schnell (in Zeitabständen deutlich kleiner als 1 ms [81]) und unabhängig vom Modulationsformat messbar ist und auch bei Systemen hoher Datenrate eingesetzt werden kann [1], [78], [82], [83], [84]. Ihre Messung basiert auf einer Anwendung der Gleichung (2.37) auf Seite 25, sie erfolgt mithilfe von Analysatoren sowie von zwei $\lambda/4$ -Platten [12]. (In der Praxis kann ein Polarimeter wie das in [21] und [84] verwendete HP 8509B [81] eingesetzt werden.) Bei geeigneter Regelung und einer Verwendung der DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal wird das Signal am Eingang des Systems schließlich indirekt in die DOP-PSPs eingekoppelt, die DOP am Ausgang wird maximiert. Die Vorarbeiten des Kapitels 4 haben allerdings gezeigt, dass die Lage der Verbreiterungs-PSPs – vor allem in Anwesenheit von PDL – zum Teil deutlich von der Lage der DOP-PSPs abweichen kann. Ist das Maximum der DOP \mathcal{D} am Ausgang erreicht, bedeutet dies also nicht notwendigerweise minimale Pulsverbreiterung. Eine der Aufgaben dieses Kapitels wird deshalb darin bestehen, die Wirksamkeit der beiden Rückkopplungssignale T_{RMS} und \mathcal{D} – in Anwesenheit von PDL – zu vergleichen. Entsprechend werden alle Simulationen zunächst mit der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal durchgeführt, daraufhin ein zweites Mal mit der DOP \mathcal{D} . Andere Rückkopplungssignale, welche beispielsweise in [1] beschrieben sind, sollen hier nicht untersucht werden.

Ein geeigneter Kontrollalgorithmus hat bei diesen Kompensatoren die Aufgabe, die Parameter des DGD-Elements so zu regeln, dass T_{RMS} minimal bzw. \mathcal{D} maximal wird, siehe Abb. 5.1. Ohne auf Details der Implementierung eingehen zu wollen, sei erwähnt, dass der hier verwendete Kontrollalgorithmus einfach und zugleich sehr praxisnah realisiert ist: Ausgehend von einem sinnvoll gewählten Startpunkt wird der dreidimensionale Parameterraum mit geeigneter Schrittweite »in Richtung des Optimums« durchschritten. Ist das Optimum bezüglich der gegebenen Schrittweite erreicht, wird die Schrittweite reduziert, die Suche nach dem Optimum wird fortgesetzt. Sobald eine vorher festgelegte Genauigkeit erreicht ist, bricht der Algorithmus ab. (Bei den hier durchgeführten Simulationen ist das Abbruchkriterium so festgelegt, dass das Optimum mit einer Genauigkeit von einem Grad auf der Poincaré-Kugel im Fall der Richtung \hat{s}_+ sowie von 0,5 % der mittleren globalen DGD im Fall der Stärke $\Delta\tau_K$ gefunden wird.) Wie bei entsprechenden Systemen der Praxis besteht dabei allerdings die Gefahr, dass der Algorithmus in einem eventuell vorhandenen Suboptimum »hängen bleibt«. Dieses Problem ließe sich bei der Implementierung des Computerprogramms einfach umgehen,

dies würde jedoch die tatsächlichen Gegebenheiten verfälschen und wird deshalb bewusst unterlassen.

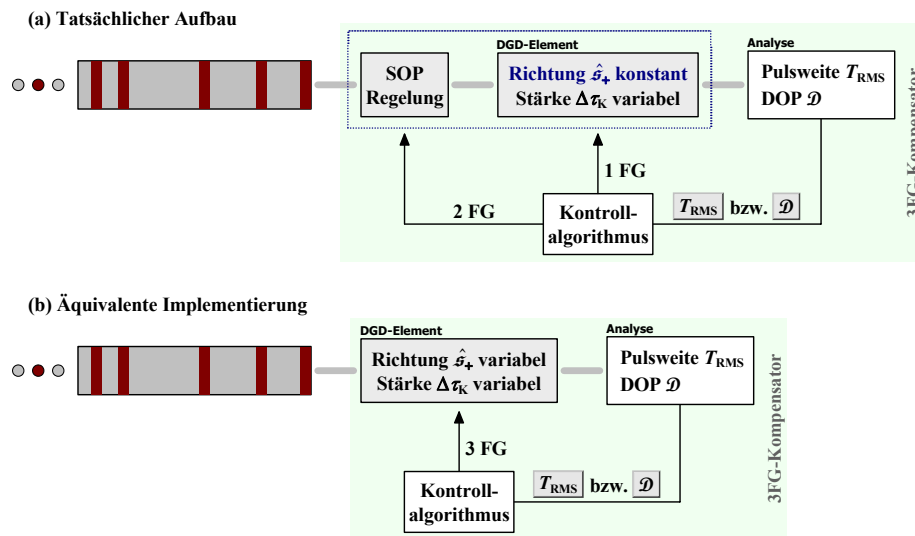


Abb. 5.1: (a) Tatsächlicher Aufbau eines 3FG-Kompensators, bestehend aus einem Polarisationssteller (Regelung der SOP, engl.: State of Polarization), einem DGD-Element fester Richtung \hat{s}_+ und variabler Stärke $\Delta\tau_K$ sowie der Analyse von Pulsweite T_{RMS} bzw. Polarisationsgrad \mathcal{D} (engl.: Degree of Polarization, DOP); der Kontrollalgorithmus regelt den Polarisationszustand (zwei Freiheitsgrade) sowie die Stärke $\Delta\tau_K$ des DGD-Elements (ein Freiheitsgrad) mit dem Ziel, entweder die Pulsweite T_{RMS} zu minimieren oder die DOP \mathcal{D} zu maximieren. (b) Äquivalente Implementierung: Die SOP-Regelung wurde ersetzt durch eine veränderbare Richtung \hat{s}_+ des DGD-Elements.

2FG-Kompensator

Noch einfacher zu realisieren ist der »2FG-Kompensator«, welcher sich vom 3FG-Kompensator der Abb. 5.1 nur dadurch unterscheidet, dass die DGD $\Delta\tau_K$ des DGD-Elements konstant ist. Aufgrund des sehr einfachen Aufbaus sowie der geringen Zahl an Freiheitsgraden und der damit verbundenen hohen Geschwindigkeit der Optimierung ist dieser Kompensator von großer Bedeutung für den praktischen Einsatz. Abgesehen von dem Polarisationssteller der Abb. 5.1(a) ist in der Praxis nur ein DGD-Element *konstanter* Richtung \hat{s}_+ und *konstanter* Stärke $\Delta\tau_K$ erforderlich. Solch ein Element kann beispielsweise durch eine polarisationserhaltende Faser [1] realisiert werden. Da die Stärke des Elements nicht variierbar ist, ist die Wirksamkeit des 2FG-Kompensators allerdings geringer als die des 3FG-Kompensators: Eine Regelung nur der Richtung und nicht der Stärke des Elements wird nicht in jedem Fall ermöglichen, die Verbreiterungs-PSPs bzw. die DOP-PSPs parallel zum Polarisationszustand am Eingang auszurichten. In einem solchen Fall läuft die Optimierung von T_{RMS} bzw. von \mathcal{D} – grob gesprochen – darauf hinaus, dass die globale DGD bei der Trägerfrequenz minimiert wird. Das Signal wird dann zwar nicht in einen der Verbreiterungs-PSPs bzw. in einen der DOP-PSPs eingekoppelt, seine Verzerrung wird aber dennoch reduziert.

Von zentraler Bedeutung für den praktischen Einsatz ist die Frage, wie groß die konstante DGD $\Delta\tau_K$ des 2FG-Kompensators zu wählen ist. Bei einem zu geringen

Wert ist die Wirksamkeit verschwindend gering, das gesamte System verhält sich wie im unkompensierten Fall. Andererseits darf die DGD $\Delta\tau_K$ auch nicht zu groß gewählt werden, dies wäre aus folgendem Grund kontraproduktiv: Das Einfügen eines DGD-Elements am Ausgang erhöht die mittlere DGD $\langle\Delta\tau\rangle$ des gesamten Systems, siehe Gleichung (2.66) auf Seite 45. Die PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$ nimmt also ab, der Parameter $\mathcal{V} \equiv \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ steigt an. Grob gesprochen wächst damit der Teil des Signalspektrums, der von der PMD-Kompensation nicht profitieren kann. Im Mittel erfährt dieser Teil zudem eine größere DGD als im unkompensierten Fall, die Wahrscheinlichkeit großer Signalverzerrungen nimmt zu.

Folglich wird es einen optimalen Wert der konstanten DGD $\Delta\tau_K$ geben. Dieser wird beispielsweise vom Parameter \mathcal{V} abhängen, also von der Bandbreite des Signals sowie von der mittleren DGD $\langle\Delta\tau\rangle$ des Systems. Daneben beeinflussen aber auch die »Anforderungen an das System« (die tolerierbare Wahrscheinlichkeit großer Signalverzerrungen) diesen optimalen Wert. Entsprechende Untersuchungen wurden in [10] bereits durchgeführt, allerdings nur für unitäre Systeme. Das Auftreten von PDL beeinflusst ebenfalls den optimalen Wert von $\Delta\tau_K$. Wie dessen Beeinflussung im Detail aussieht, soll in diesem Kapitel geklärt werden. Diese äußerst praxisrelevante Fragestellung wurde in der Literatur bisher noch nicht behandelt.

Mehrstufige Kompensatoren

Werden mehrstufige PMD-Kompensatoren eingesetzt, also Kompensatoren mit mehr als einem DGD-Element am Ausgang des Systems, so kann die Wirksamkeit der Kompensation theoretisch beliebig erhöht werden. Mit zunehmender Zahl an Freiheitsgraden lässt sich – grob gesprochen – erreichen, dass ein immer größerer Teil des Signalspektrums von der Kompensation profitiert. Zumindest in der Theorie lassen sich damit selbst ausgeprägte PMD-bedingte Verzerrungen von Signalen großer Bandbreite vollständig rückgängig machen. Entsprechende Untersuchungen wurden beispielsweise in [85] durchgeführt.

Allerdings sind derartige Kompensatoren aus zweierlei Gründen kaum für die Praxis geeignet: Erstens verhindert die große Zahl an Freiheitsgraden bei plötzlichen Änderungen des Systemzustands eine ausreichend schnelle Regelung, im Vergleich zu 2FG- und 3FG-Kompensatoren sind diese Kompensatoren also zu langsam. Zudem treten bei mehrstufigen Kompensatoren massive Probleme mit Suboptima auf. Dies kann dazu führen, dass die Wirksamkeit in der Praxis kaum besser oder sogar schlechter ist als beim 3FG-Kompensator, wie unter der Annahme unitärer Systeme in [10] gezeigt wurde. Allenfalls der »4FG-Kompensator« hat eine gewisse Praxisrelevanz, da er häufig eingesetzt wird, um die variable DGD des 3FG-Kompensators indirekt zu realisieren. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels sollen mehrstufige Kompensatoren jedoch keine Rolle spielen.

5.1.2 Simulationsaufbau: Signal am Eingang, System und Art der Kompensation

Der Simulationsaufbau des Kapitels 5 basiert – vereinfacht formuliert – auf einer Kombination der Aufbauten der Kapitel 3 und 4, ergänzt um 2FG- und 3FG-Kompensatoren unterschiedlichen Typs. Die folgende Abbildung zeigt eine Übersicht über den Aufbau, eine Diskussion erfolgt im Anschluss.

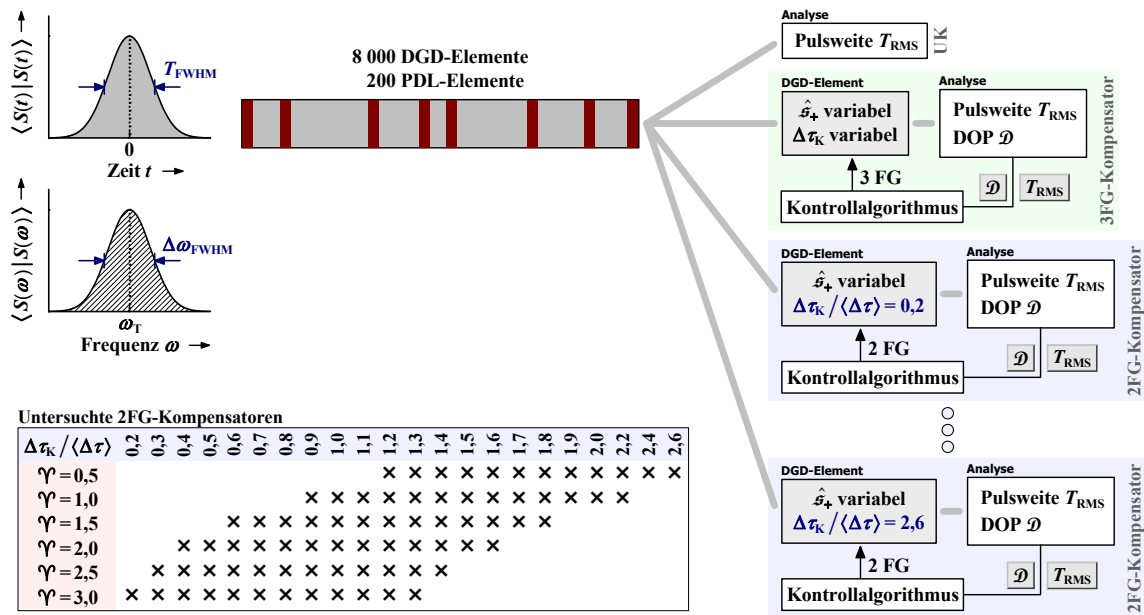


Abb. 5.2: Aufbau der Simulationen des Kapitels 5: Gauß-Pulse unterschiedlicher zeitlicher Halbwertsbreite T_{FWHM} und spektraler Halbwertsbreite $\Delta\omega_{FWHM}$ werden – mit konstantem Polarisationszustand und konstanter Trägerfrequenz ω_T – in 100 000 zufällig generierte Realisierungen des Systems des Kapitels 3.2.3 eingekoppelt, also in Realisierungen eines Systems aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen. Am Ausgang einer jeden Realisierung werden die verzerrten Pulse zunächst bezüglich ihrer Breite T_{RMS} analysiert (unkompensierter Fall), zusätzlich wird die Wirksamkeit unterschiedlicher 3FG- und 2FG-Kompensatoren untersucht. Dabei kommen zwei Typen 3FG-Kompensatoren zum Einsatz (einer mit der DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal, ein zweiter mit der Pulsweite T_{RMS} sowie eine Reihe von 2FG-Kompensatoren, welche sich durch die Art des Rückkopplungssignals (\mathcal{D} bzw. T_{RMS}) und durch die Stärke $\Delta\tau_K$ ihrer konstanten DGD unterscheiden. Abhängig vom Wert des Parameters $\Upsilon = \Delta\omega_{FWHM} / \Delta\omega_{PSP}$ werden dabei unterschiedliche Sätze von 2FG-Kompensatoren eingesetzt, mit Werten der konstanten DGD zwischen $\Delta\tau_K / \langle \Delta\tau \rangle = 0,2$ und $2,6$. Genaue Angaben sind der eingefügten Tabelle zu entnehmen.

System

Das verwendete System ist identisch zum System der Kapitel 3 und 4, es besteht also aus 8 000 DGD- und 200 PDL-Elementen zufälliger Richtung, siehe Kapitel 3.2.2 und 3.2.3. Wie in Kapitel 3.2.2 ausführlich dargelegt wurde, lassen sich Ergebnisse, welche mithilfe eines derartigen Systems generiert werden, sehr universell auf Systeme der Praxis anwenden. Der einzige freie Parameter des Systems ist die mittlere globale PDL $\langle PDL \rangle$, welche mit der mittleren PDL pro PDL-Element $\langle PDL_i \rangle$ gemäß Tab. 3.1 auf Seite 80 zusammenhängt. Ihr Wertebereich wird – wie in den Kapiteln 3 und 4 – gemäß dieser Tab. 3.1 festgelegt.

Völlig analog zu den statistischen Untersuchungen des Kapitels 3.3 wird dann – für jeden Wert der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ – eine Schar von 100 000 Realisierungen des Systems per Monte-Carlo Simulation generiert. Insgesamt werden also $7 \times 100\,000$ Realisierungen erzeugt und jeweils bezüglich ihrer Auswirkung auf das Signal untersucht.

Signal am Eingang

Das Signal am Eingang ist identisch zum Signal des Kapitels 4, es hat also die Form eines einzelnen Gauß-Pulses. (Die Rechtfertigung für die Verwendung dieses einfachen Signals findet sich in Kapitel 4.1.1, die mathematische Beschreibung ist Gleichung (4.1) auf Seite 120 zu entnehmen.) Da im Gegensatz zu Kapitel 4 nicht die Abhängigkeit der Signalverzerrung von der Trägerfrequenz oder vom Polarisationszustand am Eingang untersucht werden soll, können diese beiden Parameter konstant gehalten werden. Ihre Festlegung kann beliebig erfolgen, weder gibt es diesbezüglich auf der Poincaré-Kugel einen ausgezeichneten Punkt, noch hat eine bestimmte Trägerfrequenz ausgezeichnete Eigenschaften. Hier wird der Polarisationszustand am Eingang auf $(2\psi, 2\chi) = (0^\circ, 0^\circ)$ und die Trägerfrequenz auf $\omega_T = 2\pi \cdot 193,1$ THz (Vakuumwellenlänge $\lambda_T \approx 1552,5$ nm) gesetzt.

Die zeitliche Halbwertsbreite T_{FWHM} des Gauß-Pulses am Eingang sowie die zugehörige spektrale Halbwertsbreite $\Delta\omega_{\text{FWHM}} = 4 \ln(2)/T_{\text{FWHM}}$ sollen gemäß der folgenden Tabelle festgelegt werden. Ein Vergleich mit der entsprechenden Tabelle des Kapitels 4 (Tab. 4.2 auf Seite 122) zeigt, dass der hier untersuchte Wertebereich des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ etwas verkleinert ist (auf den für einfache PMD-Kompensatoren besonders interessanten Bereich), andererseits wird dieser Wertebereich feiner abgegrenzt als in Kapitel 4.

Tab. 5.1: Wertebereich des Parameters Υ sowie der entsprechenden Verhältnisse im Zeitbereich $\langle\Delta\tau\rangle/T_{\text{RMS}}$ und $\langle\Delta\tau\rangle/T_{\text{FWHM}}$ für die Simulationen des Kapitels 5; $\langle\Delta\tau\rangle$: Mittlere DGD des Systems; $\Delta\omega_{\text{PSP}} = (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$: PSP-Bandbreite des Systems; $\Delta\omega_{\text{FWHM}}$: Spektrale Halbwertsbreite des Signals; T_{RMS} : RMS-Pulsweite; T_{FWHM} : Zeitliche Halbwertsbreite. Bei den Angaben der Größen in gewöhnlichen Einheiten in den letzten drei Spalten wurde $\langle\Delta\tau\rangle = 4$ ps angenommen, dies entspricht $\Delta\omega_{\text{PSP}} = 2\pi \cdot 31,25$ GHz.

$\Upsilon = \frac{\Delta\omega_{\text{FWHM}}}{\Delta\omega_{\text{PSP}}}$	$\frac{\langle\Delta\tau\rangle}{T_{\text{RMS}}}$	$\frac{\langle\Delta\tau\rangle}{T_{\text{FWHM}}}$	$\Delta\omega_{\text{FWHM}}$ [GHz]	T_{RMS} [ps]	T_{FWHM} [ps]
0,5	0,334	0,142	$2\pi \cdot 15,63$	11,99	28,24
1,0	0,667	0,283	$2\pi \cdot 31,25$	6,00	14,12
1,5	1,001	0,425	$2\pi \cdot 46,88$	4,00	9,41
2,0	1,334	0,567	$2\pi \cdot 62,5$	3,00	7,06
2,5	1,668	0,708	$2\pi \cdot 78,13$	2,40	5,65
3,0	2,001	0,850	$2\pi \cdot 93,75$	2,00	4,71

Der Parameterraum des Kapitels 5 besteht somit aus den ersten beiden Parametern der Tab. 4.1 auf Seite 118, also aus der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ sowie dem Parameter $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$.

Art der Kompensation

Zur Durchführung der PMD-Kompensation werden 3FG- und 2FG-Kompensatoren eingesetzt, jeweils in einer Ausführung mit der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal sowie einer zweiten mit der DOP \mathcal{D} , siehe Abb. 5.2. Dabei wird jeweils ein Satz von 2FG-Kompensatoren verwendet, welche Werte der konstanten DGD zwischen $\Delta\tau_{\text{K}}/\langle\Delta\tau\rangle = 0,2$ und $2,6$ aufweisen. Aufgrund der Resultate von [10] (welche allerdings unitäre Systeme voraussetzen) sowie eigener Voruntersuchungen soll zur Begrenzung der Rechenzeit nicht in jedem Fall der komplette Satz 2FG-Kompensatoren eingesetzt werden, sondern – abhängig vom Parameter Υ – nur die markierten Fälle der eingefügten Tabelle in der Abb. 5.2.

Zur Analyse der Wirksamkeit der unterschiedlichen Kompensatoren wird das Signal am Ausgang des Systems aufgespalten und den einzelnen Kompensatoren separat zugeführt, siehe Abb. 5.2. Schließlich wird es bezüglich der Pulsweite T_{RMS} sowohl direkt (unkompensierter Fall) als auch am Ausgang eines jeden Kompensators ausgewertet.

