

**Algorithmische Analyse
von rohrförmigen Flächen für das
Reverse Engineering**

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der Technischen Universität Dortmund
an der Fakultät für Informatik

von
Christian Wortmann

Dortmund 2008

Tag der mündlichen Prüfung:
1. Juli 2008

Dekan:
Prof. Dr. Peter Buchholz

Gutachter:
Prof. Dr. Heinrich Müller
Prof. Dr. Jan Vahrenhold

Für Meike

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Herstellung röhrenförmiger Werkstücke	5
1.2	Gegenstand und Ergebnisse	8
1.3	Gliederung	11
1.4	Beziehungen zu anderen Arbeiten	12
2	Rohre	13
2.1	Definitionen	13
2.1.1	Rohrdefinition	14
2.1.2	Analyse der Schnittkonturen	19
2.1.3	Teilrohre	28
2.2	Schlauchförmige Flächen	30
2.3	Schlaucheinpassung	31
2.4	Problemformulierung und Lösungsansätze	36
2.4.1	Verwandte Arbeiten	36
2.4.2	Vorgehensweise dieser Arbeit	41
3	Rohrrepräsentation durch Dreiecksnetze	43
3.1	Dreiecksnetze	43
3.2	Operationen auf Dreiecksnetzen	44
3.2.1	Test einer Strecke auf Schnitt mit einem Dreiecksnetz	45
3.2.2	Berechnung von Rohrschnittgebieten	45
3.2.3	Lineare Schlauchapproximation	46
3.2.4	Berechnung einer Konnektivitätslinie	48
4	Zielfunktion	49
4.1	Zielfunktion	49
4.1.1	Krümmungsgüte der Leitlinie	50
4.1.2	Umfangsgüte der Rohrschnittgebiete	51
4.1.3	Flächengüte der Rohrschnittgebiete	52
4.1.4	Normierte Zentrumsgüte der Leitlinie	53
4.1.5	Parallelitätsgüte und tangentiale Ausrichtungsgüte der Rohrschnittgebiete	58
4.1.6	Oberflächensteigungsgüte der Rohrschnittgebiete	59
4.1.7	Verknüpfung der Teilzielfunktionen	61
4.2	Zielfunktion für die Schlauchapproximation	61
5	Dynamische Programmierung	64
5.1	Schlauchapproximation	64
5.2	Formulierung als dynamisches Programmierproblem	65

5.3	Konnektivitätslinienbezogene Formulierung	69
5.4	Bestimmung der direkten Vorgänger	72
5.5	Aufwand des Verfahrens	77
5.6	Optimierte Schlauchstützstellenfolge	79
5.7	Aufwand des Verfahrens	81
5.8	Hierarchische Suche	82
5.9	Experimentelle Analyse	84
5.9.1	Untersuchung von Verfahrensparametern	85
5.9.2	Untersuchung der einzelnen Gütefunktionen	86
5.9.3	Untersuchung des Einflusses der Gewichte in der Zielfunktion	92
5.9.4	Rechenzeit	102
6	Adaptives Unterteilungsverfahren	103
6.1	Übersicht	103
6.2	Initiale Schlaucheinpassung	104
6.3	Optimierung der Schlaucheinpassung	109
6.4	Experimentelle Ergebnisse	111
6.5	Theoretische Analyse	113
6.5.1	Distanzmaße für Rohrschnittgebiete und Öffnungen	113
6.5.2	Analyse des Verfahrens	117
7	Diskussion der Schlaucheinpassung	119
7.1	Vergleich der Schlaucheinpassungen	119
7.2	Variationen der Schlaucheinpassungsverfahren	120
7.3	Problematik der vollen Automatisierung	122
8	Kurvenapproximation	125
8.1	Problemdefinition	125
8.2	Verwandte Arbeiten	127
8.3	U-Spline-Approximation durch adaptive Zerlegung	129
8.3.1	Glättung des Polygonzuges	129
8.3.2	Bestimmung eines Krümmungskreises und Suche nach lokal minimalen Krümmungsradien	130
8.3.3	Bestimmung einer Folge von approximierenden Kreisbögen	130
8.3.4	Bestimmung des Polygonzuges aus mittleren Kontrollpunkten	133
8.3.5	Erzeugung einer U-Spline-Kurve	133
8.3.6	Rechenzeit	134
8.4	Kombiniertes Verfahren	135
8.5	Experimentelle Analyse	135
8.5.1	Beispiele	135
8.5.2	Vergleich verschiedener Verfahren	138
9	Zusammenfassung und Ausblick	142
A	Geometrische Berechnungen	145
A.1	Berechnung eines Umkreises	145
A.2	Das Problem Bogen in Bogen	147

Zusammenfassung

Die Dissertation befasst sich mit Verfahren im Zusammenhang mit der Planung der industriellen Herstellung von Rohren aus einem geraden Zylinder. Der Nutzen einer solchen Planung kann zum einen in einer Machbarkeitsanalyse durch die Abschätzung des Dehnungsverhaltens des geraden Zylinders im Herstellungsprozess liegen, bevor auch nur ein einziges Rohr hergestellt worden ist. Zum anderen könnte sie Grundlage für Steuerungsprogramme von Fertigungsmaschinen in der Industrie sein.

Eine mögliche Vorgehensweise, die Grundlage der Arbeit ist, besteht darin, ausgehend von dem Ergebnis, dem gewünschten Rohr, durch inverse Anwendung von Herstellungsoperationen die Ausgangssituation, d.h. einen geraden Zylinder, herzuleiten. Im Zusammenhang damit sind unter anderem folgende Aufgaben von Interesse, die Gegenstand der Dissertation sind: die Schlaucheinpassung, d.h. das Auffinden einer Approximation des Rohres durch einen "Schlauch", worunter ein deformierter und gebogener Zylinder verstanden wird, sowie ein Kurvenapproximationsproblem, bei dem es darum geht, eine dreidimensionalen Kurve durch eine Kurve anzunähern, die sich tangentialstetig aus alternierend aufeinanderfolgenden Kreissegmenten und Strecken zusammensetzt.

Die Dissertation beginnt mit einer mathematischen Präzisierung des Begriffes eines Rohres und stellt die hierfür benötigten Definitionen und Hilfsmittel bereit, unter anderem den Begriff des "Teilrohres". Basierend darauf wird das Schlaucheinpassungsproblem als mehrkriterielles Optimierungsproblem formuliert. Die Formulierung lehnt sich entfernt an das Prinzip der elastischen Konturen an, das etwa aus der Bildverarbeitung bekannt ist.

Für das Optimierungsproblem werden zwei Lösungsansätze präsentiert. Der eine greift das Verfahren der dynamischen Programmierung auf. Der zweite Lösungsansatz besteht in einer adaptiven Unterteilungsheuristik, die an eine gängige Vorgehensweise zur Kurvenapproximation durch Polygonzüge angelehnt ist. Ihr Vorteil gegenüber der erstgenannten Vorgehensweise ist die sehr geringe Laufzeit, ihr Nachteil ist, dass ihre erfolgreiche Durchführung nicht gesichert ist. Zur effizienten Implementierung werden eine Reihe effizienter Verfahren für die geometrischen Grundoperationen aufgeführt.

Die Verfahren werden analysiert. Zum einen werden dazu theoretische Überlegungen angestellt, etwa bezüglich plausibler Bedingungen, unter denen die adaptive Unterteilungsheuristik zum Erfolg führt. Zum anderen geschieht die Analyse experimentell. Es zeigt sich, dass die Verfahren in vielen praktisch auftretenden Fällen gute Lösungen liefern. Wie bei Problemen dieser Art üblich ist eine Modellierung, die eine vollständig automatische Lösung erlaubt, jedoch kaum zu erwarten. Für den Umgang mit dieser Schwierigkeit werden Vorschläge gemacht.

Für die Kurvenapproximation wird zunächst der Begriff der "U-Spline-Kurve" eingeführt. Das Ziel ist, eine U-Spline-Kurve mit möglichst wenigen Segmenten zu generieren. Hierfür werden zwei Heuristiken vorgestellt. Bei der ersten handelt es sich um ein adaptives Zerlegungsverfahren, das auf der Analyse der Kurvenkrümmung basiert. Danach wird ein bekanntes Verfahren, welches eine Kreisbogen-Spline-Kurve mit einer minimalen Anzahl von Segmenten erzeugt, modifiziert, um daraus eine U-Spline-Kurve zu erzeugen. Es stellt sich heraus, dass beide Verfahren für Bauteile aus der Praxis vergleichbare Resultate erzeugen.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Prof. Dr. Heinrich Müller für die sehr gute Zusammenarbeit bedanken. Die Ergebnisse der Diskussionen und Besprechungen waren stets sehr hilfreich. Ebenso möchte ich mich bei Prof. Dr. Jan Vahrenhold für die Korrekturhinweise und Verbesserungsvorschläge bedanken.

Dr. Waldemar Kubli, Dr. Volker Steininger und Dr. Matthias Hillmann möchte ich ebenfalls danken, da ohne sie das Thema dieser Arbeit wohl nicht zu Stande gekommen wäre. Ich möchte mich auch meinen Eltern, meinen Schwiegereltern, Prof. emer. Dr. Rolf Walter, Prof. emer. Dr. Karl Heinz Mayer sowie allen Kollegen für die zahlreichen Korrekturarbeiten und Hilfen danken.

Ganz besonderer Dank gilt jedoch Meike, die mich während dieser Zeit stets unterstützt und ertragen hat.

Dortmund, den 10. August 2008

Christian Wortmann

Kapitel 1

Einleitung

Dieses Kapitel stellt zunächst den praktischen Hintergrund der Arbeit vor und formuliert dann die daraus resultierende, konkrete Aufgabenstellung. Es folgt ein Überblick über die Ergebnisse (Abschnitt 1.2). Abschnitt 1.3 gibt eine Übersicht über die Gliederung der Arbeit. Das Kapitel endet mit einer Darstellung der Beiträge des Autors im Zusammenhang mit anderen Arbeiten.

1.1 Herstellung röhrenförmiger Werkstücke

Ein Teilbereich der Umformtechnik im Maschinenbau ist die Herstellung röhrenförmiger Werkstücke (Abbildung 1.1). Ausgangspunkt ist typischerweise ein zylinderförmiges Rohr, etwa mit kreisförmig-



Abbildung 1.1: Ein Beispielrohr

gem Querschnitt. In einer ersten Phase wird das Rohr mittels einer Biegemaschine durch Drücken gegen eine kreisförmige Biegescheibe deformiert [53], [68], [8]. In einer zweiten Phase erfolgt eine weitere Deformation des Rohres, indem das gebogene Rohr mit einer Umformpresse in eine es umgebende Form gedrückt wird [68]. In einer dritten Phase wird das Rohr schließlich beschnitten, d.h. die Löcher werden ausgeschnitten. Diese Schritte werden im Folgenden anhand einiger Skizzen für das Bedarfsrohr aus der Abbildung 1.1 dargestellt.

Gegeben ist zunächst ein zylinderförmiger Schlauch mit kreisförmigem Querschnitt (vgl. Abbildung 1.2).

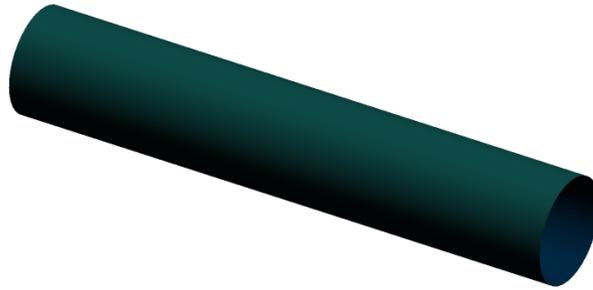


Abbildung 1.2: Zylinderförmiger Schlauch

Dieses wird dann durch vier Biegungen so deformiert, dass schließlich das Rohr aus der Abbildung 1.3 entsteht.

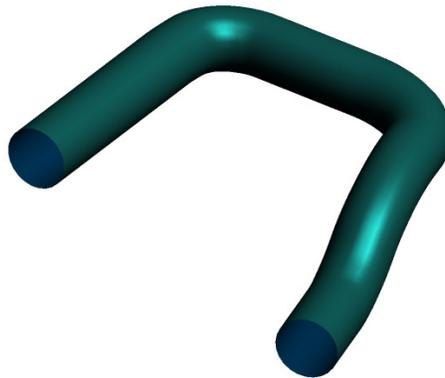


Abbildung 1.3: Verbogener Schlauch

Für jede Biegung wird das in diesem Bereich zunächst gerade Rohr gegen eine Biegescheibe gedrückt. Hierfür sind weitere Werkzeuge erforderlich, die hier nicht weiter erwähnt werden sollen. Das Ergebnis der vierten Biegung ist in der Abbildung 1.4 zu sehen.

Hier ist zudem die Biegescheibe (blau) abgebildet. In dieser Abbildung sieht man deutlich, wie das Rohr gegen die Biegescheibe gedrückt wird. Neben der Biegescheibe werden in der Regel zwei halbe, gerade Zylinder benutzt, die das Rohr umschließen. Auf diese Art und Weise wird das Rohr vor dem Biegevorgang justiert und während des Biegevorganges festgehalten, so dass die gewünschte Verformung durchgeführt werden kann. Sollten zwei Biegungen aneinanderstoßen, müssen diese Zylinderteile durch gekrümmte Flächen ersetzt werden. Da die Größe einer Biegung jeweils unterschiedlich ist, ist eine solche spezielle Fläche in der Regel nur für genau eine Biegung einsetzbar. Aus diesem Grund ist eine solche Situation zu vermeiden, vielmehr sollte zwischen zwei Krümmungen jeweils ein gerades Rohrstück liegen. Ziel ist es, Werkzeuge zu verwenden, die möglichst allgemeingültig sind, so dass auch andere Rohrtypen damit hergestellt werden können. Dies beruht auf der Tatsache, dass die Werkzeuge sehr teuer sind und die Produktionskosten möglichst gering gehalten werden sollen.

Im nächsten Schritt wird das gebogene Rohr mittels Umformen so deformiert, dass es das unbe-

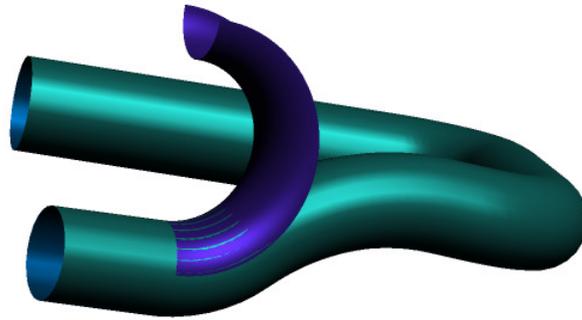


Abbildung 1.4: Letzte Biegung des Schlauches

schnittene Bedarfsrohr ergibt. Hierfür werden zunächst zwei Werkzeuge, die sogenannten *Ober-* und *Unterschalen*, konstruiert (vgl. Abbildung 1.5 beziehungsweise 1.6).

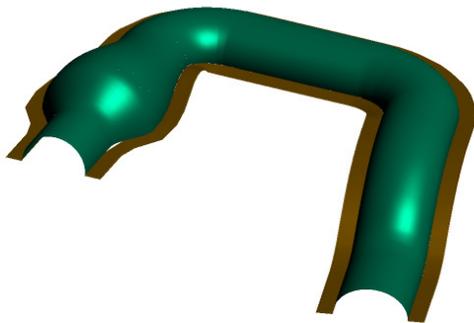


Abbildung 1.5: Oberschale

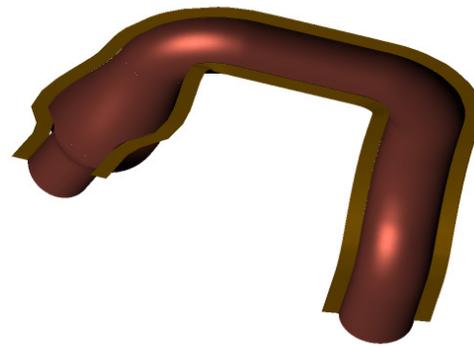


Abbildung 1.6: Unterschale

Diese beiden Formen sind von der Rohrgeometrie abgeleitet. Dabei ist die von den Anwendenden vorgegebene Nebenbedingung zu erfüllen, dass das Bedarfsrohr problemlos aus einer vorgegebenen Richtung, der sogenannten *Schließrichtung*, aus den Schalen herausgenommen werden kann. Dies bedeutet, dass jede Schale *hinterschnittfrei* ist. Danach wird der verbogene Schlauch soweit möglich in die Unterschale gelegt (Abbildung 1.7) und die Oberschale so über den Schlauch und die Unterschale platziert, dass sie keinen Kontakt haben.

Anschließend wird eine Flüssigkeit in das Innere des Schlauches gegeben und danach beide Rohrenden verschlossen. Während der Flüssigkeitsdruck im Inneren des verbogenen Schlauches schrittweise erhöht wird, wird die Oberschale in Schließrichtung auf die Unterschale gesenkt. Dabei entsteht das gewünschte, noch unbeschnittene Bedarfsrohr.

Zur Durchführung dieses Fertigungsprozesses ist eine Planung der Einzelschritte erforderlich. Diese Aufgabe kann so formuliert werden:

Planung der Fertigung von Rohren durch Umformung

Gegeben: Ein Bedarfsrohr.

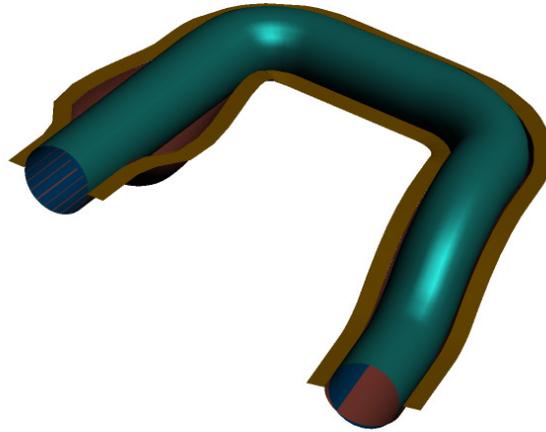


Abbildung 1.7: Deformierter Schlauch in der Unterschale

Gesucht: Ein Zylinder, Biegeoperationen an Kreisscheiben, sowie Unter- und Oberschalen, so dass der entsprechend verbogene Zylinder zwischen die geschlossenen Ober- und Unterschalen gepresst werden kann.

Ein Ansatz, die Planungsaufgabe anzugehen, besteht darin, ausgehend vom Ergebnis, d.h. dem Bedarfsrohr, durch inverse Anwendung von Operationen der benötigten Art die Ausgangssituation, d.h. einen Startzylinder, herzuleiten. Bei der Wahl der Operationen ist zu beachten, dass die Deformation des Materials innerhalb zulässiger Toleranzen liegt. Sollte der Schlauchdurchmesser beispielsweise zu stark vergrößert werden, besteht die Gefahr, dass der gebogene Schlauch beim Umformprozess reißt. Die direkte Anwendung der gefundenen Operationen stellt dann eine Lösung dar. Aufgrund der Vorgehensweise wird dieses Verfahren auch als *Reverse Engineering* bezeichnet.

Besonderes Interesse besteht in der Lösung der Planungsaufgabe mit Rechnern, da auf diese Weise auch der Nachweis der Machbarkeit eines Rohres getroffen werden kann, bevor auch nur ein Werkzeug gebaut wurde.

1.2 Gegenstand und Ergebnisse

Gegenstand der Dissertation ist die Bereitstellung von Verfahren zur Analyse von Rohren im Zusammenhang mit der Planung der Herstellung von Rohren durch Reverse Engineering. Eine grundsätzliche Behandlung dieser Aufgabenstellung scheint bisher nicht zu existieren, insbesondere wenn es um den Aspekt der automatischen oder nahezu automatischen Lösung geht. "Automatisch" bedeutet, dass keine Interaktion der Anwendenden mit dem Planungsprozess notwendig ist. Es werden in diesem Rahmen Techniken vorgestellt, die die Bedingungen aus der realen Anwendung berücksichtigen. Ferner werden die erzielten Ergebnisse in der industriellen Anwendung erfolgreich eingesetzt.

In diesem Rahmen behandelt diese Arbeit zwei Problemstellungen: das Auffinden einer Approximation eines gegebenen Rohres durch eine Schlauchform sowie die Approximation einer dreidimensionalen Kurve durch eine Kurve, die sich tangentialstetig aus alternierend aufeinanderfolgenden Kreissegmenten und Strecken zusammensetzt. Das erste Problem wird im Folgenden als *Schlaucheinpassung*, das zweite Problem als *U-Spline-Approximation* bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen beiden Problemen ergibt sich über eine sogenannte *Leitlinie* des Rohres. Eine Leitlinie ist eine Kurve, die möglichst zentriert im Inneren und entlang des Rohres sowie

der approximierenden Schlauchform verläuft. Die Leitlinie des Schlauches ist Gegenstand der U-Spline-Approximation. Durch die resultierende approximierende U-Spline-Kurve werden dann die Stellen festgelegt, an denen ein gegebener Zylinder mit der ungefähren Länge der U-Spline-Kurve den kreisförmigen Biegeoperationen zu unterwerfen ist. Das Resultat der U-Spline-Approximation wird daher auch *Biegelinie* genannt.

Die wesentlichen Resultate sind wie folgt:

Definition eines geeigneten Konzeptes für Rohre:

Anschaulich ist ein Rohr ein deformierter Schlauch, wobei ein Schlauch ein länglicher Zylinder mit Öffnungen an den Enden, d.h. an "Boden" und "Deckel", ist. Ein Rohr lässt sich praktisch überall durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegen, so dass seine beiden Öffnungen in unterschiedlichen Teilen liegen. Die Teile sind wieder Rohre, sogenannte "Teilrohre". Basierend auf dieser anschaulichen Beobachtung kann eine Schlaucheinpassung dadurch erhalten werden, dass das gegebene Rohr in Folge endlich vieler Teilrohre zerlegt wird, die so einfach sind, dass sich in jedes Teilrohr ein Schlauchstück einpassen lässt. Achtet man darauf, dass die Schlauchstücke an den Schnittstellen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Teilrohren stetig aneinander passen, ergibt sich durch deren Zusammensetzung ein eingepasster Schlauch.

Aus dieser Vorgehensweise ergibt sich die Notwendigkeit einer Rohrdefinition mit der Eigenschaft, dass "Teilrohre", in dem genannten Sinne, diese Rohrdefinition ebenfalls erfüllen. Es zeigt sich, dass auch bei "normalen" Rohren Teilrohre von recht komplexer Topologie resultieren können. So ist es möglich, dass das topologische Geschlecht von Teilrohren nicht notwendigerweise 0 sein muss, wie dies von einem "normalen" Rohr erwartet wird. "Geschlecht 0" bedeutet, dass sich das Rohr durch Deformation in eine Kugelfläche überführen lässt, wobei die beiden Öffnungen des Rohres Öffnungen auf der Kugelfläche werden. Geschlecht 1 bedeutet, dass das Rohr eine deformierte Torusfläche ist. Geschlecht k bedeutet, dass es k "Henkel" gibt – die Kugel hat keinen, der Torus hat einen. Die Öffnungen von Teilrohren können im Allgemeinen auch mehrere Randkonturen haben. Abbildung 1.8 zeigt ein derartiges Beispiel. Die

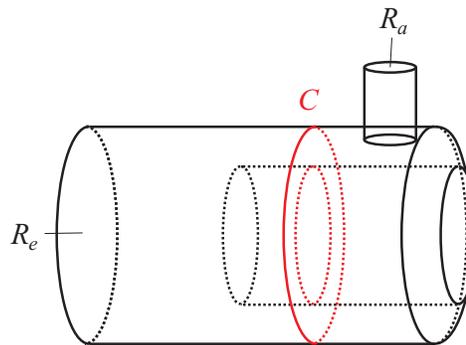


Abbildung 1.8: Ein Rohr, das ein nach innen gebogener Zylinder ist und dessen Oberfläche zusammen mit den Öffnungen R_a und R_e Geschlecht 0 hat, zerfällt nach dem Beschnitt mit C in Teile, von denen einer mit den entstehenden Öffnungen Geschlecht 1 hat. Die gemeinsame Öffnung der beiden Teilrohre besteht aus zwei Randkonturen.

Oberfläche des resultierenden Teilrohrs hat Geschlecht 1.

Diese Beobachtungen machen die Definition eines Rohrkonzeptes, das bezüglich geeigneter Teilrohrbildung abgeschlossen ist, zu einem nichttrivialen Problem. In dieser Arbeit wird eine Rohrdefinition präsentiert, die diesen Umstand berücksichtigt.

Modellierung des Schlaucheinpassungsproblems als Optimierungsproblem:

Die Schwierigkeit des Schlaucheinpassungsproblems besteht darin, das "anschaulich Gewünschte" formal zu modellieren. Diese Schwierigkeit ist bei zahlreichen praktischen Problemen gegeben. In vielen Fällen sind keine umfassenden Lösungen bekannt. Ein prominentes Beispiel ist die Approximation des Randes eines Gebietes in digitalen Bildern von realen Szenen, in denen der Randverlauf unscharf ist [34]. Ein Ansatz zur Bearbeitung solcher Probleme besteht darin, das Ziel als Optimierungsproblem zu formulieren, indem heuristische geometrische oder physikalische Modelle zu Grunde gelegt werden. Damit können bei vielen, jedoch üblicherweise nicht bei allen Eingabeinstanzen gute Lösungen erzielt werden. In dieser Arbeit wird das Schlaucheinpassungsproblem auf diese Weise angegangen.

Eine "gute" Lösung des Schlaucheinpassungsproblems besteht anschaulich aus einem Schlauch, d.h. einem deformierten Zylinder, der im Inneren des Rohres verläuft und einen möglichst großen Radius hat. Dabei handelt es sich offensichtlich um ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung. Die Zielfunktion besteht darin, einen möglichst großen Radius zu finden. Die Nebenbedingung drückt aus, dass der Zylinder im Rohrrinneren liegen soll.

Diese Beobachtung wird in der Arbeit dahingehend ausgearbeitet, dass eine Reihe von heuristischen Teilzielfunktionen angegeben werden, deren Minimierung intuitiv einen gut eingepassten Zylinder im genannten Sinne bewirken sollte. Die Grundlage ist dabei eine Leitlinie, die möglichst "zentriert" im Inneren des Rohres verlaufen soll. Wenn diese Leitlinie gleichzeitig auch die Leitlinie des eingepassten Zylinders ist, ist der Radius des Zylinders als minimaler Abstand des Rohres zur Leitlinie gegeben. Die Verbindung zwischen Leitlinie und Rohr wird durch ebene Rohrschnitte hergestellt, die das Rohr in Teilrohre zerlegt. Zielforderungen an die Leitlinie und die Rohrschnitte können etwa sein, dass die Leitlinie möglichst zentriert durch Rohrschnitte verlaufen soll, dass die Rohrschnittgebiete möglichst senkrecht zur Leitlinie stehen und dass die Rohrschnittgebiete einen möglichst großen Umfang haben. Ferner könnte es auch wünschenswert sein, dass sich die Leitlinie möglichst wenig krümmt.

Es wird eine Reihe solcher heuristischer Teilzielfunktionen angegeben, die in geeigneter Kombination das Ziel der Rohreinpassung in einer Weise beschreiben, die in vielen Fällen zu anschaulich gewünschten Lösungen führen sollten. Dies wird an Rohrformen unterschiedlicher Charakteristik experimentell demonstriert.

Approximative Lösung des Optimierungsproblems durch dynamische Programmierung:

Optimierungsprobleme, die das Schlaucheinpassungsproblem spezifizieren, sind vom gleichen Typ wie diejenigen, die im Zusammenhang mit sogenannten aktiven Konturen auftreten. Aktive Konturen treten beispielsweise in Zusammenhang mit dem oben erwähnten Problem der Approximation des Randes eines Bildgebietes auf. Die dabei einzupassende Randkurve wird üblicherweise über zwei Teilzielfunktionen beschrieben, die eine äußere und eine innere Energie definieren, die zu minimieren sind. Die äußere Energie beschreibt die Lage der Kurve relativ zum Rand des Zielgebietes, die innere Energie die Glattheit der Kurve. Zur Lösung dieses klassischen Problems wurden zahlreiche Verfahren publiziert [36, 57].