Transmission des Signals und Analyse am Ausgang

Bevor diese Auswertung durchgeführt werden kann, ist zunächst die Transmission des Signals durch das System und durch die einzelnen Kompensatoren zu berechnen. Unter Berücksichtigung des Jones-Operators eines DGD-Elements [siehe Gleichung (3.1) auf Seite 63] sowie der Vorarbeiten des Kapitels 4.1.3 ergibt sich der frequenzabhängige, nicht normierte Jones-Vektor $|T(\omega)\rangle$ am Ausgang eines Kompensators zu

$$|T(\omega)\rangle = \mathbf{e}^{-i\frac{\Delta\tau_{\text{K}}\omega}{2}\hat{\sigma}_+ \cdot \vec{\sigma}} \mathbf{T}(\omega) |S(\omega)\rangle. \quad (5.1)$$

Dabei ist \hat{s}_+ die Richtung und $\Delta\tau_K$ die Stärke des DGD-Elements des Kompensators, $\vec{\sigma}$ ist der Pauli-Spinvektor, $\mathbf{T}(\omega)$ der Jones-Operator des Systems *ohne* Kompensator und $|S(\omega)\rangle$ der frequenzabhängige, nicht normierte Jones-Vektor am Eingang des Systems.

Daraus ergibt sich der zeitabhängige, nicht normierte Jones-Vektor $|T(t)\rangle$ am Ausgang eines Kompensators durch inverse Fourier-Transformation. Es folgt der zeitliche Verlauf der Leistung am Ausgang $\langle T(t)|T(t)\rangle$, dessen Momente M_0 , M_1 und M_2 und schließlich die RMS-Pulsweite T_{RMS} sowie die Pulsverbreiterung \mathcal{V} . Die zugehörigen Berechnungswege sind identisch zu denen des Kapitels 4.1.3, siehe Gleichung (4.8) bis Gleichung (4.12).

5.2 Mittelwert der Pulsverbreiterung unter dem Einfluss von PDL

Um die Wirksamkeit eines PMD-Kompensators sinnvoll beurteilen zu können, ist eine vollständige Analyse der Statistik der Pulsverbreiterung erforderlich, entsprechende Untersuchungen werden das Thema des Kapitels 5.3 sein. Gerade die starken Verzerrungen im Ausläufer der Verteilung sind es nämlich, welche die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems bestimmen.

Zur Erlangung eines ersten Einblicks in die Wirksamkeit soll jedoch zunächst die *mittlere* Pulsverbreiterung betrachtet werden, also das Scharmittel der Verbreiterung von 100 000 Realisierungen. Im unitären Grenzfall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB werden die Ergebnisse vergleichbar sein mit den Resultaten von [10].

5.2.1 Optimale DGD des 2FG-Kompensators I

Bevor die Wirksamkeit des 2FG-Kompensators bewertet werden kann, ist zunächst die Frage zu klären, wie groß dessen konstante DGD $\Delta\tau_K$ zu wählen ist. In diesem Kapitel soll als Kriterium zur Festlegung dieser konstanten DGD der Mittelwert der Pulsverbreiterung $\langle \mathcal{V} \rangle$ herangezogen werden. Die DGD $\Delta\tau_K$ desjenigen 2FG-Kompensators der Abb. 5.2, der *im Mittel* die geringste Pulsverbreiterung \mathcal{V} bewirkt, gilt somit als optimal. An dieser Stelle sei jedoch bereits auf das Kapitel 5.3.4 hingewiesen, in dem entsprechende Untersuchungen ein zweites Mal durchgeführt werden, mit einem veränderten Kriterium für die optimale DGD $\Delta\tau_K$ (basierend auf einer Analyse der Ausläufer der Verteilung).

Die folgende Abbildung zeigt den Mittelwert der Pulsverbreiterung $\langle \mathcal{V} \rangle$ als Funktion der konstanten DGD $\Delta\tau_K$ des 2FG-Kompensators für unterschiedliche Werte der beiden zentralen Parameter dieses Kapitels $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ und $\langle PDL_i \rangle$. Die Kurven auf der linken / rechten Seite basieren dabei auf Kompensatoren mit der DOP \mathcal{D} / der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal. Das Optimum der DGD $\Delta\tau_K$ ist jeweils deutlich zu erkennen. Es hängt nur geringfügig von der mittleren PDL und etwas stärker vom Parameter \mathcal{V} ab: Je größer \mathcal{V} ist, umso geringer ist der optimale Wert von $\Delta\tau_K/\langle \Delta\tau \rangle$. Ein Vergleich der beiden Rückkopplungssignale schließlich zeigt,

dass der optimale Wert von $\Delta\tau_K$ beim Rückkopplungssignal T_{RMS} etwas größer ist als bei der Verwendung von \mathcal{D} .

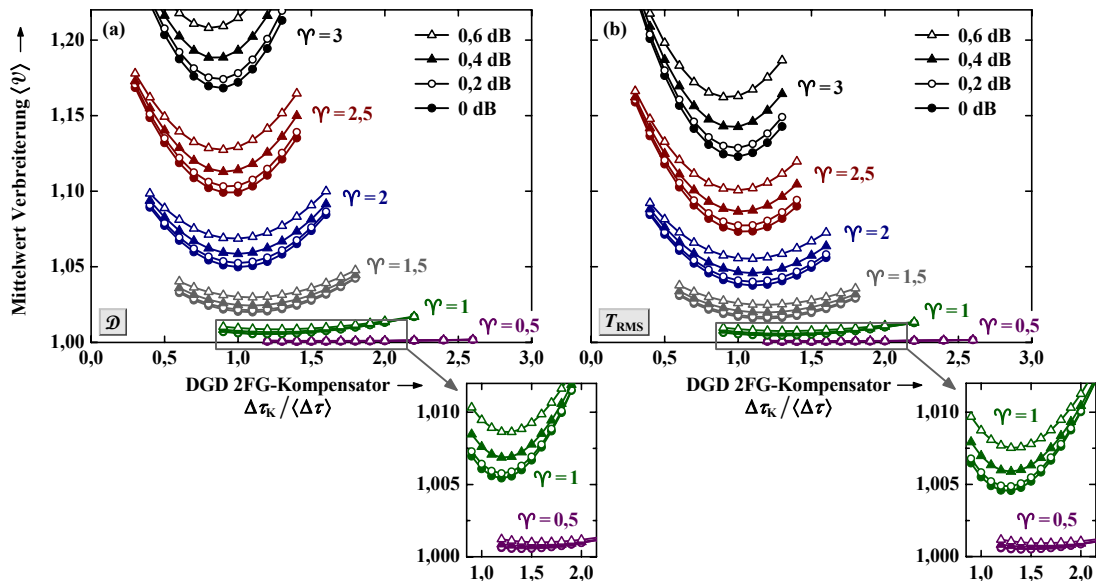


Abb. 5.3: Scharmittelwert der Pulsverbreiterung $\langle\psi\rangle$ als Funktion der konstanten DGD $\Delta\tau_K$ des 2FG-Kompensators für eine mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ zwischen 0 dB und 0,6 dB sowie für unterschiedliche Werte des Parameters $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$; (a) DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal; (b) Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal.

Noch deutlicher zeigen sich diese Zusammenhänge in der folgenden Abbildung. Basierend auf den Daten der Abb. 5.3 ist dort das Optimum der konstanten DGD $\Delta\tau_K$ (in normierter Form) als Funktion des Parameters γ für zwei Werte der mittleren PDL pro Element aufgetragen. Der Abfall des optimalen Wertes von $\Delta\tau_K$ mit steigendem Wert von γ ist deutlich zu erkennen. Dieses Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass – vereinfacht ausgedrückt – die Vorteile eines Kompensators großer konstanter DGD umso mehr schwinden, je größer die Bandbreite des Signals und somit der Parameter γ ist. Die Hintergründe wurden bereits in Kapitel 5.1 erläutert: Das Einfügen eines DGD-Elements am Ausgang erhöht die mittlere DGD des gesamten Systems und verstärkt somit den Einfluss von PMD und PDL höherer Ordnung.

Der optimale Wert der DGD $\Delta\tau_K$ des 2FG-Kompensators liegt also grob bei $\Delta\tau_K/\langle\Delta\tau\rangle = 1$. Bei einem unitären System mit dem Rückkopplungssignal \mathcal{D} ist dieser Wert für große Werte von γ etwas geringer als Eins, für $\gamma = 0,5$ ist er ungefähr 40 % größer als Eins. Beim Rückkopplungssignal T_{RMS} gelten diese Aussagen in ähnlicher Form, die jeweiligen Werte sind jedoch um $\approx 10\%$ erhöht. Für Systeme mit starker mittlerer PDL ändert sich im Vergleich zum unitären System nichts Grundsätzliches, bei geringen Werten von γ steigt das Optimum von $\Delta\tau_K$ jedoch etwas an, bei großen Werten von γ hingegen nimmt es ein wenig ab.

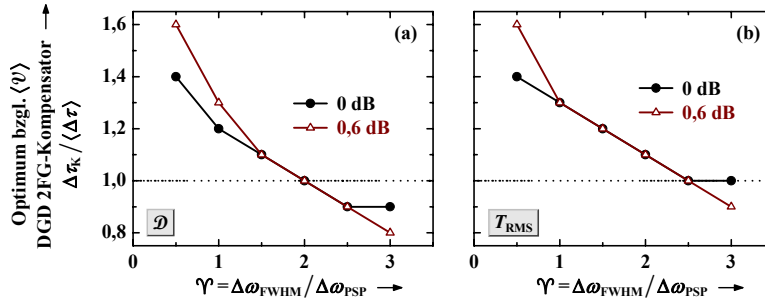


Abb. 5.4: Optimale konstante DGD $\Delta \tau_K$ des 2FG-Kompensators (optimal bezüglich der mittleren Pulsverbreiterung $\langle \psi \rangle$) als Funktion des Parameters Υ für ein unitäres System ($\langle PDL_i \rangle = 0$ dB) sowie für ein System mit starker mittlerer PDL ($\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB); (a) DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal; (b) Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal.

5.2.2 Mittelwert der Pulsverbreiterung

Nachdem die optimale Konstruktion des 2FG-Kompensators geklärt wurde, kann dessen Wirksamkeit mit derjenigen eines 3FG-Kompensators verglichen werden. Dazu ist in der folgenden Abbildung der Scharmittelwert der Pulsverbreiterung $\langle \psi \rangle$ als Funktion des Parameters Υ für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ aufgetragen. Auf der linken Seite wurde jeweils die DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal verwendet, auf der rechten die Pulsweite T_{RMS} . Die beiden oberen Bilder basieren auf dem Einsatz von 3FG-Kompensatoren, die beiden unteren auf 2FG-Kompensatoren optimaler konstanter DGD.

Erwartungsgemäß steigt der Mittelwert der Pulsverbreiterung im zusätzlich dargestellten unkompensierten Fall mit dem Parameter Υ an, vgl. dazu Abb. 4.8 auf Seite 138. Unabhängig von der Art des verwendeten Kompensators sowie von dessen Rückkopplungssignal zeigt sich dann eine gute Wirksamkeit der Kompensation, selbst für große Werte der mittleren PDL und für große Werte des Parameters Υ . Der Mittelwert der Pulsverbreiterung lässt sich also durch den Einsatz eines jeden dieser Kompensatoren deutlich reduzieren. Weiterhin fällt auf, dass im unkompensierten Fall selbst die Anwesenheit starker mittlerer PDL keinen nennenswerten Einfluss auf den Mittelwert der Pulsverbreiterung hat, während beim Einsatz von Kompensatoren eine gewisse Erhöhung des Mittelwerts resultiert. Dieser Anstieg der mittleren Verbreiterung hält sich jedoch in Grenzen, so dass der Einsatz dieser Kompensatoren auch in Anwesenheit starker mittlerer PDL immer sinnvoll ist (zumindest bezüglich der *mittleren* Pulsverbreiterung).

Vor allem für große Werte des Parameters Υ zeigt sich ferner, dass die Wirksamkeit bei der Verwendung des Rückkopplungssignals T_{RMS} stärker ausgeprägt ist als bei der Verwendung von \mathcal{D} . Dies ist eine Folge der Ergebnisse der Abb. 4.4(c) auf Seite 132: Für große Werte von Υ stimmen die Verbreiterungs-PSPs nicht mehr notwendigerweise mit den DOP-PSPs überein. Eine Regelung mit dem Ziel der Maximierung der DOP \mathcal{D} führt also (auch in Abwesenheit von Suboptima) nicht in jedem Fall zum Minimum der Pulsverbreiterung ψ . Es resultiert eine Erhöhung des Mittelwerts $\langle \psi \rangle$

beim Einsatz des Rückkopplungssignals \mathcal{D} , vgl. auch Abb. 4.9(b) und (d) auf Seite 140. Schließlich zeigt ein Vergleich der oberen Hälfte (3FG-Kompensator) mit der unteren (2FG-Kompensator), dass die Wirksamkeit des 2FG-Kompensators erwartungsgemäß etwas geringer ist als die des 3FG-Kompensators.

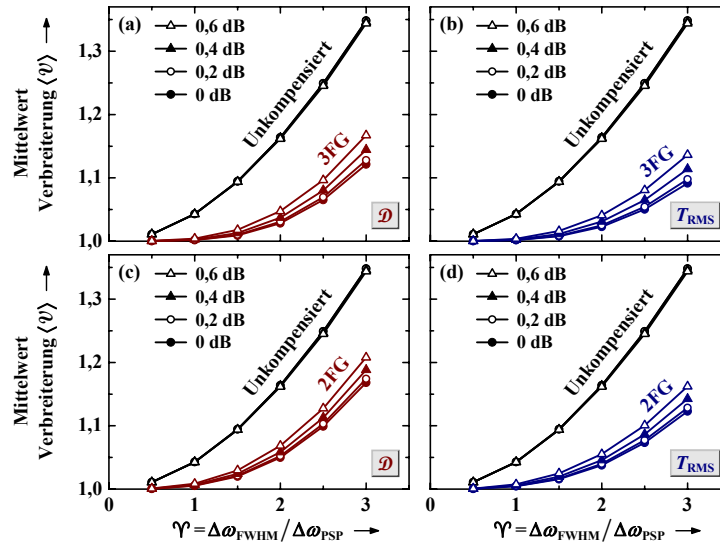


Abb. 5.5: Scharmittelwert der Pulsverbreiterung $\langle \mathcal{U} \rangle$ als Funktion des Parameters Υ für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ im unkompensierten Fall sowie beim Einsatz von 3FG-Kompensatoren (oben) bzw. von 2FG-Kompensatoren optimaler konstanter DGD (unten). Als Rückkopplungssignal wurde die DOP \mathcal{D} (links) bzw. die Pulswerte T_{RMS} (rechts) verwendet.

5.3 Ausläufer der Verteilung unter dem Einfluss von PDL

Die Betrachtung der *mittleren* Pulsverbreiterung erlaubt zwar einen ersten Einblick in die Statistik der Signalverzerrungen. Entscheidend für den praktischen Betrieb eines Systems ist jedoch nicht der Mittelwert der Verbreiterung, sondern die Wahrscheinlichkeit großer Verbreiterungen, da diese die Wahrscheinlichkeit eines Systemausfalls bestimmt. Wenn der Mittelwert die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion vollständig festlegen würde (wie dies beispielsweise bei maxwellverteilten Zufallsvariablen der Fall ist, siehe Anhang), so würde die Wahrscheinlichkeit großer Verbreiterungen direkt vom Mittelwert abhängen. Die nachfolgenden Untersuchungen werden jedoch zeigen, dass die Verteilung der Pulsverbreiterung nicht streng mit dem Mittelwert skaliert. Sie weist vielmehr einen Verlauf auf, welcher empfindlich vom Parameter $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$, von der mittleren PDL, vom Typ des PMD-Kompensators und von der Art des Rückkopplungssignals abhängt. Der erste Einblick des Kapitels 5.2 wird sich dabei in wesentlichen Punkten als äußerst irreführend herausstellen.

5.3.1 Statistik der Pulsverbreiterung im unkompensierten Fall

Die Ergebnisse der Abb. 4.8 auf Seite 138 lassen für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Pulsverbreiterung eines unkompensierten Systems folgende Eigenschaften

erwarten: Im unitären Fall ist die Verbreiterung \mathcal{V} immer größer als Eins, sie tendiert zu umso größeren Werten, je größer der Parameter Υ ist. Falls PDL im System auftritt, kann es einerseits zur »Verengung« von Pulsen kommen, die Breite am Ausgang ist dann geringer als am Eingang, es gilt $\mathcal{V} < 1$. Wichtiger für die Praxis ist aber, dass in Anwesenheit von PDL Fälle auftreten, bei denen die Pulsverbreiterung wesentlich ausgeprägter ist als im unitären System. Dies ist überwiegend bei geringen Werten des Parameters Υ zu erwarten.

Die Histogramme der Pulsverbreiterung \mathcal{V} , welche in der folgenden Abbildung dargestellt sind, bestätigen diese Erwartungen: Zwar wird der Mittelwert von \mathcal{V} durch die Anwesenheit starker mittlerer PDL nicht nennenswert verändert, dies wurde bereits in Abb. 5.5 gezeigt. Die *Verteilung* der Pulsverbreiterung jedoch wird – vor allem für geringe Werte von Υ – merklich durch PDL beeinflusst: Eine Pulsverbreiterung geringer als Eins ($\mathcal{V} < 1$) lässt sich ebenso beobachten wie eine Zunahme der Wahrscheinlichkeit großer Verbreiterungen. Für sehr große Werte von Υ (etwa ab $\Upsilon = 2$) ist die Zunahme starker Verzerrungen jedoch kaum mehr relevant, die Verteilung wird dann nur noch geringfügig durch PDL beeinflusst.

Zum Vergleich ist in der Abb. 5.6 jeweils als gepunktete blaue Linie die Verteilung der Pulsverbreiterung aufgeführt, wie sie im Grenzfall eines unitären Systems mit $\Upsilon \ll 1$ zu erwarten ist. (Allerdings sind diese Kurven in den Teilbildern nur schwer zu erkennen, da sie meist durch die beiden anderen Kurven verdeckt werden. In der Abb. 5.6(b) ist die Kurve einmal exemplarisch mit »Theorie« beschriftet.) Sie basiert auf der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) $p_{\mathcal{V}}(x)$ der Verbreiterung \mathcal{V} im Grenzfall des unitären Systems mit $\Upsilon \ll 1$, welche in [39] analytisch aufgestellt wurde. Angepasst an die hier verwendete Notation lautet sie

$$p_{\mathcal{V}}(x) = \frac{1024 \ln(2)}{\pi^3} \frac{1}{\Upsilon^2} x e^{-\frac{512 \ln(2)}{\pi^3} \frac{1}{\Upsilon^2} (x^2 - 1)}, \quad x \geq 1. \quad (5.2)$$

Der einzige freie Parameter dieser WDF ist ersichtlich Υ . Die Ergebnisse der Abb. 5.6 bestätigen dieses analytische Ergebnis sehr gut, solange der Wert von Υ nicht zu groß ist und $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB gilt. Tritt hingegen starke mittlere PDL auf, so wird die Verteilung der Pulsverbreiterung nur ungenügend durch Gleichung (5.2) beschrieben.

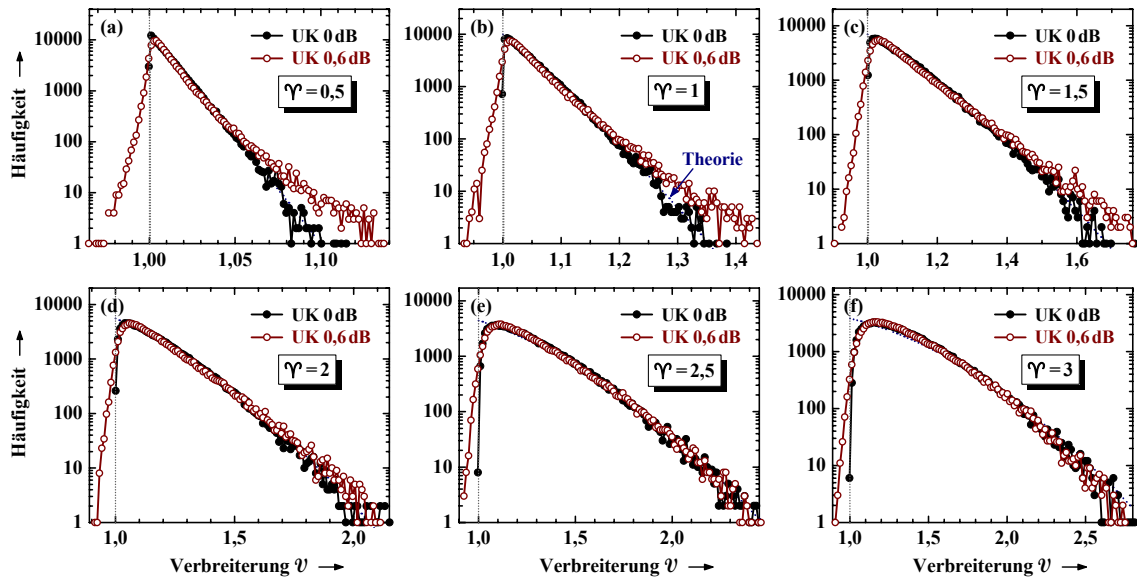


Abb. 5.6: Histogramme der Pulsverbreiterung ψ des unkompensierten Systems für die mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB bzw. 0,6 dB sowie für unterschiedliche Werte des Parameters $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ zwischen (a) $\Upsilon = 0,5$ und (f) $\Upsilon = 3$.

Um den wichtigen Ausläufer dieser Verteilung in Anwesenheit von PDL noch genauer analysieren zu können, ist in der folgenden Abbildung die komplementäre kumulative Verteilungsfunktion (KKV) der Pulsverbreiterung ψ dargestellt, also die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses $\psi > x$ in Abhängigkeit von x .¹

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten großer Pulsverbreiterungen wird offenbar insbesondere für $\Upsilon = 0,5$ und $\Upsilon = 1$ durch die Anwesenheit von PDL erhöht. So steigt beispielsweise für $\Upsilon = 1$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\psi > 1,37$ (der Puls am Ausgang ist um mehr als 37 % breiter als am Eingang) um etwa zwei Größenordnungen, wenn die mittlere PDL pro Element nicht $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB sondern $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB beträgt.

Bei der Interpretation dieser KKV's ist allerdings zu beachten, dass ein einzelnes von 100 000 statistisch unabhängigen Ereignissen der Wahrscheinlichkeit 10^{-5} entspricht. Somit wird der Verlauf für Wahrscheinlichkeiten kleiner als 10^{-4} zunehmend durch das Auftreten einzelner Ereignisse beeinflusst. Die Auswirkungen von PDL auf den Ausläufer der Verteilung in Abb. 5.7(d) bis (f) sind also statistisch irrelevant. Für $\Upsilon \geq 2$ lässt sich somit kein nennenswerter Einfluss der PDL auf die Wahrscheinlichkeit großer Pulsverbreiterungen feststellen. Dieses Ergebnis deckt sich mit den Resultaten der Abb. 4.8(e) und (f) auf Seite 138.

¹ Die Berechnung einer solchen KKV – basierend auf den Daten eines Histogramms – wurde in Kapitel 3.3.2 beschrieben, vgl. die Diskussion zur Abb. 3.5 auf Seite 84.

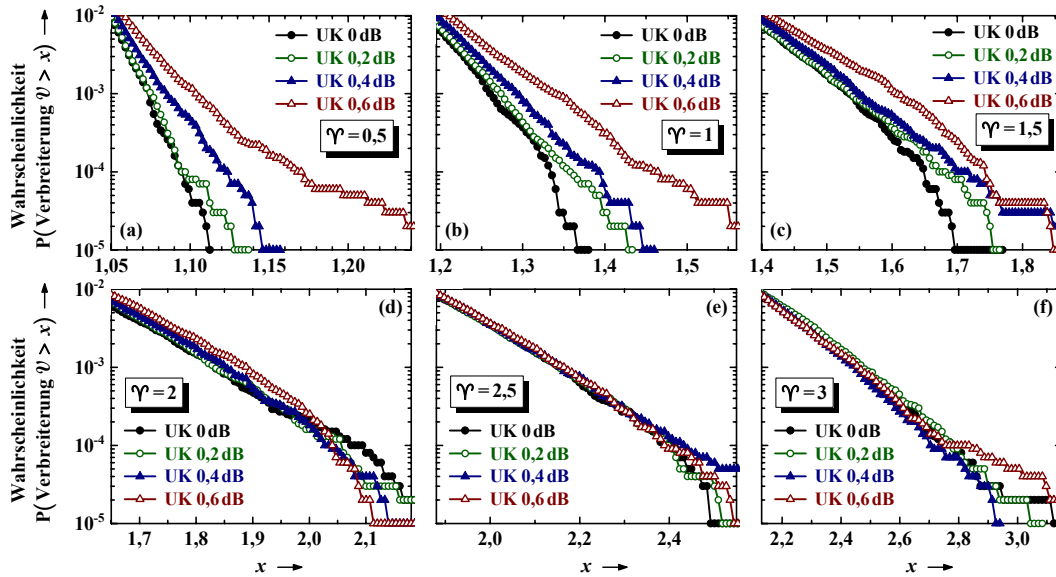


Abb. 5.7: Komplementäre kumulative Verteilungsfunktion der Pulsverbreiterung \mathcal{V} (Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer großen Verbreiterung $\mathcal{V} > x$ als Funktion von x) des unkompensierten Systems für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ sowie für Werte des Parameters $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ zwischen (a) $\Upsilon = 0,5$ und (f) $\Upsilon = 3$.

5.3.2 Statistik der Pulsverbreiterung beim Einsatz von 3FG-Kompensatoren

Weitaus stärker noch wirkt sich die Anwesenheit von PDL dann auf die Verteilung der Pulsverbreiterung aus, wenn PMD-Kompensatoren eingesetzt werden. Dies soll im Folgenden gezeigt und analysiert werden.

Zwar haben die beiden oberen Teilbilder der Abb. 5.5 gezeigt, dass der Einfluss von PDL auf die *mittlere* Pulsverbreiterung $\langle \mathcal{V} \rangle$ für Systeme mit 3FG-Kompensator erkennbar aber dennoch verhältnismäßig gering ist. Eine sehr gute Wirksamkeit der Kompensation bezüglich der *mittleren* Verbreiterung ist also in jedem Fall gewährleistet. Daraus zu folgern, dass die Wirksamkeit eines 3FG-Kompensators durch das Auftreten von PDL kaum beeinflusst wird, wäre jedoch vorschnell. Dies zeigt die nun folgende Untersuchung des Ausläufers der Verteilung. Zunächst soll dabei der Einsatz eines 3FG-Kompensators mit der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal angenommen werden. Die entsprechenden Histogramme sind in der folgenden Abbildung für unterschiedliche Werte des Parameters Υ jeweils im unitären Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB sowie für den Fall starker mittlerer PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB dargestellt. Zum Vergleich sind als dünne graue Linien die Histogramme des unkompensierten unitären Systems eingetragen, sie entsprechen den schwarzen Kurven der Abb. 5.6.

Beim unitären System $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB ist die 3FG-Kompensation offensichtlich äußerst wirksam, dies gilt insbesondere für geringe Werte des Parameters Υ : Die Wahrscheinlichkeit großer Pulsverbreiterungen wird durch den Einsatz des Kompensators wesentlich verringert. Das Auftreten von PDL jedoch kann die Wirksamkeit deutlich beeinträchtigen, die Verteilung der Pulsverbreiterung ändert sich dann – vor allem bei

geringen Werten des Parameters Υ – ganz wesentlich. Die Wahrscheinlichkeit großer Verbreiterungen (wie auch die Wahrscheinlichkeit von $\psi < 1$) steigt signifikant an. Allerdings ist dieser Anstieg (zumindest beim Einsatz des Rückkopplungssignals T_{RMS}) nicht so ausgeprägt, dass der Nutzen des 3FG-Kompensators insgesamt in Frage zu stellen wäre: Die Wirksamkeit ist immer ausreichend gegeben, eine merkliche Reduzierung der Wahrscheinlichkeit großer Pulsverbreiterungen im Vergleich zum unkompensierten System ist noch immer möglich, auch bei starker mittlerer PDL und großen Werten des Parameters Υ .

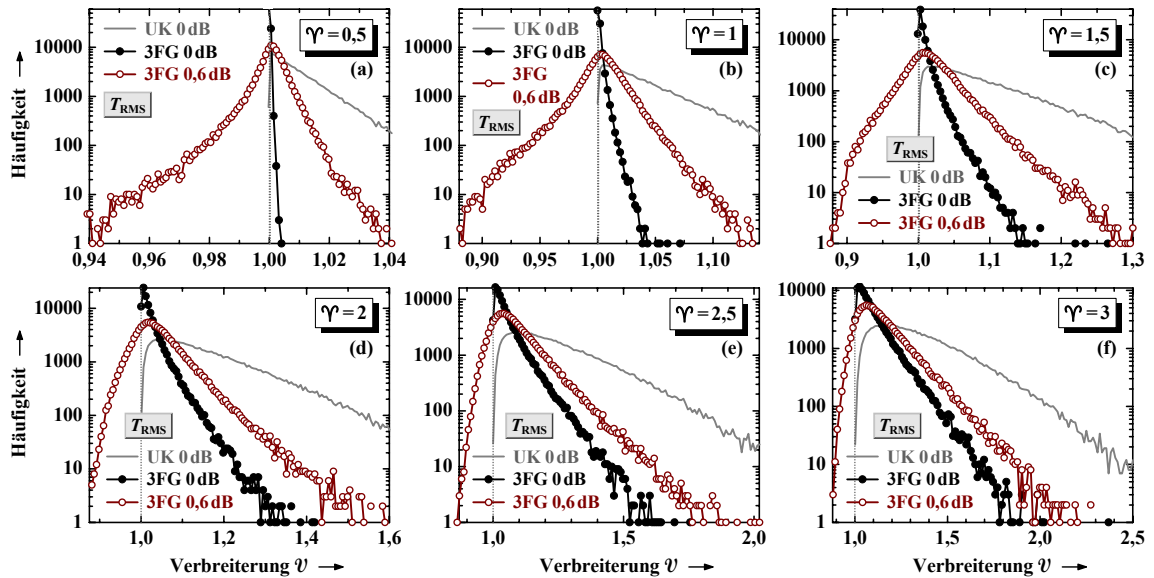


Abb. 5.8: Histogramme der Pulsverbreiterung ψ beim Einsatz eines 3FG-Kompensators mit der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal für zwei Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB und 0,6 dB sowie für Werte des Parameters $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ zwischen (a) $\Upsilon = 0,5$ und (f) $\Upsilon = 3$. Zum Vergleich ist jeweils als dünne graue Linie das Histogramm der Pulsverbreiterung des unkompensierten Systems mit $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB eingetragen, vgl. Abb. 5.6.

Diese Aussage wird ihre Gültigkeit beim Einsatz des Rückkopplungssignals \mathcal{D} verlieren. In der folgenden Abbildung sind dazu die gleichen Histogramme noch einmal dargestellt (auch mit der gleichen Skalierung der Achsen), nun jedoch nicht mit der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal, sondern mit der DOP \mathcal{D} . Für sehr geringe Werte von Υ hat die Wahl des Rückkopplungssignals offensichtlich keinen nennenswerten Einfluss, die Kurven der Abb. 5.8(a) sind nahezu identisch zu denen der Abb. 5.9(a). (Die Abweichung der DOP-PSPs von den Verbreiterungs-PSPs in Anwesenheit von PDL, siehe Abb. 4.4(b) auf Seite 132, macht sich insofern kaum bemerkbar.) Bei größeren Werten des Parameters Υ zeigen sich dann aber mehr und mehr Unterschiede zwischen der Abb. 5.8 und der Abb. 5.9. So wird schließlich bei $\Upsilon = 3$ der Nutzen eines 3FG-Kompensators mit dem Rückkopplungssignal \mathcal{D} fraglich, die Wahrscheinlichkeit sehr großer Pulsverbreiterungen kann kaum noch reduziert werden. Dies gilt insbesondere in Anwesenheit starker mittlerer PDL.

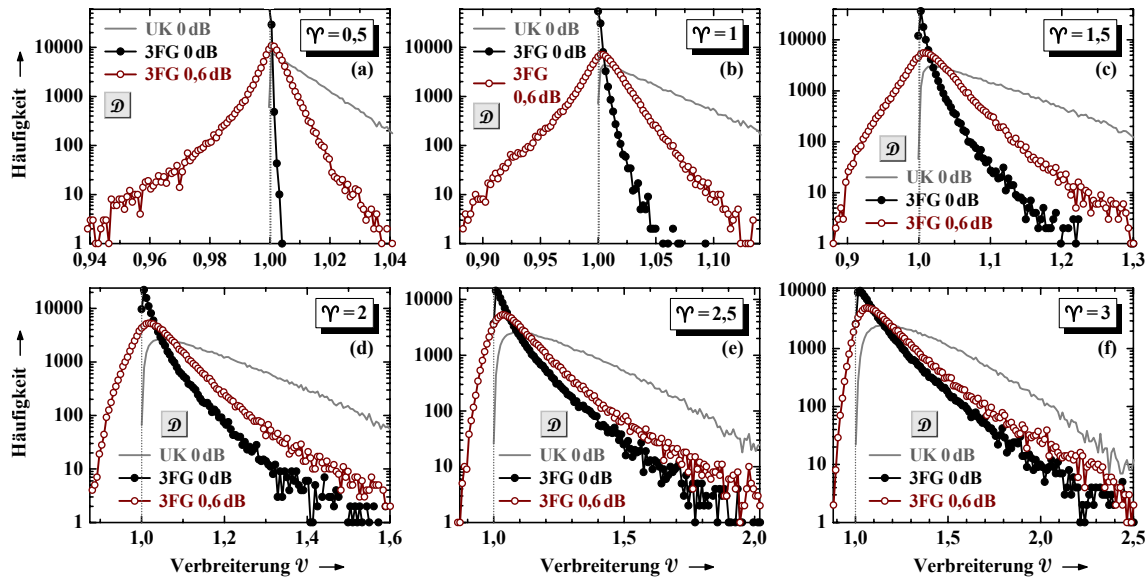


Abb. 5.9: Entsprechend Abb. 5.8, jedoch mit der DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal.

Um diese Problematik näher zu untersuchen, sollen die zugehörigen komplementären kumulativen Verteilungsfunktionen betrachtet werden. Sie ermöglichen eine umfassende Beurteilung der Ausläufer der Verteilung. Zunächst wird wieder der Fall eines 3FG-Kompensators mit dem Rückkopplungssignal T_{RMS} betrachtet. Die entsprechenden KKV's sind in der folgenden Abbildung dargestellt, sie basieren auf den gleichen Daten wie die Histogramme der Abb. 5.8. Erwartungsgemäß ist eine gute Wirksamkeit der Kompensation in jedem Fall gewährleistet, die Wahrscheinlichkeit sehr großer Pulsverbreiterungen lässt sich durch den Einsatz eines solchen Kompensators immer deutlich verringern. Dies gilt selbst in Anwesenheit starker mittlerer PDL, allerdings ist die Wirksamkeit dann – insbesondere für kleine Werte des Parameters Υ – weniger ausgeprägt als im unitären Fall.

Wird stattdessen die DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal eingesetzt, so resultieren die KKV's der Abb. 5.11, in der die gleiche Skalierung der Achsen verwendet wird wie in Abb. 5.10. Für $\Upsilon=0,5$ sind erwartungsgemäß keine nennenswerten Unterschiede zwischen Abb. 5.10(a) und Abb. 5.11(a) zu erkennen, die Art des Rückkopplungssignals ist dann unerheblich. In der unteren Hälfte der Abb. 5.11, also für $\Upsilon \geq 2$, zeigt sich aber deutlich, dass der Nutzen des Einsatzes eines 3FG-Kompensators mit dem Rückkopplungssignal \mathcal{D} – vor allem in Anwesenheit starker mittlerer PDL – fragwürdig wird.

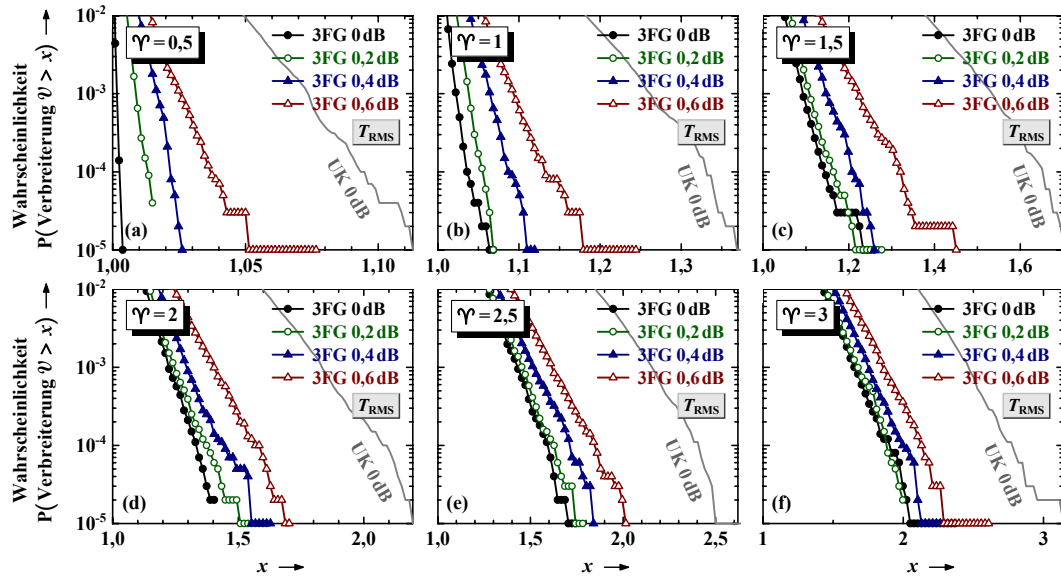


Abb. 5.10: Komplementäre kumulative Verteilungsfunktion (KKV) der Pulsverbreiterung v (Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer großen Verbreiterung $v > x$ als Funktion von x) beim Einsatz eines 3FG-Kompensators mit der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ sowie für Werte des Parameters $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ zwischen (a) $\gamma = 0,5$ und (f) $\gamma = 3$. Zum Vergleich ist jeweils als graue Linie die Verteilung der Pulsverbreiterung des unkompenzierten Systems mit $\langle PDL_i \rangle = 0$ dB eingetragen, vgl. Abb. 5.7.

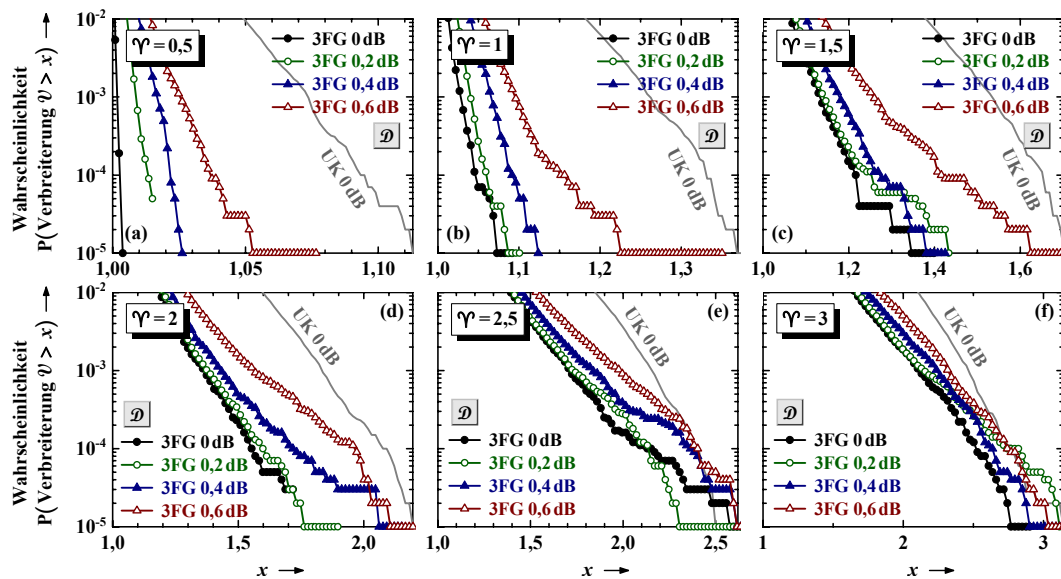


Abb. 5.11: Entsprechend Abb. 5.10, jedoch mit der DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal.

Das in der Praxis häufig eingesetzte Rückkopplungssignal \mathcal{D} kann also bei großen Werten des Parameters $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ problematisch sein. Zwar gilt diese Aussage abgeschwächt bereits für unitäre Systeme, in Anwesenheit starker mittlerer PDL gewinnt sie jedoch wesentlich an Bedeutung. Dann ist die Wirksamkeit der 3FG-Kompensation bereits bei moderaten Werten von γ , bei denen einstufige Kompensationsverfahren gemeinhin als äußerst wirksam gelten, massiv beeinträchtigt.

5.3.3 Statistik der Pulsverbreiterung beim Einsatz von 2FG-Kompensatoren

Die Wirksamkeit eines 2FG-Kompensators wird wesentlich bestimmt durch den Wert seiner konstanten DGD $\Delta\tau_K$. Dies wurde bereits bei der Analyse der mittleren Pulsverbreiterung $\langle\mathcal{V}\rangle$ in Kapitel 5.2.1 deutlich. Entsprechende Untersuchungen sollen nun für die Wahrscheinlichkeit großer Pulsverbreiterungen durchgeführt werden anhand der komplementären kumulativen Verteilungsfunktion von \mathcal{V} . Dessen Verlauf hängt nicht nur vom Wert der konstanten DGD $\Delta\tau_K$ ab, sondern auch von der Stärke der mittleren PDL, vom Parameter \mathcal{V} und vom Typ des Rückkopplungssignals. Die folgenden vier Abbildungen zeigen den Einfluss dieser Abhängigkeiten. Dabei basieren die ersten beiden Bilder (Abb. 5.12 und Abb. 5.13) auf dem Einsatz des Rückkopplungssignals T_{RMS} , die beiden darauffolgenden (Abb. 5.14 und Abb. 5.15) nehmen das Rückkopplungssignal \mathcal{D} an. Abb. 5.12 und Abb. 5.14 gelten für ein unitäres System, Abb. 5.13 und Abb. 5.15 hingegen für ein System mit starker mittlerer PDL. Jede der Abbildungen besteht aus sechs Teilbildern, welche die Abhängigkeit vom Parameter \mathcal{V} repräsentieren. Schließlich enthält jedes einzelne Teilbild eine Auswahl an KKV, welche auf 2FG-Kompensatoren mit unterschiedlichen Werten der konstanten DGD $\Delta\tau_K$ (nahe der »optimalen« DGD) basieren.