Ein Verfahren beruht auf der diskreten dynamischen Programmierung. Dieser Ansatz wird in dieser Arbeit angewendet. Der Vorteil gegenüber anderen Verfahren ist, dass globale Optima bezüglich des diskretisierten Problems gefunden werden. Ein Nachteil ist der recht hohe Rechenaufwand. Ein besonderes Augenmerk dieser Arbeit liegt daher auf der Reduzierung des Rechenaufwandes. Dies wird zum einen durch die Verwendung effizienter geometrischer Algorithmen für die auftretenden Grundoperationen erzielt. Zum anderen wird die spezielle Struktur des Problems ausgenutzt, um den Suchraum gegenüber der allgemeinen Vorgehensweise einzuschränken.

Aproximative Lösung des Optimierungsproblems durch adaptive Zerlegung:

Wie erwähnt, ist der Ansatz der dynamischen Programmierung recht berechnungsaufwändig. Der Autor der Dissertation hat vor Beginn der Arbeit an der Dissertation ein sehr einfaches heuristisches Lösungsverfahren entwickelt, das sehr schnell ist und das sich in der industriellen Anwendung bewährt hat. Die Erfahrung mit einer großen Anzahl von Rohren in der Praxis zeigt, dass in ca. 90 Prozent der Fälle eine gewünschte Lösung erzielt wird. In den anderen Fällen ist eine manuelle Korrektur notwendig.

Das Verfahren erzeugt eine adaptive Zerlegung des gegebenen Rohres in Teilrohre durch sukzessives Zweiteilen, das einem bekannten Verfahren der Approximation einer Kurve in Parameterdarstellung durch einen Polygonzug ähnelt. Eine Analyse des ursprünglichen Verfahrens weist Terminierungsprobleme auf, wofür ein Beispiel angegeben wird. Ausgehend von dem Verfahren wird eine "defensivere" Version angegeben, mit der solche Schwierigkeiten gemindert werden können. Zum anderen werden Bedingungen an Rohre und das Verhalten des Verfahrens formuliert, unter denen die Terminierung des Verfahrens nachzuweisen ist und deren Gültigkeit für viele Rohre, insbesondere solche, die praktisch relevant sind, plausibel ist.

Approximation eines Polygonzuges durch eine U-Spline-Kurve aus wenigen Segmenten:

U-Spline-Approximationsprobleme sind mit den Kreisbogen-Spline-Approximationsproblemen verwandt. Eine Kreisbogen-Spline-Kurve besteht aus einer endlichen Folge von Kreissegmenten, die in der Regel tangentialstetig aneinandergefügt sind. Für die Approximation von ebenen Kurven durch Kreisbogen-Spline-Kurven sind einige Arbeiten bekannt, für Raumkurven gibt es nur wenige Vorschläge. Insbesondere ist der Aspekt der Minimierung der Anzahl von Segmenten bei vorgegebenem erlaubten Fehler noch nicht umfassend behandelt. Zwar minimiert ein Verfahren von Safonova und Rossignac [65] die Anzahl der Kreisbögen, jedoch ohne Berücksichtigung der Tangentialstetigkeit.

U-Spline-Kurven sind spezielle Kreisbogen-Spline-Kurven, bei denen jedes zweite Segment ein zu einer Strecke degenerierter Kreisbogen ist. Jeder Polygonzug lässt sich auf einfache Weise in eine beliebig genau approximierende Kreisbogen-Spline-Kurve konvertieren, indem an jedem Punkt eine hinreichend kleine Kreisbogenverblendung durch Einpassen eines Kreissegmentes durchgeführt wird. Dies ist jedoch durch die in der Regel große Anzahl von Segmenten keine wünschenswerte Lösung, selbst wenn der Polygonzug zuvor durch einen Polygonzug geringerer Länge, etwa mit dem Algorithmus von Imai, Iri [30], approximiert wurde. Zur Aufgabe der Minimierung der Anzahl der Kreisbögen bei U-Spline-Kurven ist in der Literatur praktisch nichts bekannt.

In dieser Arbeit wird ein heuristisches Approximationsverfahren angegeben. Das Verfahren basiert auf einer Analyse der Krümmung des zu approximierenden Polygonzuges. Im Extremfall liefert es die oben skizzierte triviale Lösung. Experimente zeigen jedoch, dass es bei praktisch relevanten Beispielen wünschenswerte Lösungen erzielt. Durch eine Modifikation, bei der die Polygonzuganalyse auf dem Verfahren von Safonova und Rossignac [65] basiert, wird eine Beziehung zur optimalen Kreisbogen-Spline-Approximation hergestellt.

1.3 Gliederung

Kapitel 2 führt in das Problem der Schlaucheinpassung ein und skizziert die Lösungsansätze, die in dieser Arbeit verfolgt werden. Kapitel 3 stellt die geometrische Repräsentation von Rohren durch Dreiecksnetze vor und gibt effiziente algorithmische Realisierungen der geometrischen Operationen an, die in den Algorithmen verwendet werden. Kapitel 4 präzisiert die Zielfunktion für die

Schlaucheinpassung. Kapitel 5 präsentiert den Ansatz der dynamischen Programmierung zur näherungsweise Lösung des Schlaucheinpassungsproblems. Das adaptive Verfahren ist Gegenstand von Kapitel 6. Kapitel 7 diskutiert die erzielten Ergebnisse beider Verfahren. Schließlich stellt Kapitel 8 ein Verfahren zur Approximation einer polygonalen Leitlinie durch eine U-Spline-Kurve vor. Kapitel 9 fasst die Ergebnisse zusammen und gibt Hinweise für möglicherweise interessante zukünftige Arbeiten. Im Anhang A sind geometrische Berechnungen zusammengefasst, die bei der Ermittlung der Biegelinie auftreten.

1.4 Beziehungen zu anderen Arbeiten

Im Rahmen dieser Dissertation sind vom Autor mehrere Diplomarbeiten mitbetreut worden, die mit dem Thema der Dissertation in Verbindung stehen. Dies sind die Arbeiten von Kudlacik [39], Lauert [44], Piepenstock [61], Schlienkamp [66] und Schweinoch [71]. Die meisten dieser Arbeiten hatten alternative Lösungswege zum Gegenstand, die nicht in die Dissertation eingegangen sind. Auf diese wird teilweise vergleichend Bezug genommen, etwa wenn es um den Vergleich der Verfahren der Dissertation mit alternativen Ansätzen geht.

Explizite Berücksichtigung gefunden hat die Diplomarbeit von Piepenstock [61]. Diese Diplomarbeit hat sich mit der praktischen Realisierung der Lösung durch dynamische Programmierung befasst, die vorgegeben wurde. Bei der Arbeit war der grundsätzliche Ansatz vorgegeben, der Beitrag der Diplomarbeit bestand in der detaillierten Ausarbeitung, der Implementierung und der experimentellen Analyse. Das Ziel der Diplomarbeit war, Erkenntnisse über die Implementierbarkeit und den praktischen Berechnungsaufwand des Verfahrens zu gewinnen, sowie, ausgehend von gemachten Beobachtungen, Verbesserungen zu finden, die die praktische Effizienz steigern. Das wesentliche Resultat der Diplomarbeit ist die erstellte Implementierung, in deren Zusammenhang folgende wesentliche Beiträge des Diplomanden entstanden sind:

- Die Feststellung des Einflusses der Diskretisierung von Rohrflächen durch Dreiecksnetze auf die Berechnung von Zielfunktionswerten. Dieses Problem wird in Abschnitt 4.1.2 der Dissertation erwähnt.
- Der Vorschlag von Parallelitätsgüte, tangentielle Ausrichtungsgüte und Oberflächensteigungsgüte über die vorgegebene Flächengüte, Krümmungsgüte, Umfangsgüte und normierte Zentrumsgüte hinaus. Diese werden in den Abschnitten 4.1.5 und 4.1.6 der Dissertation aufgeführt. Ferner werden Evaluierungsergebnisse aus der Diplomarbeit in dem Abschnitt 5.9.2 der Dissertation aufgeführt.
- Ein gegenüber dem Verfahren der Dissertation beschleunigtes Verfahren zur Berechnung der direkten Vorgänger. Auf dieses Verfahren wird am Ende von Abschnitt 5.5 der Dissertation verwiesen.
- Ein Verfahren, das die vorgegebene Idee einer hierarchischen Auswahl der Schnittebenen konkretisiert. Dieses Verfahren wird in Abschnitt 5.8 nur skizziert, für die detaillierte Darstellung wird auf die Diplomarbeit verwiesen. Ferner werden experimentelle Erkenntnisse zum praktischen Verhalten aus der Diplomarbeit in Abschnitt 5.9.1 der Dissertation übernommen.
- Experimentelle Erkenntnisse zur Gewichtung der Gütekriterien in der Gesamtzielfunktion. Diese, vom Autor der Dissertation angeregten Untersuchungen, waren der Ausgangspunkt der weiteren, erheblich umfassenderen experimentellen Evaluierungen in Abschnitt 5.9.3 der Dissertation.

Kapitel 2

Rohre

Das Kapitel beginnt mit einer Analyse der Problemstellung und darauf beruhender präzisierter Problemformulierung in Form von Schlaucheinpassungsproblemen. Zu diesem Zweck wird zunächst eine Reihe von Begriffen eingeführt, von denen *Rohr*, *Rohrschnittgebiet*, *Schlauchstützstellenkantenzug* und *Schlauchapproximation* als die wichtigsten zu nennen sind (Abschnitte 2.1 bis 2.3). Es folgt die Vorstellung der Lösungsansätze, die in der Arbeit verfolgt werden. Dies beinhaltet eine Übersicht über verwandte Arbeiten und eine Begründung für den hier eingeschlagenen Lösungsweg für das Schlaucheinpassungsproblem (Abschnitt 2.4).

2.1 Definitionen

In diesem Abschnitt wird zunächst der Rohrbegriff konkretisiert. Dabei werden topologische Voraussetzungen mit dem Ziel geschaffen, dass bei einer Teilung eines Rohres mittels einer Ebene zwei Teilmengen entstehen, die selbst wieder die Rohreigenschaften erfüllen. Dies geschieht mit dem Hintergrund, dass eine solche Teilung von Rohren wesentlicher Bestandteil der Algorithmen der Leitlinienbestimmung ist. Obwohl intuitiv ein Rohr durch einen Beschnitt mit einer Ebene stets in zwei Teilrohre zerteilt wird, sind Fälle denkbar, bei denen dies nicht erfüllt ist. Ein solcher Fall ist in der Abbildung 2.1 dargestellt. Die Abbildung zeigt ein U-förmiges Rohr mit einer Einbuchtung, die von

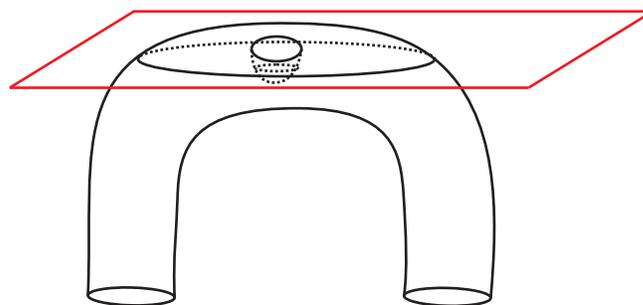


Abbildung 2.1: Ein U-förmiges Rohr mit einer Einbuchtung, das durch eine Ebene beschnitten wird. Nach dem Beschnitt ist der Teil, der oberhalb der Schnittebene liegt, ein Ring und damit anschaulich kein Rohr mehr.

einer Ebene geschnitten wird. Der resultierende Teilmenge oberhalb der Schnittebene ist ein Ring, der anschaulich kein Rohr darstellt. Dieser Beschnitt und andere entsprechend pathologische Situationen sollten für die vorgestellten Algorithmen daher nicht verwendbar sein und in dem zu definierenden Rohrkonzept ausgeschlossen werden. Um solche Untersuchungen durchführen zu können, werden

Konzepte und Notationen aus der Mathematik benötigt, die nun zunächst zusammengestellt werden. Konkrete Definitionen sind in Standardwerken der Analysis und Topologie zu finden, etwa in [31], [32] und [33].

Der Abschluss einer Menge A von Punkten im d -dimensionalen Euklidischen Raum wird mit A^- , der offene Kern mit A° und der Rand mit δA bezeichnet. Der offene Kern besteht aus allen inneren Punkten von A , d.h. Punkten, mit denen auch eine offene Umgebung in A liegt. Der Rand besteht aus den Punkten des Raumes, für die jede Umgebung sowohl Punkte in A als auch außerhalb von A enthält. Der Abschluss ergibt sich als Vereinigung von A mit der Menge aller Randpunkte.

Unter einer *Zusammenhangskomponente* einer Menge wird eine maximale zusammenhängende Teilmenge verstanden. Eine Teilmenge heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht die Vereinigung zweier nicht leeren, disjunkten, offenen Teilmengen ist. Eine zusammenhängende Menge ist maximal, wenn sie sich nicht um weitere Punkte der gegebenen Menge erweitern lässt, ohne die Zusammenhangseigenschaft zu verlieren.

Es werden zweidimensionale, topologische Mannigfaltigkeiten M im dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 betrachtet, d.h. Flächen ohne Selbstschnitt und -berührungen, bei denen jeder innere Punkt eine Umgebung im \mathbb{R}^3 besitzt, deren Schnitt mit M topologisch äquivalent zu einer offenen Kreisscheibe und jeder Randpunkt von M eine Umgebung im \mathbb{R}^3 besitzt, deren Schnitt mit M topologisch äquivalent zu einer halben, offenen Kreisscheibe inklusive des Durchmesserlinienstückes ist. Eine Fläche hat *Geschlecht 0*, wenn sie zu einer abgeschlossenen Kugeloberfläche, gegebenenfalls mit Löchern, topologisch äquivalent ist, d.h. sich aus einer solchen allein durch Deformation ergibt. Eine geschlossene Fläche heißt *orientierbar*, sofern zwischen einer Innen- und einer Außenseite unterschieden werden kann.

2.1.1 Rohrdefinition

Der Begriff eines Rohres kann auf folgende Weise präzisiert werden:

Definition 2.1

(W, R_a, R_e) heißt Rohr mit Öffnungen R_a und R_e , wenn gilt:

1. W ist eine zweidimensionale, orientierbare, zusammenhängende, unberandete, topologische Mannigfaltigkeit im dreidimensionalen Euklidischen Raum und berandet ein beschränktes, zusammenhängendes, räumliches Gebiet W^* , dessen Abschluss abgeschlossener Rohrkörper von W genannt und mit $W^{*, -}$ bezeichnet wird. Die Menge der inneren Punkte des Gebietes heißt innerer Rohrkörper von W und wird mit $W^{*, \circ}$ bezeichnet.
2. R_a und R_e sind offene zusammenhängende Teilgebiete auf W .
3. $W - (R_a \cup R_e)$ besteht aus $n \geq 1$ abgeschlossenen, beschränkten, zweidimensionalen, topologischen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht 0 im dreidimensionalen Euklidischen Raum. Jede Oberflächenkomponente von $W - (R_a \cup R_e)$ hat maximal zwei Randkonturen.
4. Sei
 - E eine beliebige Ebene,
 - R die Menge der Punkte in E , die auf dem Rand von $W^{*, -}$ liegen,
 - I die Menge der Punkte in E , die in $W^{*, \circ}$ liegen,
 - A die Menge aller anderen Punkte in E .

Die Mengen können auch leer sein.

Dann gilt:

- (a) I besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Sofern eine solche Zusammenhangskomponente keine Randpunkte hat, die in R_a oder R_e liegen, wird sie als Rohrschnittgebiet bezeichnet.

Der Rand eines Rohrschnittgebietes bezüglich E besteht aus endlich vielen einfach geschlossenen, stetigen Kurven. Er wird als Schnittkontur bezeichnet. Die Kurven können auch selbstberührend oder zu einem Punkt degeneriert sein.

Ein Rohrschnittgebiet heißt einfach, wenn die Schnittkontur aus genau einer Kurve besteht.

Die Menge aller Rohrschnittgebiete einer Ebene wird mit $\mathcal{C}(E)$, die Menge aller Rohrschnittgebiete mit \mathcal{C} bezeichnet.

- (b) Die Menge der inneren Punkte von R bezüglich E besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Eine solche Zusammenhangskomponente bildet ein Rohrrandgebiet.

Der Rand eines Rohrrandgebietes bezüglich E besteht aus endlich vielen einfach geschlossenen, stetigen Kurven. Er wird als Randkontur bezeichnet. Die Kurven können auch selbstberührend oder zu einem Punkt degeneriert sein.

Ein Rohrrandgebiet heißt einfach, wenn die Randkontur aus genau einer Kurve besteht.

Die Menge aller Rohrrandgebiete einer Ebene wird mit $\mathcal{R}(E)$, die Menge aller Rohrrandgebiete mit \mathcal{R} bezeichnet.

- (c) Ein Rohrschnittgebiet beziehungsweise ein Rohrrandgebiet mit Schnittebene E heißt singular, wenn die Randkontur berührende oder degenerierende Kurven enthält oder es ein weiteres Rohrschnittgebiet oder Rohrrandgebiet in E gibt, so dass sich die Randkonturen beider Gebiete berühren, andernfalls heißt es regulär.

5. R_a und R_e sind offene, zusammenhängende Gebiete, die offene Teilmengen von Rohrrandgebieten mit zugehörigen Schnittebenen E_a und E_e sind, für die gilt:

- (a) Der Rand von R_a beziehungsweise R_e hat dieselben Eigenschaften wie der eines Rohrrandgebietes.

- (b) Die Abschlüsse R_a^- und R_e^- bezüglich E_a beziehungsweise E_e sind disjunkt.

In der Abbildung 1.1 ist bereits ein Beispiel für ein Rohr gegeben worden. Allerdings erfüllt auch das in der Abbildung 2.2 dargestellte Volumen die Rohreigenschaften, obwohl zumindest auf den ersten Blick dies nicht als ein Rohr bezeichnet worden wäre.

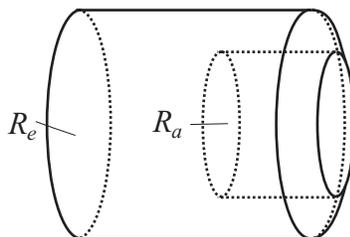


Abbildung 2.2: Ein nach innen gebogener Zylinder.

In dieser Rohrdefinition wird versucht, die intuitiv mit dem Rohrbegriff gestellten Forderungen präzise zu formulieren. Im Wesentlichen ist ein Rohr eine zusammenhängende Fläche, die genau zwei

planare Öffnungen besitzt. Nach einem bekannten Trennungssatz aus der Mathematik, der im Folgenden noch ausführlicher beschrieben wird, berandet das Rohr ein zusammenhängendes Volumen. Dieses Volumen hat die Eigenschaft, keine "Luftblasen" zu besitzen, was ebenfalls der intuitiven Erwartung an ein Rohr entspricht. Diese geometrischen Forderungen werden durch die ersten beiden Punkte der Rohrdefinition erfasst.

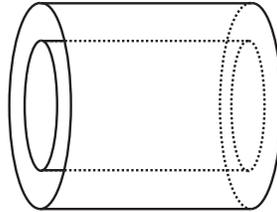


Abbildung 2.3: Rohr mit einer Oberfläche, das ohne die Öffnungen aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht. Die Öffnungen sind die beiden planaren, ringförmigen Verbindungsflächen der Zylinder.

Ohne die Öffnungen kann die Rohroberfläche in mehrere Zusammenhangskomponenten zerfallen. Im Punkt 3 der Rohrdefinition ist gefordert, dass jede dieser Komponenten das Geschlecht 0 hat. Dadurch ist es möglich zu zeigen, dass ein Rohrschnittgebiet ein Rohr in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt, sofern bestimmte Eigenschaften von dem Rohrschnittgebiet erfüllt werden. Ein Beispiel für ein Rohr, bei dem die Oberfläche ohne die Öffnungen aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, ist in der Abbildung 2.3 dargestellt.

Die weitere Forderung im Punkt 3, dass jede Oberflächenkomponente höchstens zwei Randkonturen besitzen darf, soll bewirken, dass beispielsweise die Fläche, welche in der Abbildung 2.4 zu sehen ist, kein Rohr ist. Der Grund, warum diese Fläche aus der Rohrdefinition ausgeschlossen wird, ist

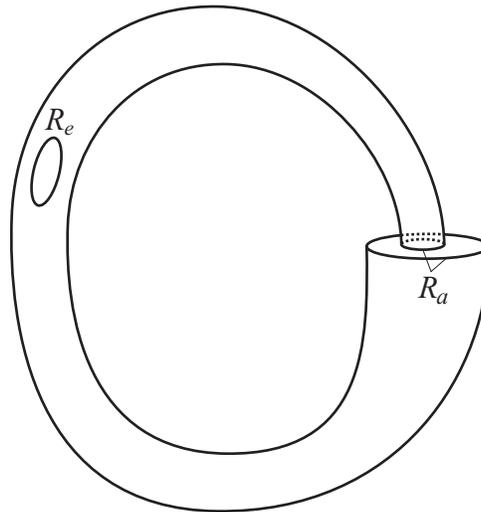


Abbildung 2.4: Eine Fläche, die die Rohrbedingungen nicht erfüllt, da die Oberfläche drei Ränder hat.

zum einen, dass diese nicht der intuitiven Vorstellung eines Rohres entspricht. Zum anderen sind theoretische Überlegungen, wann diese Fläche mittels eines Rohrschnittgebietes in zwei Komponenten zerlegt wird, wobei eine Komponente die Öffnung R_a und die andere R_e enthält, aufwändig.

Weil solche Rohrschnittgebiete, die diese Eigenschaften erfüllen, von zentraler Bedeutung für die hier präsentierten Algorithmen sind, ist diese Flächenform aus der Rohrdefinition ausgeschlossen worden. Es ist allerdings nicht ausgeschlossen, dass ein Rohr durch den Beschnitt mit einem Rohr-

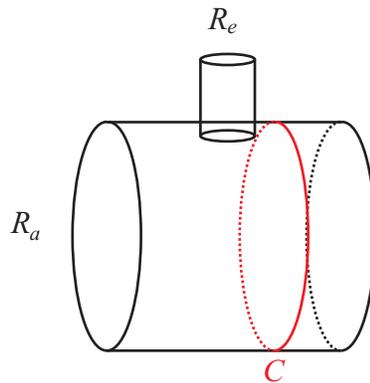


Abbildung 2.5: Ein Rohr, wobei nach dem Beschnitt die Rohreigenschaften für die beiden entstehenden Teile nicht erfüllt sind, da nach dem Beschneiden mit C eine Oberflächenkomponente drei Randkonturen besitzt, wenn die inneren Punkte des Rohres in der Schnittebene eine Öffnung bilden.

schnittgebiet in zwei Volumina zerfällt, die die Rohrbedingungen nicht erfüllen. Dies soll durch die Abbildung 2.5 verdeutlicht werden. Hier ist ein Rohr abgebildet, bei dem die eine Öffnung die Berandung des großen Zylinders, die andere die des kleinen Zylinders ist. Würde hier das Rohr mit einer Ebene beschnitten werden, so dass das dargestellte Rohrschnittgebiet C entsteht, besäße nach dem Beschneiden eine Oberflächenkomponente drei Randkonturen und erfüllt damit die Rohreigenschaft 3 nicht mehr. Allerdings ist ein solches Rohrschnittgebiet ohnehin im Ablauf des Algorithmus nicht interessant, da durch dieses Rohrschnittgebiet eine Komponente beide Öffnungen, die andere Komponente keine Öffnung enthält. Es müssen daher bestimmte Eigenschaften an die Rohrschnittgebiete gestellt werden, um solche Situation nicht auftreten zu lassen.

Ab dem Punkt 4 werden Eigenschaften der Öffnungen sowie des Schnittes einer Ebene mit dem Rohr aufgelistet. Durch die Einführung des Volumens kann der Schnittbegriff mit der intuitiven Vorstellung verknüpft werden: Ein Schnitt durch ein Rohr beschreibt in der Regel zusammenhängende Teilmengen des Volumens, wobei der Rand dieser Mengen Konturen auf dem Rohr sind. Auf diese Art und Weise können mehrere Konturen einem Schnitt zugeordnet werden. Ein Schnitt einer Ebene mit dem Rohr ist in der Abbildung 2.6 dargestellt. Bei diesem Schnitt entstehen zwei einfache Rohrschnittgebiete.

In den folgenden vier Abbildungen werden verschiedene Schnittsituationen exemplarisch gezeigt, die im Punkt 4 der Rohrdefinition genannt werden. Dabei ist jeweils links die Schnittkontur und rechts die zweidimensionale Ansicht des Rohres dargestellt. Hierbei ist das Innere des Rohres stets als graue Fläche skizziert.

In der Abbildung 2.7 entsteht ein Rohrschnittgebiet mit insgesamt drei Schnittkonturen. Da diese sich nicht berühren und zu keinem Punkt degeneriert sind, ist das Rohrschnittgebiet regulär.

In der Abbildung 2.8 entsteht ein Rohrschnittgebiet mit insgesamt zwei Schnittkonturen. Hierbei ist die innere Schnittkontur selbstberührend, so dass das Rohrschnittgebiet insgesamt singulär ist.

In der Abbildung 2.9 entstehen zwei Rohrschnittgebiete mit jeweils einer Randkurve. Da sich die beiden Rohrschnittgebiete berühren, sind sie beide singulär.

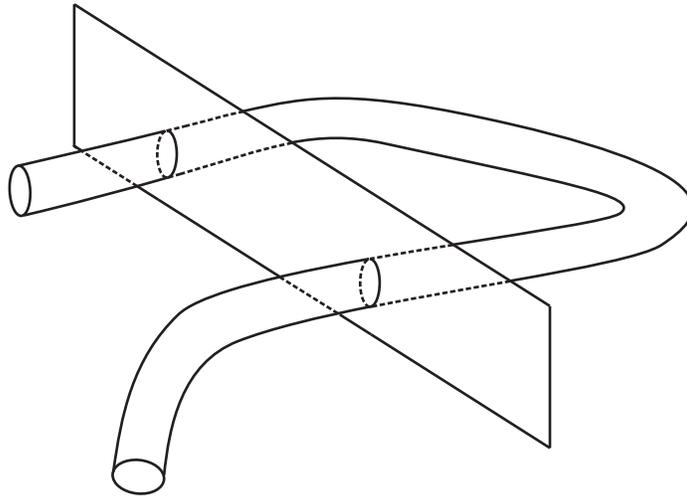


Abbildung 2.6: Schnitt eines Rohres mit einer Ebene

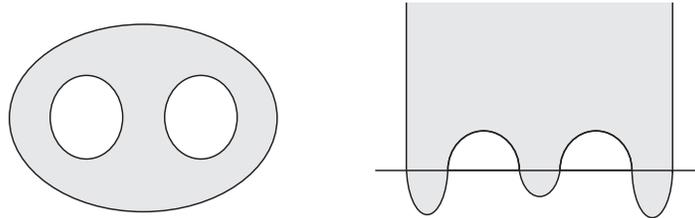


Abbildung 2.7: Ein reguläres Rohrschnittgebiet mit drei Schnittkonturen

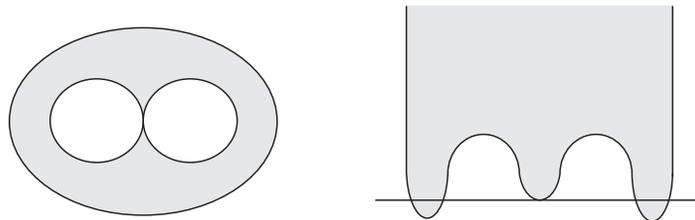


Abbildung 2.8: Ein singuläres Rohrschnittgebiet mit zwei Schnittkonturen

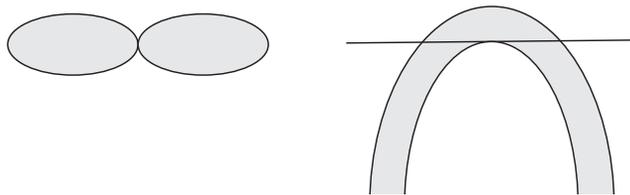


Abbildung 2.9: Zwei singuläre Rohrschnittgebiete mit jeweils einer Schnittkontur

In der Abbildung 2.10 entsteht ein reguläres Rohrschnittgebiet. Da es genau eine Schnittkontur besitzt, ist es zudem noch einfach.