Welche KKV eines Teilbildes als optimal bezeichnet wird, ist allerdings eine Frage der Definition. Abhängig davon, welche Pulsverbreiterung mit welcher Wahrscheinlichkeit toleriert werden kann, ergeben sich unterschiedliche Optima der konstanten DGD $\Delta\tau_K$. Um ein eindeutiges Kriterium zur Bestimmung der »besten« KKV (und somit der optimalen DGD $\Delta\tau_K$ des 2FG-Kompensators) zu erhalten, soll die folgende Überlegung dienen: Ein einzelnes von 100 000 statistisch unabhängigen Ereignissen entspricht bekanntlich der Wahrscheinlichkeit 10^{-5} . Fällt eine KKV deutlich unter den Wert 10^{-4} , so ist dieser Teil ihres Verlaufs wesentlich durch das Auftreten einzelner Ereignisse geprägt, er sollte nicht in die Festlegung der optimalen DGD $\Delta\tau_K$ einfließen. Dementsprechend wird im Folgenden derjenige 2FG-Kompensator als optimal angesehen, dessen KKV zuerst den Wert 10^{-4} unterschreitet. Die zugehörige Pulsverbreiterung, also die zugehörige x -Koordinate, soll als $\mathcal{V}_{99,99\%}$ bezeichnet werden. Sie ist ein sehr gutes Maß zur Beurteilung der Pulsverbreiterung im Ausläufer der Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Verbreiterung \mathcal{V} beim Einsatz eines derart optimierten 2FG-Kompensators größer wird als $\mathcal{V}_{99,99\%}$, ist also definitionsgemäß gleich 10^{-4} . Anders formuliert, ist die Pulsverbreiterung in 99,99 % der Fälle geringer als $\mathcal{V}_{99,99\%}$. Die somit festgelegte KKV des optimalen 2FG-Kompensators ist in den Teilbildern jeweils rot gekennzeichnet, ebenso der zugehörige Wert der normierten optimalen DGD $\Delta\tau_K/\langle\Delta\tau\rangle$. Neben dieser optimalen KKV sind in jedem Teilbild weitere Verteilungen eingezeichnet, wie sie bei etwas größeren bzw. etwas geringeren Werten der DGD $\Delta\tau_K$ auftreten. In einigen Fällen ist allerdings zu beachten, dass die optimale DGD $\Delta\tau_K$ (optimal bezüglich $\mathcal{V}_{99,99\%}$) am Rand des betrachteten Wertebereichs der Tabelle in Abb. 5.2 lag. Der optimale Wert kann in einem solchen Fall also durchaus noch etwas größer bzw. etwas kleiner sein als hier angegeben. Eine vollständige Übersicht über die optimalen Werte von $\Delta\tau_K$ erfolgt in Kapitel 5.3.4, hier sollen

zunächst die Verteilungen an sich betrachtet werden. Schließlich ist in jedem Teilbild zum Vergleich und zur Beurteilung der Wirksamkeit der Kompensation die Verteilung der Pulsverbreiterung des unkompensierten Systems eingetragen – sofern ihr Verlauf nicht außerhalb der gewählten Skalierung liegt.

Bei der Verwendung des Rückkopplungssignals T_{RMS} in Abb. 5.12 und in Abb. 5.13 zeigt sich immer eine deutliche Reduzierung der Wahrscheinlichkeit großer Pulsverbreiterungen – falls der 2FG-Kompensator geeignet konstruiert wurde. Zwar nimmt die Wirksamkeit erwartungsgemäß mit steigendem Wert von Υ sowie bei großer mittlerer PDL ab, sehr große Pulsverbreiterungen lassen sich aber selbst bei $\Upsilon = 3$ und $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB wirksam verhindern, siehe Abb. 5.13(f). Weiterhin zeigt sich, dass die Anwesenheit starker mittlerer PDL eine leichte Anpassung der optimalen konstanten DGD $\Delta\tau_K$ erforderlich macht. Die optimalen Werte von $\Delta\tau_K / \langle \Delta\tau \rangle$ sind in Abb. 5.13 etwas größer als in Abb. 5.12.

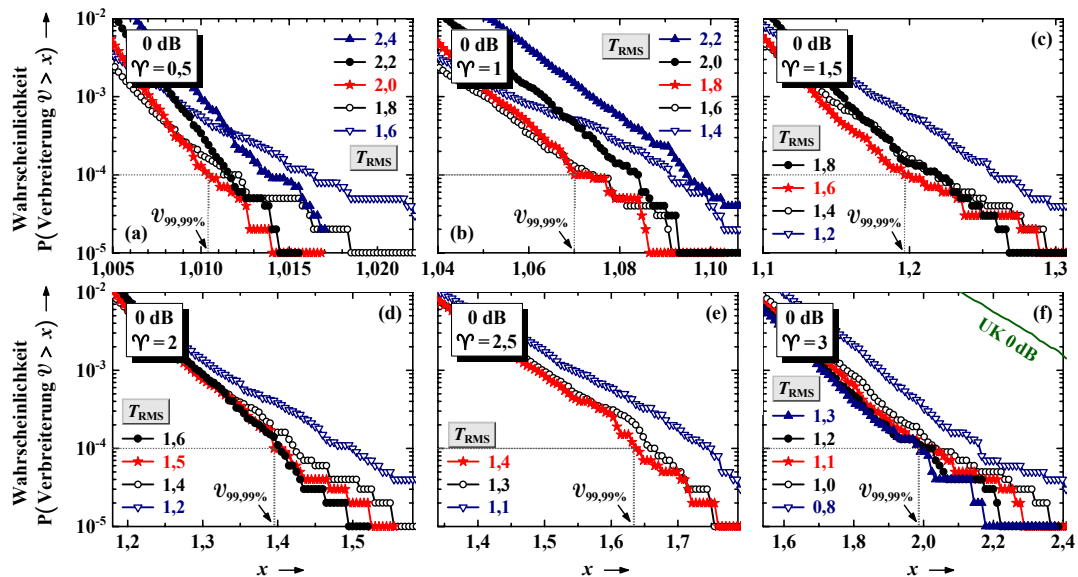


Abb. 5.12: Komplementäre kumulative Verteilungsfunktion (KKV) der Pulsverbreiterung \mathcal{V} (Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer großen Verbreiterung $\mathcal{V} > x$ als Funktion von x) beim Einsatz von 2FG-Kompensatoren unterschiedlich starker konstanter DGD $\Delta\tau_K / \langle \Delta\tau \rangle$ in der Nähe des Optimums bezüglich $\mathcal{V}_{99,99\%}$; die rot gekennzeichneten Kurven basieren jeweils auf dem 2FG-Kompensator, dessen KKV als erstes unter den Wert 10^{-4} fällt, bei dem also die DGD $\Delta\tau_K / \langle \Delta\tau \rangle$ bezüglich $\mathcal{V}_{99,99\%}$ optimal gewählt wurde. Vorausgesetzt ist jeweils ein unitäres System, zudem wurde als Rückkopplungssignal die Pulsweite T_{RMS} verwendet. Der Parameter $\Upsilon = \Delta\omega_{\text{FWHM}} / \Delta\omega_{\text{PSP}}$ hatte einen Wert zwischen (a) $\Upsilon = 0,5$ und (f) $\Upsilon = 3$.

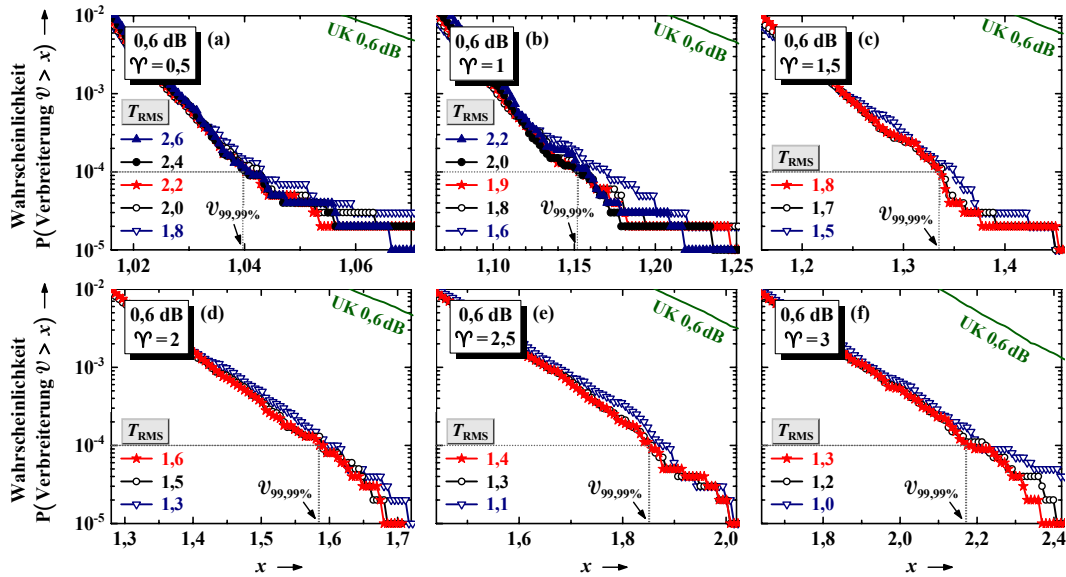
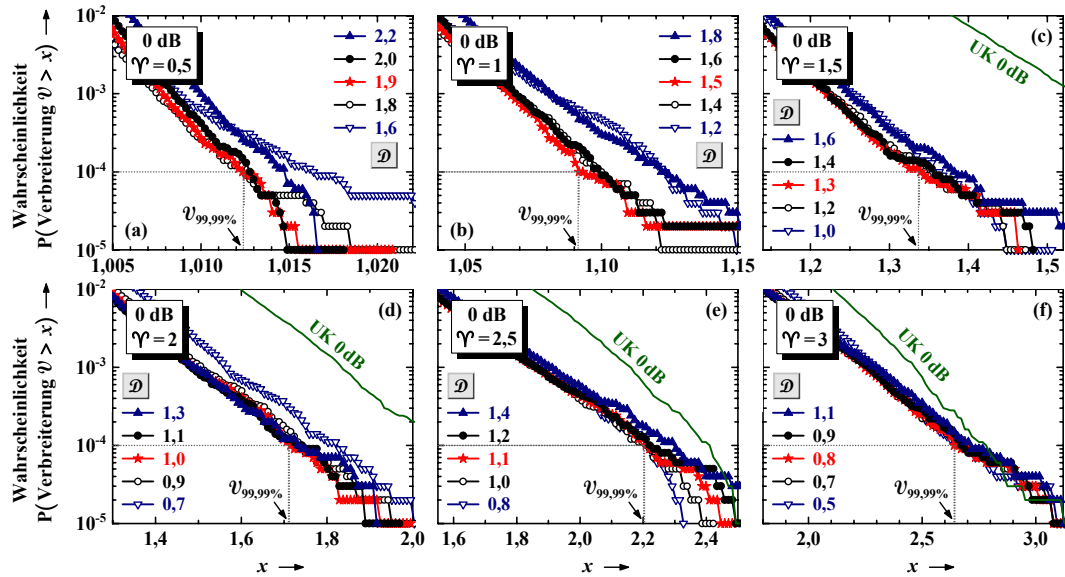
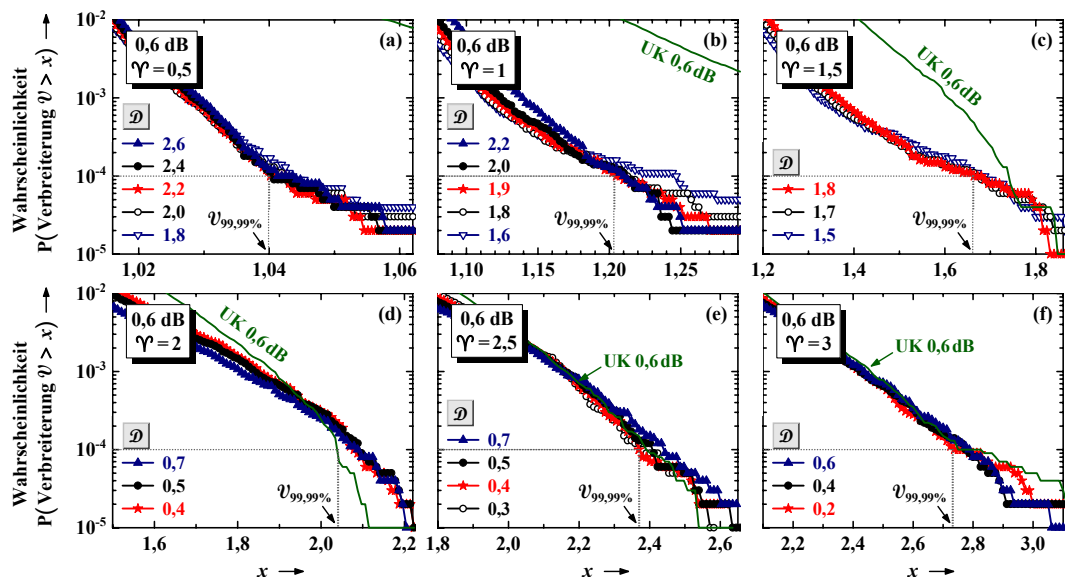


Abb. 5.13: Entsprechend Abb. 5.12, jedoch mit einer starken mittleren PDL pro Element von $\langle PDL_i \rangle = 0,6 \text{ dB}$.

Wie bei den 3FG-Kompensatoren kommt es auch bei einer Verwendung von 2FG-Kompensatoren zu deutlichen Einbrüchen der Wirksamkeit der Kompensation, falls die DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal eingesetzt wird und wenn gleichzeitig der Parameter \mathcal{V} einen großen Wert hat. Dies zeigt sich in Abb. 5.14 ($\langle PDL_i \rangle = 0 \text{ dB}$) sowie in verstärktem Maße in Abb. 5.15 ($\langle PDL_i \rangle = 0,6 \text{ dB}$). Dieser Einbruch der Wirksamkeit ist offensichtlich noch stärker ausgeprägt als beim Einsatz von 3FG-Kompensatoren. Zwar kann die Wahrscheinlichkeit großer Pulsverbreiterungen beim unitären System der Abb. 5.14 noch bis $\mathcal{V} \approx 2$ durch Verwendung eines 2FG-Kompensators nennenswert verringert werden. In Anwesenheit starker mittlerer PDL ($\langle PDL_i \rangle = 0,6 \text{ dB}$ in Abb. 5.15) jedoch gelingt dies nur noch bis $\mathcal{V} \approx 1$. Bei größeren Werten von \mathcal{V} kann der Einsatz eines 2FG-Kompensators dann sogar schädlich sein, er kann eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit großer Verbreiterungen nach sich ziehen. Weiterhin zeigt ein Vergleich der Abb. 5.14 mit der Abb. 5.15, dass eine wesentliche Anpassung der optimalen konstanten DGD $\Delta\tau_K$ erforderlich wird, sobald nennenswert PDL im System auftritt. Für geringe Werte von \mathcal{V} ist die erforderliche Anpassung noch sehr unbedeutend, bei großen Werten von \mathcal{V} jedoch bricht der optimale Wert der konstanten DGD $\Delta\tau_K$ im Vergleich zum unitären System regelrecht ein. Eine weitergehende Analyse wird das Thema des Kapitels 5.3.4 sein.

Abb. 5.14: Entsprechend Abb. 5.12, jedoch mit der DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal.Abb. 5.15: Entsprechend Abb. 5.12, jedoch mit einer starken mittleren PDL pro Element von $\langle PDL_i \rangle = 0,6$ dB sowie mit der DOP \mathcal{D} als Rückkopplungssignal.

5.3.4 Optimale DGD des 2FG-Kompensators II

Die Festlegung der DGD $\Delta\tau_K$ eines 2FG-Kompensators mit den Mitteln des Kapitels 5.2.1 (siehe Abb. 5.4 auf Seite 164) ist offenbar für die Praxis wenig geeignet. Besteht das Ziel nämlich darin, die Wahrscheinlichkeit großer Pulsverbreiterungen zu reduzieren (und nicht die mittlere Pulsverbreiterung $\langle v \rangle$), so ist die konstante DGD $\Delta\tau_K$ des Kompensators stattdessen mit dem Verfahren des Kapitels 5.3.3 zu bestimmen. Eine Zusammenfassung der dabei resultierenden Werte ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Sie lässt sich in der Praxis nutzen, um eine optimale Konstruktion von 2FG-Kompensatoren zu gewährleisten. Der entscheidende Vorteil im Vergleich zu ähnlichen

Untersuchungen in der Literatur (beispielsweise in [10]) ist, dass die Abb. 5.16 weitaus universeller einsetzbar ist: Sie kann nicht nur auf den gesamten praxisrelevanten Wertebereich des Parameters Υ angewendet werden, sondern auch auf alle in der Praxis auftretenden Werte der mittleren PDL.

Wird die Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal eingesetzt, wie auf der rechten Seite der Abb. 5.16 geschehen, so ist der optimale Wert der DGD $\Delta\tau_{\text{K}}$ kaum von der mittleren PDL abhängig. Ähnliche Resultate wurden bereits in Abb. 5.4(b) auf Seite 164 beobachtet, allerdings sind die optimalen Werte hier deutlich größer als in Abb. 5.4(b). Ursächlich für diese erhöhten Werte der optimalen DGD ist, dass – vereinfacht ausgedrückt – der Kompensator zur Verhinderung sehr großer Pulsverbreiterungen insbesondere die großen Werte der globalen DGD (aus dem Ausläufer der Maxwellverteilung der DGD) kompensieren können muss.

Der Einfluss von PDL auf den optimalen Wert von $\Delta\tau_{\text{K}}$ ist beim Rückkopplungssignal \mathcal{D} – vor allem für große Werte des Parameters Υ – weitaus ausgeprägter, siehe Abb. 5.16(a). Für $\Upsilon < 1$ ist noch kein nennenswerter Unterschied zu Abb. 5.16(b) zu erkennen, bei großen Werten von Υ treten dann aber massive Abweichungen auf: Das Optimum von $\Delta\tau_{\text{K}}$ tendiert in Anwesenheit von PDL mehr und mehr gegen Null. Der Kompensator wird praktisch überflüssig, eventuell ist sein Einsatz sogar schädlich. So liegt beispielsweise für $\Upsilon = 3$ das Optimum von $\Delta\tau_{\text{K}}$ im unitären Fall bei $\Delta\tau_{\text{K}}/\langle\Delta\tau\rangle \approx 0,8$, bereits für den moderaten Wert $\langle PDL_i \rangle = 0,2$ dB der mittleren PDL pro Element ist es auf etwa $\Delta\tau_{\text{K}}/\langle\Delta\tau\rangle = 0,4$ abgefallen. Ist die mittlere PDL noch größer, so ist der Einsatz des Kompensators wenig sinnvoll.

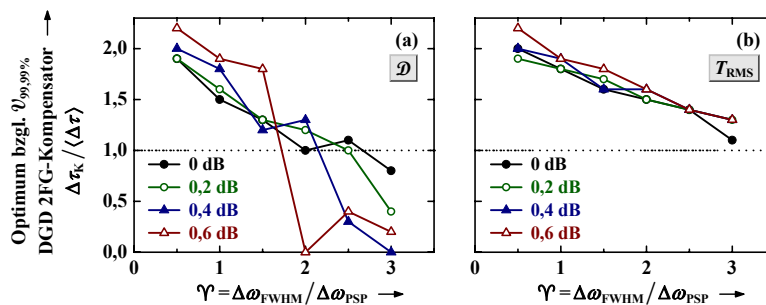


Abb. 5.16: Optimale DGD $\Delta\tau_{\text{K}}$ des 2FG-Kompensators (optimal bezüglich $\mathcal{U}_{99,99\%}$) als Funktion des Parameters Υ für unterschiedliche Werte der mittleren PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ mit (a) der DOP \mathcal{D} und (b) der Pulsweite T_{RMS} als Rückkopplungssignal.

5.3.5 Pulsverbreiterung im Ausläufer der Verteilung

Mit diesen Richtlinien zur Konstruktion von 2FG-Kompensatoren kann schließlich der Einfluss von PDL auf die Wirksamkeit der Kompensatoren sinnvoll verglichen werden. Dazu wurde in Kapitel 5.2.2 das Scharmittel der Pulsverbreiterung $\langle \mathcal{U} \rangle$ als Funktion von Υ aufgetragen, siehe Abb. 5.5 auf Seite 165. Entsprechende Betrachtungen sollen nun für den Wert $\mathcal{U}_{99,99\%}$ erfolgen, also für die Verbreiterung, welche nur in 10 von 100 000 Fällen überschritten wird. Gemäß der Diskussion des Kapitels 5.3.3 ist diese

Größe ein sehr gutes Maß für die Pulsverbreiterung im Ausläufer der Verteilung. Sie ist weitaus stärker mit der Systemausfallwahrscheinlichkeit korreliert als die mittlere Verbreiterung $\langle \mathcal{V} \rangle$. Ansonsten besteht der einzige grundsätzliche Unterschied zwischen der folgenden Abbildung und Abb. 5.5 in einer veränderten Skalierung der Ordinatenachse: Die mittlere Verbreiterung $\langle \mathcal{V} \rangle$ ist naturgemäß deutlich geringer als die Verbreiterung $\mathcal{V}_{99,99\%}$ im Ausläufer der Verteilung.

Die rechte Seite der Abb. 5.17 verdeutlicht noch einmal die ausgezeichnete Wirksamkeit einstufiger PMD-Kompensatoren beim Einsatz des Rückkopplungssignals T_{RMS} . Wichtiger für die Praxis sind allerdings die Probleme, welche sich beim Einsatz des Rückkopplungssignals \mathcal{D} ergeben. Sie werden auf der linken Seite der Abb. 5.17 deutlich erkennbar, in der Abb. 5.5 auf Seite 165 gab es diesbezüglich noch nicht das geringste Anzeichen. Vor allem bei großen Werten des Parameters Υ und gleichzeitiger Anwesenheit von PDL treten deutliche Einbrüche der Wirksamkeit auf. Die Verbreiterung im Ausläufer der Verteilung $\mathcal{V}_{99,99\%}$ lässt sich dann kaum noch durch den Einsatz eines einstufigen Kompensators verringern. Diese reduzierte Wirksamkeit der Kompensation macht sich insbesondere bei 2FG-Kompensatoren bemerkbar, dort tritt sie bereits bei moderaten Werten von Υ und $\langle PDL_i \rangle$ auf. Einstufige PMD-Kompensatoren unter Verwendung des in der Praxis sehr gebräuchlichen Rückkopplungssignals \mathcal{D} sollten also nur dann eingesetzt werden, wenn weder Υ noch $\langle PDL_i \rangle$ sehr groß sind.