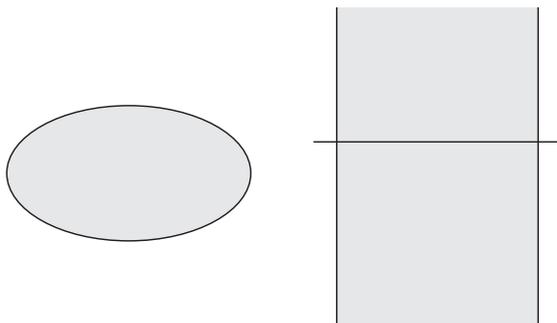


Abbildung 2.10: Ein einfaches, reguläres Rohrschnittgebiet

In der Abbildung 2.11 ist ein Rohr mit einem Beschnitt dargestellt, so dass neben einem Rohrschnittgebiet ein Rohrrandgebiet mit inneren Punkten entsteht. Die Begrenzung beider Gebiete ist die Schnittkurve auf dem kleineren Zylinder.

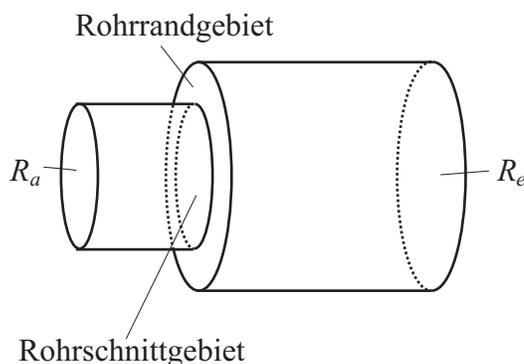


Abbildung 2.11: Ein Rohrschnitt- und Rohrrandgebiet, das bei einem Beschnitt mit einer Ebene mit einem Rohr entsteht, welche durch den planaren Übergang der beiden Zylinder gegeben ist.

2.1.2 Analyse der Schnittkonturen

In diesem Abschnitt wird das Verhalten von Rohrschnittgebieten genauer untersucht. Das Ziel ist, eine möglichst große Menge von Rohrschnittgebieten zu charakterisieren, die zu einer Zerlegung eines gegebenen Rohres in Teilmengen führt, die wieder Rohreigenschaften haben. Diese bilden dann die Grundlage der Definition des Begriffs des "Teilrohrs" im nächsten Abschnitt.

Eine wichtige Anforderung an Rohrschnittgebiete in diesem Zusammenhang ist, dass ein Rohrschnittgebiet ein Rohr in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt. Diese Anforderung wird in der folgenden Definition präzisiert:

Definition 2.2

Sei W ein Rohr. Ein Rohrschnittgebiet C heißt zerlegend, falls es zwei zusammenhängende, orientierbare, unberandete, topologische Mannigfaltigkeiten W_1 und W_2 gibt, für die gilt:

1. W_1 und W_2 beranden zwei nicht leere, beschränkte, zusammenhängende, räumliche Gebiete $W_1^{*, -} \subset W^{*, -}$ und $W_2^{*, -} \subset W^{*, -}$.
2. $W_1 \cap W_2 = C^-$, C^- der Abschluss von C bezüglich $W^{*, -}$.
3. $(W_1 - C^\circ) \cup (W_2 - C^\circ) = W$.

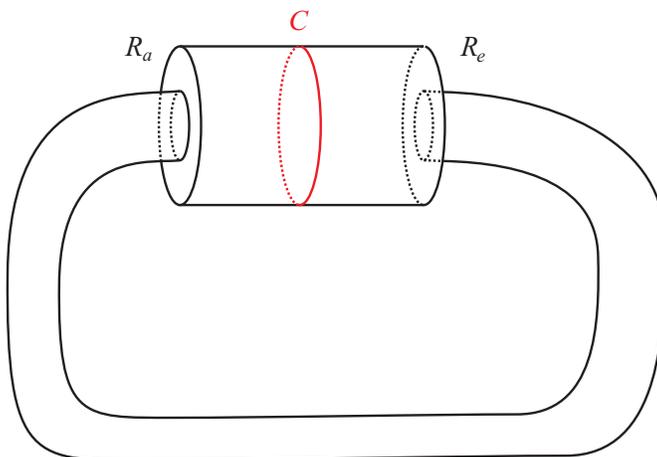


Abbildung 2.12: Ein Rohr mit einem nicht zerlegenden Rohrschnittgebiet C .

Die Zerlegungseigenschaft von Rohrschnittgebieten ist nicht ohne weiteres gegeben. Ein nicht zerlegendes Rohrschnittgebiet ist in der Abbildung 2.12 dargestellt. Hier entstehen nicht zwei zusammenhängende Volumen, sondern lediglich eins. In dem vorliegenden Fall ist die Ursache für die nicht erfüllte Zerlegungseigenschaft des Volumens dadurch begründet, dass die Rohroberfläche mit den Öffnungen Geschlecht 1 hat. Allerdings sollten solche Rohre in der Rohrdefinition nicht ausgeschlossen werden, weil es möglich ist, dass ein Rohr, dessen Oberfläche mit den Öffnungen Geschlecht 0 besitzt, nach einem Beschnitt in Teile zerfallen kann, bei denen die Oberfläche mit den Öffnungen das Geschlecht $n \geq 1$ hat. Ein Beispiel für ein Rohr mit einem problematischen Beschnitt ist bereits in der Einleitung in der Abbildung 1.8 dargestellt worden.

Es wird im Folgenden ein Katalog von Anforderungen an die Rohrschnittgebiete gestellt, so dass dann gezeigt werden kann, dass W in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Dabei sind die Anforderungen so gewählt, dass sie von den in der Praxis auftretenden Rohrschnittgebieten erfüllt werden. Die Rohrschnittgebiete werden zudem in zwei Typen gegliedert. Es wird dann gezeigt, dass jedes Rohrschnittgebiet dieser beiden Typen zerlegend ist, wobei bei dem einen Typ W in zwei Flächen W_1 und W_2 zerfällt, bei denen jeweils eine Fläche eine Öffnung von W enthält. Bei dem anderen Typ enthält eine Fläche beide Öffnungen von W , die andere keine. Auf Basis dieser Schnittanalyse ist es dann möglich, den Begriff einer trennenden Schnittkontur zu definieren, der von entscheidender Bedeutung für den Begriff eines Teilrohres ist, der im nächsten Abschnitt definiert wird.

Zur einfacheren Notation bezeichne $|\delta C|$, C ein Rohrschnittgebiet, die Anzahl der Schnittkonturen von C . Da jede Oberflächenkomponente des Rohres nach der Rohrdefinition das Geschlecht 0 hat, existiert zu jeder Oberflächenkomponente ein Homöomorphismus, der die Rohroberfläche in ein Gebiet im \mathbb{R}^2 abbildet. Ein Homöomorphismus $h_i : W_i \rightarrow R$, $R \subset \mathbb{R}^2$, ist eine bijektive Abbildung,

bei der h_i und deren inverse Abbildung $h_i^{-1} : R \rightarrow W_i$ stetig sind.

Weil jede Oberflächenkomponente maximal zwei Randkonturen besitzen darf, gelte o.B.d.A. dabei folgende Konvention:

Konvention 2.3

Sei W ein Rohr, das ohne die Öffnungen in $n \geq 1$ Zusammenhangskomponenten $W_i, i = 1, \dots, n$, zerfällt. Jedes W_i habe genau eine Komponente von R_a^- und R_e^- . Dann ist der Rand von R_a^- unter dem Homöomorphismus die innere und der Rand von R_e^- die äußere Berandung des Gebietes im \mathbb{R}^2 .

Dieses Verhalten ist in der Abbildung 2.13 skizziert.

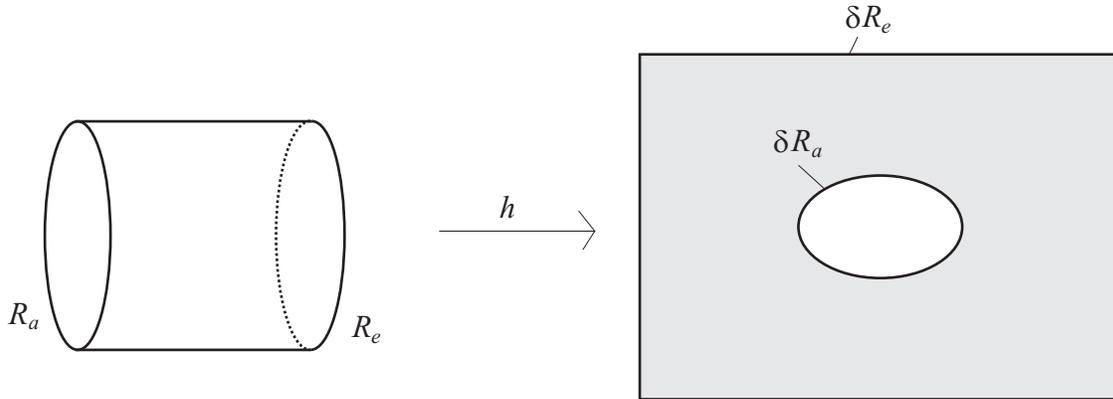


Abbildung 2.13: Homöomorphismus von der Rohroberfläche, die R_a und R_e enthält, in den \mathbb{R}^2

Definition 2.4

Sei W ein Rohr. W besitze ohne die Öffnungen $n \geq 1$ Zusammenhangskomponenten $W_i, i = 1, \dots, n$, wobei jedes W_i Randkonturenkomponenten von R_a und R_e enthält, die mit $\delta R_{a,j}$ und $\delta R_{e,j}$ bezeichnet werden. Sei C ein Rohrschnittgebiet, für das die Abschlüsse C^- und R_a^- beziehungsweise R_e^- bezüglich $W^{*,-}$ disjunkt sind.

Seien $h_i : W_i \rightarrow R \subset \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n$ die Homöomorphismen, die W_i in den \mathbb{R}^2 abbilden. Es gelte für $j = 1, \dots, n$:

1. C besitzt genau eine Schnittkonturkomponente δC_j in W_j .
2. Sollte W_j durch δC_j in zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten W_j^1 und W_j^2 zerlegt werden, gibt es zu jedem $\mathbf{c} \in \delta C_j$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{aligned} U_1 &:= U \cap (W_j^1 \cup C^-) \\ U_2 &:= U \cap (W_j^2 \cup C^-), \end{aligned}$$

mit $\mathbf{c} \in U_1, U_2$, topologisch äquivalent zu offenen Kreisscheiben im \mathbb{R}^2 sind, wobei $U_1 \cap \delta C$ und $U_2 \cap \delta C$ topologisch äquivalent zu dem Durchmesserlinienstück der Kreisscheibe sind.

Dann ist C vom

Typ 1 genau dann, wenn für alle j der Rand $\delta R_{a,j}$ von δC_j im homöomorphen Bild umschlossen wird,

Typ 2 genau dann, wenn für alle j der Rand $\delta R_{a,j}$ von δC_j im homöomorphen Bild nicht umschlossen wird.

Der erste Punkt in dieser Definition legt das Schnittverhalten von C mit dem Rohr fest. Jede Oberflächenkomponente des Rohres W enthält genau eine Kontur jeder Öffnung und des Rohrschnittgebietes. Dadurch kann mit Hilfe des Jordanschen Kurvensatzes gezeigt werden, dass die Oberflächen durch den Beschnitt mit C in genau zwei Zusammenhangskomponenten zerfallen. Jede Komponente kann dann mit C^- und den Öffnungen zu zwei geschlossene Flächen vereinigt werden. Mit Hilfe eines bekannten Trennungssatzes aus der Mathematik wird gezeigt, dass die beiden Flächen jeweils ein nicht leeres Volumen beranden. Dabei müssen allerdings Voraussetzungen an diese Flächen gestellt werden. Aus diesem Grund wird im Punkt 2 gefordert, dass zu Punkten von δC Mengen existieren, die topologisch äquivalent zu Kreisscheiben sind. Dabei bestehen diese Mengen jeweils aus einem der beiden Teile der Oberfläche und des Rohrschnittgebietes. Diese Situation soll durch die Abbildung 2.14 verdeutlicht werden. Hier ist ein Rohr zusammen mit einem Rohrschnittgebiet skizziert. Exem-

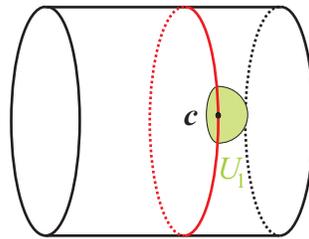


Abbildung 2.14: Die Menge U_1 auf dem Rohr und dem Rohrschnittgebiet

plarisch ist zudem die Menge U_1 zu einem Punkt c auf dem Rand des Rohrschnittgebietes dargestellt. Es ist dabei einsichtig, dass diese Menge U_1 topologisch äquivalent zu einer Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 ist.

Die Forderung 2 entspricht dabei der intuitiven Vorstellung eines Schnittes. Es ist allerdings erforderlich, diese Bedingung zu fordern, um Sätze aus der Mathematik anwenden zu können, weil diese Eigenschaften nicht zwangsläufig für alle Flächen der Rohrdefinition erfüllt sind.

Im Folgenden werden die beiden Rohrschnittypen exemplarisch für ein Rohr dargestellt. Ein Rohrschnittgebiet vom Typ 1 unter den entsprechenden Homöomorphismen für ein Rohr W ohne die Öffnungen, das genau eine Zusammenhangskomponente besitzt, ist in der Abbildung 2.15 und eines vom Typ 2 in der Abbildung 2.16 zu sehen. Dabei bezeichnet δR_a den inneren Rand. Entsprechendes gelte für R_e und C .

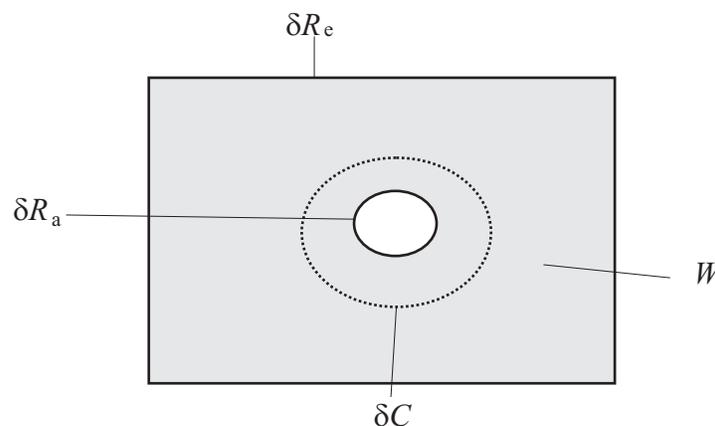


Abbildung 2.15: Rohr W ohne die Öffnungen im \mathbb{R}^2 mit Schnittkontur C vom Typ 1

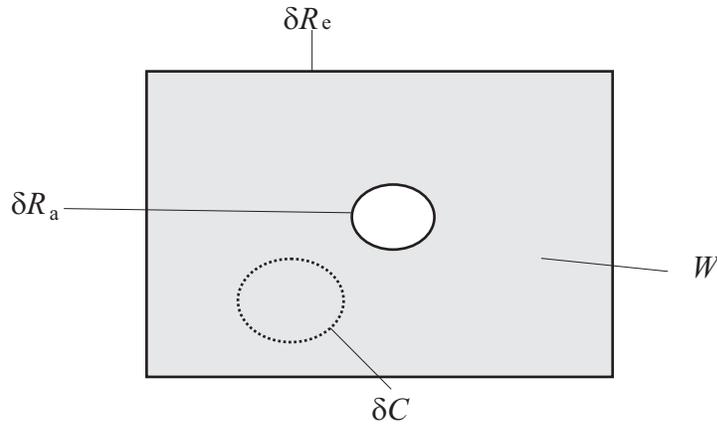


Abbildung 2.16: Rohr W ohne die Öffnungen im \mathbb{R}^2 mit Schnittkontur C vom Typ 2

Satz 2.5

Sei W ein Rohr und bestehe W ohne die Öffnungen aus genau einer Zusammenhangskomponente. Sei C ein Rohrschnittgebiet vom Typ 1 oder 2. Dann ist C zerlegend.

Beweis

Der folgende Beweis lässt sich formal in folgende Schritte gliedern:

1. Die Rohroberfläche ohne die Öffnungen wird durch δC in zwei Komponenten zerlegt.
2. Es entstehen zwei abgeschlossene, zusammenhängende, beschränkte, unberandete topologische Mannigfaltigkeiten.
3. Es entstehen zwei zusammenhängende Volumen, deren Vereinigung im Ausgangsrohr enthalten ist.

zu 1.:

Sei W' die Rohrfläche W ohne den Abschluss der Öffnungen. W' hat nach der Rohrdefinition Geschlecht 0. Der Rand von C besteht aus genau einer Kontur, daher kann das offene W' bei entsprechender Notation als die in der Abbildung 2.15 oder 2.16 dargestellte Fläche interpretiert werden.

Fülle das Innere von δR_a mit der trivialen Fläche \tilde{R}_a im \mathbb{R}^2 auf.

Nun ist $W' \cup \tilde{R}_a^-$ als offene Menge nach dem Satz von Schönflies ([31], Abschnitt 6.3) selbst homöomorph zu \mathbb{R}^2 , also

$$W' \cup \tilde{R}_a^- \cong \mathbb{R}^2.$$

Durch den Jordanschen Kurvensatz [31] zerfällt

$$W' \cup \tilde{R}_a^-$$

durch δC in genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Betrachte die Komponente, die \tilde{R}_a enthält. Da diese Komponente nach dem Satz von Schönflies selbst wieder homöomorph zu \mathbb{R}^2 ist, zerfällt sie durch δR_a ebenfalls in zwei Zusammenhangskomponenten.

Somit zerfällt W' durch δC in genau zwei Zusammenhangskomponenten.

zu 2.:

Die Ränder der beiden Zusammenhangskomponenten der Oberfläche sind δR_a , δR_e und δC . SchlieÙe die Ränder jeder Zusammenhangskomponente mit den Abschlüssen R_a^- , R_e^- und C^- bezüglich $W^{*,-}$. Damit entstehen zwei topologische Mannigfaltigkeiten W_1 und W_2 mit $W_1 \cap W_2 = C^-$ und $(W_1 - C^\circ) \cup (W_2 - C^\circ) = W$.

Zwischenbehauptung

W_1 und W_2 sind zusammenhängend.

Zwischenbeweis

Betrachte o.B.d.A. die Fläche W_1 . Angenommen W_1 sei nicht zusammenhängend. Dann existieren zwei offene, nicht leere Mengen X, Y mit $X \cap Y = \emptyset$ und $W_1 = X \cup Y$.

W_1 ohne C^- , und gegebenenfalls R_a^- und R_e^- ist nach 1. zusammenhängend. C^- , R_a^- und R_e^- sind nach Voraussetzung selbst auch zusammenhängend. Daher kann der Rand einer Zusammenhangskomponente nur Teilmenge von δR_a , δR_e oder δC sein. Betrachte o.B.d.A. δC (für die Öffnungen ist analog zu verfahren). Sei $C^- \subset X$ und Y die Komponente, die den entsprechenden Teil von W_1 enthält. Da X und Y offen sind, existiert damit eine Umgebung um ein $\mathbf{p} \in \delta C$, die mit Y einen leeren Schnitt besitzt. Diese kann jedoch nach der zweiten Bedingung der Definition 2.4 nicht existieren. Damit können X und Y nicht existieren. d.h. W_1 ist zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. \square

Die Flächen sind zudem randlos, denn die einzigen Ränder waren δC , δR_a und δR_e . Nach der zweiten Bedingung der Definition 2.4 gehören diese jedoch nun nicht mehr zum Rand der Flächen. Somit sind die Flächen sowohl offen wie abgeschlossen.

Die Flächen sind zudem durch W beschränkt.

Es sind somit zwei zusammenhängende, abgeschlossene, beschränkte, unberandete topologische Mannigfaltigkeiten entstanden.

zu 3.:

Nun kann der Jordan-Brouwersche Trennungssatz [3] angewendet werden. Er ist eine Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatz für den \mathbb{R}^n . In der vorliegenden Situation im \mathbb{R}^3 bedeutet er, dass der \mathbb{R}^3 durch eine eingebettete, abgeschlossene, zusammenhängende, beschränkte, unberandete, topologische Mannigfaltigkeit H in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt wird, jede mit H als Rand.

Nach 2. gibt es hier genau zwei solcher Flächen H . Damit entstehen hier also zwei nicht leere Volumina $W_1^{*,-}$ und $W_2^{*,-}$.

W_1 und W_2 werden von W umschlossen, da $W_1 \subset W^{*,-}$, $W_2 \subset W^{*,-}$. Demnach folgt durch den Jordan-Brouwerschen Trennungssatz

$$W_1^{*,-} \subset W^{*,-}, W_2^{*,-} \subset W^{*,-}.$$

Dies bedeutet, dass zwei zusammenhängende Volumina entstanden sind, deren Vereinigung in dem Gesamtvolumen enthalten ist.

Zusammenfassend sind damit alle Eigenschaften gezeigt worden, so dass C zerlegend ist. \square

Der Satz 2.5 kann auch für Rohre verallgemeinert werden, deren Oberflächen ohne die Öffnungen aus mehreren Zusammenhangskomponenten bestehen.

Satz 2.6

Sei W ein Rohr und bestehe W ohne die Öffnungen aus $n > 1$ Zusammenhangskomponenten. Sei C

ein Rohrschnittgebiet vom Typ 1 oder 2. Dann ist C zerlegend.

Beweis

Aus der bisherigen Aussage folgt, dass jede einzelne Zusammenhangskomponente von W ohne die Öffnungen durch die entsprechenden Teile von C jeweils in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt. Es entstehen somit $2n$ disjunkte Flächen, wobei n "innere" und n "äußere" Komponenten erzeugt werden. Dabei ist eine "innere" Komponente eine Fläche, deren äußere Berandung unter dem Homöomorphismus im \mathbb{R}^2 die entsprechende Komponente von δC ist und eine "äußere" die entsprechend andere.

Seien W_i die "inneren" Komponenten bezüglich δC zusammen mit C^- und den Öffnungen R_a^- und R_e^- . Hierbei werden nur diejenigen Öffnungen verwendet, von denen die entsprechenden n Oberflächenkomponenten des beschnittenen W Konturen besitzen. Dies ist möglich, da C entweder vom Typ 1 oder 2 ist. Seien analog W_a entsprechend die "äußeren" Komponenten. Nach völlig analogen Überlegungen zum Beweis von Satz 2.5 kann auch hier gezeigt werden, dass W_i und W_a zwei abgeschlossene, beschränkte, zusammenhängende, unberandete, topologische Mannigfaltigkeiten sind. Dann folgt auch hier die Behauptung durch den Jordan-Brouwerschen Trennungssatz [3]. \square

In einem nächsten Schritt werden die Eigenschaften von Schnitten auf das Rohr bezogen genauer untersucht. Es gibt Schnitte, so dass die Öffnungen weiterhin in einer Zusammenhangskomponente liegen und es gibt Schnitte, so dass die Öffnungen durch das Rohrschnittgebiet getrennt werden. Dies ist in Abbildung 2.17 in zweidimensionaler Ansicht veranschaulicht. Dies führt zu folgender

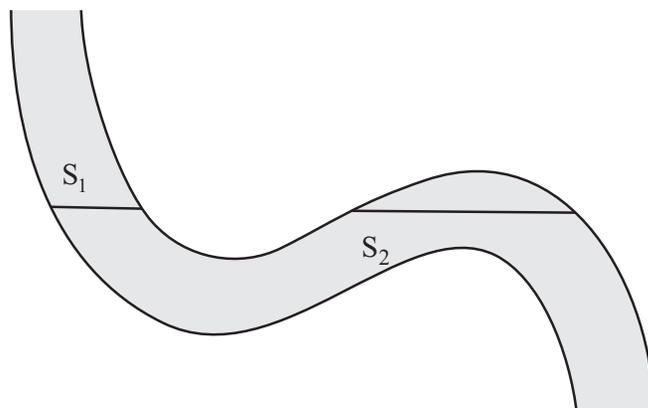


Abbildung 2.17: Ein trennendes (links) und ein nicht trennendes (rechts) Rohrschnittgebiet

Definition:

Definition 2.7

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr und C ein Rohrschnittgebiet vom Typ 1 oder 2. Seien W_i^* , $i = 1, 2$, die entstehenden Zusammenhangskomponenten.

Dann heißt W_i^* Kappe, wenn $W_i^{*, -}$ weder R_a noch R_e enthält.

C heißt trennend, wenn die Abschlüsse R_a^- und R_e^- bezüglich $W_i^{*, -}$ nicht zu einer gleichen Komponente $W_i^{*, -}$ gehören.

Eine Ebene E heißt trennend, wenn ihr Durchschnitt mit dem Rohr ein trennendes Rohrschnittgebiet enthält.

Aus dieser Definition folgt sofort:

Folgerung 2.8

Ein trennendes Rohrschnittgebiet ist vom Typ 1.

Aus dieser Folgerung ist demnach die Existenz von zwei Zusammenhangskomponenten bei trennenden Rohrschnittgebieten abzuleiten.

In der Abbildung 2.18 ist die gleiche Ansicht von dem Rohr aus der Abbildung 2.17 gewählt worden. Hier werden zwei Ebenen dargestellt, die nicht nur Kappen, sondern auch Singularitäten in den Schnittkonturen erzeugen. Eine Singularität gemäß der Rohrdefinition ist in diesen Fällen an dem Grenzübergängen zwischen trennenden und nicht trennenden Rohrschnittgebieten zu finden.

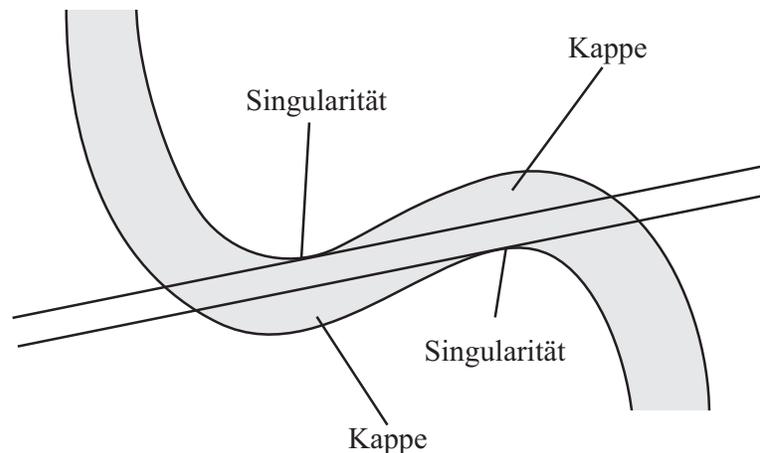


Abbildung 2.18: Singularitäten und Kappen

Bemerkung 1

Es sind in der Definition 2.4 strenge Regeln für die Rohrschnittgebiete gefasst worden, wobei diese den Rohrschnittgebieten entsprechen, die bei Bauteilen aus der Praxis auftreten. Diese Forderungen können zudem weiter abgeschwächt werden. Allerdings ist ein Beweis solcher Verallgemeinerungen aufwändig. Es müssen dabei viele Spezialfälle beachtet werden. Zwei Situationen sind in den Abbildungen 2.12 und 2.19 skizziert.

Wie bereits beschrieben, ist in der Abbildung 2.12 ein Rohr zu sehen, bei dem es keine trennenden Rohrschnittgebiete gibt. Dagegen zerlegt das in der Abbildung 2.19 dargestellte Rohrschnittgebiet C das Rohr in zwei Komponenten, wobei jede der Komponenten die Rohreigenschaften erfüllt. Betrachtet man die beiden Oberflächenkomponenten der beiden Rohre getrennt voneinander, so ist festzustellen, dass C bezüglich einer der Oberflächenkomponente vom Typ 1 ist und bezüglich der anderen Oberflächenkomponente disjunkt ist. Insgesamt ist damit C in beiden Rohren nicht vom Typ 1, wodurch C in dem Rohr aus der Abbildung 2.19 nicht als trennend bezeichnet werden darf. Dies zeigt somit, obwohl das "Schnittverhalten" des Rohrschnittgebietes bezüglich der einzelnen Oberflächen gleich ist, dass daraus nicht folgt, dass ein Schnittgebiet zerlegend ist.

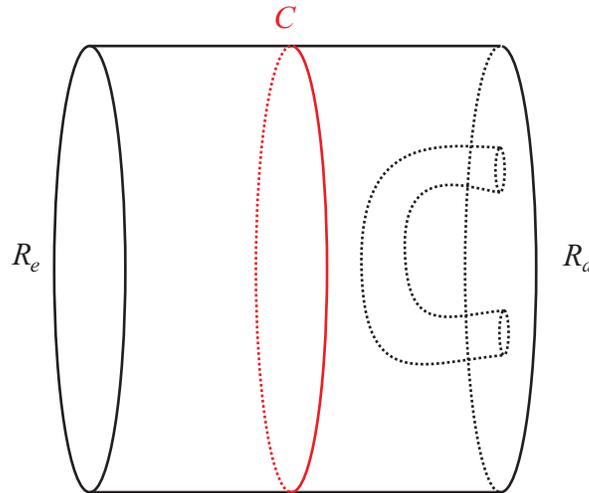


Abbildung 2.19: Ein zerlegendes aber nicht trennendes Rohrschnittgebiet C . Es ist nicht trennend, da es mit einer Flächenkomponente keinen Schnitt besitzt und daher nicht vom Typ 1 ist.

In der dargestellten Situation im ersten Beispiel besteht das Problem offenbar darin, dass Rohroberflächen auf beiden Seiten der Öffnungen anschließen, was im zweiten Beispiel nicht der Fall ist. Würde in der Rohrdefinition gefordert werden, dass dies nicht möglich ist, ist zumindest intuitiv einsichtig, dass auch dann Schnitte als trennend zu bezeichnen wären, wenn sie mit einer Oberflächenkomponente keinen Schnitt besitzen.

Zur Charakterisierung trennender Rohrschnittgebiete sind die sogenannten Konnektivitätslinien hilfreich:

Definition 2.9

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr. Eine schnittfreie, stetige Kurve $\mathbf{l} : [0, 1] \rightarrow W$ mit Startpunkt auf δR_a und Endpunkt auf δR_e wird Konnektivitätslinie genannt.

Der folgende Satz zeigt, wie Konnektivitätslinien zur Entscheidung zwischen einer trennenden oder nicht trennenden Situation herangezogen werden können. Das darin formulierte Kriterium kann recht effizient algorithmisch ausgewertet werden, so dass es im späteren Verlauf der Arbeit zum Einsatz kommen wird.

Satz 2.10

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, \mathbf{l} eine Konnektivitätslinie. Ein Rohrschnittgebiet C vom Typ 1 oder 2 ist genau dann trennend, wenn δC von \mathbf{l} ungerade oft geschnitten wird, δC der Rand von C bezüglich $W^{*,-}$.

Beweis

Der Beweis gliedert sich in zwei Schritte:

1. \mathbf{l} schneide δC ungerade oft. Es ist zu zeigen, dass C trennend ist.

C ist vom Typ 1 oder 2. Damit entstehen genau zwei geschlossene Zusammenhangskomponenten W_1 und W_2 .

Sei $\mathbf{l} : [0, 1] \rightarrow W$ mit $\mathbf{l}(0) \in \delta R_a$ und $\mathbf{l}(1) \in \delta R_e$. \mathbf{l} schneidet δC einmal heißt, dass es $t_0^- \leq t_0^+ \in (0, 1)$ und $\varepsilon > 0$ gibt, mit $\mathbf{l}(t_0^-, t_0^+) \subset \delta C$, $\mathbf{l}(t_0^- - \varepsilon, t_0^-) \subset W_1$ und $\mathbf{l}(t_0^+, t_0^+ + \varepsilon) \subset$

W_2 . Wenn keine weitere Schnittsituation vorliegt, gilt, $I[0, t_0^-) \subset W_1$ und $I(t_0^+, 1] \subset W_2$. Denn andernfalls gäbe es eine stetige Verbindung von Punkten aus W_1 zu Punkten aus W_2 , die δC nicht schneidet. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $W_1 - C^-$ und $W_2 - C^-$ nach der Definition 2.2 disjunkt sind, d.h. eine solche stetige Verbindung kann nicht existieren.

I schneidet δC ungerade oft, damit gibt es $t_0^- \leq t_0^+ < t_1^- \leq t_1^+ < \dots < t_k^- \leq t_k^+ \in (0, 1)$, k ungerade, mit $I(t_i^-, t_i^+) \subset \delta C$, $i = 1, \dots, k$. Demnach folgt nach analoger Begründung zu einer Schnittstelle, dass

$$I[0, t_0^-), I(t_1^+, t_2^-), \dots, I(t_{k-1}^+, t_k^-) \subset W_1$$

$$I(t_0^+, t_1^-), I(t_2^+, t_3^-), \dots, I(t_k^+, 1] \subset W_2.$$

Damit ist insbesondere $I(0) \in W_1$ und $I(1) \in W_2$, also C trennend.

2. Ebenso gilt, falls δC von I gerade oft geschnitten wird, 0 ist dabei eine gerade Zahl, dass R_a und R_e in einer Zusammenhangskomponente von dem beschnittenen W liegen, also C nicht trennend ist. Dies bedeutet, dass, falls C trennend ist, δC von I ungerade oft geschnitten wird.

Damit folgt die Behauptung. \square

Zur Berechnung von Rohrschnittgebieten sind die sogenannten Konstruktionspunkte nützlich:

Definition 2.11

Sei W ein Rohr und sei I eine Konnektivitätslinie auf W . Ein Punkt k auf I heißt Konstruktionspunkt, wenn ein trennendes Rohrschnittgebiet C mit $k \in \delta C$ existiert.

2.1.3 Teilrohre

Nach der im vorherigen Abschnitt erfolgten Analyse von Rohrschnittgebieten ist es nun möglich den Begriff des Teilrohres zu definieren. Anschaulich gesprochen ist ein Teilrohr eine Teilmenge eines Rohres, die wiederum die Rohreigenschaften erfüllt.

Hierbei wird das Ziel verfolgt, dass ein trennendes Rohrschnittgebiet selbst zu einer Öffnung des jeweiligen Teilrohres wird. In der Rohrdefinition werden Abschlüsse bezüglich der Ebenen und in den Untersuchungen von zerlegenden Rohrschnittgebieten bezüglich $W^{*, -}$ betrachtet. Damit rein formal trennende Rohrschnittgebiete zu Öffnungen werden können, ist folgender Satz notwendig:

Satz 2.12

Sei W ein Rohr und sei E eine Ebene. Sei C eine Menge in $E \cap W^{*, -}$. Dann ist der Abschluss C_E^- bezüglich E gleich dem Abschluss $C_{W^{*, -}}^-$ bezüglich $W^{*, -}$.

Beweis

Es ist $C_E^- = C_{W^{*, -}}^- \cap E$. Damit ist

$$C_E^- \subset C_{W^{*, -}}^-.$$

Sei $E := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle\}$ die Schnittebene zu C mit Fußpunkt \mathbf{p} und Normalenvektor \mathbf{n} , wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt von Vektoren bezeichne.

Sei $\mathbf{w} \in C_{W^{*, -}}^-$. Angenommen $\mathbf{w} \notin E$. Da $\mathbf{w} \notin E$, besitzt \mathbf{w} einen positiven Abstand zu E , d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|\langle \mathbf{w}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle| \geq \varepsilon.$$

Damit existiert um \mathbf{w} eine offene Umgebung $B := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \mid d(\mathbf{q}, \mathbf{w}) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ mit

$$B \cap E = \emptyset,$$

wobei d die Euklidische Metrik bezeichnet. Somit ist aber $B \cap C = \emptyset$, also zählt w nicht zum Abschluss von C , d.h. $w \notin C_{W^*,-}^-$.

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, also folgt die Behauptung. \square

Damit sind also insbesondere die Abschlüsse trennender Rohrschnittgebiete und Rohrrandgebiete in einem Rohr W gleich den Abschlüssen in den jeweiligen Zusammenhangskomponenten W_1 und W_2 .

Satz 2.13

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, C ein trennendes Rohrschnittgebiet, $\delta W_1^{*,-}$ und $\delta W_2^{*,-}$ die Ränder der Abschlüsse der beiden Zusammenhangskomponenten. Sei o.B.d.A. $\delta W_1^{*,-}$ die Zusammenhangskomponente mit R_a und $\delta W_2^{*,-}$ die mit R_e . Dann sind

$\delta W_1^{*,-}$ mit Rohröffnungen $R_{1,a} := R_a$ und $R_{1,b} := C$

$\delta W_2^{*,-}$ mit Rohröffnungen $R_{2,a} := C$ und $R_{1,e} := R_e$

Rohre.

Beweis

Die Korrektheit folgt aus den Sätzen 2.5, 2.6 und 2.12. \square

Bemerkung 2

Dieser Satz liefert den Grund dafür, dass keine Rohrschnittgebiete zugelassen werden, die mehr als einen Schnitt mit einer Oberflächenkomponente besitzen. Andernfalls könnten Gebilde entstehen, die keine Rohre im Sinne der Definition sind, weil jede Zusammenhangskomponente nach dem Punkt 3 der Rohrdefinition höchstens zwei Randkonturen besitzen darf.

Definition 2.14

Seien W und W' Rohre. W' heißt Teilrohr von W , wenn es sich durch ein- oder mehrmalige Anwendung des Satzes 2.13 konstruieren lässt.

Definition 2.15

Sei W' ein Teilrohr von W , C_1 und C_2 die Rohrschnittgebiete beziehungsweise die Öffnungen von W , die die Öffnungen von W' definieren. Dann wird anstelle von W' auch $W(C_1, C_2)$ geschrieben.

Definition 2.16

Seien W_1 und W_2 zwei Teilrohre von W . Dann ist W_1 Teilmenge von W_2 , wenn $W_1^{*,-} \subset W_2^{*,-}$.

Über den Begriff des Teilrohres lässt sich auf der Menge der trennenden Rohrschnittgebiete eine partielle Ordnung einführen:

Definition 2.17

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, C_1 und C_2 trennende Rohrschnittgebiete oder die Öffnungen. Dann ist $C_1 \leq_T C_2$ genau dann, wenn eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

1. $C_1 = C_2$,
2. C_1^- und C_2^- sind disjunkt und das Teilrohr $W(R_a, C_1)$ ist Teilmenge des Teilrohres $W(R_a, C_2)$ und das Teilrohr $W(C_2, R_e)$ ist Teilmenge des Teilrohres $W(C_1, R_e)$, wobei für $W(R_a, R_a) := R_a^-$ und $W(R_e, R_e) := R_e^-$ gesetzt wird und diese als "Teilrohre" akzeptiert werden.

Satz 2.18

Die Relation \leq_T ist eine partielle Ordnung.

Beweis

Zu zeigen: \leq_T ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Reflexivität: Dies ist durch 1. erfüllt.

Antisymmetrie: Aus $C_1 \leq_T C_2$ folgt, dass $W(R_a, C_1)$ Teilmenge von $W(R_a, C_2)$ und $W(C_2, R_e)$ Teilmenge von $W(C_1, R_e)$ ist. Aus $C_2 \leq_T C_1$ folgt, dass $W(R_a, C_2)$ Teilmenge von $W(R_a, C_1)$ und $W(C_1, R_e)$ Teilmenge von $W(C_2, R_e)$ ist. Dies bedeutet, dass $W(R_a, C_1) = W(R_a, C_2)$ und $W(C_1, R_e) = W(C_2, R_e)$. C_1 und C_2 sind trennend und damit insbesondere zerlegend. Dies bedeutet, dass

$$C_1^- = W(R_a, C_1) \cap W(C_1, R_e) = W(R_a, C_2) \cap W(C_2, R_e) = C_2^-.$$

Da $C_1 \leq_T C_2$ ist und C_1^- und C_2^- nicht disjunkt sind, muss damit die erste Aussage von Definition 2.17 erfüllt sein, d.h. $C_2 = C_1$.

Transitivität: Seien $C_1 \neq C_2 \neq C_3$. Sei $C_1 \leq_T C_2$ und $C_2 \leq_T C_3$. Demnach ist $W(R_a, C_1)$ Teilmenge von $W(R_a, C_2)$ und $W(R_a, C_2)$ Teilmenge von $W(R_a, C_3)$, also ist $W(R_a, C_1)$ Teilmenge von $W(R_a, C_3)$. Ebenso ist $W(C_3, R_e)$ Teilmenge von $W(C_2, R_e)$ und $W(C_2, R_e)$ Teilmenge von $W(C_1, R_e)$ und damit ist $W(C_3, R_e)$ Teilmenge von $W(C_1, R_e)$. \square

Die Eigenschaft 2 der Definition 2.17 sollte in der Regel für alle disjunkten C_1^- und C_2^- erfüllt sein. Dies ist jedoch auf Grundlage der bisher bewiesenen Eigenschaften von Teilrohren nicht klar. Daher wird definiert:

Definition 2.19

Sei W ein Rohr mit einer partiellen Ordnung \leq für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen. Seien C_1 und C_2 zwei trennende Rohrschnittgebiete mit $C_1 \neq C_2$. C_1 und C_2 heißen vergleichbar, wenn entweder $C_1 \leq C_2$ oder $C_2 \leq C_1$ ist. Andernfalls heißen sie nicht vergleichbar.

2.2 Schlauchförmige Flächen

Die nächsten Definitionen präzisieren den intuitiven Begriff einer Schlauchfläche.

Definition 2.20

Eine Fläche \mathbf{F} heißt schlauchförmig, wenn sie die stetige Deformation einer Zylinderfläche mit zwei Randkonturen ist, d.h. in Parameterdarstellung gilt $\mathbf{F} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $a < b$, $c < d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass

1. \mathbf{F} stetig auf dem Definitionsbereich,
2. $\mathbf{F}(a, v) = \mathbf{F}(b, v)$ für $v \in [c, d]$,
3. \mathbf{F} selbstüberschneidungsfrei, d.h. \mathbf{F} injektiv auf $[a, b] \times [c, d]$,
4. $\mathbf{F}(u, v)$ $u \in [a, b]$, v fest, eine ebene Kurve ist.

Die folgende Definition gibt eine alternative Parametrisierung an, die der Anschauung einer Schlauchfläche Rechnung trägt, um eine Leitlinie angeordnet zu sein. Sie parametrisiert die Schnittkonturen relativ zu einem Leitpunkt, einem Punkt auf der Leitlinie. Dies ergibt den ersten Parameter. Der zweite Parameter ist der Leitlinienparameter. Über diesen wird die jedem Leitlinienpunkt entsprechende Kontur, die Lage des Leitpunktes im Raum, aber auch die Orientierung der Schnittkontur im Raum festgelegt.

Definition 2.21

Eine schlauchförmige Fläche in Leitlinienparametrisierung mit Leitlinie $\mathbf{t}(v)$, Querschnittsform $\mathbf{K}(u, v)$ und Querschnittsausrichtung $\mathbf{A}(v)$ ist gegeben durch eine C^1 -Abbildung

$$(2.1) \quad \mathbf{T} : [0, 1] \times [l_1, l_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(2.2) \quad \mathbf{T}(u, v) \mapsto \mathbf{A}(v) \circ \mathbf{K}(u, v) + \mathbf{t}(v),$$

wobei

1.

$$(2.3) \quad \mathbf{t} : [l_1, l_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{t} \in C^1,$$

eine Kurve in Parameterdarstellung,

2.

$$(2.4) \quad \mathbf{K} : [0, 1] \times [l_1, l_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

eine stetige Funktion ist, so dass

(a) $\mathbf{K}(u, v)$ stetig ist,

(b) $\mathbf{K}(0, v) = \mathbf{K}(1, v)$ für $v \in [l_1, l_2]$,

(c) $\mathbf{K}(u, v)$, $u \in [0, 1]$, v fest eine geschlossene Kurve, die ein einfaches, beschränktes Gebiet in der (x, y) -Ebene berandet, das den Ursprung des Koordinatensystems enthält.

3.

$$(2.5) \quad \mathbf{A} : [l_1, l_2] \rightarrow \mathcal{M},$$

$$(2.6) \quad \mathbf{A}(v) : \overline{\mathbb{R}^3} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

wobei

(a) \mathcal{M} die Menge aller räumlichen Drehungen um den Ursprung,

(b) die Drehwinkel von $\mathbf{A}(v)$ stetig in v sind,

4. $\mathbf{T}(u, v)$ injektiv ist, d.h. frei von Selbstüberschneidungen ist.

2.3 Schlaucheinpassung

Die Schlaucheinpassung stellt die Verbindung zwischen Rohren und schlauchförmigen Rohren her. Es werden zwei Arten der Einpassung definiert, eine diskrete Version in Form sogenannter Schlauchstützstellenkantenzüge und eine kontinuierliche Version in Form von Schlauchapproximationen. Grundlage der Schlauchstützstellenkantenzüge sind die Schlauchstützstellen. Hierfür sei definiert:

Definition 2.22

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr und sei \mathcal{C}_T die Menge aller trennenden Rohrschnittgebiete zusammen mit R_a und R_e . Eine Funktion $\mathbf{r} : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem $C \in \mathcal{C}_T$ einen inneren Punkt in C zuordnet, heißt Leitpunktfunktion. Ein Punkt $\mathbf{r} \in C$ wird Leitpunkt genannt.

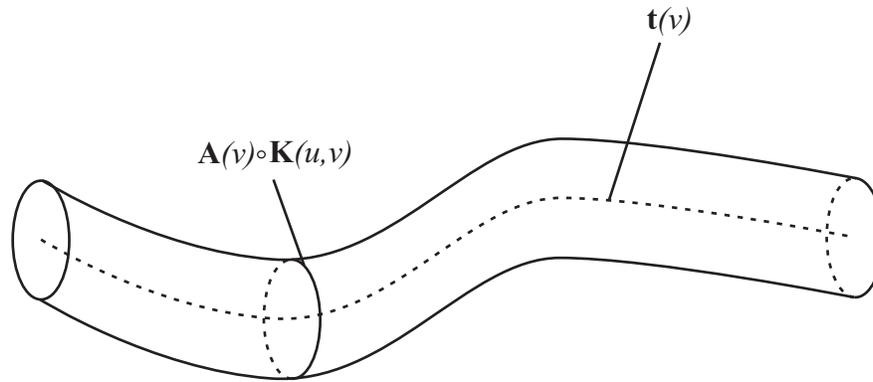


Abbildung 2.20: Ein Schlauch in Leitlinienparametrisierung

Aus der Definition ergibt sich, dass $\mathbf{r} := \mathbf{r}(C)$, C ein Rohrschnittgebiet und $\mathbf{r}(\cdot)$ eine Leitpunktfunktion, ein Leitpunkt ist.

Definition 2.23

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr. $S := (C, \mathbf{r})$ heißt Schlauchstützstelle von W , wenn gilt:

1. C ist eine der Öffnungen von W oder ein trennendes Rohrschnittgebiet von W ,
2. \mathbf{r} ist ein Leitpunkt zu C .

Damit ergibt sich

Definition 2.24

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr und \leq eine partielle Ordnung für trennende Rohrschnittgebiete und für die Öffnungen. Eine endliche Folge $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, von Schlauchstützstellen heißt Schlauchstützstellenkantenzug, wenn gilt:

1. $C_0 = R_a, C_n = R_e$.
2. $C_i \leq C_{i+1}$, $i = 0, \dots, n - 1$.

Ein Schlauchstützstellenkantenzug heißt approximierend, wenn der Polygonzug $\mathbf{r} := [\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n]$ vollständig in $W^{*,\circ}$ verläuft. \mathbf{r} wird Leitlinie des Schlauchstützstellenkantenzuges genannt.

Ein Schlauchstützstellenkantenzug kann Ausgangspunkt einer Schlauchapproximation sein, indem beispielsweise um die Leitlinie ein Schlauch gelegt wird, der voll im Inneren des Rohres verläuft, sofern die Leitlinie dies zulässt. Ein (allgemeiner) Schlauchstützstellenkantenzug enthält eine Kurve, die die Leitpunkte der Schnittkonturen verbindet, zu der es einen Schlauch gibt, bezüglich welchem sie die Rolle der Leitlinie in der Definition 2.21 einnimmt und bezüglich welchem die Ebenen der Schnittkonturen mit den Ebenen der Schlauchdefinition an den entsprechenden Parameterwerten übereinstimmt.

Die wesentliche Grundlage von Schlauchapproximationen sind stetige Ebenenscharen, die folgendermaßen definiert sind:

Definition 2.25

Sei (\mathcal{E}, d) die Menge aller Ebenen im Raum mit einer Distanzfunktion d und \mathcal{C} die Menge aller Rohrschnittgebiete und Öffnungen eines Rohres W . Eine stetige Funktion $E : [a, e] \rightarrow \mathcal{E}$, $a < e$, $a, e \in \mathbb{R}$, heißt stetige Ebenenschar und eine Funktion $C : E[a, e] \rightarrow \mathcal{C}$ heißt Rohrschnittgebietschar.

Die Distanzfunktion d auf \mathcal{E} ist durch die Euklidische Metrik auf dem Kreuzprodukt $H^2 \times \mathbb{R}$, H^2 der obere Teil der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 , definierbar. Damit ergibt sich

Definition 2.26

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr mit den Öffnungen R_a und R_e auf den Ebenen E_a und E_e und einer partiellen Ordnung \leq für trennende Rohrschnittgebiete und für die Öffnungen. Eine Schlauchapproximation $S = (E, C, \mathbf{r})$ von W besteht aus

- einer stetigen Ebenenschar $E : [a, e] \rightarrow \mathcal{E}$, $a < e$ reelle Zahlen,
- einer Rohrschnittgebietsschar $C : E[a, e] \rightarrow \mathcal{C}$,
- einer Leitpunktfunktion $\mathbf{r} : C(E[a, e]) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

für die gilt:

1. $E(a) = E_a$, $E(e) = E_e$,
2. $C(E(a)) = R_a$, $C(E(e)) = R_e$ und $C(E(t))$, $t \in (a, e)$, trennende Rohrschnittgebiete von W , so dass gilt:
 - (a) $C(E(t_1)) \leq C(E(t_2))$ für $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in (a, e)$,
 - (b) Es gibt endlich viele $t_i^-, t_i^+ \in [a, e]$, $i = 0, \dots, n$, $t_0^- = a$, $t_n^+ = e$, $t_i^- \leq t_i^+ < t_{i+1}^- \leq t_{i+1}^+$ für $i = 0, \dots, n-1$, so dass gilt:
 - i. $C(E(t))$, $t \in (t_i^+, t_{i+1}^-)$, sind nicht singulär.
 - ii. Für alle hinreichend kleinen $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_{i+1} > 0$ besteht die Vereinigung der Konturen von $C(E(t))$, $t \in (t_i^+ + \varepsilon_i, t_{i+1}^- - \varepsilon_{i+1})$ aus m stetigen, schlauchförmigen Flächen.
3. $\mathbf{r}(E(t))$, $t \in [t_i^+, t_{i+1}^-]$, ist eine stetige Kurve, für die $\mathbf{r}(E(t)) \in C(E(t))$ für $t \in [t_i^+, t_{i+1}^-]$, d.h. $\mathbf{r}(E(t))$ verläuft im Inneren der Rohrschnittgebiete der Schlauchapproximation.

In dieser Definition ist m gemäß der Rohrdefinition 2.1 die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von W ohne die Öffnungen.

In der Regel sind Rohrschnittgebiete $C(E(t))$ für $t \in [t_i^-, t_i^+]$ nicht alle regulär. Wenn $t_i^- = t_i^+$, ergibt sich dann zwischen den benachbarten schlauchförmigen Flächen im Grenzübergang im Allgemeinen eine Unstetigkeit. Diese Stellen werden nun konkret benannt:

Definition 2.27

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr mit den Öffnungen R_a und R_e und sei $S = (E, C, \mathbf{r})$ eine Schlauchapproximation und $C(E(a)) = R_a$, $C(E(e)) = R_e$.

Ein $t \in (a, e)$ heißt eine kritische Stelle, wenn

1. $C(E(t))$ nicht trennend ist oder
2. $C(E(t))$ singulär ist oder
3. für hinreichend kleine $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ die Vereinigung der Kontur von $C(E(s))$, $s \in (t + \varepsilon_1, t - \varepsilon_2)$ nicht aus m stetigen, schlauchförmigen Flächen besteht.

Ein Intervall $[t_1, t_2]$ heißt kritisches Intervall, wenn es eine kritische Stelle enthält.

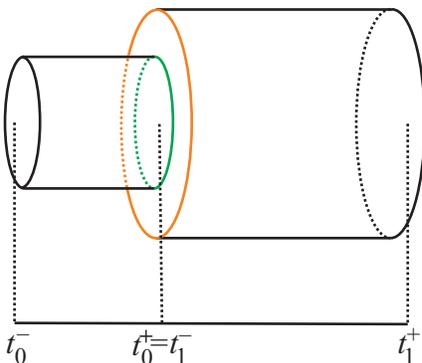


Abbildung 2.21: Keine stetige, schlauchförmige Fläche aus Schnittkonturen, da bei $t_0^+ = t_1^-$ eine Unstetigkeitsstelle vorliegt.

Eine Situation, in der die Vereinigung der Schnittkonturen keine stetige, schlauchförmige Fläche ergibt, ist in der Abbildung 2.21 dargestellt. Die Schnittebenenchar ist dabei senkrecht zur gemeinsamen Achse der beiden Zylinder gewählt worden.

Gewünscht sind Schlauchapproximationen, bei denen die Anzahl der kritischen Intervalle möglichst gering ist. Es gibt jedoch Rohre, für die ein ganzes Intervall von kritischen Punkten existiert. Ein solches Beispiel ist in der Abbildung 2.22 abgebildet. Hierbei ist es im Bereich der oberen Öffnung teilweise nicht möglich, trennende Schnitte zu generieren. Dieser Bereich ist in der Abbildung markiert.

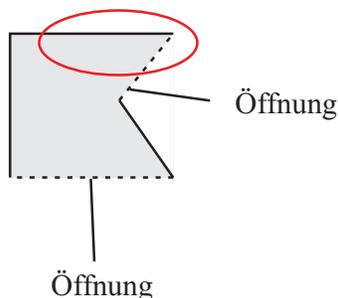


Abbildung 2.22: Intervall von kritischen Punkten

Dies ist für Verfahren von Bedeutung, die Schlauchapproximationen wie der Ansatz aus Kapitel 6 durch sukzessives Zerlegen in Teilrohre konstruieren. Durch ungünstige Wahl von Rohrschnittgebieten können kritische Stellen von beträchtlichem Umfang entstehen.