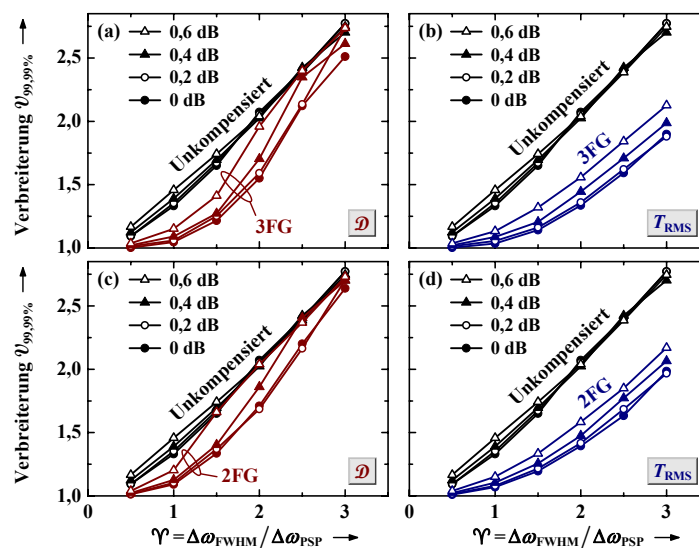


Abb. 5.17: Pulsverbreiterung im Ausläufer der Verteilung $\mathcal{V}_{99,99\%}$ als Funktion des Parameters Υ für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ im unkompensierten Fall sowie beim Einsatz von 3FG-Kompensatoren (oben) bzw. 2FG-Kompensatoren mit optimaler konstanter DGD (unten). Als Rückkopplungssignal wurde die DOP \mathcal{D} (links) bzw. die Pulsweite T_{RMS} (rechts) verwendet.

5.3.6 Zusammenfassung: Wann ist der Einsatz von PMD-Kompensatoren sinnvoll?

Die Betrachtungen dieses Kapitels haben die Frage nach der Wirksamkeit einfacher und zugleich praxisrelevanter einstufiger PMD-Kompensatoren aus unterschiedlichen Blickwinkeln beleuchtet. Dabei wurde anhand diverser Kriterien untersucht, unter welchen Bedingungen der Einsatz der Kompensatoren es ermöglicht, die Pulsverbreiterung signifikant zu reduzieren. Zum Abschluss dieses Kapitels soll diese Frage anhand einer alternativen Darstellung noch einmal behandelt werden. Und zwar soll die Wahrscheinlichkeit untersucht werden, dass ein unkompensiertes System eine Pulsverbreiterung verursacht, welche größer ist als die Verbreiterung $\mathcal{V}_{99,99\%}$ beim Einsatz eines Kompensators. Bei Systemen mit PMD-Kompensation wird die zugehörige Verbreiterung $\mathcal{V}_{99,99\%}$ definitionsgemäß »fast nie« überschritten (nur in 10 von 100 000 Fällen). Die Frage ist also, wie oft diese Verbreiterung *ohne* Verwendung des Kompensators überschritten werden würde.

In der folgenden Abbildung ist diese Wahrscheinlichkeit für 3FG-Kompensatoren (oben), für 2FG-Kompensatoren optimaler konstanter DGD (unten), für das Rückkopplungssignal \mathcal{D} (links), für das Rückkopplungssignal T_{RMS} (rechts) sowie für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$ als Funktion des Parameters $\mathcal{V} = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ aufgetragen. Je weiter eine der Kurven in den grau unterlegten Bereich der Abbildung eindringt, umso fragwürdiger wird offenbar der Nutzen des zugehörigen PMD-Kompensators. Dieser graue Bereich mit Werten geringer als 10^{-3} kann also grob als »kritischer Bereich« angesehen werden, bei dem der Einsatz des Kompensators zunehmend sinnlos wird.

Beim Einsatz des Rückkopplungssignals T_{RMS} , welches in der Praxis allerdings kaum von Bedeutung ist, zeigt sich noch einmal, dass sowohl 3FG-Kompensatoren als auch optimierte 2FG-Kompensatoren äußerst wirksam sind. Selbst in Anwesenheit sehr großer mittlerer PDL wird der »kritische Bereich« nicht annähernd erreicht.

Das häufig in der Praxis verwendete Rückkopplungssignal \mathcal{D} hingegen kommt nur bei geringen Werten des Parameters \mathcal{V} zu ähnlich guten Ergebnissen. Im unitären Fall $\langle PDL_i \rangle = 0$ ist die Wirksamkeit zwar zumindest bis $\mathcal{V} \approx 2$ ausreichend gewährleistet. Für noch größere Werte von \mathcal{V} schwindet dann der Nutzen der Kompensation aufgrund des Einflusses von PMD höherer Ordnung. Dies gilt sowohl für den 3FG-Kompensator als auch für den optimierten 2FG-Kompensator, für letzteren jedoch in stärkerem Maße. In Anwesenheit von PDL dringen die Kurven dann bereits bei verhältnismäßig geringen Werten des Parameters \mathcal{V} in den »kritischen Bereich« ein, dies gilt wiederum insbesondere für 2FG-Kompensatoren.

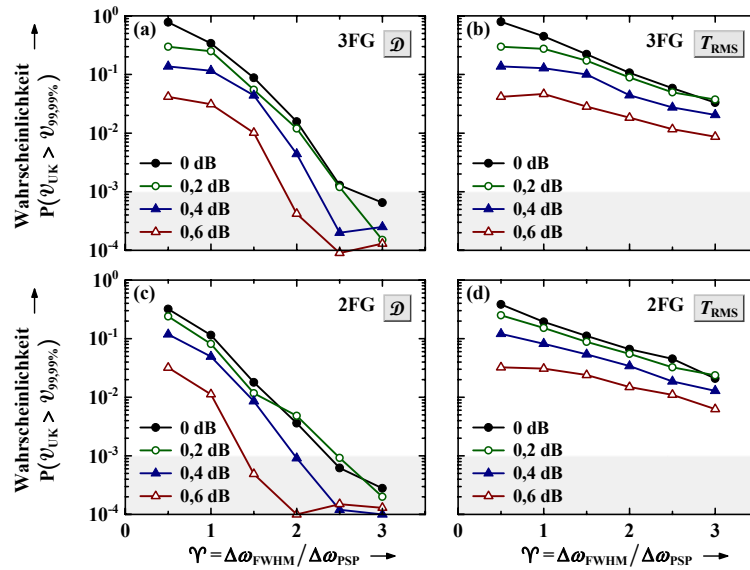


Abb. 5.18: Wahrscheinlichkeit, dass die Pulsverbreiterung des unkompensierten Systems größer ist als die Verbreiterung $\psi_{99,99\%}$ eines Systems mit 3FG-Kompensation (oben) bzw. mit optimierter 2FG-Kompensation (unten) als Funktion des Parameters γ für unterschiedlich starke mittlere PDL pro Element $\langle PDL_i \rangle$. Als Rückkopplungssignal wurde die DOP \mathcal{D} (links) bzw. die Pulsweite T_{RMS} (rechts) verwendet.

Ist die mittlere PDL pro Element deutlich geringer als $\langle PDL_i \rangle = 0,2$ dB (entsprechend einer mittleren *globalen* PDL von $\langle PDL \rangle \approx 2,65$ dB), so hat sie keinen nennenswerten Einfluss auf die Wirksamkeit einstufiger PMD-Kompensatoren. Deshalb sind die Ergebnisse von [46], welche massive Auswirkungen bereits bei einer mittleren *globalen* PDL von $\langle PDL \rangle \approx 0,7$ dB zeigen, zweifelhaft. (Der Parameter γ wurde in [46] auf Werte zwischen 0,85 und 1,55 gesetzt, der Typ des Rückkopplungssignals ist leider nicht angegeben.) Demgegenüber stimmen die hier präsentierten Ergebnisse sehr gut mit den entsprechenden Resultaten von [39] überein. Dort wurde allerdings nur das Rückkopplungssignal T_{RMS} eingesetzt, Untersuchungen unter Verwendung des Rückkopplungssignals \mathcal{D} wurden nicht durchgeführt. Genauso wenig wurde der Einfluss des Parameters γ analysiert, dieser verblieb in [39] konstant auf dem Wert $\gamma \approx 2$. Auch wurden keine 2FG-Kompensatoren betrachtet, nur 3FG-Kompensatoren sowie die für die Praxis kaum relevante PSP-Methode kamen zum Einsatz. Ähnliche Untersuchungen wurden auch in [77] durchgeführt, da jedoch der Parameter γ dabei auf $\gamma = 0$ gesetzt wurde, sind die Ergebnisse für die Praxis von geringer Relevanz.

Die Untersuchungen dieses Kapitels zur Wirksamkeit von PMD-Kompensatoren wurden ohne explizite Betrachtung der Modulationsverfahren NRZ und RZ durchgeführt. Mit Hilfe der Abb. 5.18 (oder auch der Abb. 5.17) kann ein Vergleich dieser Modulationsverfahren aber unmittelbar erfolgen. Da die Bandbreite eines NRZ-modulierten Signals geringer ist als diejenige eines RZ-modulierten, ist der Parameter $\gamma = \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$ im Fall der NRZ-Modulation entsprechend geringer. Gemäß Abb. 5.18 ist deshalb die Wirksamkeit einstufiger PMD-Kompensatoren bei einem NRZ-modulierten Signal ausgeprägter als bei einem RZ-modulierten. Zudem hat der Einbruch der Wirksamkeit in Abb. 5.18(a) und (c), welcher durch die Anwesenheit von

PDL mit ausgelöst bzw. verstärkt wird, für ein NRZ-moduliertes Signal geringere Auswirkungen als für ein RZ-moduliertes.

6 Zusammenfassung

Die Folgen eines gleichzeitigen Auftretens von PMD und PDL in faseroptischen Systemen wurden in dieser Arbeit umfassend analysiert. Die dabei erzielten Ergebnisse können – aufgrund der konsequenten Verwendung normierter Darstellungen – unmittelbar auf unterschiedlichste Systeme der Praxis angewendet werden. Sind die mittlere DGD $\langle \Delta\tau \rangle$ und die mittlere PDL $\langle PDL \rangle$ eines Systems bekannt (sie lassen sich verhältnismäßig einfach messen), so folgen mithilfe der Histogramme des Kapitels 3 direkt die statistischen Eigenschaften aller relevanten PMD- und PDL-Größen des Systems. Auch die statistischen Systemeigenschaften im Frequenzbereich lassen sich durch Verwendung der Ergebnisse des Kapitels 3 vorhersagen.

Wird als dritte Größe die Bandbreite des Signals berücksichtigt, so können die Ergebnisse der Kapitel 4 und 5 dazu genutzt werden, weitreichende Aussagen über die statistischen Eigenschaften der Signalverzerrungen zu treffen. So wird beispielsweise in der Praxis häufig die Frage zu beantworten sein, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei einem gegebenen System eine bestimmte Signalverzerrung überschritten wird. Derartige Fragestellungen lassen sich unter Verwendung der komplementären kumulativen Verteilungsfunktionen des Kapitels 5 beantworten – auch dann, wenn einfache optische PMD-Kompensatoren eingesetzt werden. Die optimale Konstruktion derartiger Kompensatoren in Anwesenheit von PDL wurde ebenfalls bestimmt.

Wichtig zur Einordnung dieser Arbeit ist schließlich die Information, welche Themen und Bereiche *nicht* berücksichtigt wurden. So wurden nichtlineare Fasereffekte vollständig vernachlässigt, die Leistung des Signals spielte bei den Untersuchungen keine Rolle. Auswirkungen von chromatischer Dispersion wurden aufgrund der Annahme eines vollständig dispersionskompensierten Systems ebenfalls nicht betrachtet. Auch war der Einfluss von PDL auf das Verhältnis von Signalleistung und Rauschleistung (engl.: Signal to Noise Ratio, SNR) nicht Gegenstand der Untersuchungen. Das Ziel bestand ausdrücklich nur in einer Analyse der Auswirkungen wechselwirkender PMD und PDL auf das Ausmaß von Signalverzerrungen. Schließlich wurden unterschiedliche Modulationsformate nur indirekt über die Bandbreite des Signals berücksichtigt.

Anhang

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Die folgende Tabelle enthält eine Auswahl an Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, welche bei der statistischen Beschreibung von PMD und PDL auftreten. Dabei wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen χ als $p_\chi(x)$ bezeichnet. Es gilt also $\int p_\chi(x) dx = 1$, wobei sich die Integration von $-\infty$ bis ∞ (bzw. von 0 bis ∞ bei der Maxwell- und der Rayleighverteilung) erstreckt. Der Erwartungswert von χ (erstes Moment) wird als $\langle \chi \rangle \equiv \int x p_\chi(x) dx$ geschrieben, der Erwartungswert von χ^2 (zweites Moment) entsprechend als $\langle \chi^2 \rangle \equiv \int x^2 p_\chi(x) dx$. Somit folgt der quadratische Mittelwert χ_{rms} zu $\sqrt{\langle \chi^2 \rangle}$. Schließlich ergibt sich die Varianz von χ zu $\langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2$ und die Standardabweichung von χ zu $\sqrt{\langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2}$.

Tab. A.1: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Verteilung	$p_\chi(x)$	$\langle \chi \rangle$	$\langle \chi^2 \rangle$
Gauß	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}}$	M	$M^2 + \sigma^2$
Maxwell	$\frac{8}{\pi^2 M} \left(\frac{2x}{M}\right)^2 e^{-\frac{1}{\pi} \left(\frac{2x}{M}\right)^2}, \quad x > 0$	M	$\frac{3\pi}{8} M^2$
Rayleigh	$\frac{\pi}{M} \left(\frac{x}{2M}\right) e^{-\pi \left(\frac{x}{2M}\right)^2}, \quad x > 0$	M	$\frac{4}{\pi} M^2$
sech	$\frac{1}{2\sigma} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2\sigma} x\right)$	0	σ^2
sech ²	$\frac{\pi}{4\sqrt{3}\sigma} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}\sigma} x\right)$	0	σ^2

Abkürzungsverzeichnis

AKF	Autokorrelationsfunktion
CW	Continuous wave (engl.)
DGD	Differential group delay (engl.)
DOP	Degree of polarization (engl.)
FG	Freiheitsgrad(e)
JME	Jones matrix eigenanalysis (engl.)
KKV	Komplementäre kumulative Verteilungsfunktion
LP-Mode	(Einheitlich) linear polarisierte Mode

NRZ	Non return to zero (engl.)
PCD	Polarization-dependent chromatic dispersion (engl.)
PDG	Polarization-dependent gain (engl.)
PDL	Polarization-dependent loss (engl.)
PMD	Polarization-mode dispersion (engl.)
PSPs	Principal states of polarization (engl.)
RMS	Root mean square (engl.)
RZ	Return to zero (engl.)
SNR	Signal to noise ratio (engl.)
SOP	State of polarization (engl.)
UK	Unkompensiert
VON-System	Vollständiges Orthonormalsystem
WDF	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Verzeichnis der Symbole und Formelzeichen

Die folgende Zusammenstellung von Symbolen und Formelzeichen ist kapitelweise sortiert, ein Symbol ist (zumindest) dort zu finden, wo es erstmals in der genannten Bedeutung auftritt. In der zweiten Spalte ist neben der Bezeichnung des Zeichens häufig auch dessen Definition oder ein wichtiger Zusammenhang aufgeführt.

Formelzeichen Kapitel 2.1

Formelzeichen	Erläuterung
e	Eulersche Zahl
i	Imaginäre Einheit
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
n_k, n_m	Brechzahl des Faserkerns bzw. -mantels
a	Kernradius der Stufenfaser
\vec{E}	Elektrische Feldstärke
\vec{P}	Elektrische Polarisierung
λ	Wellenlänge (Vakuum)
ω	Kreisfrequenz
k_0	Wellenzahl (Vakuum) $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$
t	Zeit
\bar{n}	Effektive Brechzahl, $n_m < \bar{n} < n_k$
β	Ausbreitungskonstante $\beta \equiv \bar{n}(2\pi/\lambda) = \bar{n}(\omega/c) = \bar{n}k_0$, $n_m k_0 < \beta < n_k k_0$
x, y, z	Koordinaten der Faser; die z -Achse bestimmt die Ausbreitungsrichtung.
E_x, E_y	Amplituden der transversalen Feldkomponenten, positiv und reell
δ	Phasendifferenz zwischen y - und x -Komponente $-180^\circ < \delta \leq 180^\circ$
ϕ	Gemeinsame Phase
ψ, χ	Winkel der Polarisationsellipse, Neigungswinkel: $0 \leq \psi < 180^\circ$, Elliptizitätswinkel: $-45^\circ \leq \chi \leq 45^\circ$

Formelzeichen Kapitel 2.2.1

Formelzeichen	Erläuterung
\mathbb{J}	Jones-Raum
\mathbb{J}^*	Dualer Jones-Raum
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
$ \alpha\rangle$	Jones-Vektor, Element des Jones-Raums, ket-Vektor
$ \alpha + \beta\rangle$	Addition von Jones-Vektoren $ \alpha\rangle + \beta\rangle \equiv \alpha + \beta\rangle$
$ c \cdot \alpha\rangle$	Multiplikation eines Jones-Vektors mit einer komplexen Zahl $c \alpha\rangle \equiv c \cdot \alpha\rangle$
$ 0\rangle$	Nullvektor des Jones-Raums $ \alpha\rangle + 0\rangle \equiv \alpha\rangle$
$ \alpha\rangle$	Inverses Element von $ \alpha\rangle$, $ \alpha\rangle + -\alpha\rangle \equiv 0\rangle$
$\langle\alpha \beta\rangle$	Skalarprodukt der Jones-Vektoren $ \alpha\rangle, \beta\rangle \in \mathbb{J}$, $\langle\alpha \beta\rangle \in \mathbb{C}$
$\ \alpha\ $	Norm des Jones-Vektors $ \alpha\rangle$: $\ \alpha\ \equiv \sqrt{\langle\alpha \alpha\rangle}$
$\langle\alpha $	Dualer Jones-Vektor, Element des dualen Jones-Raums \mathbb{J}^* , bra-Vektor; Lineares Funktional, welches den Jones-Vektor $ \beta\rangle \in \mathbb{J}$ auf das Skalarprodukt $\langle\alpha \beta\rangle$ abbildet: $\langle\alpha (\beta\rangle) \equiv \langle\alpha \beta\rangle$
A, B	Jones-Operatoren: Abbildungen eines Jones-Vektors auf einen anderen Jones-Vektor

Formelzeichen	Erläuterung
\mathbf{A}^\dagger	Zu \mathbf{A} adjungierter Operator; die Abbildung $\mathbf{A} \alpha\rangle = \beta\rangle$ im Jones-Raum entspricht der Abbildung $\langle\alpha \mathbf{A}^\dagger = \langle\beta $ im dualen Jones-Raum.
$\mathbf{0}$	Nulloperator des Jones-Raums $\mathbf{0} \alpha\rangle \equiv 0\rangle$
$\mathbf{1}$	Einheitsoperator des Jones-Raums $\mathbf{1} \alpha\rangle \equiv \alpha\rangle$
$\mathbf{A} = \mathbf{B}$	Gleichheit zweier Operatoren
$\mathbf{A} + \mathbf{B}$	Summe zweier Operatoren $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \alpha\rangle \equiv \mathbf{A} \alpha\rangle + \mathbf{B} \alpha\rangle$
\mathbf{AB}	Produkt zweier Operatoren $\mathbf{AB} \alpha\rangle \equiv \mathbf{A}(\mathbf{B} \alpha\rangle)$
$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$	Kommutator zweier Operatoren $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$
\mathbf{A}^0	$\mathbf{A}^0 \equiv \mathbf{1}$
\mathbf{A}^n	Potenz eines Operators $\mathbf{A}^n \alpha\rangle \equiv \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{A} \alpha\rangle)$
$e^{\mathbf{A}}$	Exponentialfunktion des Operators \mathbf{A} $e^{\mathbf{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \dots,$ $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}+\mathbf{A}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}$
$\frac{d}{dx}\mathbf{A}(x)$	Ableitung des Operators \mathbf{A} nach dem reellen Parameter x , $\frac{d}{dx}\mathbf{A}(x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x+\varepsilon) - \mathbf{A}(x)}{\varepsilon}$
$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$	(Partielle) Ableitung des Operators \mathbf{A} nach dem reellen Parameter x
$ \alpha\rangle\langle\beta $	Dyadisches Produkt
$ \alpha\rangle\langle\alpha $	Projektionsoperator (falls $ \alpha\rangle$ normiert ist)
\mathbf{A}^{-1}	Zu \mathbf{A} inverser Operator $\mathbf{AA}^{-1} \equiv \mathbf{1}$
\mathbf{U}	Unitärer Operator, $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$
$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{ \alpha_{1,2}}$	Darstellung des Jones-Vektors $ \beta\rangle \in \mathbb{J}$ als Spaltenvektor, $ \alpha_1\rangle, \alpha_2\rangle$: VON-System von \mathbb{J} , $ \beta\rangle = \alpha_1\rangle\langle\alpha_1 \beta\rangle + \alpha_2\rangle\langle\alpha_2 \beta\rangle \equiv \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{ \alpha_{1,2}}$
$(\beta_1^* \ \beta_2^*)_{\langle\alpha_{1,2} }$	Darstellung des dualen Jones-Vektors $\langle\beta \in \mathbb{J}^*$ als Zeilenvektor, $\langle\beta = \langle\beta \alpha_1\rangle\langle\alpha_1 + \langle\beta \alpha_2\rangle\langle\alpha_2 \equiv (\beta_1^* \ \beta_2^*)_{\langle\alpha_{1,2} }$
A_{mn}	Matrixelemente des Jones-Operators \mathbf{A} bei der Darstellung als 2×2 Matrix, $A_{mn} \equiv \langle\alpha_m \mathbf{A} \alpha_n\rangle$
$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{ \alpha_{1,2}}$	Darstellung des Jones-Operators \mathbf{A} als 2×2 Matrix, $ \alpha_1\rangle, \alpha_2\rangle$: VON-System von \mathbb{J} , $\mathbf{A} = \sum_{m,n} \alpha_m\rangle\langle\alpha_m \mathbf{A} \alpha_n\rangle\langle\alpha_n \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{ \alpha_{1,2}}$
$\text{Sp}(\mathbf{A})$	Spur des Operators \mathbf{A} , in Matrixschreibweise die Summe der Diagonalelemente
$\det(\mathbf{A})$	Determinante des Operators \mathbf{A} , definiert über die zugehörige Matrix