Dies bedeutet, dass durch ungeschickte Wahl von Schlauchstützstellen im Verlauf eines Algorithmus zur Schlaucheinpassung, der einmal gesetzte Stützstellen nicht mehr verändert, Teilrohre erzeugen werden können, die relativ viele kritische Stellen enthalten. Insbesondere sollte vermieden werden, dass durch das Setzen von Schlauchstützstellen Punkte auf einer Konnektivitätslinie hinzukommen, die keine Konstruktionspunkte sind.

Das von Kurven bekannte Konzept der stückweise linearen Approximation lässt sich auf natürliche Weise auch auf Schlauchapproximationen verallgemeinern. Grundlage sind die lineare und stückweise lineare Ebenenscharen:

Definition 2.28

Sei $E : [a, e] \rightarrow \mathcal{E}$, $a < e$ reelle Zahlen, eine Ebenenschar. $E(\cdot)$ heißt linear, wenn gilt:

1. Falls $E(a)$ und $E(e)$, $E(a) \neq E(e)$, parallel zueinander sind, besteht $E[a, e]$ aus der Menge aller Ebenen, die parallel zu $E(a)$ und $E(e)$ sind und zwischen $E(a)$ und $E(e)$ liegen.
2. Falls $E(a)$ und $E(e)$ nicht parallel zueinander sind, definieren die beiden Ebenen vier Raumsektoren um ihre Schnittgerade. $E[a, e]$ besteht aus einer der beiden Mengen aller Ebenen durch die Schnittgerade, die zwei gegenüberliegende Sektoren durchqueren.

$E(\cdot)$ heißt stückweise linear, wenn es endlich viele $t_i, t_{i+1} \in [a, e]$, $i = 0, \dots, n-1$, $t_0 = a, t_n = e$, $t_i < t_{i+1}$, gibt, so dass die Einschränkung $E_i(\cdot)$ von $E(\cdot)$ auf $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, linear ist.

Definition 2.29

Sei W ein Rohr mit einer partiellen Ordnungsrelation \leq für trennende Rohrschnittgebiete und die Öffnungen. Eine Schlauchapproximation $S = (E, C, \mathbf{r})$ von W heißt stückweise linear, wenn bei entsprechender Bezeichnung aus der Definition der Schlauchapproximation gilt:

1. $E_i : [t_i^+, t_{i+1}^-] \rightarrow \mathcal{E}$ ist eine stückweise lineare Ebenenschar.
2. Die Leitlinie im Intervall $[t_i^+, t_{i+1}^-]$ wird von einem Polygonzug $\mathbf{r}_i := [\mathbf{r}_{i,0}, \dots, \mathbf{r}_{i,m_i}]$, $j = 0, \dots, m_i$, gebildet, wobei $\mathbf{r}_{i,j}$ auf den Grenzebenen der linearen Ebenenscharen liegen.
3. Wenn $E_i(t_i^+)$ und $E_i(t_{i+1}^-)$ nicht parallel sind, dann schneidet die Schnittgerade der beiden Ebenen keines der Rohrschnittgebiete $C(E_i(t))$, $t \in [t_i^+, t_{i+1}^-]$.

Eine Schlauchapproximation $S = (E, C, \mathbf{r})$ von W heißt linear, wenn sie eine stückweise lineare Schlauchapproximation mit genau einer linearen Ebenenschar ist.

In dieser Definition ist der Punkt 3 für die praktische Anwendung relevant. Er bedeutet, dass die Schnittgerade der Ebenen außerhalb von W liegt. Damit ist dann automatisch gewährleistet, dass die entsprechenden Rohrschnittgebiete disjunkt sind.

Der folgende Satz macht eine Aussage über die geometrische Struktur von stückweise linearen Schlauchapproximationen.

Satz 2.30

Sei W ein Rohr mit einer partiellen Ordnung \leq für trennende Rohrschnittgebiete und für die Öffnungen, $S = (E, C, \mathbf{r})$ eine stückweise lineare Schlauchapproximation von W mit linearen Segmenten $E_i : [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. Dann gilt:

1. Wenn $E_i(t_i)$ und $E_i(t_{i+1})$ parallel sind, dann liegt die Strecke zwischen \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_{i+1} zwischen diesen beiden Ebenen.
2. Wenn $E_i(t_i)$ und $E_i(t_{i+1})$ nicht parallel sind, dann liegt die Strecke zwischen \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_{i+1} in einem der vier Raumsektoren, die von den beiden Ebenen gebildet werden, der von der Ebenenschar überstrichen wird.

Beweis

1. Es ist $E_i(t_i) \parallel E_i(t_{i+1})$. Somit besteht die Ebenenschar $E_i[t_i, t_{i+1}]$ aus parallelen Ebenen. Damit liegt die Strecke zwischen $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}$ zwischen $E_i(t_i), E_i(t_{i+1})$. Daraus folgt die Aussage 1.
2. Nach dem Punkt 3 der Definition 2.29 schneidet die Schnittgerade von $E_i(t_i)$ und $E_i(t_{i+1})$ keines der Rohrschnittgebiete, die von $E_i[t_i, t_{i+1}]$ erzeugt werden. Sie liegt also außerhalb von W . Da $E_i(t_i)$ und $E_i(t_{i+1})$ nicht parallel sind, muss die Strecke zwischen \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_{i+1} in dem Raumsektor liegen, der von der Ebenenschar überstrichen wird. Dies ist die Aussage 2. \square

2.4 Problemformulierung und Lösungsansätze

Das Schlaucheinpassungsproblem, das Gegenstand dieser Arbeit ist, besteht darin, zu einem gegebenen Rohr einen Schlauchstützstellenkantenzug oder eine Schlauchapproximation zu finden, die vorgegebene Bedingungen möglichst gut erfüllen sollte:

Problem "Schlaucheinpassung"

Gegeben: Ein Rohr (W, R_a, R_e) .

Gesucht: Ein Schlauchstützstellenkantenzug oder eine Schlauchapproximation S , die vorgegebene Bedingungen möglichst gut erfüllen sollte.

Beispiele für Bedingungen sind:

1. Die Schlauchapproximation sollte möglichst wenig kritische Stellen haben.
2. Die Leitlinie sollte möglichst zentral im Inneren des Rohres verlaufen.
3. Die Leitlinie sollte sich nicht mehr als das Rohr krümmen.
4. Die Schnittebenen sollten möglichst senkrecht zur Leitlinie liegen.
5. Die Länge des Randes eines Schnittgebietes sollte möglichst gering sein.

Die ersten drei Punkte sind Bedingungen, die man intuitiv für eine Schlaucheinpassung fordert. Die letzten beiden Punkte dagegen sind eher anschaulicher Natur und beschreiben das Verhalten, was man unter einer bevorzugten Leitlinie versteht. Es wird sich allerdings zeigen, dass beispielsweise die Länge des Randes eines Schnittgebietes nicht zwangsläufig minimal sein muss, um eine gute Leitlinie zu erzeugen.

2.4.1 Verwandte Arbeiten

Es gibt drei Gruppen von Arbeiten, die zum Schlaucheinpassungsproblem oder zum Typ des damit verbundenen Optimierungsproblems eine Beziehung aufweisen: Arbeiten zur Wegplanung und zu Mediallinien, zur Kurvenapproximation durch Polygonzüge sowie zur Randkurvenapproximation.

Wegplanung und Mediallinien

Eine Sichtweise des Schlaucheinpassungsproblems ist die eines Wegplanungsproblems, wie es etwa in der Robotik auftritt. Eine Version besteht darin, zwischen zwei gegebenen Punkten in einem Raum, der Hindernisse enthält, eine Kurve zu finden, die die beiden Punkte verbindet, an jeder Stelle möglichst großen Abstand zu den Hindernissen hat und zudem noch möglichst kurz ist. Die Kurve kann dann als die Leitlinie eines Schlauches verwendet werden.

Zur Lösung solcher Wegplanungsprobleme sind diverse Lösungsansätze bekannt [43]. Eine Möglichkeit besteht darin, die Medialachse des Freiraums als Ort zu nehmen, auf dem der Weg gesucht wird.

Definition 2.31

Sei $H \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, nicht notwendigerweise zusammenhängende Menge. Eine Kugel B wird medial genannt, falls sie mit H nur Randpunkte gemeinsam hat, d.h. H berührt, dies jedoch in mindestens zwei verschiedenen Punkten. Der Menge der Mittelpunkte aller medialen Kugeln wird als Medialachse (engl. medial axis) bezeichnet.

In der Ebene ist die Medialachse kurvenförmig, im Raum flächenförmig, wobei Verzweigungen auftreten können. Die Punkte der Medialachse nehmen lokal einen extremalen Abstand zur Menge M

ein. In unserer Anwendung ist H durch das Rohr W gegeben und nur der im Inneren des Rohres verlaufende Teil der Medialachse ist von Relevanz.

Vorteile der Wegsuche auf der Medialachse sind, dass die dort liegenden Wege extremalen Abstand zum Rand haben, dass der Weg nur auf einer Teilmenge gesucht werden muss, deren Dimension eins kleiner als die des Hindernisraumes ist und dass der Abstand der Medialachsenpunkte vom Rohr unmittelbar zur Angabe eines Schlauches verwendet werden kann, der sich als Einhüllende einer Kugel ergibt, deren Mittelpunkt sich auf dem gefundenen Weg bewegt und deren Radius sich mit dem aktuellen Abstand ändert.

Diese Vorgehensweise wurde in [22] im Zusammenhang mit dem Auffinden einer sogenannten Mittellinie (engl. center line) in einem Voxegelbiet angewendet. Ein Voxegelbiet besteht aus einer endlichen Menge von gitterförmig angeordneten, würfelförmigen Zellen, den sogenannten *Voxeln*, die das Gebiet zerlegen. Dies korrespondiert zum Konzept der Rasterzerlegung in der Ebene, die in der Bildverarbeitung gebräuchlich ist und bei der eine Zelle als *Pixel* bezeichnet wird. In [22] wird das folgende Verfahren zur Bestimmung der Mittellinie eines Voxegelbietes angegeben:

Algorithmus "Mittellinie eines Voxegelbietes"

Eingabe: Ein Voxegelbiet G .

Ausgabe: Eine Mittellinie, dargestellt durch eine Folge von Voxeln.

Ablauf:

Bestimme die Medialachse S von G ;
 Wähle Start- und Endvoxel \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 auf S ;
 Gib \mathbf{p}_1 aus;
 Wähle Schranke $F > 0$;
Centerline ($S, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, F$);
 Gib \mathbf{p}_2 aus;

Unteralgorithmus *Centerline* ($S, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, F$)

if Abstand von \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 größer als F **then**
 $\mathbf{p}_M := \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}$;
 Bestimme $\mathbf{q} \in S$ mit $d(\mathbf{q}, \mathbf{p}_M) = \min_{\mathbf{p} \in S} \{d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_M)\}$;
Centerline ($S, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}, F$);
 gib \mathbf{q} aus;
Centerline ($S, \mathbf{q}, \mathbf{p}_2, F$);
end if

Die Mittellinie wird durch eine Folge von Voxeln repräsentiert. Sie kann in einen Polygonzug überführt werden, indem beispielsweise die Schwerpunkte der Voxel als Eckpunkte des Polygonzuges verwendet werden. Um zu garantieren, dass der Polygonzug ganz im Inneren von G verläuft, muss F hinreichend klein gewählt werden.

Grundsätzlich ist denkbar, diesen Algorithmus auf das Schlaucheinpassungsproblem zu übertragen. Eine Möglichkeit ist, das Innere des Abschlusses eines Schlauches durch Verrasterung als ein Voxegelbiet darzustellen, und auf dieses Gebiet den beschriebenen Algorithmus anzuwenden. Nachteile dieser Vorgehensweise sind der Implementierungsaufwand für die Verrasterung und der hohe Speicherbedarf der gerasterten Darstellung.

Eine weitere Möglichkeit ist, den Algorithmus auf andere Geometrierepräsentationen zu übertragen. In [59] wird die Medialachse verwendet, um ein sich bewegendes Objekt mit einer Kamera zu verfolgen, wobei sich die Kamera möglichst weit entfernt von den Hindernissen und gleichförmig bewegen soll. Nachteile der Verwendung der Medialachse analog zu [59] ist die aufwändige Implementierung einer numerisch stabilen Mittelachsenberechnung und einer effizienten Suche nach einem nächsten Punkt auf der Medialachse.

Eine andere Lösungsmethode wird von Kukuk [40] vorgestellt. Kukuk beschreibt ein Simulationsverfahren für das Einführen von Endoskopieschläuchen in menschliche Organe, wie beispielsweise in den Darm. Der Darm kann ebenfalls als rohrförmiges Objekt verstanden werden. Ein solches Verfahren könnte im Prinzip auch zur Bestimmung einer Schlaucheinpassung eines Rohres verwendet werden, indem nämlich der Schlauch vollständig durch das Rohr geführt wird. Problematisch könnte hier bei komplexeren Rohren die Wahl der Parameter sein, um ein Festsetzen des Schlauches wegen zu hoher Steifigkeit oder ein Verwinden wegen zu geringer Steifigkeit zu vermeiden.

Kurvenapproximation durch Polygonzüge

Bei der Kurvenapproximation durch Polygonzüge geht es darum, eine gegebene Kurve so durch einen Polygonzug zu approximieren, dass die Eckpunkte des Polygonzuges auf der Kurve liegen und die Punkte auf seinen Kanten die Kurve innerhalb einer Fehlerschranke gemäß eines gegebenen Maßes annähern. Versteht man das gegebene Rohr als die Kurve und die Leitlinie als den gesuchten Polygonzug, wird die Beziehung zum Schlaucheinpassungsproblem deutlich. Dies gilt insbesondere, wenn das Rohr einen geringen Durchmesser im Vergleich zu seiner Länge besitzt.

Eine verbreitete Heuristik zur Polygonzugapproximation einer Kurve $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ in Parameterdarstellung ist die *adaptive Zerlegung* (vgl. Abschnitt 12.2 [29]). Dort werden die Kurven lokal nach Schnittbedürfnissen approximiert, wobei sie hier global nach Approximationsbedürfnissen betrachtet werden. Das Verfahren startet mit dem Polygonzug $[k(0), k(1)]$, der aus nur einer Kante besteht. Falls die Approximation der Kurve durch den Polygonzug schlecht ist, wird die Kante $k(0), k(1)$ durch Einfügen des Punktes $k(1/2)$ durch zwei neue Kanten $k(0), k(1/2)$ und $k(1/2), k(1)$ ersetzt, d.h. der Polygonzug hat nun die Form $[k(0), k(1/2), k(1)]$. Diese Vorgehensweise wird nun für jede Kante, für die die Approximation noch nicht ausreicht, fortgeführt, bis der aktuelle Polygonzug überall hinreichend approximierend ist. Das bedeutet, dass eine Kante $k(t_i), k(t_{i+1})$ durch zwei neue Kanten $k(t_i), k((t_i + t_{i+1})/2)$ und $k((t_i + t_{i+1})/2), k(t_{i+1})$ ersetzt wird.

Zusammengefasst sieht der Algorithmus also so aus:

Algorithmus "Polygonzugapproximation einer Kurve durch adaptive Zerlegung"

Eingabe: Eine Kurve $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ in Parameterdarstellung.

Ausgabe: Ein Polygonzug mit Eckpunkten auf k , der k innerhalb eines Fehlers $\varepsilon > 0$ approximiert.

Ablauf:

Gib $k(0)$ aus;
 Setze $t_1 = 0, t_2 = 1$;
 Wähle $\varepsilon > 0$;
Polygonzug (t_1, t_2, ε);
 Gib $k(1)$ aus;

Unteralgorithmus Polygonzug (t_1, t_2, ε)

```

if Approximationsfehler der Strecke  $k(t_0), k(t_1)$  kleiner als  $\varepsilon$  then
  Ende des Algorithmus;
else
   $t_M = \frac{t_1+t_2}{2}$ ;
  Polygonzug ( $t_1, t_M, \varepsilon$ );
  Gib  $k(t_M)$  aus;
  Polygonzug ( $t_M, t_1, \varepsilon$ );
end if

```

Ein zweiter Lösungsansatz besteht in der Anwendung des Reduktionsverfahrens für Polygone von Imai und Iri [30]. Die gegebene Kurve ist hierbei ein Polygonzug P , der durch einen anderen Polygonzug Q innerhalb einer gegebenen Toleranz approximiert werden soll. Dabei ist Q ein Polygonzug aus Punkten von P , der P innerhalb einer gegebenen Fehlerschranke annähert und eine minimale Anzahl von Kanten hat. Der Ansatz von Imai und Iri basiert, allgemein gesehen, auf dem Prinzip der dynamischen Programmierung. Dazu wird zu jedem Eckpunkt \mathbf{p}_i von P die kürzeste Länge für das Teilstück von P vom Anfangspunkt zu \mathbf{p}_i bestimmt, d.h. zu jedem Punkt wird die Länge eines kürzesten Polygonzuges zu $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_i]$ gefunden. Die Länge ergibt sich aus den Längen an den schon bearbeiteten Punkten durch Verlängerung durch eine Kante, die innerhalb der Fehlerschranke liegt. An jedem Punkt wird zudem vermerkt, mit welchem Vorgängerpunkt eine Kante, die die kleinste Länge geliefert hat, verbunden ist. Durch Zurückhangeln über die Vorgängerpunkte lässt sich nach Bearbeitung des letzten Punktes der gesuchte kürzeste Polygonzug Q konstruieren.

Sei $P := [\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$ der gegebene Polygonzug und \mathcal{P} die Menge aller Tripel

$$\{\mathbf{p}_j, x, \mathbf{p}_i\},$$

mit

- $i > j$,
- einem Wert $x \in \mathbb{R}$, der die kürzeste Länge der bisher gefundenen, auf der Strecke $\{\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i\}$ endenden, approximierenden Polygonzüge enthält.

Algorithmus "Polygonzugapproximation eines Polygonzuges"

Eingabe: Ein Polygonzug $P := [\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$, ein Fehlermaß $\varepsilon > 0$.

Ausgabe: Ein Polygonzug $Q := [\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_m]$, $m \leq n$, der P innerhalb von $\varepsilon > 0$ mit einer minimalen Punktanzahl m approximiert.

Ablauf:

```

/* Finde alle kürzesten Teilwege */
initialisiere  $\mathcal{P}$ ;
füge  $\{-, 0, \mathbf{p}_0\}$  in  $\mathcal{P}$  ein;
for  $i = 0, \dots, n$  do
  for  $j = 0, \dots, i - 1$  do
    if  $\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i$  approximiert  $[\mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_i]$  innerhalb von  $\varepsilon$  then
      for all  $L \in \mathcal{P}$  mit  $L = \{, x, \mathbf{p}_j\}$  do
        if  $\exists B \in \mathcal{P}$  mit  $B = \{\mathbf{p}_j, y, \mathbf{p}_i\}$  then
          if  $y > x + 1$  then
            ersetze in  $B$  den Wert  $y$  durch  $x + 1$ ;
          end if
        end if
      end if
    end if
  end for
end for

```

```

        else
            füge  $\{\mathbf{p}_j, x + 1, \mathbf{p}_i\}$  in  $\mathcal{P}$  ein;
        end if
    end for
end if
end for
end for
/* Ausgabe von  $Q$  */
setze  $Q := [\mathbf{p}_n]$ ;
setze  $\mathbf{q} := \mathbf{p}_n$ ;
while (true)
    suche  $\{\mathbf{p}, x, \mathbf{q}\}$ ;
    if  $\mathbf{p}$  existiert then
        füge  $\mathbf{p}$  als ersten Punkt in  $Q$  ein;
        setze  $\mathbf{q} := \mathbf{p}$ ;
    else
        beende die while Schleife;
    end if
end while

```

Randkurvenapproximation

In der digitalen Bildverarbeitung tritt das Problem auf, eine geschlossene Kurve um ein Gebiet in einem Bild zu legen, die möglichst gut mit dem Rand des Gebietes übereinstimmt. Die Schwierigkeit besteht darin, dass das Gebiet möglicherweise ungenau beschrieben ist und der Rand teilweise nur geschätzt werden kann. Ein Ansatz zur Lösung dieses Problems der Randkurvenapproximation sind sogenannte aktive Konturmodelle, die auch als Snakes bekannt sind [12], [34]. Eine Snake ist eine Kurve, deren "Energie" bezüglich einer physikalisch motivierten Zielfunktion minimal ist.

Die zu minimierende Energie setzt sich bei Snakes aus einer äußeren, einer inneren und einer globalen Energiekomponente zusammen. Die drei Funktionale werden üblicherweise gewichtet zu einer einzigen Zielfunktion addiert.

Die Approximationsgüte der Kurve an den Rand des Gebietes wird durch ein Funktional der externen Energie gemessen. Dabei kann es sich um eine Art Potentialfunktion handeln, durch die die Kurve an den Rand gezogen wird. Hierfür kann beispielsweise der Betrag des Grauwertgradienten eines Bildes verwendet werden. Auf der anderen Seite wird das Dehnungs- und Biegeverhalten der Snake-Kurve beschränkt. Dies wird durch ein Funktional der inneren Energie ausgedrückt. Die globale Energie wird benutzt, um dem Modell spezifische Bedingungen aufzuerlegen. Es kann beispielsweise verhindert werden, dass eine Kontur in gewisse Bereiche hineinläuft.

Zur Berechnung von optimalen oder näherungsweise optimalen Einpassungen aktiver Konturen sind Ansätze bekannt, die in Übersichten von Neuenschwander [57] und Kerschner [36] zusammengestellt sind. Häufig wird die Kurve in Parameterdarstellung repräsentiert. Lösungsmethoden hierbei sind Variationsrechnung (Kass, Witkin, Terzopoulos [34]), dynamische Programmierung (Amini, Weymouth, Jain [4]), Greedy-Algorithmen (Williams, Shah [79]; Daneels et al. [16]), kürzeste Weg (Cohen, Kimmel [14]), Ziplock Snakes (Neuenschwander [58]), Simulated Annealing (Trinder [74]), genetische Algorithmen (Rousselle et al. [64]), Finite Elemente (Cohen, Cohen [13]) und Gradientenvektorfluss (Xu, Prince [81]). In jüngerer Zeit haben die implizite Repräsentation der Kurve und damit in Verbindung stehende Lösungsverfahren Interesse gefunden (Caselles et al. [11]; Malladi et al. [49]).

Diese Zielfunktion der Randkurvenapproximation ähnelt den Zielfunktionen, die beim Schlaucheinpassungsproblem auftreten, woraus sich die Bedeutung für diese Problemstellung ergibt. Die externe Energie kann dabei die Lage der Leitlinie relativ zum Rohr, die interne Energie die Form der Leitlinie beschreiben.

2.4.2 Vorgehensweise dieser Arbeit

In dieser Arbeit wird das Schlaucheinpassungsproblem durch zwei Ansätze behandelt, die zu den beiden Verfahren der Kurvenapproximation korrespondieren, die im vorigen Abschnitt skizziert wurden: Polygonzugapproximation durch adaptive Zerlegung und Polygonzugreduktion durch dynamische Programmierung.

Ausgangspunkt der Lösung des Schlaucheinpassungsproblems durch dynamische Programmierung ist die Problemformulierung zu Beginn des Kapitels 2.4. Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, hat dieses Optimierungsproblem Ähnlichkeit zu dem Optimierungsproblem, das dem Konzept der aktiven Konturmodelle zu Grunde liegt. Bei der Übertragung auf das Schlaucheinpassungsproblem kommt der Leitlinie eines Schlauchstützstellenkantenzuges beziehungsweise einer Schlauchapproximation die Rolle der aktiven Kontur zu. Die Forderung einer möglichst geringen Krümmung der Leitlinie kann über eine geeignet definierte "inneren Energie" modelliert werden. Der Forderung an die Leitlinie, möglichst zentral im Inneren des Rohres zu verlaufen, kann die Rolle der globalen Energie übernehmen. Forderungen der Art, dass die Schnittebenen möglichst senkrecht zur Leitlinie stehen sollen oder der Umfang der Schnittkonturen möglichst klein ist, können der externen Energie zugewiesen werden. In Kapitel 4 werden die bisher nur informell beschriebenen Zielfunktionen formalisiert.

Wie im vorigen Abschnitt erwähnt, sind verschiedene Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems der aktiven Konturen bekannt. In dieser Arbeit wird der Ansatz aufgegriffen, der auf der Methode der dynamischen Programmierung beruht. Ein Vorteil dieses Ansatzes ist, dass er direkt auf der diskreten Gegebenheit aufbaut, die durch die Eingabe eines Rohres als Dreiecksnetz gegeben ist. Damit entfällt eine potentiell notwendige Interpolation durch hinreichend glatte Flächen und die anschließende Neudiskretisierung zur numerischen Lösung durch finite Differenzen oder finite Elemente. Ferner findet die dynamische Programmierung relativ zur Problemformulierung absolute Optima. Wegen des möglicherweise hohen Zeit- und Speicherbedarf ist dabei jedoch ein besonderes Augenmerk auf Effizienz Aspekte zu legen. Das betrifft zum einen die effiziente Realisierung der benötigten geometrischen Grundoperationen, die Gegenstand von Kapitel 3 ist. Zum anderen sind Modifikationen des Grundverfahrens der dynamischen Programmierung von Interesse, die den Suchraum unter potentiell, jedoch akzeptablen Verlust von Lösungen zugunsten einer effizienteren Berechnung einschränken. Dieser Ansatz zur Lösung des Schlauchapproximationsproblems wird in Kapitel 5 ausgearbeitet.

Der zweite Ansatz, die adaptive Zerlegung, besteht aus einem Initialisierungs- und einem Optimierungsschritt. Der erste Schritt konstruiert eine zulässige, möglicherweise jedoch noch nicht günstige Lösung des Problems. Dies geschieht durch adaptive Zerlegung analog zur Approximation einer Kurve durch einen Polygonzug. Dem Polygonzug entspricht dabei im Fall des Rohres eine auf diese Weise konstruierte polygonale Leitlinie. Der zweite Schritt dient zur Optimierung der Lösung, wobei die Zielfunktionen berücksichtigt werden. Der Vorteil dieses Verfahrens sind die sehr geringen Rechenzeiten und ein geringer Speicherbedarf, insbesondere im Vergleich mit der dynamischen Programmierung. Allerdings ist die Zuverlässigkeit beim Auffinden von guten Lösungen insbesondere in schwierigeren Fällen erheblich geringer als bei der dynamischen Programmierung. Dieses Problem lässt sich durch ergänzende Heuristiken mindern.

Da eine umfassende Analyse des Verhaltens des zweiten Ansatzes kaum möglich erscheint, wird ein

Weg eingeschlagen, der bei der Analyse von Heuristiken generell plausibel erscheint. Dieser besteht darin, Annahmen über Rohre und über das Verhalten des Verfahrens zu formulieren, unter denen eine korrekte Funktionsweise nachgewiesen werden kann. Auch wenn sich die allgemeine Gültigkeit der Annahmen einem Nachweis verschließt, ist es schon hilfreich, wenn die Richtigkeit in vielen Fällen plausibel erscheint, insbesondere in solchen, die praktisch relevant sind. Dies ist hier gegeben.

Das Verfahren der adaptiven Zerlegung ist Gegenstand von Kapitel 6. Im Kapitel 7 werden die beiden Methoden zur Generierung einer Schlaucheinpassung verglichen und weitere Möglichkeiten diskutiert. Insbesondere zeigt es sich, dass die Optimierungskriterien letztendlich nicht alle möglichen Gegebenheiten so umfassend beschreiben, dass optimale Lösungen auch tatsächlich die anschaulich gewünschten sind. Dies wirft die Frage auf, ob das Problem der Schlaucheinpassung wirklich umfassend in hinreichend einfacher Weise spezifizierbar ist. Diese Frage, die für viele praktische Probleme zutrifft, kann nicht beantwortet werden. Stattdessen wird auf den praktischen Ausweg der interaktiven Unterstützung eingegangen.