Formelzeichen Kapitel 2.2.2

Formelzeichen	Erläuterung
$ \leftrightarrow\rangle, \updownarrow\rangle$	Normierter Jones-Vektor eines linearen SOPs entlang der x- bzw. y-Achse
$ \nearrow\rangle, \searrow\rangle$	Normierter Jones-Vektor eines linearen SOPs im Winkel $\pm 45^\circ$ zur x-Achse

Formelzeichen	Erläuterung
$ \mathcal{C}\rangle, \mathcal{D}\rangle$	Normierter Jones-Vektor eines rechts- bzw. links-zirkularen SOPs
$ S\rangle$	Jones-Vektor, nicht notwendigerweise normiert, fließt in den elektrischen Feldvektor einer monochromatischen ebenen Welle ein gemäß $\vec{E}(z,t) = \text{Re}\{[S]e^{i(\omega t - \beta z)}\}$
$ s\rangle$	Normierter Jones-Vektor $ s\rangle \equiv S\rangle/\ S\ $
$(\)_{+,x,0}$	Kennzeichnung des verwendeten VON-Systems bei einem Spaltenvektor bzw. einer 2×2 Matrix
$S_{\rightarrow}, S_{\updownarrow}, S_{\nearrow}, S_{\searrow}, S_{\mathcal{C}}, S_{\mathcal{D}}$	Komponenten des Jones-Vektors $ S\rangle$ bezüglich eines der VON-Systeme $ \leftrightarrow\rangle, \updownarrow\rangle, \nearrow\rangle, \searrow\rangle$ oder $ \mathcal{C}\rangle, \mathcal{D}\rangle$; Beispiele: $S_{\rightarrow} \equiv \langle\leftrightarrow S\rangle, S_{\mathcal{D}} \equiv \langle\mathcal{D} S\rangle$

Formelzeichen Kapitel 2.2.3

Formelzeichen	Erläuterung
σ_i	Pauli-Matrizen $\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
$\vec{\sigma}$	Pauli-Spinvektor $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)^T$
$[m_0, \vec{m}]$	Karlsso-Quaternion $[m_0, \vec{m}] \equiv m_0\mathbf{1} + \vec{m} \cdot \vec{\sigma} \equiv m_0\mathbf{1} + m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + m_3\sigma_3$
m_0	Skalarteil eines Karlsso-Quaternions, $m_0 \in \mathbb{C}$
\vec{m}	Vektorteil eines Karlsso-Quaternions $\vec{m} \equiv (m_1 \ m_2 \ m_3)^T$ mit $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{C}$
$\bar{\mathbf{M}}$	Das zu $\mathbf{M} = [m_0, \vec{m}]$ konjugierte Quaternion, $\bar{\mathbf{M}} \equiv [m_0, -\vec{m}]$
$N[\mathbf{M}]$	Norm des Quaternions $\mathbf{M} = [m_0, \vec{m}]$, $N[\mathbf{M}] \equiv m_0^2 - \vec{m} \cdot \vec{m}$

Formelzeichen Kapitel 2.2.4

Formelzeichen	Erläuterung
\mathbb{S}	Stokes-Raum, Menge aller Stokes-Vektoren
\vec{S}	Stokes-Vektor, nicht notwendigerweise normiert $\vec{S} \equiv \langle S \vec{\sigma} S\rangle \equiv (S_1 \ S_2 \ S_3)^T$
S_0, S_1, S_2, S_3	Stokes-Parameter, $S_0 \equiv \langle S S\rangle = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$
\hat{s}	Normierter Stokes-Vektor $\hat{s} \equiv \vec{S}/S_0 \equiv (s_1 \ s_2 \ s_3)^T$
s_1, s_2, s_3	Parameter des normierten Stokes-Vektors, $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$
$(2\psi, 2\chi)$	Sphärische Koordinaten eines Punktes auf der Poincaré-Kugel, $0 \leq 2\psi < 360^\circ$, $-90^\circ \leq 2\chi \leq 90^\circ$

Formelzeichen Kapitel 2.2.5

Formelzeichen	Erläuterung
\mathbf{T}	Unitärer Jones-Operator $\mathbf{T} = e^{-i\phi}\mathbf{U}$, mit $\det(\mathbf{U}) = 1$ und der reellen Phase ϕ
\mathbf{U}	Unitärer Jones-Operator, definiert durch $\mathbf{T} = e^{-i\phi}\mathbf{U}$ und $\det(\mathbf{U}) = 1$, lässt sich darstellen als $\mathbf{U} = e^{-i(\phi/2)\vec{f} \cdot \vec{\sigma}}$

Formelzeichen	Erläuterung
ϕ_0	Gemeinsame (polarisationsunabhängige) Phasenverschiebung durch \mathbf{T}
$ r_{\pm}\rangle$ $e^{\mp i\phi/2}$	Eigenvektoren (orthogonal und normiert) und zugehörige Eigenwerte von \mathbf{U} , $\mathbf{U} r_{\pm}\rangle = e^{\mp i\phi/2} r_{\pm}\rangle$
\hat{r}	Rotationsachse im Stokes-Raum $\hat{r} \equiv \langle r_{+} \hat{\sigma} r_{+} \rangle$
φ	Rotationswinkel im Stokes-Raum

Formelzeichen Kapitel 2.2.6

Formelzeichen	Erläuterung
$\langle S_i \rangle$	Spektral oder zeitlich gemittelte Stokes-Parameter ($i = 0, 1, 2, 3$)
$\vec{s}_{\mathcal{D}}$	DOP-Vektor $\vec{s}_{\mathcal{D}} \equiv \frac{1}{\langle S_0 \rangle} \begin{pmatrix} \langle S_1 \rangle \\ \langle S_2 \rangle \\ \langle S_3 \rangle \end{pmatrix}$
\mathcal{D}	DOP $\mathcal{D} \equiv \ \vec{s}_{\mathcal{D}}\ = \frac{\sqrt{\langle S_1 \rangle^2 + \langle S_2 \rangle^2 + \langle S_3 \rangle^2}}{\langle S_0 \rangle}$, $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$

Formelzeichen Kapitel 2.3.1

Formelzeichen	Erläuterung
$ +\rangle, -\rangle$	Eigenvektoren des Jones-Operators eines doppelbrechenden Elements (frequenzunabhängig, orthogonal und normiert)
\hat{s}_{+}, \hat{s}_{-}	Stokes-Vektoren von $ +\rangle$ und $ -\rangle$, $\hat{s}_{\pm} \equiv \langle \pm \hat{\sigma} \pm \rangle$
\bar{n}_{+}, \bar{n}_{-}	Effektive Brechzahlen der Eigenvektoren $ +\rangle$ und $ -\rangle$, $\bar{n}_{\pm} \geq n_{-}$
β_{+}, β_{-}	Ausbreitungskonstanten der Eigenvektoren $ +\rangle$ und $ -\rangle$, $\beta_{\pm} \equiv \bar{n}_{\pm}(\omega/c)$
$\Delta\bar{n}$	Differenz der effektiven Brechzahlen $\Delta\bar{n} \equiv \bar{n}_{+} - \bar{n}_{-}$
$\Delta\beta$	Doppelbrechung $\Delta\beta \equiv \beta_{+} - \beta_{-} = \Delta\bar{n}(\omega/c)$
$\vec{\beta}$	Doppelbrechungsvektor $\vec{\beta} \equiv \Delta\beta \hat{s}_{+}$
$\Delta\beta_{\omega}$	Differenz der Gruppenlaufzeiten pro Länge, definiert als Ableitung der Doppelbrechung $\Delta\beta$ nach der Kreisfrequenz, $\Delta\beta_{\omega} = \Delta\bar{n}/c$
L	Länge des doppelbrechenden Elements
$\Delta\tau$	DGD: Differenz der Gruppenlaufzeiten des doppelbrechenden Elements $\Delta\tau \equiv \Delta\beta_{\omega} L = (\Delta\bar{n}/c)L$
$\vec{\tau}$	PMD-Vektor des doppelbrechenden Elements $\vec{\tau} \equiv \Delta\tau \hat{s}_{+}$
ϕ_0	Polarisationsunabhängige Phasenverschiebung des doppelbrechenden Elements $\phi_0 = [(\beta_{+} + \beta_{-})/2]L$
τ_0	Polarisationsunabhängige Gruppenlaufzeit des doppelbrechenden Elements $\tau_0 \equiv \partial_{\omega} \phi_0$
\mathbf{T}	Jones-Operator des doppelbrechenden Elements $\mathbf{T} = e^{-i\phi_0} e^{-i\frac{\Delta\beta L}{2} \hat{s}_{+} \cdot \hat{\sigma}} = e^{-i\phi_0} e^{-i\frac{\Delta\tau \omega}{2} \hat{s}_{+} \cdot \hat{\sigma}}$
\hat{s}, \hat{t}	Normierte Stokes-Vektoren am Eingang bzw. am Ausgang des doppelbrechenden Elements, $\hat{t} \equiv \langle s \mathbf{T}^{\dagger} \hat{\sigma} \mathbf{T} s \rangle$
$ S(\omega)\rangle$ $ S(t)\rangle$	Frequenz- bzw. zeitabhängige nicht normierte Jones-Vektoren, verknüpft durch Fourier-Transformation
S_{+}, S_{-}	Komponenten des Jones-Vektors $ S\rangle$ bezüglich des VON-Systems $ +\rangle, -\rangle$: $S_{\pm} \equiv \langle \pm S \rangle$

Formelzeichen Kapitel 2.3.2

Formelzeichen	Erläuterung
N	Anzahl doppelbrechender Elemente
\mathbf{T}_i	Jones-Operator des Elements Nr. i ($i = 1, 2, \dots, N$)
\mathbf{T}	Jones-Operator einer Verkettung doppelbrechender Elemente $\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$

Formelzeichen Kapitel 2.3.3

Formelzeichen	Erläuterung
\mathbf{T}	Unitärer Jones-Operator $\mathbf{T} = e^{-i\phi_0} \mathbf{U}$, mit $\det(\mathbf{U}) = 1$ und der reellen Phase ϕ_0
\mathbf{U}	Unitärer Jones-Operator, definiert durch $\mathbf{T} = e^{-i\phi_0} \mathbf{U}$ und $\det(\mathbf{U}) = 1$
ϕ_0	Polarisationsunabhängige Phasenverschiebung durch \mathbf{T}
$ s\rangle, t\rangle$	Normierte Jones-Vektoren am Eingang und am Ausgang (vor und nach Anwendung von \mathbf{T}), $ t\rangle = \mathbf{T} s\rangle$
\hat{s}, \hat{t}	Zugehörige normierte Stokes-Vektoren am Eingang und am Ausgang, $\hat{s} = \langle s \hat{\sigma} s \rangle$ und $\hat{t} = \langle s \mathbf{T}^{\dagger} \hat{\sigma} \mathbf{T} s \rangle$
ϕ	Gemeinsame Phase des Jones-Vektors am Ausgang $ t\rangle$
$ t_{\pm}\rangle$	PSPs am Ausgang im Jones-Raum, Eigenvektoren von $2i\mathbf{U}_{\omega} \mathbf{U}^{\dagger}$ gemäß $2i\mathbf{U}_{\omega} \mathbf{U}^{\dagger} t_{\pm}\rangle = \pm \Delta\tau t_{\pm}\rangle$
$ s_{\pm}\rangle$	PSPs am Eingang im Jones-Raum $ s_{\pm}\rangle = \mathbf{T}^{-1} t_{\pm}\rangle$
\hat{t}_{\pm}	PSPs am Ausgang im Stokes-Raum $\hat{t}_{\pm} \equiv \langle t_{\pm} \hat{\sigma} t_{\pm} \rangle$
\hat{s}_{\pm}	PSPs am Eingang im Stokes-Raum $\hat{s}_{\pm} \equiv \langle s_{\pm} \hat{\sigma} s_{\pm} \rangle$
$\Delta\tau$	DGD (Differenz der Gruppenlaufzeiten der beiden PSPs), Eigenwert von $2i\mathbf{U}_{\omega} \mathbf{U}^{\dagger}$ gemäß $2i\mathbf{U}_{\omega} \mathbf{U}^{\dagger} t_{\pm}\rangle = \pm \Delta\tau t_{\pm}\rangle$
τ_0	Polarisationsunabhängige Gruppenlaufzeit $\tau_0 \equiv \partial_{\omega} \phi_0$
τ_g	Gruppenlaufzeit $\tau_g \equiv \phi_{\omega}$, im Fall der PSPs gilt $\tau_g = \tau_0 \pm \Delta\tau/2$
$\vec{\tau}$	PMD-Vektor am Ausgang $\vec{\tau} \equiv \Delta\tau \hat{t}_{+}$
$\vec{\tau}_s$	PMD-Vektor am Eingang $\vec{\tau}_s \equiv \Delta\tau \hat{s}_{+}$
N	Anzahl doppelbrechender Elemente der Verkettung
$\Delta\tau_i$	DGD des Elements Nr. i ($i = 1, 2, \dots, N$)
$\langle \Delta\tau_i \rangle$ $\langle \Delta\tau_i^2 \rangle$ $(\Delta\tau_i)_{\text{rms}}$	Arithmetische Mittelung über alle Elemente der Verkettung: $\langle \Delta\tau_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta\tau_i$, $\langle \Delta\tau_i^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta\tau_i^2$, $(\Delta\tau_i)_{\text{rms}} = \sqrt{\langle \Delta\tau_i^2 \rangle}$
$(\dots)_{\text{rms}}$	Quadratischer Mittelwert $(\dots)_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle (\dots)^2 \rangle}$
$\langle \Delta\tau \rangle$	Scharmittelwert bzw. spektraler Mittelwert der gesamten DGD $\Delta\tau$
$\langle \Delta\tau^2 \rangle$	Scharmittelwert bzw. spektraler Mittelwert von $\Delta\tau^2$
$\Delta\tau_{\text{rms}}$	Quadratischer Mittelwert der gesamten DGD $\Delta\tau_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle \Delta\tau^2 \rangle} = \sqrt{N} (\Delta\tau_i)_{\text{rms}}$
L	Gesamtlänge der Verkettung (Länge der Faser)
\mathcal{P}	PMD-Koeffizient $\Delta\tau_{\text{rms}} \equiv \mathcal{P} \sqrt{L}$

Formelzeichen Kapitel 2.3.4

Formelzeichen	Erläuterung
ω_0	Zentralfrequenz des Signals
$\vec{\tau}_\omega$	PMD-Vektor zweiter Ordnung $\vec{\tau}_\omega = \Delta\tau_\omega \hat{t}_+ + \Delta\tau(\partial_\omega \hat{t}_+)$
$\Delta\tau_\omega$	PCD, polarisationsabhängige chromatische Dispersion
$\ \partial_\omega \hat{t}_+\ $	(Stärke der) PSP-Depolarisation
D	Dispersionsparameter in ps/(nm·km)

Formelzeichen Kapitel 2.3.5

Formelzeichen	Erläuterung
$\langle \rangle$	Spektraler Mittelwert
$\langle \Delta\tau \rangle$	Spektraler Mittelwert der DGD (entspricht gemäß Kapitel 2.3.3 dem Scharmittelwert)
$\Delta\omega_{\text{PSP}}$	Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle \Delta\tau \rangle$
$\text{AKF}_{\vec{\tau}}(\Delta\omega)$	Normierte AKF des PMD-Vektors $\vec{\tau}$: $\text{AKF}_{\vec{\tau}}(\Delta\omega) \equiv \frac{\langle \vec{\tau}(\omega + \Delta\omega) \cdot \vec{\tau}(\omega) \rangle}{\langle \Delta\tau^2 \rangle}$

Formelzeichen Kapitel 2.4

Formelzeichen	Erläuterung
\mathcal{T}	Transmissionskoeffizient bzgl. der optischen Leistung
\mathcal{T}_{max} \mathcal{T}_{min}	Maximaler bzw. minimaler Transmissionskoeffizient eines polarisationsabhängig dämpfenden Elements, $0 < \mathcal{T}_{\text{min}} \leq \mathcal{T}_{\text{max}} \leq 1$
$ \mathcal{s}_{\text{max}}\rangle$ $ \mathcal{s}_{\text{min}}\rangle$	Orthogonale, normierte und frequenzunabhängige Eigenvektoren des Jones-Operators eines Elements mit reiner PDL, gekennzeichnet durch die Transmissionskoeffizienten \mathcal{T}_{max} bzw. \mathcal{T}_{min}
$\hat{\mathcal{s}}_{\text{max}}$ $\hat{\mathcal{s}}_{\text{min}}$	Zugehörige normierte Stokes-Vektoren, $\hat{\mathcal{s}}_{\text{max}} \equiv \langle \mathcal{s}_{\text{max}} \vec{\sigma} \mathcal{s}_{\text{max}} \rangle$, $\hat{\mathcal{s}}_{\text{min}} \equiv \langle \mathcal{s}_{\text{min}} \vec{\sigma} \mathcal{s}_{\text{min}} \rangle$
$\Delta\alpha$	Differenzieller Dämpfungskoeffizient, definiert gemäß $\mathcal{T}_{\text{min}} \equiv \mathcal{T}_{\text{max}} e^{-2\Delta\alpha}$, Wertebereich: $\Delta\alpha \geq 0$
\mathbf{T}	Jones-Operator eines Elements mit reiner PDL $\mathbf{T} = \sqrt{\mathcal{T}_{\text{max}}} e^{\frac{\Delta\alpha}{2}} e^{\frac{\Delta\alpha}{2} \hat{\mathcal{s}}_{\text{max}} \cdot \vec{\sigma}}$
PDL_{dB}	PDL in dB, $PDL_{\text{dB}} \equiv 10 \log_{10}(\mathcal{T}_{\text{max}}/\mathcal{T}_{\text{min}})$, Wertebereich: $PDL_{\text{dB}} \geq 0$, häufig vereinfacht als PDL (ohne Index »dB«) geschrieben.
Γ	PDL Γ , $\Gamma \equiv \frac{\mathcal{T}_{\text{max}} - \mathcal{T}_{\text{min}}}{\mathcal{T}_{\text{max}} + \mathcal{T}_{\text{min}}}$, Wertebereich: $0 \leq \Gamma < 1$
$\hat{\mathcal{s}}_{\text{max}}$ $\hat{\mathcal{t}}_{\text{max}}$	Richtung (im Stokes-Raum) des am wenigsten gedämpften SOPs eines allgemeinen (nicht notwendigerweise reinen) PDL-Elements am Eingang bzw. am Ausgang; für ein Element mit reiner PDL gilt $\hat{\mathcal{s}}_{\text{max}} = \hat{\mathcal{t}}_{\text{max}}$.
$\vec{\Gamma}$	PDL-Vektor, $\vec{\Gamma} \equiv \Gamma \hat{\mathcal{s}}_{\text{max}}$ (Ohne Angabe von »in« oder »out« als Index ist $\vec{\Gamma}$ auf ein Element mit reiner PDL bezogen.)
$\vec{\Gamma}_{\text{in}}, \vec{\Gamma}_{\text{out}}$	PDL-Vektor am Eingang $\vec{\Gamma}_{\text{in}} \equiv \Gamma \hat{\mathcal{s}}_{\text{max}}$ bzw. am Ausgang $\vec{\Gamma}_{\text{out}} \equiv \Gamma \hat{\mathcal{t}}_{\text{max}}$ eines (nicht notwendigerweise reinen) PDL-Elements

Formelzeichen	Erläuterung
$\mathbf{T}^+ \mathbf{T}$	Quaternion der Leistungstransmission, mit dem Jones-Operator \mathbf{T} des (nicht notwendigerweise reinen) PDL-Elements
p_0, \vec{p}	Skalarteil bzw. Vektorteil des Quaternions der Leistungstransmission $\mathbf{T}^+ \mathbf{T} \equiv p_0 \mathbf{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} = [p_0, \vec{p}]$, es gilt $\vec{p}/p_0 = \vec{\Gamma}_{\text{in}}$.
$\mathcal{T}_{\text{depol}}$	Transmissionskoeffizient von unpolarisiertem Licht, $\mathcal{T}_{\text{depol}} \equiv p_0$
$\hat{\mathcal{s}}, \hat{\mathcal{t}}$	Normierter Stokes-Vektor am Eingang bzw. Ausgang
$\vec{\mathcal{s}}_{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{t}}_{\mathcal{D}}$	DOP-Vektor am Eingang bzw. Ausgang
N	Anzahl von Elementen mit reiner PDL
PDL_i	PDL in dB des Elements Nr. i ($i = 1, 2, \dots, N$)
$\langle PDL_i \rangle$ $\langle PDL_i^2 \rangle$ $(PDL_i)_{\text{rms}}$	Arithmetische Mittelung über alle Elemente der Verkettung: $\langle PDL_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N PDL_i$, $\langle PDL_i^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N PDL_i^2$, $(PDL_i)_{\text{rms}} = \sqrt{\langle PDL_i^2 \rangle}$
$(\dots)_{\text{rms}}$	Quadratischer Mittelwert $(\dots)_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle (\dots)^2 \rangle}$
$\langle PDL \rangle$	Scharmittelwert der gesamten PDL in dB (entspricht bei einer Verkettung von PDL-Elementen nur dann dem spektralen Mittelwert, falls »ausreichend« doppelbrechende Elemente im System vorhanden sind.)
$\langle PDL^2 \rangle$	(Schar-)Mittelwert des Quadrats der gesamten PDL in dB
PDL_{rms}	Quadratischer Mittelwert der gesamten PDL in dB $PDL_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle PDL^2 \rangle}$

Formelzeichen Kapitel 3.1

Formelzeichen	Erläuterung
N	Gesamte Anzahl doppelbrechender Elemente und PDL-Elemente
\mathbf{T}_i	Jones-Operator des Elements Nr. i ($i = 1, 2, \dots, N$)
\mathbf{T}	Jones-Operator des Systems (Verkettung von doppelbrechenden Elementen und PDL-Elementen) $\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$
\mathbf{T}_{DGD}	Jones-Operator eines doppelbrechenden Elements ohne Berücksichtigung polarisationsunabhängiger Faktoren $\mathbf{T}_{\text{DGD}} = e^{-i \frac{\Delta\tau\omega}{2} \hat{\mathcal{s}}_+ \cdot \vec{\sigma}}$ ($\Delta\tau$: DGD, $\hat{\mathcal{s}}_+$: Richtung)
\mathbf{T}_{PDL}	Jones-Operator eines PDL-Elements ohne Berücksichtigung polarisationsunabhängiger Faktoren $\mathbf{T}_{\text{PDL}} = e^{\frac{\Delta\alpha}{2} \hat{\mathcal{s}}_{\text{max}} \cdot \vec{\sigma}}$ ($\Delta\alpha$: Differenzieller Dämpfungskoeffizient, $\hat{\mathcal{s}}_{\text{max}}$: Richtung)
$ \mathcal{S}\rangle, \mathcal{T}\rangle$	Nicht normierte Jones-Vektoren am Eingang bzw. am Ausgang
$ \mathcal{s}\rangle, \mathcal{t}\rangle$	Normierte Jones-Vektoren am Eingang bzw. am Ausgang
$\vec{\mathcal{S}}, \vec{\mathcal{T}}$	Nicht normierte Stokes-Vektoren am Eingang bzw. am Ausgang
$\hat{\mathcal{s}}, \hat{\mathcal{t}}$	Normierte Stokes-Vektoren am Eingang bzw. am Ausgang

Formelzeichen	Erläuterung
$ \hat{t}_\pm\rangle$	PSPs am Ausgang im Jones-Raum, Eigenvektoren des Operators $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ gemäß $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1} \hat{t}_\pm\rangle = \pm(\Delta\tau + i\Delta\eta) \hat{t}_\pm\rangle$.
$ \hat{s}_\pm\rangle$	PSPs am Eingang im Jones-Raum $ \hat{s}_\pm\rangle = \mathbf{T}^{-1} \hat{t}_\pm\rangle$ (Um die Normierung von $ \hat{s}_\pm\rangle$ zu gewährleisten, ist ein zusätzlicher Normierungsfaktor hinzuzufügen.)
\hat{t}_\pm	PSPs am Ausgang im Stokes-Raum $\hat{t}_\pm \equiv \langle \hat{t}_\pm \hat{\sigma} \hat{t}_\pm \rangle$
\hat{s}_\pm	PSPs am Eingang im Stokes-Raum $\hat{s}_\pm \equiv \langle \hat{s}_\pm \hat{\sigma} \hat{s}_\pm \rangle$
$\Delta\tau$	DGD (Differenz der Gruppenlaufzeiten der beiden PSPs), Realteil des Eigenwerts von $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ gemäß $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1} \hat{t}_\pm\rangle = \pm(\Delta\tau + i\Delta\eta) \hat{t}_\pm\rangle$
$\Delta\eta$	DAS (Ableitung der differentiellen Dämpfung zwischen den beiden PSPs nach der Frequenz), Imaginärteil des Eigenwerts von $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1}$ gemäß $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1} \hat{t}_\pm\rangle = \pm(\Delta\tau + i\Delta\eta) \hat{t}_\pm\rangle$
$\vec{\tau}$	Komplexer PMD-Vektor am Ausgang, $2i\mathbf{T}_\omega\mathbf{T}^{-1} \equiv \vec{\tau} \cdot \hat{\sigma}$
$\vec{\tau}_{\text{Re}}, \vec{\tau}_{\text{Im}}$	Real- und Imaginärteil des komplexen PMD-Vektors $\vec{\tau} \equiv \vec{\tau}_{\text{Re}} + i\vec{\tau}_{\text{Im}}$
$\partial_\omega(\Delta\tau\hat{t}_\pm)$	Verallgemeinerter »PMD-Vektor zweiter Ordnung«
$\vec{\alpha}$	Vektor im Stokes-Raum, welcher ein PDL-Element charakterisiert (dessen Stärke proportional zur Länge ist): Die Richtung von $\vec{\alpha}$ ist parallel zu \hat{s}_{max} , der Betrag von $\vec{\alpha}$ entspricht dem differentiellen Dämpfungskoeffizienten $\Delta\alpha$ pro Länge.

Formelzeichen Kapitel 3.2

Formelzeichen	Erläuterung
M	Anzahl der Stellen im Spektrum, an denen der globale Jones-Operator \mathbf{T} bei einer Simulation berechnet wird
ω_i	Stellen im Spektrum, an denen der globale Jones-Operator \mathbf{T} berechnet wird: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$
$\Delta\omega$	Abstand zweier Stellen im Spektrum, an denen \mathbf{T} berechnet wird, $\Delta\omega \equiv \omega_{i+1} - \omega_i$, auch als »Schrittweite« bezeichnet
$\langle\Delta\tau\rangle$	Mittlere DGD des Systems; $\langle\Delta\tau\rangle$ soll per Definition den Mittelwert der DGD ohne Berücksichtigung der PDL bezeichnen.
$\Delta\omega_{\text{PSP}}$	Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$
$\angle(\hat{\tau}_{\text{Re}}, \hat{\tau}_{\text{Im}})$	Winkel zwischen dem Real- und dem Imaginärteil des komplexen PMD-Vektors im Stokes-Raum
$\angle(\hat{t}_+, \hat{t}_-)$	Winkel zwischen den PSPs am Ausgang im Stokes-Raum
$\angle(\hat{s}_+, \hat{s}_-)$	Winkel zwischen den PSPs am Eingang im Stokes-Raum
$\Delta\tau_i$	DGD des i -ten doppelbrechenden Elements
$\langle\Delta\tau_i\rangle$	Arithmetisches Mittel der DGD der einzelnen doppelbrechenden Elemente
PDL_i	PDL in dB des i -ten PDL-Elements
$\langle PDL_i \rangle$	Arithmetisches Mittel der PDL in dB der einzelnen PDL-Elemente
$\langle PDL \rangle$	Mittlere globale PDL in dB

Formelzeichen	Erläuterung
ω_0	Referenzfrequenz, definiert als $\omega_0 \equiv 2\pi \cdot 193,1 \text{ THz} - 81,5 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$
w	Normierte Frequenz $w \equiv (\omega - \omega_0)/\Delta\omega_{\text{PSP}}$: Frequenz, welche relativ zur Referenzfrequenz ω_0 und normiert auf die PSP-Bandbreite $\Delta\omega_{\text{PSP}}$ angegeben ist.

Formelzeichen Kapitel 3.3 bis 3.5

Formelzeichen	Erläuterung
$p_\chi(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen χ
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses A
$\text{AKF}_{\vec{\tau}_{\text{Re}}}(\Delta\omega)$	Normierte AKF des Realteils des komplexen PMD-Vektors $\text{AKF}_{\vec{\tau}_{\text{Re}}}(\Delta\omega) \equiv \frac{\langle \vec{\tau}_{\text{Re}}(\omega + \Delta\omega) \cdot \vec{\tau}_{\text{Re}}(\omega) \rangle}{\langle \vec{\tau}_{\text{Re}}(\omega) \cdot \vec{\tau}_{\text{Re}}(\omega) \rangle}$
$\text{AKF}_{\vec{\Gamma}_{\text{out}}}(\Delta\omega)$	Normierte AKF des PDL-Vektors am Ausgang $\text{AKF}_{\vec{\Gamma}_{\text{out}}}(\Delta\omega) \equiv \frac{\langle \vec{\Gamma}_{\text{out}}(\omega + \Delta\omega) \cdot \vec{\Gamma}_{\text{out}}(\omega) \rangle}{\langle \vec{\Gamma}_{\text{out}}(\omega) \cdot \vec{\Gamma}_{\text{out}}(\omega) \rangle}$
$\text{AKF}_{\Delta\tau}(\Delta\omega)$	Normierte AKF der DGD $\text{AKF}_{\Delta\tau}(\Delta\omega) \equiv \frac{\langle \Delta\tau(\omega + \Delta\omega) \cdot \Delta\tau(\omega) \rangle}{\langle \Delta\tau^2(\omega) \rangle}$
$\text{AKF}_{PDL}(\Delta\omega)$	Normierte AKF der globalen PDL in dB $\text{AKF}_{PDL}(\Delta\omega) \equiv \frac{\langle PDL(\omega + \Delta\omega) \cdot PDL(\omega) \rangle}{\langle PDL^2(\omega) \rangle}$

Formelzeichen Kapitel 4.1

Formelzeichen	Erläuterung
$2\psi, 2\chi$	Sphärischen Koordinaten (auf der Poincaré-Kugel) des Polarisationszustands am Eingang, $0 \leq 2\psi < 360^\circ$, $-90^\circ \leq 2\chi \leq 90^\circ$
$ s\rangle$	Normierter Jones-Vektor des Signals am Eingang, zeit- und frequenzunabhängig, eindeutig bestimmt durch die beiden Winkel 2ψ und 2χ
T_0	Zeitliche Breite des Gauß-Pulses am Eingang; die Leistung ist bei $t = T_0$ auf $1/e$ der Spitzenleistung abgefallen.
T_{FWHM}	Zeitliche Halbwertsbreite des Gauß-Pulses am Eingang, $T_{\text{FWHM}} = 2\sqrt{\ln(2)}T_0 \approx 1,665 \cdot T_0$
T_{RMS}	RMS-Pulsweite des Gauß-Pulses am Eingang, $T_{\text{RMS}} = T_0/\sqrt{2}$
$ S(t)\rangle$	Zeitabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Eingang unter der Annahme eines Gauß-Pulses, $ S(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}(t/T_0)^2} s\rangle = e^{-\frac{1}{2}(t/T_{\text{RMS}})^2} s\rangle$
$\Delta\omega_0$	Spektrale Breite des Gauß-Pulses am Eingang, $\Delta\omega_0 \equiv 1/T_0$
$\Delta\omega_{\text{FWHM}}$	Spektrale Halbwertsbreite des Gauß-Pulses am Eingang, $\Delta\omega_{\text{FWHM}} = 2\sqrt{\ln(2)}/T_0 = 4 \ln(2)/T_{\text{FWHM}}$
$ S(\omega)\rangle$	Frequenzabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Eingang unter der Annahme eines Gauß-Pulses, $ S(\omega)\rangle = T_0 e^{-\frac{1}{2}(\omega/\Delta\omega_0)^2} s\rangle = T_0 e^{-\frac{1}{2}(\omega/\Delta\omega_0)^2} s\rangle$

Formelzeichen	Erläuterung
$\mathbf{T}(\omega)$	Frequenzabhängiger Jones-Operator des Systems
$ T(\omega)\rangle$	Frequenzabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Ausgang, $ T(\omega)\rangle = \mathbf{T}(\omega) S(\omega)\rangle$
$ T(t)\rangle$	Zeitabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Ausgang
M_n	n -tes Moment des zeitlichen Leistungsverlaufs (am Ausgang), $M_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^n \langle T(t) T(t)\rangle dt$
\mathcal{J}	Transmissionskoeffizient des Pulses, $\mathcal{J} \equiv \frac{M_0(\text{Ausgang})}{M_0(\text{Eingang})}$
$\mathcal{J}_{\max/\min}$	Maximaler bzw. minimaler Wert des Transmissionskoeffizienten des Pulses bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang
\mathcal{L}	Mittlere Laufzeit des Pulses, Ankunftszeit des »Schwerpunkts« des Pulses, $\mathcal{L} \equiv M_1/M_0$
$\mathcal{L}_{\max/\min}$	Maximaler bzw. minimaler Wert der Laufzeit des Pulses bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang
T_{RMS}	RMS-Pulsweite, $T_{\text{RMS}} \equiv \sqrt{\frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^2}$
\mathcal{V}	Verbreiterung des Pulses, $\mathcal{V} \equiv \frac{T_{\text{RMS}}(\text{Ausgang})}{T_{\text{RMS}}(\text{Eingang})}$
\mathcal{V}_{\max}	Maximaler Wert der Pulsverbreiterung bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang
$\mathcal{V}_{\min\pm}$	Werte der beiden Minima der Pulsverbreiterung bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang; dabei bezeichnet $\mathcal{V}_{\min+}$ die Verbreiterung des Minimums, dessen Polarisationszustand näher am langsamen PSP des Systems (bei der Trägerfrequenz) liegt.
\mathcal{D}	DOP (am Ausgang)
\mathcal{D}_{\min}	Minimum der DOP am Ausgang bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang
$\mathcal{D}_{\max\pm}$	Werte der beiden Maxima der DOP am Ausgang bei einer Variation des Polarisationszustands am Eingang; dabei bezeichnet $\mathcal{D}_{\max+}$ die DOP des Maximums, dessen Polarisationszustand näher am langsamen PSP des Systems (bei der Trägerfrequenz) liegt.
$\Delta\omega_{\text{PSP}}$	Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$
\mathcal{V}	Bandbreite des Signals (spektrale Halbwertsbreite) relativ zur Bandbreite der PSPs, $\mathcal{V} \equiv \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$
ω_{T}	Trägerfrequenz des Signals
ω_0	Referenzfrequenz $\omega_0 \equiv 2\pi \cdot 193,1 \text{ THz} - 81,5 \cdot \Delta\omega_{\text{PSP}}$
w_{T}	Normierte Trägerfrequenz des Signals $w_{\text{T}} \equiv (\omega_{\text{T}} - \omega_0)/\Delta\omega_{\text{PSP}}$

Formelzeichen Kapitel 4.2 bis 4.9

Formelzeichen	Erläuterung
\hat{s}_{\pm}	PSPs des Systems am Eingang im Stokes-Raum
$\angle(\hat{s}_{\pm}, \dots)$	Winkel im Stokes-Raum zwischen dem PSP \hat{s}_{\pm} des Systems am Eingang und ...

Formelzeichen	Erläuterung
$\angle(\mathcal{J}_{\max/\min}, \dots)$	Winkel zwischen dem Polarisationszustand am Eingang, der den maximalen bzw. den minimalen Transmissionskoeffizienten des Pulses bewirkt (der also die geringste bzw. die größte Dämpfung verursacht), und ...
$\angle(\mathcal{L}_{\max/\min}, \dots)$	Winkel zwischen dem Polarisationszustand am Eingang, der die maximale bzw. die minimale Laufzeit des Pulses bewirkt, und ...
$\angle(\mathcal{V}_{\max/\min\pm}, \dots)$	Winkel zwischen dem Polarisationszustand am Eingang, der die maximale bzw. eine der beiden minimalen Pulsverbreiterungen verursacht, und ...
$\angle(\mathcal{D}_{\min/\max\pm}, \dots)$	Winkel zwischen dem Polarisationszustand am Eingang, der das globale Minimum bzw. eines der beiden (lokalen) Maxima der DOP am Ausgang verursacht, und ...
$\mathcal{L}(\dots)$	Laufzeit des Pulses unter der Bedingung, dass der Polarisationszustand am Eingang ... verursacht
$\mathcal{V}(\dots)$	Verbreiterung des Pulses unter der Bedingung, dass der Polarisationszustand am Eingang ... verursacht
$\mathcal{D}(\dots)$	DOP am Ausgang unter der Bedingung, dass der Polarisationszustand am Eingang ... verursacht

Formelzeichen Kapitel 5

Formelzeichen	Erläuterung
$\Delta\omega_{\text{FWHM}}$	Spektrale Halbwertsbreite am Eingang
$\Delta\omega_{\text{PSP}}$	Bandbreite der PSPs $\Delta\omega_{\text{PSP}} \equiv (\pi/4)/\langle\Delta\tau\rangle$
\mathcal{V}	Bandbreite des Signals (spektrale Halbwertsbreite) relativ zur Bandbreite der PSPs, $\mathcal{V} \equiv \Delta\omega_{\text{FWHM}}/\Delta\omega_{\text{PSP}}$
\hat{s}_{\pm}	Richtung im Stokes-Raum des doppelbrechenden Elements eines 2FG- oder 3FG-Kompensators
$\Delta\tau_{\text{K}}$	DGD des doppelbrechenden Elements eines 2FG- oder 3FG-Kompensators
$\mathbf{T}(\omega)$	Frequenzabhängiger Jones-Operator des Systems ohne Kompensator
$ S(\omega)\rangle$	Frequenzabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Eingang
$ T(\omega)\rangle$	Frequenzabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Ausgang des gesamten Systems (einschließlich Kompensator) $ T(\omega)\rangle = e^{-i\frac{\Delta\tau_{\text{K}}\omega}{2}\hat{s}_{\pm}\cdot\vec{\sigma}} \mathbf{T}(\omega) S(\omega)\rangle$
$ S(t)\rangle$	Zeitabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Eingang
$ T(t)\rangle$	Zeitabhängiger, nicht normierter Jones-Vektor am Ausgang des gesamten Systems (einschließlich Kompensator)
ω_{T}	Trägerfrequenz, $\omega_{\text{T}} = 2\pi \cdot 193,1 \text{ THz}$ in Kapitel 5
\mathcal{D}	DOP (am Ausgang), wird in der Praxis häufig als Rückkopplungssignal von PMD-Kompensatoren eingesetzt.
T_{RMS}	RMS-Pulsweite (am Ausgang), wird bei Simulationen oft als Rückkopplungssignal von PMD-Kompensatoren eingesetzt.

Formelzeichen	Erläuterung
\mathcal{V}	Pulsverbreiterung $\mathcal{V} \equiv \frac{T_{\text{RMS}}(\text{Ausgang})}{T_{\text{RMS}}(\text{Eingang})}$
$p_{\mathcal{V}}(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Pulsverbreiterung \mathcal{V}
$\langle \mathcal{V} \rangle$	Schmitttelwert der Pulsverbreiterung \mathcal{V}
$\mathcal{V}_{99,99\%}$	99,99 % der Ereignisse haben eine Pulsverbreiterung von weniger als $\mathcal{V}_{99,99\%}$. Anders formuliert: Die komplementäre kumulative Verteilungsfunktion der Pulsverbreiterung hat bei $\mathcal{V}_{99,99\%}$ den Wert 10^{-4} .
\mathcal{V}_{UK}	Pulsverbreiterung im Fall des unkompenzierten Systems
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses A

Literaturverzeichnis

- [1] KOGELNIK, HERWIG ; JOPSON, ROBERT M. ; NELSON, LYNN E.: »Polarization-Mode Dispersion«. KAMINOW, IVAN P. ; LI, TINGYE (Hrsg.): *Optical Fiber Telecommunications : Systems and Impairments*. Bd. IV B. San Diego, CA : Academic, 2002, S. 725-861 – ISBN 0-12-395173-9
- [2] GORDON, J. P. ; KOGELNIK, H.: »PMD Fundamentals: Polarization Mode Dispersion in Optical Fibers«. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA (PNAS)*, Bd. 97 (April 2000), Nr. 9, S. 4541-4550
- [3] POOLE, CRAIG D. ; NAGEL, J. A.: »Polarization Effects in Lightwave Systems«. KAMINOV, IVAN P. ; KOCH, THOMAS L. (Hrsg.): *Optical Fiber Telecommunications*. Bd. III A. San Diego, CA : Academic, 1997, S. 114-161 – ISBN 0-12-395170-4
- [4] SHTAIF, MARK: *Three lectures on Polarized Light* [online]. Tel-Aviv, Israel : School of Electrical Engineering, Dept. of Physical Electronics, Tel-Aviv University. Letzte Aktualisierung: WS 2004/2005, erhältlich im Internet unter: <http://www.eng.tau.ac.il/~shtai/Courses.html> [Stand: 02.10.2006].
- [5] NELSON, L. E. ; JOPSON, R. M.: »Introduction to Polarization Mode Dispersion in Optical Systems«. GALTAROSSA, ANDREA ; MENYUK, CURTIS R. (Hrsg.): *Polarization Mode Dispersion*. New York, NY : Springer, 2004 (Optical and Fiber Communications Reports), S. 1-33 – ISBN 0-387-23193-5
- [6] SHTAIF, MARK ; MECOZZI, ANTONIO: »Modelling of Polarization Mode Dispersion in Optical Communications Systems«. GALTAROSSA, ANDREA ; MENYUK, CURTIS R. (Hrsg.): *Polarization Mode Dispersion*. New York, NY : Springer, 2004 (Optical and Fiber Communications Reports), S. 34-51 – ISBN 0-387-23193-5
- [7] WILLNER, A. E. ; HAUER, M. C.: »PMD Emulation«. GALTAROSSA, ANDREA ; MENYUK, CURTIS R. (Hrsg.): *Polarization Mode Dispersion*. New York, NY : Springer, 2004 (Optical and Fiber Communications Reports), S. 277-296 – ISBN 0-387-23193-5
- [8] KHOSRAVANI, R. ; LIMA, I. T. ; EBRAHIMI, P. ; IBRAGIMOV, E. ; WILLNER, A. E. ; MENYUK, C. R.: »Time and Frequency Domain Characteristics of Polarization-Mode Dispersion Emulators«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 13 (Februar 2001), Nr. 2, S. 127-129
- [9] KARLSSON, MAGNUS ; SUNNERUD, HENRIK: »PMD Impact on Optical Systems: Single- and Multichannel Effects«. GALTAROSSA, ANDREA ; MENYUK, CURTIS R. (Hrsg.): *Polarization Mode Dispersion*. New York, NY : Springer, 2004 (Optical and Fiber Communications Reports), S. 198-215 – ISBN 0-387-23193-5
- [10] SUNNERUD, HENRIK ; XIE, CHONGJIN ; KARLSSON, MAGNUS ; SAMUELSSON, ROBERT ; ANDREKSON, PETER A.: »A Comparison Between Different PMD Compensation Techniques«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 20 (März 2002), Nr. 3, S. 368-378
- [11] WILLIAMS, PAUL: »PMD Measurement Techniques and How to Avoid the Pitfalls«. GALTAROSSA, ANDREA ; MENYUK, CURTIS R. (Hrsg.): *Polarization Mode Dispersion*. New York, NY : Springer, 2004 (Optical and Fiber Communications Reports), S. 133-154 – ISBN 0-387-23193-5
- [12] DAMASK, JAY N.: *Polarization Optics in Telecommunications* / RHODES, WILLIAM T. (Hrsg.). New York : Springer, 2005 (Springer Series in Optical Sciences). – ISBN 0-387-22493-9
- [13] GISIN, N.: »Statistics of Polarization Dependent Losses«. *Elsevier Opt. Commun.*, Bd. 114 (Februar 1995), S. 399-405
- [14] KARLSSON, MAGNUS ; PETERSSON, MATS: »Quaternion Approach to PMD and PDL Phenomena in Optical Fiber Systems«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 22 (April 2004), Nr. 4, S. 1137-1146