Kapitel 3

Rohrrepräsentation durch Dreiecksnetze

Gegenstand des Kapitels ist die geometrische Repräsentation von Rohren durch Dreiecksnetze. Im Anschluss an die Definition der Dreiecksnetzrepräsentation in Abschnitt 3.1 folgt in Abschnitt 3.2 eine Reihe von geometrischen Operationen, die die Grundlage der Schlaucheinpassungsverfahren der späteren Kapitel sind, und effiziente Algorithmen zu deren Realisierung.

3.1 Dreiecksnetze

Zur geometrischen Repräsentation von Rohren sind im Prinzip alle Darstellungsformen von Flächen der geometrischen Modellierung verwendbar [1]. Allerdings kann die Darstellung und die darauf aufbauende algorithmische Realisierung unterschiedlich komplex sein. Im Folgenden wird auf Dreiecksnetze als Repräsentation für Rohre eingegangen. Dreiecksnetze sind eine mittlerweile weit verbreitete, flexible Repräsentationsform für geometrische Modelle und damit von besonderer Relevanz für die Praxis. Sie können auf folgende Weise definiert werden:

Definition 3.1

Ein Dreiecksnetz setzt sich aus endlich vielen Knoten, Kanten und Dreiecken zusammen. Jeder Knoten liegt auf mindestens einer Kante, jede Kante auf mindestens einem Dreieck. Zwei Dreiecke haben entweder genau eine gemeinsame Kante oder genau einen gemeinsamen Knoten oder sie sind disjunkt. Eine Kante ist höchstens mit zwei Dreiecken inzident.

Die Kanten, zu denen genau ein Dreieck inzident ist, definieren den Rand des Dreiecksnetzes.

Ein Dreiecksnetz heißt orientiert, wenn die Knoten jedes Dreiecks zyklisch so angeordnet sind, dass für Anordnungen $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ und $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ zweier beliebiger Dreiecke, P und Q , die die Kanten $\{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ und $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_3\}$ gemeinsam haben, $\mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_3$ und $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1$ gilt, d.h. die Knoten auf der gemeinsamen Kante treten in den zyklischen Anordnungen der beiden Dreiecke in umgekehrter Reihenfolge auf.

Abbildung 3.1 illustriert die Gegebenheiten der Definition, wobei die Richtung der zyklischen Anordnung durch Pfeile repräsentiert ist. Abbildung 3.2 zeigt ein Dreiecksnetz, das ein Rohr repräsentiert.

Zur Speicherung von Dreiecksnetzen sind eine Reihe von Datenstrukturen gebräuchlich, zum Beispiel der Zellinzidenzgraph [19], die Winged-Edge-Datenstruktur ([5], [78]) und die Half-Edge-Datenstruktur ([9], [37]). Die Auswahl orientiert sich an den zu realisierenden Elementaroperationen für das Dreiecksnetz. Hier werden folgende wesentliche Elementaroperationen benötigt:

- Aufbau der Datenstruktur für ein gegebenes Dreiecksnetz,
- Auffinden der Eckpunkte eines Dreiecks,

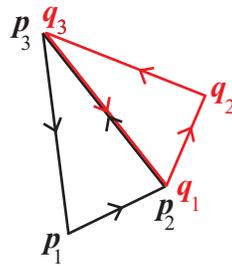


Abbildung 3.1: Orientierung der Dreiecke

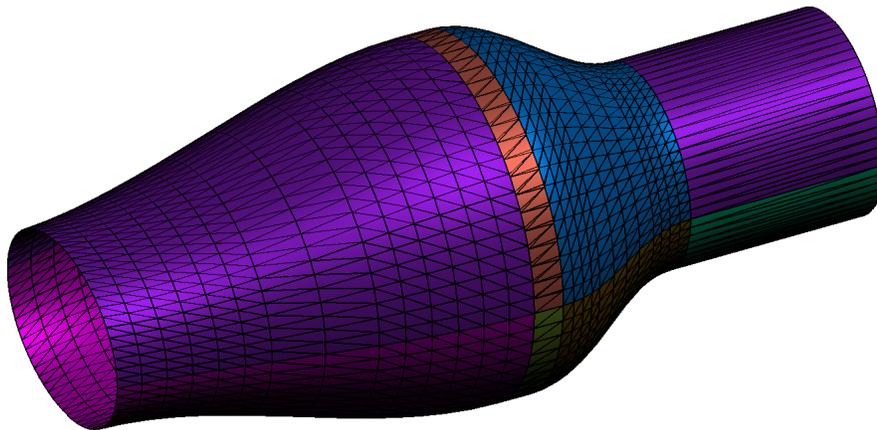


Abbildung 3.2: Ein röhrenförmiges Dreiecksnetz

- Auffinden der Kanten eines Dreiecks,
- Auffinden des zweiten inzidenten Dreiecks zur Kante eines gegebenen Dreiecks, sofern eines existiert.

In den folgenden Abschnitten werden Algorithmen zu deren effizienten Realisierung auf Dreiecksnetzen skizziert. Dabei werden weitgehend bekannte heuristische Verfahren, die zur praktischen Lösung dieser oder verwandter Probleme weit verbreitet und allgemein akzeptiert sind, existierenden Algorithmen der algorithmischen Geometrie mit garantiertem asymptotisch effizienten Worst-Case-Verhalten vorgezogen, die jedoch aufwändiger zu implementieren und bei Eingaben praktischer Größe in der Regel weniger effizient sind.

3.2 Operationen auf Dreiecksnetzen für die Schlaucheinpassung

Die später vorgestellten Verfahren zur Schlaucheinpassung verwenden einige zentrale geometrische Grundoperationen:

- Test einer Strecke auf Schnitt mit einem Dreiecksnetz,
- Berechnung von Rohrschnittgebieten,

- Berechnung von Ebenen-Sweeps,
- Berechnung einer Konnektivitätslinie.

3.2.1 Test einer Strecke auf Schnitt mit einem Dreiecksnetz

Der *Test einer Strecke auf Schnitt mit einer Fläche* dient zur Überprüfung, ob die aktualisierte Leitlinie innerhalb des Rohres verläuft. Hierbei handelt es sich um eine Aufgabe, die zum Strahlverfolgungsproblem verwandt ist. Speziell bei Dreiecksnetzen sind für eine beliebige Strecke die von ihr geschnittenen Dreiecke des Netzes zu finden.

Im Fall einer großen Anzahl von Strecken ist es zweckmäßig, das Dreiecksnetz so in eine Datenstruktur vorzuverarbeiten, dass die Schnitttests mit ihrer Hilfe deutlich schneller als durch Schnitt aller Dreiecke mit der aktuellen Strecke durchzuführen sind. Für die Vorverarbeitung gibt es eine Reihe heuristischer und Worst-Case-effizienter Verfahren, die insbesondere im Zusammenhang mit dem Strahlverfolgungsverfahren in der Computergraphik entstanden sind (vgl. [17], [24], [56] und [60]). Eine einfach zu realisierende Möglichkeit ist das Verfahren der regulären Gitter. Dieses ist dann besonders angebracht, wenn die Dreiecke des Netzes ähnliche Größe und ausgeglichene Form haben. Der Implementierungsaufwand kann gegen etwas mehr Zeitbedarf dadurch minimiert werden, dass zunächst die Gitterzellen bestimmt werden, die der achsenparallele Hüllquader eines Dreiecks schneidet, und das Dreieck dann jenen zugewiesen wird, die zusätzlich die Ebene des Dreiecks schneiden. Ferner kann die inkrementelle Bestimmung der von einer Strecke geschnittenen Zellen durch die Lokalisation einer Folge von Abtastpunkten auf der Strecke im Gitter ersetzt werden, wie dies beim Raycasting für das Direct Volume Rendering gebräuchlich ist [35]. Der Speicherplatzbedarf für das Gitter kann durch Einfügen der nichtleeren Gitterzellen in eine lineare Hashtabelle über einen Schlüssel, der sich aus den Indizes ergibt, reduziert werden (vgl. [46]).

3.2.2 Berechnung von Rohrschnittgebieten

Eine Möglichkeit der *Berechnung von Rohrschnittgebieten* zu einer Ebene besteht darin, zunächst eine *Berechnung der von einer Ebene geschnittenen Dreiecke* des Netzes durchzuführen, um dann die *Zusammensetzung von Schnittdreiecken zu Konturen* zu leisten. Aus den Konturen werden dann Rohrschnittgebiete erzeugt.

Bei einer großen Anzahl durchzuführender Schnittoperationen ist eine Vorverarbeitung in eine Suchstruktur analog zu Abschnitt 3.2.1 notwendig. Bei Verwendung eines regulären Gitters sind nun die Gitterzellen zu finden, die die gegebene Ebene schneiden. Aus diesen werden dann die Dreiecke identifiziert, die die Ebene schneiden. Daraus sind dann geschlossene Konturen zusammzusetzen, indem etwa ausgehend von einem Dreieck eine Kette von Folgedreiecken über Kantennachbarschaften gefunden wird. Für die Überprüfung, ob ein Dreieck von der Schnittebene $E = (\mathbf{p}, \mathbf{n})$ geschnitten wird, wird mit Hilfe der Hesse-Normalenform zu jedem Knoten \mathbf{q} der vorzeichenbehaftete Abstand zu der Ebene ermittelt, d.h.

$$dist_{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle.$$

Ein Dreieck wird geschnitten, sobald es eine Kante gibt, deren Knoten Abstände mit unterschiedlichem Vorzeichen besitzen. Dabei wird der Abstand Null als positiver Wert gezählt. Der Schnittpunkt der Kante kann somit auch auf einen Dreiecksknoten fallen, wobei formal für die Nachbarschaftsbildung die Kante geschnitten wird. Dreiecke, die ganz in der Schnittebene liegen, gehören zu Rohrrandgebieten und müssen gesondert behandelt werden. Das Auftreten und damit die implementierungsaufwändige Behandlung dieses Spezialfalls kann dadurch vermieden werden, dass in Algorithmen nur Schnittebenen verwendet werden, die nicht mit der Ebene eines Dreiecks des Eingabernetzes übereinstimmen.

Nun müssen die Konturen als Ränder von Rohrschnittgebieten zugeordnet werden. Dazu wird zu je zwei Konturen die kürzeste Verbindung ermittelt. Sollte diese Strecke innerhalb des Rohres verlaufen und keine weitere Schnittkontur schneiden, kann angenommen werden, dass sie zum gleichen Rohrschnittgebiet gehören. Dieser heuristische Test ist in vielen praktischen Situationen ausreichend, in denen keine geschachtelten Konturen auftreten. Im allgemeinen kann die Schachtelung der Konturen durch Punkt-in-Polygon-Tests ermittelt werden. Über die Schachtelung kann dann eine Zuordnung zu Schnittgebieten erfolgen.

Von besonderem Interesse ist die Berechnung der trennenden Rohrschnittgebiete, die von der Schnittebene induziert werden. Hierfür kann die Konnektivitätslinie genutzt werden. Zu einer gegebenen Ebene E werden zunächst alle Schnittpunkte von E mit der Konnektivitätslinie ermittelt. Ausgehend von den Schnittpunkten werden die Konturen auf dem Rohr berechnet. Sollte der Schnittpunkt der Konnektivitätslinie nicht auf einen Dreiecksknoten fallen, kann durch die Inzidenzrelation eine Folge von geschnittenen Dreiecken ermittelt werden. Sollte der Schnittpunkt mit einem Dreiecksknoten zusammenfallen, ist dagegen zunächst unklar, von welchem Dreieck aus die Folge von inzidenten, geschnittenen Dreiecken ermittelt werden soll. Es müssen somit alle in Frage kommenden Dreiecke untersucht werden.

Der Vorteil dieser Ermittlung von Konturen ist, dass sie einfacher und effizienter als das erstgenannte Verfahren mit dem regulären Gitter ist. Sie löst das Problem in Situationen, in denen alle Konturen, die zu trennenden Rohrschnittgebieten gehören, Schnittpunkte mit der Konnektivitätslinie haben. Dies ist etwa in der für praktische Anwendungen bedeutenden Situation von schlauchähnlichen Rohren der Fall, wenn alle trennenden Rohrschnittgebiete eines Schnittes genau eine Randkontur haben. Kann dies nicht garantiert werden, müssen die Kandidatendreiecke aus der Gitterstruktur, die nach Durchführung dieses Verfahrens noch keiner Kontur zugeordnet sind, mit der Ebene geschnitten und zu Konturen zusammengesetzt werden.

Die Bestimmung von Rohrschnittgebieten aus den Schnittkonturen erfordert aufgrund von Fallunterscheidungen einigen Implementierungsaufwand. So ist insbesondere das Auftreten von nicht einfachen, d.h. sich selbst schneidenden Schnittkonturen, möglich, die dann mehrere Rohrschnittgebiete induzieren können. In den späteren Verfahren zur Schlaucheinpassung sind singuläre Rohrschnitte vorgesehen, die von der Behandlung der Schlaucheinpassung ausgeschlossen sind. Diese geschilderte Situation kann in diesem Zusammenhang als singulär aufgefasst werden, so dass dann, abgesehen von deren Erkennung, keine weitergehende algorithmische Behandlung erforderlich ist.

3.2.3 Lineare Schlauchapproximation

Im Zusammenhang mit der stückweise linearen Schlauchapproximation treten folgende Berechnungsprobleme auf:

Existenz einer linearen Schlauchapproximation

Eingabe:

Ein Rohr.

Ausgabe:

Die Information, ob eine lineare Schlauchapproximation bezüglich der Anfangs- und Endöffnung des Rohres möglich ist.

Diskretisierte lineare Schlauchapproximation

Eingabe:

Eine lineare Schlauchapproximation eines Rohres.

Ausgabe:

Ein approximierender Schlauchstützstellenkantenzug, dessen Schnittebenen zu der linearen Ebenenschar der gegebenen linearen Schlauchapproximation gehören.

Die Definition der linearen Schlauchapproximation, siehe Definition 2.29, legt es nahe, diese Probleme mittels Ebenen-Sweeps zu lösen. Sweeps mit Geraden in der Ebene oder Ebenen im Raum stellen ein wesentliches Algorithmenparadigma der algorithmischen Geometrie dar (vgl. [18]). Dabei wird in der Regel die Eingabemenge im zweidimensionalen Fall durch eine Strecke und im dreidimensionalen Fall durch eine Ebene überstrichen, wobei dabei auftretende, im Hinblick auf die Problemstellung interessante "Ereignisse" analysiert und verarbeitet werden.

Die Lösung des Problems der Existenz einer linearen Schlauchapproximation geschieht durch eine Suche nach Singularitäten und darauf aufbauend, einem Test auf Erreichbarkeit des Endschnittgebietes durch einen Ebenen-Sweep. Der Ebenen-Sweep besteht in der sortierten Abarbeitung von relevanten Ereignissen, die im Verlauf einer monotonen Drehung einer Anfangsebene in eine Endebene um deren Schnittgerade beziehungsweise, im Falle parallel liegender Begrenzungsebenen, monotonen, parallelen Verschiebung einer Ebene aus der Position der Anfangsebene in die Position der Endebene auftreten. Im hier betrachteten Ebenen-Sweep sind die Ereignisse das Auftreten von Netzknoten. Das bedeutet, dass eine Prioritäts-Warteschlange \mathcal{P} von Netzknoten gehalten wird, unter denen der Knoten, dessen Abstand zu der jeweils aktuellen Ebene der kleinste ist, der Knoten mit der höchsten Priorität ist und somit das nächste Ereignis ist. Im Falle paralleler Ebenen ist der Abstand des Knotens zu der aktuellen Ebene die Länge der senkrechten Projektion auf diese. Sonst ist der Abstand die Größe des eingeschlossenen Winkels zwischen der entsprechenden Ebene der monotonen Drehung, die den Knoten enthält, und der aktuellen Ebene. Beim Übergang zum nächsten Knoten wird der aktuelle aus \mathcal{P} entfernt, eventuell neue Knoten in \mathcal{P} eingefügt und anschließend die Prioritäten der Elemente in \mathcal{P} angepasst. Liegen mehrere Knoten auf der gleichen Sweep-Ebene, werden diese in einer willkürlichen Reihenfolge abgearbeitet.

Die Auswertung von Ereignissen beschränkt sich auf den Teil des Netzes, der sich durch zusammenhängendes Fortschreiten auf dem Netz, beginnend mit dem Rand einer initialen Schnittkontur, ergibt. Dadurch wird im Allgemeinen nicht das ganze Netz überstrichen. Dieses *zusammenhängende Fortschreiten* geschieht über einer Menge \mathcal{D} von Dreiecken, die laufend aktualisiert wird. Zu Beginn besteht \mathcal{D} aus den Dreiecken, die den Rand des Rohrschnittgebietes am Anfang induzieren. \mathcal{P} enthält alle die Knoten zu Dreiecken in \mathcal{D} , die in Sweep-Richtung noch nicht bearbeitet sind. Sei \mathbf{p} der nächste Knoten in Sweep-Richtung. Beim Fortschreiten des Sweeps auf diesen Knoten wird \mathcal{D} aktualisiert, indem alle Dreiecke, die zu \mathbf{p} inzident sind und deren Fläche hinter der Sweep-Ebene in Fortschrittingsrichtung liegen, aus \mathcal{D} entfernt werden. Ferner werden alle inzidenten Dreiecke, für die dies nicht der Fall ist, in \mathcal{D} eingefügt. Hinzu kommen alle Dreiecke, die zu diesen direkt oder transitiv inzident sind und die aktuelle Ebene schneiden. Bei der transitiven Inzidenz ist jedoch zu beachten, dass lediglich der Rohrbereich zwischen dem Anfangs- und Endrohrschnittgebiet betrachtet wird. Die Eckknoten von neu hinzugekommenen Dreiecken, die nicht im schon überstrichenen Bereich der Sweeps liegen, werden in \mathcal{P} eingefügt.

Eine *Singularität* liegt an einem Knoten vor, an dem der Schnitt zwischen der Ebene des Sweeps durch den Knoten mit dem gegebenen Netz keine lokal einfache Schnittkurve liefert. Beispiele für nicht einfache Schnittkonfigurationen sind ein isolierter Punkt, ein Mehrfachkurvendurchgang oder das Auftreten von einem oder mehreren Dreiecken, die in der Sweep-Ebene liegen. Dementsprechend besteht die *Suche nach Singularitäten* in der Überprüfung des jeweils aktuellen Knoten eines Ebenen-Sweeps auf eine Singularität. Ist er singular, wird dieses Ergebnis ausgegeben und der Sweep beendet. Beim *Test auf Erreichbarkeit des Endschnittgebietes* wird überprüft, ob die Sweep-Ebene ohne das

Auftreten einer Singularität die Ebene des Endschnittgebietes erreicht und die Menge der Dreiecke, die zum Rand des Endschnittgebietes beitragen, Teilmenge der Menge \mathcal{D} zu diesem Zeitpunkt ist. Ferner wird untersucht, ob die Strecke zwischen den Leitpunkten der Anfangs- und der Endöffnung innerhalb des Rohres verläuft. Sollte beides der Fall sein, wird die Existenz einer linearen Schlauchapproximation ausgegeben.

Die Lösung des Problems der diskretisierten linearen Schlauchapproximation geschieht durch Erweiterung des gerade geschilderten Ebenen-Sweeps. Dabei wird zunächst bei jedem Ereignis überprüft, ob die Strecke zwischen dem gegebenen Leitpunkt des aktuellen Rohrschnittgebietes und dem Leitpunkt des letzten ausgegebenen Rohrschnittgebietes im Inneren des Rohres verläuft. Sollte dies der Fall sein, wird die aktuelle Schnittkontur zusammen mit ihrem Leitpunkt als nächste Schlauchstützstelle ausgegeben. Falls nicht, wird mit der Schnittebene, die in der Mitte zwischen der letzten und der aktuellen Schnittebene in der linearen Ebenenschar liegt, ein Rohrschnittgebiet berechnet und die Strecken zwischen seinem Leitpunkt und denen des aktuellen beziehungsweise des vorangehenden Rohrschnittgebietes auf Lage im Inneren des Rohres überprüft. Sollte dies bei einer oder beiden nicht der Fall sein, wird das betroffene Intervall entsprechend unterteilt und, wenn notwendig, weiter iteriert. Die Iteration endet, wenn ein im Inneren des Rohres liegender Streckenzug erreicht ist. Dann werden die dabei generierten Rohrschnittgebiete zusammen mit ihren Leitpunkten in korrekter Reihenfolge als Schlauchstützstellen ausgegeben. Wenn die Existenz einer linearen Schlauchapproximation vorausgesetzt ist, sollte dieses Verfahren zumindest bei nicht pathologischen Rohren terminieren.

3.2.4 Berechnung einer Konnektivitätslinie

Die Konnektivitätslinie l ist eine Kurve auf einem Rohr $W(R_a, R_e)$. Sie kann aus den Dreieckskanten des Netzes so generiert werden, dass sie zudem eine kürzeste Verbindung zwischen den Randkonturen ist. Hierfür kann das Verfahren von Dijkstra [26] zur Berechnung kürzester Wege in einem Graphen verwendet werden. Damit sind gleich eine Vielzahl von günstigen Bedingungen erfüllt: Ohne zusätzliche Bedingungen ist gewährleistet, dass die Konnektivitätslinie schnittfrei ist. Diese Konnektivitätslinie sollte zur Überprüfung der Trennungseigenschaft von Rohrschnittgebieten verwendet werden. Da die Anzahl der Schnitte einer Ebene mit einer solchen Kurve in der Regel geringer ist als mit einer sich stark windenden Kurve, ist eine solche Konnektivitätslinie ein weiterer Vorteil. In dem Verfahren zur Leitlinienbestimmung aus Kapitel 5 werden die Rohrschnittgebiete zu äquidistanten Punkten auf der Konnektivitätslinie, den sogenannten Konstruktionspunkten, gewählt. Dadurch kann davon ausgegangen werden, dass die Schnittkonturen durch diese Form der Konnektivitätslinie ausgewogen entlang des Rohres verteilt sind.

Kapitel 4

Zielfunktionen für die Schlaucheinpassung

Gegenstand des Kapitels ist die Präzisierung der Zielfunktionen für die Schlaucheinpassung. Im Abschnitt 4.1 wird die Zielfunktion für die Schlauchstützstellenkantenzüge vorgestellt. Diese wird dann im Abschnitt 4.2 für die Schlauchapproximation erweitert.

4.1 Zielfunktion für die Approximation durch Schlauchstützstellen

Die Qualität der Approximation eines Rohres durch einen Schlauchstützstellenkantenzug ist zum einen durch die Lage der Schlauchstützstellen und der Leitlinie relativ zum Rohr, zum anderen aber auch durch die wechselseitige Lage der Schlauchstützstellen zueinander und das Aussehen der Leitlinie gekennzeichnet. Zur Spezifikation der Qualitätsanforderungen werden in den nächsten Abschnitten eine Reihe von Teilzielfunktionen definiert:

- die Krümmungsgüte E_k der Leitlinie,
- die Umfangsgüte E_u der Rohrschnittgebiete,
- die Flächengüte E_f der Rohrschnittgebiete,
- die normierte Zentrumsgüte E_z der Leitlinie,
- die Parallelitätsgüte E_p der Rohrschnittgebiete,
- die tangentielle Ausrichtungsgüte E_l der Rohrschnittgebiete an der Leitlinie,
- die Oberflächensteigungsgüte E_o von Rohrschnittgebieten an der Rohroberfläche.

Dabei charakterisieren die Umfangsgüte, die Flächengüte, die Parallelitätsgüte, die tangentielle Ausrichtungsgüte und die Oberflächensteigungsgüte Beziehungen zwischen den Schlauchstützstellen und dem gegebenen Rohr, wohingegen die normierte Zentrumsgüte indirekt über die Schlauchstützstellen eine Beziehung zwischen der Leitlinie und dem Rohr herstellt. Die Krümmungsgüte beschreibt eine Anforderung an das Aussehen der Leitlinie. Die wechselseitige Lage der Schlauchstützstellen ist bereits durch Forderungen ausgedrückt, die in der Definition von Schlauchstützstellenkantenzügen enthalten sind, nämlich dass die Schlauchstützstellen disjunkt sein müssen und die Leitlinie im Inneren des Rohres verlaufen muss.

Die Hoffnung bei der Definition dieser Teilzielfunktionen ist, dass sich durch Minimierung einer geschickten Kombination von ihnen unter Beachtung der Forderungen aus der Definition von Schlauchstützstellenkantenzügen als Nebenbedingungen ein günstiger approximierender Schlauchstützstellenkantenzug und insbesondere eine günstige Leitlinie ermitteln lässt. Die Verknüpfung der Teilzielfunktionen zu einer Zielfunktion eines Optimierungsproblems, d.h. ein Optimalitätskriterium, wird im Abschnitt 4.1.7 gegeben.

In den folgenden Abschnitten werden die Teilzielfunktionen in der Regel zunächst allgemein formuliert. Anschließend wird ein Bezug zu der Repräsentation von Rohren durch Dreiecksnetze hergestellt. Um die Teilzielfunktionen von verschiedenen Rohren unterschiedlicher Länge vergleichen zu können, wird zusätzlich noch jeweils eine entsprechend der Länge der Leitlinie skalierte Version, die entsprechende durchschnittliche Güte, eingeführt.

Alle im Anschluss definierten Teilzielfunktionen verwenden eine Gewichtung, die wie folgt definiert ist.

Definition 4.1

Sei $[\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n]$, $n > 0$, ein Polygonzug im Raum mit einer Metrik d . Dann ist zu jedem i , $i = 0, \dots, n-1$, das Gewicht ω_i gegeben als

$$\omega_i := \frac{1}{2}d(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}).$$

4.1.1 Krümmungsgüte der Leitlinie

In diesem Abschnitt wird die Zielfunktion der Krümmung der Leitlinie definiert. Eine Voraussetzung für die Ermittlung der Krümmung einer Kurve ist eine stetige, zweite Ableitung. Dies ist bei einem Polygonzug allerdings nicht gegeben. Ein Ansatz zur Behebung des Problems ist, die Leitlinie zunächst durch eine krümmungsstetige Kurve zu interpolieren, so dass dann zu jedem Leitlinienpunkt der *Schmiegekreis*, ein Kreis der die Kurve in zweiter Ordnung berührt, ermittelt werden kann. Die Krümmung ist gerade der Kehrwert des Schmiegekreisradius ([75], Abschnitt 1.4). Im Folgenden wird aus Effizienzgründen eine weniger aufwändige Vorgehensweise verwendet, bei der statt dessen die Krümmung durch den Umkreis um drei aufeinanderfolgende Punkte berechnet wird. Dies ist bei den hier verwendeten Daten eine zweckmäßige Annäherung.

Definition 4.2

Seien (W, R_a, R_e) ein Rohr und $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, ein Schlauchstützstellenkantenzug. Sei $\kappa_i := \frac{1}{r(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+2})}$, $i < n-2$, der Kehrwert des Radius r des Umkreises um die drei Punkte $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+2}$ und $\kappa_i := 0$, falls die drei Punkte kollinear sind.

Dann ist die Krümmungsgüte E_k von S_i, S_{i+1} und S_{i+2} definiert als

$$E_k[S_i, S_{i+1}, S_{i+2}] := \kappa_i^2 \cdot (\omega_i + \omega_{i+1}), i = 0, \dots, n-2.$$

Die Krümmungsgüte von S ist gegeben als

$$E_k(S) = E_k[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-2} E[S_i, S_{i+1}, S_{i+2}],$$

und die durchschnittliche Krümmungsgüte \overline{E}_k von S definiert als

$$\overline{E}_k(S) = \overline{E}_k[S_0, \dots, S_n] := \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-2} (\omega_i + \omega_{i+1})} \cdot E_k(S).$$

Ein Verfahren zur Berechnung des Umkreises wird in Anhang A.1 gegeben. Die Verwendung des Gewichtes ω_i bewirkt in dieser Formel eine stärkere Bewertung von Krümmungen, die durch lange Leitliniensegmente berechnet werden, als solche, die durch kurze Segmente entstehen. Um eine Ausgleichswirkung zu erreichen, geht zudem der Krümmungswert quadratisch in die Bewertung ein. Auf diese Art und Weise wird der Rückgang einer starken Krümmung mehr belohnt als der einer kleineren. Die durchschnittliche Krümmungsgüte gewichtet die Krümmungen der einzelnen Rohrschnittgebiete in deren Summe mit Gewichten, deren Summe 1 ergibt. Dies wird durch die Division von $E_k(S)$ mit der Summe der Gewichte $\omega_i + \omega_{i+1}$ erreicht. Die Summe der Gewichte ist näherungsweise die Länge der Leitlinie, so dass dies auch als Elimination der Anhängigkeit von der Länge der Leitlinie verstanden werden kann, indem durch eine Größe proportional zu Länge der Leitlinie geteilt wird.