- [15] EL AMARI, A. ; GISIN, N. ; PERNY, B. ; ZBINDEN, H. ; ZIMMER, C. W.: »Statistical Prediction and Experimental Verification of Concatenations of Fiber Optic Components with Polarization Dependent Loss«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 16 (März 1998), Nr. 3, S. 332-339
- [16] LU, PING ; CHEN, LIANG ; BAO, XIAOYI: »Statistical Distribution of Polarization-Dependent Loss in the Presence of Polarization-Mode Dispersion in Single-Mode Fibers«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 13 (Mai 2001), Nr. 5, S. 451-453
- [17] MECOZZI, ANTONIO ; SHTAIF, MARK: »The Statistics of Polarization-Dependent Loss in Optical Communication Systems«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 14 (März 2002), Nr. 3, S. 313-315
- [18] GALTAROSSA, ANDREA ; PALMIERI, LUCA: »The Exact Statistics of Polarization-Dependent Loss in Fiber-Optic Links«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 15 (Januar 2003), Nr. 1, S. 57-59
- [19] TELECOMMUNICATIONS INDUSTRY ASSOCIATION (TIA), SUBCOMMITTEE 4.9 FIBER OPTIC TEST, MEASUREMENT, AND INSPECTION INSTRUMENTATION: *TSB-141 : Polarization Dependent Loss Measurement Application Issues in Telecommunications* [online]. Letzte Aktualisierung: 23.06.2004, erhältlich im Internet unter: <http://ftp.tiaonline.org/fo-4/fo4MAIN/FO4%20Archive/fo49archive/Public/> [Stand: 02.10.2006].
- [20] HEFFNER, B. L.: »Automated Measurement of Polarization Mode Dispersion Using Jones Matrix Eigenanalysis«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 4 (September 1992), Nr. 9, S. 1066-1069
- [21] EYAL, A. ; TUR, M.: »Measurement of Polarization Mode Dispersion in Systems Having Polarization Dependent Loss or Gain«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 9 (September 1997), Nr. 9, S. 1256-1258
- [22] EYAL, A. ; TUR, M.: »A Modified Poincare Sphere Technique for the Determination of Polarization-Mode Dispersion in the Presence of Differential Gain/Loss«. *OSA Proc. Opt. Fiber Commun. Conf. (OFC) 1998*, San Jose, CA, Februar 1998, ThR1
- [23] EYAL, A.: »A Time-Domain Technique for Measuring the Complex PMD Vector in Systems with PMD and PDL«. *OSA Proc. Opt. Fiber Commun. Conf. (OFC) 2005*, Anaheim, CA, März 2005, OTuB1
- [24] EYAL, A. ; TUR, M.: »Characterization and Measurement of the Polarization Properties of Optical Systems in the Presence of PMD and PDL«. *OSA Proc. Opt. Fiber Commun. Conf. (OFC) 2005*, Anaheim, CA, März 2005, OThT5
- [25] CHEN, LIANG ; CHEN, OU ; HADJIFARADJI, SAEED ; BAO, XIAOYI: »Polarization-Mode Dispersion Measurement in a System With Polarization-Dependent Loss or Gain«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 16 (Januar 2004), Nr. 1, S. 206-208
- [26] GISIN, N. ; HUTTNER, B.: »Combined Effects of Polarization Mode Dispersion and Polarization Dependent Losses in Optical Fibers«. *Elsevier Opt. Commun.*, Bd. 142 (Oktober 1997), S. 119-125
- [27] HUTTNER, B. ; GISIN, N.: »Anomalous Pulse Spreading in Birefringent Optical Fibers with Polarization-Dependent Losses«. *OSA Opt. Lett.*, Bd. 22 (April 1997), Nr. 8, S. 504-506
- [28] POOLE, C. D. ; WAGNER, R. E.: »Phenomenological Approach to Polarisation Dispersion in Long Single-Mode Fibres«. *IEE Electron. Lett.*, Bd. 22 (September 1986), Nr. 19, S. 1029-1030
- [29] POOLE, C. D. ; WINTERS, J. H. ; NAGEL, J. A.: »Dynamical Equation for Polarization Dispersion«. *OSA Opt. Lett.*, Bd. 16 (März 1991), Nr. 6, S. 372-374
- [30] HUTTNER, B. ; DE BARROS, C. ; GISIN, B. ; GISIN, N.: »Polarization-Induced Pulse Spreading in Birefringent Optical Fibers with Zero Differential Group Delay«. *OSA Opt. Lett.*, Bd. 24 (März 1999), Nr. 6, S. 370-372
- [31] HUTTNER, B. ; GEISER, C. ; GISIN, N.: »Polarization-Induced Distortions in Optical Fiber Networks with Polarization-Mode Dispersion and Polarization-Dependent Losses«. *IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron.*, Bd. 6 (März/April 2000), Nr. 2, S. 317-329
- [32] CHEN, LIANG ; CAMERON, JOHN ; BAO, XIAOYI: »Statistics of Polarization Mode Dispersion in Presence of the Polarization Dependent Loss in Single Mode Fibers«. *Elsevier Opt. Commun.*, Bd. 169 (Oktober 1999), S. 69-73

- [33] CHEN, LIANG ; BAO, XIAOYI: »Polarization-Dependent Loss-Induced Pulse Narrowing in Birefringent Optical Fiber with Finite Differential Group Delay«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 18 (Mai 2000), Nr. 5, S. 665-667
- [34] HAUNSTEIN, H. F. ; KALLERT, H. M.: »Influence of PMD on the Performance of Optical Transmission Systems in the Presence of PDL«. *OSA Proc. Opt. Fiber Commun. Conf. (OFC) 2001*, Anaheim, CA, März 2001, WT4
- [35] STEINKAMP, ANSGAR ; VORBECK, SASCHA ; VOGES, EDGAR: »Polarization Mode Dispersion and Polarization Dependent Loss in Optical Fiber Systems«. *Proceedings of SPIE*, Bd. 5596 (Oktober 2004), S. 243-254
- [36] STEINKAMP, ANSGAR ; VOGES, EDGAR: »Higher-Order Polarization-Mode Dispersion in the Presence of Polarization-Dependent Loss in Optical Fiber Systems«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 19 (Januar 2007), Nr. 2, S. 124-126
- [37] LI, YI ; YARIV, AMNON: »Solutions to the Dynamical Equation of Polarization-Mode Dispersion and Polarization-Dependent Losses«. *OSA J. Opt. Soc. Am. B*, Bd. 17 (November 2000), Nr. 11, S. 1821-1827
- [38] FECED, RICARDO ; SAVORY, SEB J. ; HADJIFOTIOU, ANAGNOSTIS: »Interaction Between Polarization Mode Dispersion and Polarization-Dependent Losses in Optical Communication Links«. *OSA J. Opt. Soc. Am. B*, Bd. 20 (März 2003), Nr. 3, S. 424-433
- [39] XIE, CHONGJIN ; MOLLENAUER, LINN F. ; MÖLLER, LOTHAR: »Pulse Distortion Induced by Polarization-Mode Dispersion and Polarization-Dependent Loss in Lightwave Transmission Systems«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 15 (August 2003), Nr. 8, S. 1073-1075
- [40] SHIEH, WILLIAM: »Principal States of Polarization for an Optical Pulse«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 11 (Juni 1999), Nr. 6, S. 677-679
- [41] KARLSSON, MAGNUS: »Polarization mode dispersion-induced pulse broadening in optical fibers«. *OSA Opt. Lett.*, Bd. 23 (Mai 1998), S. 688-690
- [42] LU, PING ; CHEN, LIANG ; BAO, XIAOYI: »Polarization Mode Dispersion and Polarization Dependent Loss for a Pulse in Single-Mode Fibers«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 19 (Juni 2001), Nr. 6, S. 856-860
- [43] LU, PING ; CHEN, LIANG ; BAO, XIAOYI: »Pulse Width Dependence of Polarization Mode Dispersion and Polarization Dependent Loss for a Pulse and their Impacts on Pulse Broadening«. *OSA Proc. Opt. Fiber Commun. Conf. (OFC) 2001*, Anaheim, CA, März 2001, ThA6
- [44] WANG, MUGUANG ; LI, TANGJUN ; JIAN, SHUISHENG: »Analytical Theory of Pulse Broadening Due to Polarization Mode Dispersion and Polarization-Dependent Loss«. *Elsevier Opt. Commun.*, Bd. 223 (Juli 2003), S. 75-80
- [45] SHTAIF, MARK ; ROSENBERG, OREN: »Polarization-Dependent Loss as a Waveform-Distorting Mechanism and Its Effect on Fiber-Optic Systems«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 23 (Februar 2005), Nr. 2, S. 923-930
- [46] KIM, NA YOUNG ; LEE, DUCKEY ; YOON, HOSUNG ; PARK, JAEHYOUNG ; PARK, NAMKYOO: »Limitation of PMD Compensation Due to Polarization-Dependent Loss in High-Speed Optical Transmission Links«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 14 (Januar 2002), Nr. 1, S. 104-106
- [47] BESSA DOS SANTOS, A. ; WEID, J. P. VON DER: »PDL Effects in PMD Emulators Made Out With HiBi Fibers: Building PMD/PDL Emulators«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 16 (Februar 2004), Nr. 2, S. 452-454
- [48] AGRAWAL, GOVIND P.: *Fiber-Optic Communication Systems*. 3. Aufl. Rochester, NY : John Wiley & Sons, 2002. – ISBN 0-471-22114-7
- [49] UNGER, HANS-GEORG: *Optische Nachrichtentechnik : Optische Wellenleiter*. Bd. 1. 3. Aufl. Heidelberg : Hüthig, 1993. – ISBN 3-8266-5001-8
- [50] UNGER, HANS-GEORG: *Optische Nachrichtentechnik : Komponenten, Systeme, Meßtechnik*. Bd. 2. 2. Aufl. Heidelberg : Hüthig, 1992. – ISBN 3-8266-5000-X
- [51] HULTZSCH, HAGEN (Hrsg.): *Optische Telekommunikationssysteme : Physik, Komponenten und Systeme*. Gelsenkirchen : Damm, 1996. – ISBN 3-87333-082-2

- [52] AGRAWAL, GOVIND P.: *Nonlinear Fiber Optics*. 3. Aufl. San Diego, CA : Academic, 2001. – ISBN 0-12-045143-3
- [53] YARIV, AMNON ; YEH, POCHI: *Optical Waves in Crystals : Propagation and Control of Laser Radiation*. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2002. – ISBN 0-471-43081-1
- [54] NOLTING, WOLFGANG: *Quantenmechanik – Grundlagen*. Bd. 5/1. 5. Aufl. Berlin : Springer, 2004 (Grundkurs Theoretische Physik). – ISBN 3-540-40071-0
- [55] SCHWABL, FRANZ: *Quantenmechanik : QM I*. 6. Aufl. Berlin : Springer, 2005. – ISBN 3-540-43106-3
- [56] LÜCKE, WOLFGANG: *Endlichdimensionale komplexe Vektorräume : Ergänzungen zu Mathematische Methoden der Physik, Kapitel 7* [online]. Clausthal : Institut für Physik und Physikalische Technologien, TU Clausthal. Letzte Aktualisierung: 17.02.2005 , erhältlich im Internet unter: <http://www.wolfgang-luecke.de/skripten/ein7.pdf> [Stand: 02.10.2006].
- [57] DIRAC, PAUL A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*. 4. Aufl. New York : Oxford University, 1958 (The International Series of Monographs on Physics). – ISBN 0198520115
- [58] STOKES, GEORGE GABRIEL: »On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources«. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, Bd. 9 (1852), S. 399-416
- [59] BORN, MAX ; WOLF, EMIL: *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light*. 6. Aufl. Oxford : Pergamon, 1984. – ISBN 0-08-026482-4
- [60] LIMA, I. T. ; KHOSRAVANI, R. ; EBRAHIMI, P. ; IBRAGIMOV, E. ; MENYUK, C. R. ; WILLNER, A. E.: »Comparison of polarization mode dispersion emulators«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 19 (Dezember 2001), Nr. 12, S. 1872-1881
- [61] FOSCHINI, G. J. ; POOLE, C. D.: »Statistical Theory of Polarization Dispersion in Single Mode Fibers«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 9 (November 1991), S. 1439-1456
- [62] BREUER, D. ; TESSMANN, H.-J. ; GLADISCH, A. ; FOISEL, H.M. ; NEUMANN, G. ; REINER, H. ; CREMER, H.: »Measurements of PMD in the installed fiber plant of Deutsche Telekom«. *IEEE Lasers and Electro-Opt. Soc. (LEOS) 2003*, Tucson, AZ, Oktober 2003, MB2.1
- [63] GALTAROSSA, ANDREA ; GRIGGIO, PAOLA ; PALMIERI, LUCA ; PIZZINAT, ANNA: »Low-PMD Spun Fibers«. GALTAROSSA, ANDREA ; MENYUK, CURTIS R. (Hrsg.): *Polarization Mode Dispersion*. New York, NY : Springer, 2004 (Optical and Fiber Communications Reports), S. 246-276 – ISBN 0-387-23193-5
- [64] KAYS, R.: *Scriptum Nachrichtentechnik : WS 2004/2005*. Dortmund : Universität Dortmund, Lehrstuhl für Kommunikationstechnik, 2004
- [65] POOLE, C. D. ; GILES, C. R.: »Polarization-dependent pulse compression and broadening due to polarization dispersion in dispersion-shifted fiber«. *OSA Opt. Lett.*, Bd. 13 (Februar 1988), S. 155-157
- [66] KARLSSON, MAGNUS ; BRENTTEL, JONAS: »Autocorrelation function of the polarization mode dispersion vector«. *OSA Opt. Lett.*, Bd. 24 (Juli 1999), Nr. 14, S. 939-941
- [67] GISIN, N. ; GISIN, B. ; VON DER WEID, J. P. ; PASSY, R.: »How accurately can one measure a statistical quantity like polarization-mode dispersion?«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 8 (Dezember 1996), Nr. 12, S. 1671-1673
- [68] ALLIANCE FIBER OPTIC PRODUCTS, INC. (AFOP): *Optical Isolator* [online]. Letzte Aktualisierung: 16.05.2006, erhältlich im Internet unter: <http://www.afop.com/products/micro.php> [Stand: 06.11.2006].
- [69] OEMARKET.COM: *Optical Circulator - Polarization Insensitive* [online]. Erhältlich im Internet unter: www.oemarket.com/product_info.php?cPath=22_26&products_id=42 – 2006 [Stand: 06.11.2006].
- [70] YANG, SHIQUAN ; CHEN, LIANG ; BAO, XIAOYI: »Wavelength Dependence Study on the Transmission Characteristics of the Concatenated Polarization Dependent Loss and Polarization Mode Dispersion Elements«. *SPIE Opt. Eng.*, Bd. 44 (November 2005), Nr. 11, 115006 S. 1-5

- [71] POOLE, C. D. ; BERGANO, N. S. ; WAGNER, R. E. ; SCHULTE, H. J.: »Polarization Dispersion and Principal States in a 147-km Undersea Lightwave Cable«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 6 (Juli 1988), Nr. 7, S. 1185-1190
- [72] PRESS, WILLIAM H. ; TEUKOLSKY, SAUL A. ; VETTERLING, WILLIAM T. ; FLANNERY, BRIAN P.: *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*. 2. Aufl. Cambridge : Cambridge University, 1992. – ISBN 0-521-43108-5
- [73] NELSON, L. E. ; JOPSON, R. M. ; KOGELNIK, H. ; FOSCHINI, G. J.: »Measurement of Depolarization and Scaling Associated with Second-Order Polarization Mode Dispersion in Optical Fibers«. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Bd. 11 (Dezember 1999), Nr. 12, S. 1614-1616
- [74] WADDY, DAVID S. ; HARRIS, DAVID L. ; SHIMIZU, KATSUHRIO ; CHEN, LIANG ; BAO, XIAOYI ; KAZOVSKY, LEONID G.: »The Correlation of Polarization Dependent Loss and Differential Attenuation Slope«. *OSA Proc. Conf. on Lasers and Electro-Opt. (CLEO) 2003*, Baltimore, MD, Juni 2003
- [75] INTEL SOFTWARE DEVELOPMENT PRODUCTS: *Integrated Performance Primitives* [online]. Erhältlich im Internet unter: <http://www.intel.com/cd/software/products/asmo-na/eng/302910.htm> [Stand: 19.01.2007].
- [76] LÜKE, HANS DIETER: *Signalübertragung : Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme*. 7. Aufl. Berlin : Springer, 1999. – ISBN 3-540-65197-7
- [77] ZHANG, LU ; HU, QIANGGAO ; ZHAO, SHENGZHI ; LIU, SHUIHUA ; XU, YUANZHONG: »Effect of PDL on the DOP Feedback Signal in PMD Compensation«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 24 (Februar 2006), Nr. 2, S. 797-804
- [78] BÜLOW, HENNING ; LANNE, STÉPHANIE: »PMD compensation techniques«. GALTAROSSA, ANDREA ; MENYUK, CURTIS R. (Hrsg.): *Polarization Mode Dispersion*. New York, NY : Springer, 2004 (Optical and Fiber Communications Reports), S. 225-245 – ISBN 0-387-23193-5
- [79] YAN, L. ; YEH, C. ; YANG, G. ; LIN, L. ; CHEN, Z. ; SHI, Y. Q. ; WILLNER, A. E. ; YAO, X. S.: »Programmable Group-Delay Module Using Binary Polarization Switching«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 21 (Juli 2003), Nr. 7, S. 1676-1684
- [80] PHUA, P. B. ; HAUS, H. A.: »Variable Differential-Group-Delay Module Without Second-Order PMD«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 20 (September 2002), Nr. 9, S. 1788-1794
- [81] AGILENT TECHNOLOGIES: *Agilent 8509B Lightwave Polarization Analyzer - Product Overview* [online]. Erhältlich im Internet unter: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5966-1557E.pdf> [Stand: 21.03.2007].
- [82] KIKUCHI, NOBUHIKO: »Analysis of Signal Degree of Polarization Degradation Used as Control Signal for Optical Polarization Mode Dispersion Compensation«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 19 (April 2001), Nr. 4, S. 480-486
- [83] ROY, FABIEN ; FRANCA, CRISTIAN ; BRUYÈRE, FRANCK ; PENNINCKX, DENIS: »A simple dynamic polarization mode dispersion compensator«. *OSA Proc. Opt. Fiber Commun. Conf. (OFC) 1999*, San Diego, CA, Februar 1999, TuS4
- [84] FRANCA, C. ; BRUYÈRE, F. ; THIÉRY, J.-P. ; PENNINCKX, D.: »Simple dynamic polarisation mode dispersion compensator«. *IEE Electron. Lett.*, Bd. 35 (März 1999), Nr. 5, S. 414-415
- [85] NOÉ, REINHOLD ; SANDEL, DAVID ; ET AL.: »Polarization Mode Dispersion Compensation at 10, 20, and 40 Gb/s with Various Optical Equalizers«. *IEEE/OSA J. Lightw. Technol.*, Bd. 17 (September 1999), Nr. 9, S. 1602-1616

Wissenschaftlicher Werdegang

Ansgar Steinkamp – ansgar.steinkamp@uni-dortmund.de – 0173 / 101 434 7

Ausbildung

Universität Dortmund, Diplomstudium am Fachbereich Physik

Akademischer Grad: Diplom-Physiker (Dipl.-Phys.)

November 2001

Gesamturteil: „Mit Auszeichnung“

Akademische Auszeichnung

Jahrgangsbestenpreis Physik 2002

GdF der Universität Dortmund

Ingenieurwissenschaftliche Qualifikation für Inhaber eines naturwissenschaftlichen Diploms

gemäß § 4 Abs. 2 der Promotionsordnung für die Abteilung Elektrotechnik vom 12.01.1983

Schriftliche Prüfung des Hauptstudiums im Fach Nachrichtentechnik

Februar 2005

Note: 1,0