4.1.2 Umfangsgüte der Rohrschnittgebiete

In diesem Abschnitt wird die Umfangsgüte der Rohrschnittgebiete definiert. Diese errechnet sich aus den Bogenlängen der zugehörigen Schnittkonturen.

Definition 4.3

Sei C ein beschränktes Gebiet in der Ebene, dessen Rand δC von endlich vielen, einfach geschlossenen, stetigen Kurven gebildet wird. Sei $L(\delta C)$ die Länge des Randes δC von C . Dann heißt

$$E_u(C) := L(\delta C)$$

Umfangsgüte von C .

Sei $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, ein Schlauchstützstellenkantenzug. Dann ist die Umfangsgüte E_u von S_i und S_{i+1} , $i < n$, definiert als die gewichtete Summe der Umfangsgüten der Konturen C_i und C_{i+1} , d.h.

$$E_u[S_i, S_{i+1}] := \omega_i(E_u(C_i) + E_u(C_{i+1})), i = 0, \dots, n - 1.$$

Die Umfangsgüte von S definiert ist als

$$E_u(S) = E_u[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-1} E_u[S_i, S_{i+1}],$$

und die durchschnittliche Umfangsgüte \bar{E}_u von S definiert als

$$\bar{E}_u(S) = \bar{E}_u[S_0, \dots, S_n] := \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot \omega_i} \cdot E_u(S).$$

Die Verwendung der Abstände $\omega_i = \frac{1}{2}d(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_i)$ in der Formel für $E_u[S_i, S_{i+1}]$ bewirkt wie bei der Krümmungsgüte eine Gewichtung. Da sich die Strecke zwischen zwei Leitpunkten auf beide Rohrschnittgebiete bezieht, ist der Wert dieser Güte als das arithmetische Mittel der beiden betroffenen Längen der Rohrschnittgebiete gegeben.

Damit ist für den Fall, dass die Randkomponenten Polygonzüge sind, E_u schreibbar als:

Folgerung 4.4

Seien δC^j , $j = 1, \dots, m$, die Randkonturen eines von Polygonzügen berandeten, beschränkten Gebietes C in der Ebene, $\delta C^j = [\mathbf{p}_1^j, \dots, \mathbf{p}_{n_j-1}^j]$. Dann gilt

$$E_u(C) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j-1} d(\mathbf{p}_i^j, \mathbf{p}_{i-1}^j)$$

mit $\mathbf{p}_0^j := \mathbf{p}_{n_j-1}^j$.

Durch die Verwendung eines Dreiecksnetzes ist es möglich, dass ein intuitiv längerer Rand eines Rohrschnittgebietes durch ungeschickten Beschnitt kürzer wird. Dieser Umstand ist sowohl von Piepenstock [61] als auch von dem Autor beobachtet worden. Dies soll die Abbildung 4.1 verdeutlichen.

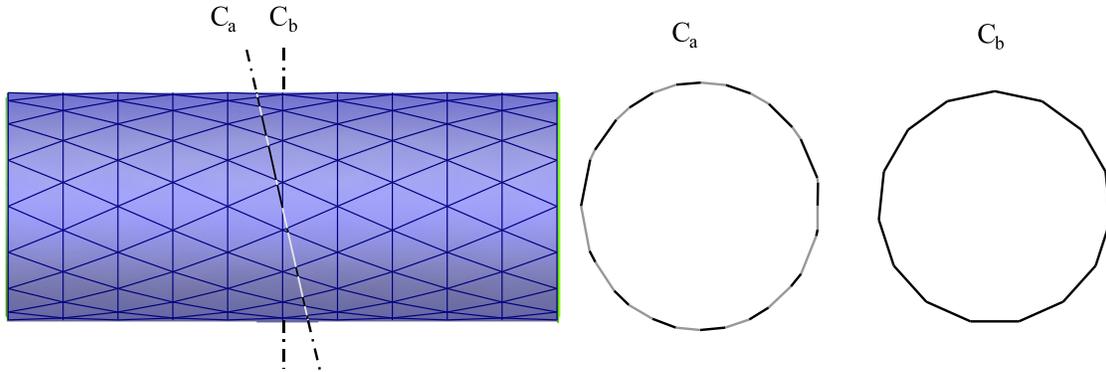


Abbildung 4.1: Schräges Rohrschnittgebiet mit kürzerem Rand als aufrechtes Rohrschnittgebiet (entnommen aus [61])

Hier ist ein vernetzter Zylinder dargestellt, der von zwei Ebenen beschnitten worden ist. Der Rand des Rohrschnittgebietes C_a ist intuitiv länger als der von C_b . Wäre der Zylinder nicht durch ein Netz approximiert sondern als parametrische Fläche gegeben, besäße C_b den kürzeren Umfang. Im Hinblick auf die Minimierung dieser Güte dürfen hierdurch Probleme und ein unerwünschtes Verhalten erwartet werden.

4.1.3 Flächengüte der Rohrschnittgebiete

In diesem Abschnitt wird die Flächengüte der Rohrschnittgebiete definiert. Diese errechnet sich aus dem Flächeninhalt der Gebiete.

Definition 4.5

Sei C ein beschränktes Gebiet in der Ebene, dessen Rand δC von endlich vielen, einfach geschlossenen stetigen Kurven gebildet wird. Sei $A(\delta C)$ der Flächeninhalt der von δC umrandeten Fläche von C . Dann heißt

$$E_f(C) := A(\delta C)$$

Flächengüte von C .

Sei $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, ein Schlauchstützstellenkantenzug. Dann ist die Flächengüte E_f von S_i und S_{i+1} , $i < n$, definiert als die gewichtete Summe der Flächengüten der Konturen C_i und C_{i+1} , d.h.

$$E_f[S_i, S_{i+1}] := \omega_i (E_f(C_i) + E_f(C_{i+1})), i = 0, \dots, n-1.$$

Die Flächengüte von S ist definiert als

$$E_f(S) = E_f[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-1} E_f[S_i, S_{i+1}],$$

und die durchschnittliche Flächengüte \overline{E}_f von S gegeben als

$$\overline{E}_f(S) = \overline{E}_f[S_0, \dots, S_n] := \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot \omega_i} E_f(S).$$

Eine Motivation dieser Güte ist analog zu der Begründung der Formel für E_u zu sehen. Sollte das Rohr als ein Dreiecksnetz gegeben sein, errechnet sich die Flächengüte als:

Satz 4.6

Seien δC^j , $j = 1, \dots, m$, die Randkonturen eines von Polygonzügen berandeten, zusammenhängenden, beschränkten Gebietes C in der Ebene, $\delta C^j = [\mathbf{p}_1^j, \dots, \mathbf{p}_{n_j-1}^j]$, wobei C^1 die Randkontur ist, die alle anderen beinhaltet. Dann gilt mit

$$E_f(C^j) := \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{n_j-1} \mathbf{p}_i^j \times (\mathbf{p}_{i+1}^j - \mathbf{p}_i^j) \right\|,$$

$$j = 1, \dots, m, \mathbf{p}_{n_j}^j := \mathbf{p}_1^j:$$

$$E_f(C) := E_f(C^1) - \sum_{j=2}^m E_f(C^j).$$

Beweis

O.B.d.A. kann angenommen werden, dass das Gebiet C in der $(x, y, 0)$ Ebene liegt. Dann ist der Beweis dieser Aussage in [10], Abschnitt 3.5.2.1, Punkt 11 (Flächeninhalt eines Vielecks), zu finden.

□

Bedingt durch die Diskretisierung wird auch die Minimierung dieser Güte zu analogen Problemen wie die der Umfangsgüte führen.

4.1.4 Normierte Zentrumsgüte der Leitlinie

In diesem Abschnitt wird Zentrumsgüte der Leitlinie definiert. Die verwendete Formel wird dabei aus der Physik abgeleitet, indem ein Modell mit gespannten Federn betrachtet wird.

Definition 4.7

Sei C ein beschränktes Gebiet in der Ebene, dessen Rand δC von endlich vielen, einfach geschlossenen stetigen Kurven gebildet wird, und \mathbf{p} ein Punkt in C . Sei $\delta C(s)$, $s \in [0, L(\delta C)]$, $L(\delta C)$ die Länge des Randes δC von C , eine Bogenlängenparametrisierung von δC . Dann heißt

$$E_z(\mathbf{p}, C) := \frac{1}{L(\delta C)} \int_0^{L(\delta C)} d(\mathbf{p}, \delta C(s))^2 ds$$

normierte Zentrumsgüte von \mathbf{p} bezüglich C .

Sei $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, ein Schlauchstützstellenkantenzug. Dann ist die normierte Zentrumsgüte E_z von S_i und S_{i+1} , $i < n$, definiert als die gewichtete Summe der normierten Zentrumsgüten der Punkte \mathbf{r}_i bezüglich der Konturen C_i und C_{i+1} , d.h.

$$E_z[S_i, S_{i+1}] := \omega_i (E_z(\mathbf{r}_i, C_i) + E_z(\mathbf{r}_{i+1}, C_{i+1})), i = 0, \dots, n-1.$$

Die normierte Zentrumsgüte von S ist definiert als

$$E_z(S) = E_z[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-1} E_z[S_i, S_{i+1}],$$

und für die durchschnittliche Zentrumsgüte \bar{E}_z von S gegeben als

$$\bar{E}_z(S) = \bar{E}_z[S_0, \dots, S_n] := \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot \omega_i} \cdot E_z(S).$$

Auch hier ist die Motivation für die Verwendung der Abstände als Gewichte analog zu der Begründung von E_u zu sehen.

Bemerkung 1

Ein Punkt, der minimale Zentrumsgüte besitzt, liegt "gut im Zentrum" der entsprechenden Kurve. Dies kann physikalisch motiviert werden:

Man stelle sich einen Kreis vor. Zu jedem Punkt des Kreises gibt es einen gegenüberliegenden Punkt, so dass die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten den Mittelpunkt schneidet. In jedem Punkt liege zunächst eine entspannte Feder, wobei alle Federn von der gleichen Bauart sind.

Zunächst werden die Federn zweier beliebiger, gegenüberliegender Punkte miteinander verbunden. Der Gleichgewichtszustand wird der Mittelpunkt sein. In das System aus zwei gespannten Federn werden nun zwei weitere Federn aus gegenüberliegenden Punkten hinzugefügt. Der Gleichgewichtspunkt verändert sich nicht.

Dieses Vorgehen wird für jeden Punkt fortgesetzt.

Die Kraft, um eine Feder zu spannen, beträgt

$$F = k \cdot r,$$

k die Federkonstante, r der Radius des Kreises (siehe [73]). Die Energie, die aufgewendet werden muss, um die Feder zu spannen, ist

$$E(s) = \frac{1}{2} k \cdot d(\mathbf{p}(s), \mathbf{p})^2,$$

für alle $\mathbf{p}(s) \in \delta C$.

Die Gesamtenergie des Systems beträgt daher

$$\int_{\delta C} E(s) ds.$$

Dies ist gerade die obige Gleichung, sofern man mit einer gedachten Feder mit Federkonstante $k = \frac{2}{L(\delta C)}$ rechnet.

Zusammengefasst bedeutet dies, dass die Zentrumsgüte minimal ist, wenn \mathbf{p} ein Gleichgewichtspunkt ist.

Für den Fall, dass die Randkomponenten Polygonzüge sind, lässt sich die normierte Zentrumsgüte eines Punktes \mathbf{p} als gewichtete Summe seiner quadratischen Abstände von den Eckpunkten der Randkomponenten schreiben:

Satz 4.8

Seien δC^j , $j = 1, \dots, m$, die Randkonturen eines von Polygonzügen berandeten beschränkten Gebietes C in der Ebene, $\delta C^j = [\mathbf{p}_1^j, \dots, \mathbf{p}_{n_j-1}^j]$, \mathbf{p} ein Punkt in der Ebene. Dann gilt

$$E_z(\mathbf{p}, C) := \frac{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_j-1} w_i^j d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i^j)^2 - \frac{1}{6} d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})^2 \right)}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j-1} w_i^j},$$

mit

$$w_i^j = \frac{1}{2} \cdot (d(\mathbf{p}_i^j, \mathbf{p}_{i-1}^j) + d(\mathbf{p}_i^j, \mathbf{p}_{i+1}^j)),$$

wobei $\mathbf{p}_0^j := \mathbf{p}_{n_j-1}^j$ und $\mathbf{p}_{n_j}^j := \mathbf{p}_1^j$.

Beweis

Sei $m = 1$, d.h. C hat nur einen Rand. Sei $\partial C = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}]$. Zu zeigen ist, dass $E_z(\mathbf{p}, C) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)^2 - \frac{1}{6} d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}$, wobei $w_i = \frac{1}{2} \cdot (d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i-1}) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}))$. Sei $L(\partial C)$ die Länge des

Randes von C . Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\partial C) &= \sum_{i=1}^{n-2} d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) + d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{n-1}) \\ &= d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + d(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) + \dots + d(\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n-1}) + d(\mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_1) \\ &= \frac{1}{2} d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \frac{1}{2} (d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + d(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)) + \frac{1}{2} (d(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) + d(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2} (d(\mathbf{p}_{n-2}, \mathbf{p}_{n-1}) + d(\mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_1)) + \frac{1}{2} d(\mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_1) \\ &= \frac{1}{2} d(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + w_2 + w_3 + \dots + w_{n-1} + \frac{1}{2} d(\mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_1) \\ &= w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} w_i. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$(4.1) \quad \int_0^{L(\delta C)} d(\mathbf{p}, \delta C(s))^2 ds = \sum_{i=1}^{n_j-1} w_i^j d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i^j)^2 - \frac{1}{6} d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})^2.$$

Sei $L_1 := 0$ und L_i die Bogenlänge von \mathbf{p}_i bis \mathbf{p}_{i+1} . Es ist

$$\int_0^{L(\delta C)} d(\mathbf{p}, \delta C(s))^2 ds = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{L_i}^{L_{i+1}} d(\mathbf{p}, \delta C(s))^2 ds.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_{L_i}^{L_{i+1}} d(\mathbf{p}, \delta C(s))^2 ds \\
 \stackrel{\delta C \text{ ist auf BL param.}}{=} & \int_{L_i}^{L_{i+1}} d\left(\mathbf{p}, \left[\left(1 - \frac{s - L_i}{L_{i+1} - L_i}\right) \mathbf{p}_i + \frac{s - L_i}{L_{i+1} - L_i} \mathbf{p}_{i+1}\right]\right)^2 ds \\
 = & \int_0^1 (L_{i+1} - L_i) \cdot d(\mathbf{p}, [(1-t)\mathbf{p}_i + t\mathbf{p}_{i+1}])^2 dt.
 \end{aligned}$$

Hierbei gilt das letzte Gleichheitszeichen nach der Substitution

$$t = \frac{s - L_i}{L_{i+1} - L_i}.$$

Es gilt

$$(4.2) \quad \int_0^1 d(\mathbf{p}, [(1-t)\mathbf{p}_i + t\mathbf{p}_{i+1}])^2 dt = \frac{1}{2}d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)^2 + \frac{1}{2}d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{i+1})^2 - \frac{1}{6}d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})^2$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 E_z(\mathbf{p}, C) &= \frac{1}{L(\delta C)} \int_0^{L(\delta C)} d(\mathbf{p}, \delta C(s))^2 ds \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)^2 - \frac{1}{6}d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})^2}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i},
 \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung für $m = 1$.

Sei $m > 1$. Mit einer analogen Rechnung wie für $m = 1$ folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned}
 E_z(\mathbf{p}, C) & \stackrel{\text{nach Umparam. von } \delta C^j}{=} \frac{1}{\sum_{j=1}^m L(\delta C^j)} \sum_{j=1}^m \int_0^{L(\delta C^j)} d(\mathbf{p}, \delta C^j(s))^2 ds \\
 & = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_j-1} w_i^j d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i^j)^2 - \frac{1}{6}d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})^2 \right)}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j-1} w_i^j}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Daraus folgt dann der Spezialfall:

Satz 4.9

Für den Fall, dass der Rand aus nur einer einzigen Komponente $\delta C = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}]$ besteht, wird das Minimum der normierten Zentrumsgüte an einem kantenlängengewichteten Schwerpunkt

$$(4.3) \quad \mathbf{s} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}$$

erreicht, mit

$$(4.4) \quad w_i = \frac{1}{2} \cdot (d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i-1}) + d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1})),$$

wobei $\mathbf{p}_0 := \mathbf{p}_{n-1}$ und $\mathbf{p}_n := \mathbf{p}_1$.

Beweis

Betrachte die Abbildung

$$\mathbf{p} \mapsto E(\mathbf{p}) = E_z(\mathbf{p}, C) := \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}.$$

Der restliche Term ist unabhängig von \mathbf{p} und hat damit für die folgende Betrachtung keine Bedeutung.

Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist $E'(\mathbf{p})_{\mathbf{p}} = 0$, wobei $E'(\mathbf{p})_{\mathbf{p}}$ den Vektor der partiellen Ableitungen von $E(\mathbf{p})$ nach den Komponenten von \mathbf{p} bezeichnet. Dies bedeutet

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)^2 \right)' \stackrel{!}{=} 0.$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i d(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i)^2 \right)'_{\mathbf{p}} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} w_i (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i \mathbf{p} - \sum_{i=1}^{n-1} w_i \mathbf{p}_i \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{p} &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}. \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für ein Minimum ist, dass die zweite Ableitung positiv definit ist, also $\nabla E > 0$

$$\begin{aligned} \nabla E &= \frac{2}{\sum_{i=1}^{n-1} w_i} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} w_i & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{n-1} w_i & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{n-1} w_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Die Abbildungen 4.2 und 4.3 illustrieren den Vorteil der Gewichtung gegenüber Berechnung eines Schwerpunktes als Mittelwert der Eckpunkte des Randpolygonzuges. Der durch die Gewichtung gewonnene Punkt liegt zentraler relativ zum gegebenen Rand.

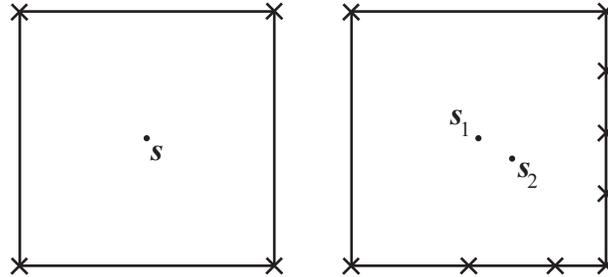


Abbildung 4.2: Gewichteter (s_1) und nicht-gewichteter (s_2) Knotenschwerpunkt in einem Quadrat

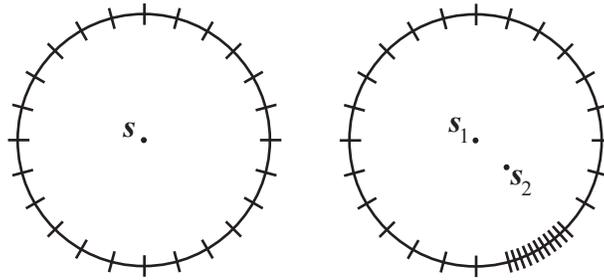


Abbildung 4.3: Gewichteter (s_1) und nicht-gewichteter (s_2) Knotenschwerpunkt in einem Kreis

4.1.5 Parallelitätsgüte und tangentielle Ausrichtungsgüte der Rohrschnittgebiete

Die in diesem Abschnitt präsentierte Parallelitätsgüte und die tangentielle Ausrichtungsgüte gehen auf Piepenstock [61] zurück. Da die Formeln sehr eng miteinander verknüpft sind, werden sie zusammen in einem Abschnitt behandelt.

Definition 4.10

Sei $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, ein Schlauchstützstellenkantenzug und

$\mathbf{d}_i := \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|}$ der Differenzvektor zwischen zwei Leitpunkten,

$\mathbf{t}_i := \frac{\mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_{i-1} + \mathbf{d}_i\|}$ ein geschätzter Tangentialvektor an \mathbf{r}_i ,

\mathbf{n}_i der normierte Normalenvektor der Ebene von C_i .

Dann ist die Parallelitätsgüte E_p von S_i, S_{i+1} , $i < n$, definiert als

$$E_p[S_i, S_{i+1}] := \omega_i \cdot \{|\arcsin(\|\mathbf{n}_i \times \mathbf{d}_i\|)| + |\arcsin(\|\mathbf{n}_{i+1} \times \mathbf{d}_{i+1}\|)|\}, i = 0, \dots, n - 1.$$

Die Parallelitätsgüte von S definiert ist als

$$E_p(S) = E_p[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-1} E_p[S_i, S_{i+1}],$$

und die durchschnittliche Parallelitätsgüte \overline{E}_p von S gegeben als

$$\overline{E}_p(S) = \overline{E}_p[S_1, \dots, S_n] := \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot \omega_i} \cdot E_p(S).$$

Die tangentielle Ausrichtungsgüte E_l von S_i, S_{i+1} und $S_{i+2}, i < n - 1$, ist definiert als

$$E_l[S_i, S_{i+1}, S_{i+2}] := (\omega_i + \omega_{i+1}) \cdot |\arcsin(\|\mathbf{n}_i \times \mathbf{t}_i\|)|, i = 0, \dots, n - 2.$$

Die tangentielle Ausrichtungsgüte von S ist definiert als

$$E_l(S) = E_l[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-2} E_l[S_i, S_{i+1}, S_{i+2}],$$

und die durchschnittliche, tangentielle Ausrichtungsgüte \overline{E}_l von S gegeben als

$$\overline{E}_l(S) = \overline{E}_l[S_0, \dots, S_n] := \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-2} \omega_i + \omega_{i+1}} \cdot E_l(S).$$

In der Formel dieser Güten wird mit der Formel $\arcsin(\|\mathbf{n} \times \mathbf{d}\|)$ für zwei normierte Vektoren \mathbf{n} und \mathbf{d} der Wert des eingeschlossenen Winkels zwischen \mathbf{n} und \mathbf{d} berechnet. Dies kann über die Beziehung $\|\mathbf{n} \times \mathbf{d}\| = \|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{d}\| \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$ eingesehen werden, wobei $\alpha \in [0, \pi]$ der von \mathbf{n} und \mathbf{d} eingeschlossene Winkel ist (vgl. [10]).

Die Wahl der tangentialen Ausrichtungsgüte soll bewirken, dass die Ebenen der Schnittkonturen möglichst senkrecht auf der Leitlinie stehen, d.h. dass die Tangenten die Normalenvektoren der Schnittebenen sind. Dann ist $\mathbf{n}_i \times \mathbf{t}_i$ der Nullvektor und der Arcussinus Null. Dagegen erzwingt die Parallelitätsgüte eine möglichst parallele Ausrichtung benachbarter Konturen, d.h. dass die Differenz \mathbf{d}_i der Normalenvektor \mathbf{n}_i der Schnittebene ist, so dass $\mathbf{d}_i \times \mathbf{n}_i$ der Nullvektor ist und der Arcussinus Null ist. Dies soll durch die Abbildung 4.4 weiter verdeutlicht werden. Die Wahl der Gewichte

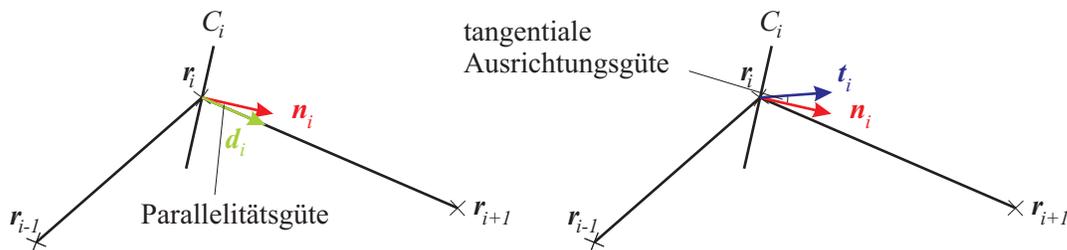


Abbildung 4.4: Unterschied zwischen Parallelitätsgüte und tangentialer Ausrichtungsgüte anhand eines Rohrschnittgebietes C_i und Leitpunkten $\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}$.

verläuft auch hier analog zu denen der Umfangsgüte beziehungsweise der Krümmungsgüte.

4.1.6 Oberflächensteigungsgüte der Rohrschnittgebiete

Die in diesem Abschnitt präsentierte Oberflächensteigungsgüte der Rohrschnittgebiete geht auf Piepenstock [61] zurück. Sie beschreibt den Winkel zwischen der Tangente der Leitlinie und einem mittleren Steigungsvektor des Rohrschnittgebietes auf der Rohroberfläche.

Definition 4.11

Sei $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, ein Schlauchstützstellenkantenzug und seien δC^j , $j = 1, \dots, m$, die Randkonturen eines von Polygonzügen berandeten beschränkten Gebietes C in der Ebene, $\delta C^j = [\mathbf{p}_1^j, \dots, \mathbf{p}_{n_j-1}^j]$. Sei

\mathbf{n} der normierte Normalenvektor der Schnittkontur,

\mathbf{n}_k^j der normierte Normalenvektor des durch die Schnittebene geschnittenen Dreiecks, das die Punkte \mathbf{p}_k^j und \mathbf{p}_{k-1}^j von δC^j erzeugt,

\mathbf{g}_i^j eine geschätzte, normierte Oberflächensteigung von δC^j mit

$$\mathbf{g}_i^j := \frac{\sum_{k=1}^{n_i^j-1} d(\mathbf{p}_k^j, \mathbf{p}_{k-1}^j) \frac{\mathbf{n} - \mathbf{n}_k^j \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_k^j \rangle}{\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_k^j \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_k^j \rangle\|^3}}{\left\| \sum_{k=1}^{n_i^j-1} d(\mathbf{p}_k^j, \mathbf{p}_{k-1}^j) \frac{\mathbf{n} - \mathbf{n}_k^j \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_k^j \rangle}{\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_k^j \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_k^j \rangle\|^3} \right\|}$$

wobei $\mathbf{p}_0^j := \mathbf{p}_{n_j-1}^j$

Dann ist die Oberflächensteigungsgüte E_o bezüglich C gegeben als

$$E_o(C_i) := \sum_{j=1}^m (1 - |\arcsin(\|\mathbf{n} \times \mathbf{g}_i^j\|)|), i = 0, \dots, n-1.$$

Die Oberflächensteigungsgüte E_o von S_i und S_{i+1} ist definiert als

$$E_o[S_i, S_{i+1}] := \omega_i (E_o(C_i) + E_o(C_{i+1})).$$

Die Oberflächensteigungsgüte von S ist definiert als

$$E_o(S) = E_o[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-1} E_o[S_i, S_{i+1}],$$

und die durchschnittliche Oberflächensteigungsgüte \bar{E}_o von S ist gegeben als

$$\bar{E}_o(S) = \bar{E}[S_0, \dots, S_n] := \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot \omega_i} E_o(S).$$

Die Wahl der Gewichte ist auch hier analog zu der der Umfangsgüte zu sehen.

Mit dieser Heuristik wird ein Maß berechnet, das angibt, wie ausgeglichen die Dreiecke der Rohroberfläche entlang der Konturen mit zugehöriger Schnittebene geneigt sind. Dazu wird angenommen, dass bei ausgeglichenen Schnittkonturen die gewichtete Summe aller Dreiecksnormalen senkrecht zu der Normalen der Schnittebene steht und damit der Arcussinus den Wert Eins hat.

Zur Berechnung eines solchen Maßes wird zu jedem Dreieck, das eine Schnittkontur auf der Rohroberfläche durchläuft, ein Steigungsvektor berechnet. Dieser Vektor ist die Projektion der Schnittebenenormalen auf das entsprechende Dreieck. Die Projektion wird mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von E. Schmidt berechnet [27], d.h. bei entsprechender Notation

$$\frac{\mathbf{n} - \mathbf{n}_k^j \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_k^j \rangle}{\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_k^j \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_k^j \rangle\|}.$$

Bei zahlreichen Tests hat sich die Skalierung dieses Vektors mit

$$\frac{d(\mathbf{p}_k^j, \mathbf{p}_{k-1}^j)}{\|\mathbf{n} - \mathbf{n}_k^j \cdot \langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_k^j \rangle\|^2}$$

als günstig herausgestellt.

4.1.7 Verknüpfung der Teilzielfunktionen

Nachdem alle Teilzielfunktionen definiert wurden, stellt sich die Frage ihrer Verknüpfung. Die Schwierigkeit ist, dass die einzelnen Zielfunktionen im Konflikt zueinander stehen, d.h. die Optimierung der einen Teilzielfunktion bewirkt eine Verschlechterung einer anderen Teilzielfunktion. Optimierungsprobleme kombiniert aus mehreren Teilzielproblemen werden als mehrkriterielle Optimierungsprobleme bezeichnet [20]. Bei der Analyse der potentiell interessanten Lösungen ist der Begriff der Pareto-Menge von Bedeutung [52]. Diese besteht aus den Lösungen, deren Komponentenstapel nicht durch andere Tupel dominiert werden. Ein n -Tupel A wird von einem anderen n -Tupel B dominiert, wenn A in keiner Komponente kleiner als B ist. Dabei wird angenommen, dass alle Komponentenfunktionen zu minimieren sind. Zur Spezifikation einer geeigneten Lösung aus der Pareto-Menge ist die Konstruktion eines unikriteriellen Optimierungsproblems durch Bildung einer gewichteten Summe der Teilzielfunktionen ein weit verbreiteter Ansatz [52]. Die Auswahl wird dabei durch die Wahl der Gewichte gesteuert.

Definition 4.12

Seien $E_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, z$, Teilzielfunktionen über der Menge der Schlauchstützstellenkantenzüge. Eine Funktion der Form

$$E(\cdot) := \sum_{i=1}^z \alpha_i \cdot E_i(\cdot)$$

$\alpha_i \geq 0$, wird als linear gewichtete Zielfunktion bezeichnet. Ein Schlauchstützstellenkantenzug heißt optimal, wenn er $E(\cdot)$ minimiert.

Neben dem Auffinden eines optimalen Schlauchstützstellenkantenzuges stellt sich die Frage nach der Wahl der Gewichte, so dass dieser auch den gewünschten Anforderungen genügt. Die gewünschten Anforderungen müssen subjektiv durch die anwendenden Personen eingebracht werden können, wozu die interaktive Exploration ein gangbarer Weg ist. Wünschenswert hierbei ist, einen Satz von Gewichten zu finden, der für eine größere Menge von Rohren gute Lösungen liefert. Die Problematik der Wahl der Gewichte wird in einem allgemeinerem Rahmen in Abschnitt 7.3 nochmals aufgegriffen.

Beim hier behandelten Problem der Schlaucheinpassung sind zusätzlich zur Zielfunktion noch die Nebenbedingungen zu beachten, die sich implizit aus den Definitionen von approximativen Schlauchstützstellenkantenzügen beziehungsweise stückweise linearen Schlauchapproximationen ergeben. Im erstgenannten Fall sind dies die Disjunktheit der Schlauchstützstellen und der Verlauf der Leitlinie im Inneren des Rohres. Demnach entspricht das vorliegende Optimierungsproblem einer Optimierung mit Nebenbedingungen.

4.2 Zielfunktion für die Schlauchapproximation

Im vorherigen Abschnitt wurden Zielfunktionen zur Bewertung der Qualität von Schlauchstützstellenkantenzügen angegeben. Die Definition von Zielfunktionen für stückweise lineare Schlauchapproximationen wird im Folgenden darauf zurückgeführt. Dies geschieht über die diskretisierte lineare

Schlauchapproximation aus Abschnitt 3.2.3. Eine stückweise lineare Schlauchapproximation kann unmittelbar zu einer diskretisierten stückweise linearen Schlauchapproximation erweitert werden, indem die linearen Teile entsprechend diskretisiert werden. Das Ergebnis ist ein Schlauchstützstellenkantenzug. Die Bewertung dieses Schlauchstützstellenkantenzuges mit den Gütefunktionen aus den vorigen Abschnitten liefert die gesuchte Bewertung der gegebenen stückweise linearen Schlauchapproximation.

Diese Vorgehensweise wird im Folgenden auf eine Weise formalisiert, die es erlaubt, das Verfahren der dynamischen Programmierung, das im nächsten Abschnitt für die Approximation mit Schlauchstützstellenkantenzügen ausgeführt wird, unmittelbar auf die stückweise lineare Schlauchapproximation zu übertragen. Der Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass alle Teilzielfunktionen E_{en} aus den vorigen Kapiteln die Form

$$E_{en}[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-k} E_{en}[S_i, \dots, S_{i+k}]$$

haben, wobei $[S_0, \dots, S_n]$ der gegebene Schlauchstützstellenkantenzug ist. Bei den aufgeführten Gütefunktionen ist $k = 1$ oder $k = 2$. Die korrespondierenden Teilzielfunktionen E_{en}^* für stückweise lineare Schlauchapproximationen werden auf analoge Weise definiert, wobei die Schlauchstützstellen in diesem Fall die einzelnen linearen Schlauchapproximationen begrenzen. Dies ist Gegenstand der folgenden Definition, die auf die Notation von Definition 2.29 zurückgreift.

Definition 4.13

Sei

- $S = (E, C, \mathbf{r})$ eine stückweise lineare Schlauchapproximation mit $t_i^- = t_i^+$ für $i = 0, \dots, n$,
- $S_i := (C(E_i(t_i)), \mathbf{r}(C(E_i(t_i))))$ mit $E_{i-1}(t_i) = E_i(t_i)$ für $i = 1, \dots, n-1$,
- $S_0 := (C(E_0(t_0)), \mathbf{r}(C(E_0(t_0))))$,
- $S_n := (C(E_{n-1}(t_n)), \mathbf{r}(C(E_{n-1}(t_n))))$.
- die Schlauchapproximation zwischen S_i und S_{i+1} linear und $[S_i, S_1^{i,i+1}, S_2^{i,i+1}, \dots, S_{i+1}]$ eine diskretisierte lineare Schlauchapproximation hiervon, $i = 0, \dots, n-1$,
- E_{en} eine $(k+1)$ -stellige Gütefunktion für Schlauchstützstellenkantenzüge, $k \geq 0$,
d.h. $E_{en}[S'_0, \dots, S'_m] := \sum_{i=0}^{m-k} E_{en}[S'_i, \dots, S'_{i+k}]$ für einen Schlauchstützstellenkantenzug $[S'_0, \dots, S'_m]$.

Dann ist die Gütefunktion E_{en}^* für stückweise lineare Schlauchapproximationen für $[S_i, \dots, S_{i+k}]$, $i = 0, \dots, n-k$, gegeben als

$$E_{en}^*[S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+k}] := E_{en}[S_i, S_1^{i,i+1}, S_2^{i,i+1}, \dots, S_{i+1}, \dots, S_{n^{i+k-1,i+k}}, S_{i+k}]$$

und für $S = (E, C, \mathbf{r})$ durch

$$E_{en}^*(S) := E_{en}^*[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-k} E_{en}^*[S_i, \dots, S_{i+k}].$$

Obwohl damit letztendlich die Schlauchapproximation auch durch eine spezielle Art der Approximation mit Schlauchstützstellenkantenzügen durchgeführt wird, kann ein Vorteil darin liegen, dass sie in vielen Fällen mit weniger freien Parametern, nämlich linearen Segmenten beziehungsweise explizit gegebenen Schlauchstützstellen auskommen kann. Dies ist besonders bei dem recht rechenaufwändigen Verfahren des nächsten Kapitels, das auf der dynamischen Programmierung beruht, von Relevanz.

Kapitel 5

Schlaucheinpassung mit dynamischer Programmierung

Ausgehend von der Formulierung des Schlaucheinpassungsproblems als Optimierungsproblem in Anlehnung an die Einpassung aktiver Konturen, greift dieses Kapitel den Ansatz der dynamischen Programmierung zu dessen Lösung auf. Abschnitt 5.1 gibt eine Übersicht über das Verfahren, das in den darauffolgenden Abschnitten ausgearbeitet wird. Dies beginnt mit der Formulierung der Problemstellung in Bellman'scher Form und einem Nachweis der Bellman'schen Optimalitätsbedingung (Abschnitt 5.2). Diese Formulierung wird dann etwas abgewandelt, indem die zu Grunde liegende Ordnung von Schlauchstützstellen aus Effizienzgründen etwas eingeschränkt wird (Abschnitt 5.3). Der Suchraum des Optimierungsproblems ergibt sich dann als transitiver Kern der Ordnung, was Gegenstand der Abschnitte 5.4 und 5.5 ist. Auf dieser Grundlage folgt dann in den Abschnitten 5.6 bis 5.8 die Beschreibung des eigentlichen Verfahrens. Das Kapitel endet mit einer experimentellen Analyse des Verfahrens in Abschnitt 5.9.

5.1 Schlaucheinpassung mit dynamischer Programmierung

In diesem Kapitel wird das Schlaucheinpassungsproblem im Wesentlichen in Form der Berechnung von approximierenden Schlauchstützstellenkantenzügen zu einem Rohr behandelt. Grundsätzlich kann die Version der stückweise linearen Schlauchapproximation entsprechend behandelt werden. In diesem Fall sind zur Berechnung der entsprechenden Zielfunktion die Schlauchstützstellen durch Interpolation zu verdichten, so wie dies am Ende von Kapitel 4 beschrieben wird.

Es wird ein Algorithmus auf Basis der dynamischen Programmierung vorgestellt, der eine gemäß der Zielfunktion "gute" Leitlinie zu einem Rohr ermittelt. Notwendige Bedingung für die Anwendung der dynamischen Programmierung (vgl. [6], [41], [76]) ist, dass die Gesamtaufgabe in gleichartige Teilprobleme aufgespalten werden kann und sich eine optimale Gesamtlösung aus optimalen Lösungen der Teilprobleme zusammensetzen lässt (Bellman'sches Optimalitätsprinzip, vgl. [6]). Dabei werden die kleinsten Teilprobleme direkt gelöst. Die optimalen Lösungen der nächstgrößeren Teilprobleme werden dann aus den bereits bekannten optimalen Lösungen der kleineren Teilprobleme zusammengesetzt. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, bis eine optimale Gesamtlösung gefunden ist.

Der Algorithmus gliedert sich in drei Schritte:

1. **Ermittlung einer Konnektivitätslinie:** Die Konnektivitätslinie soll eine kürzeste Verbindung der beiden Randkonturen sein.

2. **Wahl von Konstruktionspunkten:** Auf der Konnektivitätslinie werden Konstruktionspunkte ausgewählt, an denen vorgegebene Konturenmenge generiert werden.
3. **Auffinden der Rohrschnittgebiete:** Es wird versucht, zu jedem Konstruktionspunkt ein Rohrschnittgebiet zu wählen, so dass die Zielfunktion minimiert wird. Dies geschieht mit der Methode der dynamischen Programmierung.

Für die Rohrschnittgebiete wird eine neue partielle Ordnung eingeführt. Die bisherige Ordnung \leq_T hat den Nachteil, dass im Allgemeinen für zwei Rohrschnittgebiete C_1 und C_2 neue Teilrohre gebildet werden müssen und zusätzlich überprüft werden muss, ob C_1 und C_2 jeweils in einem der neuen Teilrohre enthalten ist. Statt dessen wird eine Ordnung eingeführt, die die Konnektivitätslinie gemäß des Satzes 2.10 verwendet. Dieser Test benötigt deutlich weniger Rechenzeit.

Das präsentierte Verfahren nutzt gegenüber der direkten Anwendung der dynamischen Programmierung die spezielle Struktur des Problems, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Damit ist eine Suchraumeinschränkung verbunden, die möglicherweise globale Optima bezüglich der ursprünglichen Problemdiskretisierung ausschließt, was jedoch, wie unten argumentiert werden wird, auf Grund der Struktur des Problems nicht die Regel sein muss. Die Vorgehensweise besteht darin, sich auf solche Schlauchstützstellenleitlinien zu beschränken, die möglichst für jeden Konstruktionspunkt genau eine Schlauchstützstelle enthalten. Da dies, wie an einem Beispiel gezeigt wird, im Allgemeinen nicht erreichbar ist, werden stattdessen Schlauchstützstellenfolgen betrachtet, bei denen die korrespondierenden Rohrschnittgebiete von zwei benachbarten Schlauchstützstellen im transitiven Kern der partiellen Ordnung der Rohrschnittgebiete in Beziehung zueinander stehen. Die dadurch bewirkte Reduktion der kombinatorischen Anzahl der Lösungskandidaten ist nicht kritisch, da in einer allgemeinen Lösung auch für die nicht berücksichtigten Konstruktionspunkte eine Schlauchstützstelle existieren sollte, die sich in die betrachtete Lösung einpasst. Wenn die Kandidatenmenge an den Konstruktionspunkten hinreichend umfassend gewählt wird und es überhaupt eine Lösung gibt, sollte es eine eingeschränkte Lösung geben, die der allgemeinen Lösung nahe kommt oder sogar eine verdichtete Erweiterung hiervon ist. Damit ist der zu erwartende Verlust an günstigen Lösungen durch diese Einschränkung gering. Dies soll durch die Abbildung 5.1 weiter verdeutlicht werden. Hier ist

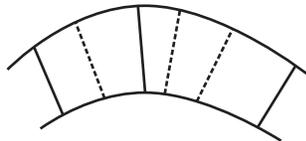


Abbildung 5.1: Rohrschnittgebietfolge, die die Zielfunktion tatsächlich minimiert (durchgezogene Linien) und ein mit dem hier verwendeten Verfahren gefundenes Minimum (durchgezogene und gestrichelte Linien).

ein Teil eines Rohres mit Rohrschnittgebieten abgebildet. Das tatsächliche Optimum der Zielfunktion sei durch die durchgezogen dargestellten Rohrschnittgebiete symbolisiert. Die gestrichelt skizzierten Rohrschnittgebiete zusammen mit den anderen Rohrschnittgebieten sollen das durch dieses Verfahren generierte Optimum zeigen.

5.2 Formulierung als dynamisches Programmierproblem

Die Bestimmung von approximierenden Schlauchstützstellenkantenzügen mit dynamischer Programmierung geschieht auf einer endlichen Kandidatenmenge \mathcal{S} von Schlauchstützstellen.

Definition 5.1

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, \mathcal{C}_S eine endliche Menge von trennenden Rohrschnittgebieten und den Öffnungen R_a und R_e mit einer partiellen Ordnung \leq . Sei \mathcal{S} eine endliche Menge von Schlauchstützstellen $S = (C, r)$ von W mit $C \in \mathcal{C}_S$. Ein gerichteter Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{K})$ heißt Schlauchstützstellengraph, wenn für alle Kanten $(S_1, S_2) \in \mathcal{K}$, $S_1 = (C_1, r_1)$, $S_2 = (C_2, r_2)$, gilt:

1. $C_1 \leq C_2$.
2. Die Strecke zwischen r_1 und r_2 ist vollständig im Inneren von W .
3. Falls eine stückweise lineare Schlauchapproximation ermittelt werden soll, wird zusätzlich gefordert, dass $W(C_1, C_2)$ ein Teilrohr ist, auf dem eine lineare Schlauchapproximation existiert.

Der Schlauchstützstellengraph ist azyklisch, da die partielle Ordnung \leq azyklisch ist. Da jeder Teilgraph eines gerichteten, azyklischen Graphen azyklisch ist und jeder gerichtete azyklische Graph mindestens eine Quelle, d.h. einen Knoten mit nur auswärts gerichteten Kanten, und eine Senke, d.h. einen Knoten mit nur einwärts gerichteten Kanten, enthält, ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 5.2

Gegeben sei ein Schlauchstützstellengraph $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{K})$ eines Rohres $W = W(C_a, C_e)$. Eine disjunkte Zerlegung von \mathcal{S} in Teilmengen \mathcal{S}_i , $i = 0, \dots, m$, heißt von \mathcal{G} induzierte Schichtenzerlegung von \mathcal{S} , wenn gilt:

1. \mathcal{S}_0 enthält genau die Quellen von \mathcal{G} .
2. \mathcal{S}_{i+1} enthält genau die Quellen der nichtleeren Teilgraphen von \mathcal{G} , die durch die Knotenmenge $\mathcal{S} - \bigcup_{j=0}^i \mathcal{S}_j$ induziert werden.

In der Abbildung 5.2 ist ein Beispielgraph dargestellt, wobei die Kästen Schlauchstützstellen und die Pfeile Kanten repräsentieren.

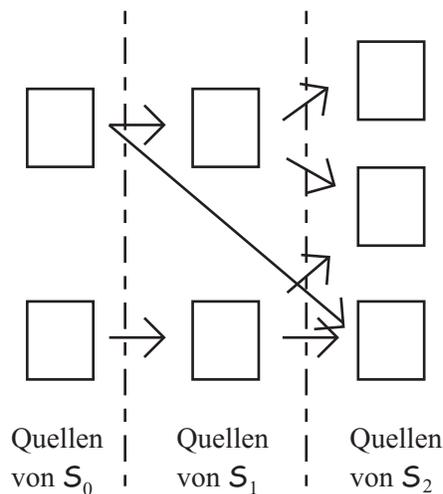


Abbildung 5.2: Schichtenzerlegung

Definition 5.3

Sei

- $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{K})$ ein Schlauchstützstellengraph,
- $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_e \subseteq \mathcal{S}$ disjunkte Mengen aus unabhängigen Knoten,
- E eine linear gewichtete Zielfunktion aus Definition 4.12, die jedem Weg der Länge $k + 1$ in \mathcal{G} einen Gütwert zuordnet, $k \geq 1$. Die Länge eines Weges wird durch die Anzahl seiner Knoten gemessen.

Das Wegoptimierungsproblem besteht im Auffinden eines Weges $[S_0, \dots, S_n]$, $(S_i, S_{i+1}) \in \mathcal{K}$, $i = 0, \dots, n - 1$, $n \geq k$, mit $S_0 \in \mathcal{S}_a$, $S_n \in \mathcal{S}_e$, der für die Zielfunktion

$$E[S_0, \dots, S_n] := \sum_{i=0}^{n-k} E[S_i, \dots, S_{i+k}]$$

unter allen solchen Wegen den kleinsten Wert liefert.

Im Folgenden werden \mathcal{S}_a und \mathcal{S}_e als Teilmengen der ersten beziehungsweise letzten Schicht der Schichtzerlegung von \mathcal{G} angenommen.

Definition 5.4

Sei $[S'_1, \dots, S'_k]$ ein Weg, E eine Zielfunktion wie in Definition 5.3. Dann bezeichnet

$E^*[S'_1, \dots, S'_k]$ den optimalen Wert $E[S_0, \dots, S_m] \in \mathbb{R}$ unter allen Wegen, für die gilt:

1. $S_0 \in \mathcal{S}_a$
2. Das Endstück von $[S_0, \dots, S_m]$ stimmt mit $[S'_1, \dots, S'_k]$ überein, d.h. $S_{m-i} = S'_{k-i}$, $i = 0, \dots, k - 1$,

$E^*[S'_1, \dots, S'_k] := 0$, falls es einen solchen Weg nicht gibt.

Um die dynamische Programmierung mit den Definitionen aus Kapitel 4 in Einklang zu bringen, werden die Zielfunktionen, die lediglich zwei Stützstellen benötigen, auf drei Stützstellen erweitert. Sei E eine Zielfunktion für zwei Stützstellen. Die Zielfunktion E' für drei Stützstellen, die E ersetzt, ist gegeben durch

$$E'[S_i, S_{i+1}, S_{i+2}] := E[S_i, S_{i+1}] + E[S_{i+1}, S_{i+2}],$$

wobei S_i, S_{i+1} und S_{i+2} drei aufeinanderfolgende Stützstellen bezeichnen. Dadurch wird es möglich, einen einheitlichen Wert für k zu verwenden, hier also $k = 2$.

Satz 5.5

Sei $[S'_1, \dots, S'_k]$ ein Weg, für den ein optimaler Wert $E[S_0, \dots, S_m]$ gemäß der Definition 5.4 existiert. Es gilt

$$E^*[S'_1, \dots, S'_k] = \text{opt} \{ E^*[S'_0, \dots, S'_{k-1}] + E[S'_0, S'_1, \dots, S'_k] \mid (S'_0, S'_1) \in \mathcal{K} \}.$$

Beweis

Nach Definition 5.4 gilt

$$E^*[S'_1, \dots, S'_k] = \text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} E[S_0, \dots, S_m],$$

wobei W_1^k die Menge aller Wege bezeichnet, die die Bedingung der Definition 5.4 erfüllen.

Es ist $S'_1 \notin \mathcal{S}_a$, d.h. $m \geq k$,

$$\begin{aligned}
& \text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} E[S_0, \dots, S_m] \\
= & \text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} \left(\sum_{i=0}^{m-k} E[S_i, \dots, S_{i+k}] \right) \\
= & \text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} \left(\sum_{i=0}^{m-1-k} E[S_i, \dots, S_{i+k}] + E[S_{m-k}, \dots, S_m] \right) \\
= & \text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} \left(\sum_{i=0}^{m-1-k} E[S_i, \dots, S_{i+k}] + E[S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_k] \right) \\
= & \text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} (E[S_0, \dots, S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_{k-1}] + E[S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_k]),
\end{aligned}$$

wobei für $m = k$ der erste Summand (Summe bis $m - 1 - k = -1$) als Null gesetzt werden muss.

In dem zweiten Summanden ist der Weg, abgesehen von dem ersten Segment, festgelegt. Die einzige Bedingung an dieses Segment ist, dass eine Kante mit S'_1 existiert, d.h. $(S_{m-k}, S'_1) \in \mathcal{K}$. Weil diese Bedingung ohnehin erfüllt sein muss, kann damit der letzte Term auch geschrieben werden als

$$\text{opt}_{(S_{m-k}, S'_1) \in \mathcal{K}} \left(\text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} (E[S_0, \dots, S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_{k-1}] + E[S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_k]) \right).$$

Da durch die äußere Optimumsuche der beste Wert bezüglich S_{m-k} ermittelt wird, kann S_{m-k} bezüglich

$$\text{opt}_{[S_0, \dots, S_m] \in W_1^k} (E[S_0, \dots, S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_{k-1}] + E[S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_k])$$

als konstant angesehen werden. Ferner werden in dem ersten Summanden nur noch Wege betrachtet, die bis $S'_{k-1} = S_{m-1}$ laufen. Damit kann die gesamte Optimumsuche geschrieben werden als

$$\text{opt}_{(S_{m-k}, S'_1) \in \mathcal{K}} \left(\left(\text{opt}_{[S_0, \dots, S_{m-1}] \in W_1^{k-1}} E[S_0, \dots, S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_{k-1}] \right) + E[S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_k] \right).$$

Weiterhin ist S_{m-k} auch Element des ersten Summanden, so dass erneut nach optimalen Wegen gesucht wird, von denen die letzten k Werte bekannt sind. Daher kann das innere Optimum durch E^* beschrieben werden, so dass dieser Term als

$$\text{opt}_{(S_{m-k}, S'_1) \in \mathcal{K}} (E^*[S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_{k-1}] + E[S_{m-k}, S'_1, \dots, S'_k])$$

zusammengefasst werden kann. Damit folgt die Aussage mit $S'_0 := S_{m-k}$. \square

Der Satz ist die Bellman'sche Optimalitätsbedingung [6]. Zusammen mit den Schichten von \mathcal{S} bildet er die Grundlage für das stufenweise Vorgehen der Wegoptimierung durch dynamische Programmierung.

In dem hier vorgestellten Verfahren der dynamischen Programmierung sollen Schlauchstützstellenkantenzüge bestimmt werden, die möglichst eine Schlauchstützstelle für jeden Konstruktionspunkt enthalten. Zur Beschreibung des Verfahrens ist der Begriff des direkten Vorgängers hilfreich:

Definition 5.6

Sei W ein Rohr und \mathcal{C}_S eine endliche Menge von trennenden Rohrschnittgebieten und den Öffnungen R_a und R_e mit einer partiellen Ordnung \leq . Seien $C, C' \in \mathcal{C}_S$ mit $C' \leq C$. Dann heißt C' direkter Vorgänger von C genau dann, wenn es kein $C'' \in \mathcal{C}_S$ gibt mit $C' \leq C'' \leq C$.

Rohrschnittgebiete, die direkte Vorgänger zu einem Rohrschnittgebiet C sind, sind paarweise nicht vergleichbar. Andernfalls seien o.B.d.A. V_1 und V_2 zwei direkte Vorgänger zu C mit $V_1 \leq V_2$. Dann ist $V_1 \leq V_2 \leq C$ und damit wäre V_1 kein direkter Vorgänger von C .

Damit gilt:

Satz 5.7

Sei W ein Rohr und \mathcal{C}_S eine endliche Menge von trennenden Rohrschnittgebieten und den Öffnungen R_a und R_e mit einer partiellen Ordnung \leq . Zu jedem $C \in \mathcal{C}_S$ existiert genau eine maximale Menge von direkten Vorgängern in \mathcal{C}_S , d.h. alle Mengen von direkten Vorgängern sind Teilmenge dieser Menge.

Beweis

Sei $C \in \mathcal{C}_S$. Wenn es keine direkten Vorgänger zu C gibt, ist die Menge der direkten Vorgänger die leere Menge und diese ist eindeutig.

Wenn es direkte Vorgänger zu C gibt, werde angenommen, dass es zwei maximale, nicht gleiche Mengen von direkten Vorgängern gibt. Seien $\mathcal{V}_1(C) \subset \mathcal{C}_S$ und $\mathcal{V}_2(C) \subset \mathcal{C}_S$ diese beiden Mengen, mit $\mathcal{V}_1(C) \neq \mathcal{V}_2(C)$.

$\mathcal{V}_1(C)$ und $\mathcal{V}_2(C)$ sind Mengen von direkten Vorgängern, d.h. für $C', C'' \in \mathcal{V}_i(C)$, $i = \{1, 2\}$ gilt, dass C' und C'' nicht vergleichbar sind.

$\mathcal{V}_1(C) \neq \mathcal{V}_2(C)$, damit gibt es o.B.d.A. $C_1 \in \mathcal{V}_1(C)$, $C_2 \in \mathcal{V}_2(C)$ mit $C_1 \notin \mathcal{V}_2(C)$. Weil $\mathcal{V}_1(C)$ und $\mathcal{V}_2(C)$ beide maximal sind und die Elemente jeweils aus $\mathcal{V}_1(C)$ und $\mathcal{V}_2(C)$ nicht vergleichbar sind, sind demnach C_1 und C_2 vergleichbar, denn sonst wäre $C_1 \in \mathcal{V}_2(C)$. O.B.d.A. sei $C_1 \leq C_2$. Damit ist C_1 kein direkter Vorgänger von C , was ein Widerspruch zur Annahme ist. \square

Bemerkung 1

Der Teilgraph eines azyklischen gerichteten Graphen, der genau die Kanten aus der direkten Vorgängerbeziehung enthält, wird in der Literatur als transitiver Kern (engl. transitive reduction) [42] oder Hasse-Diagramm [55] bezeichnet.

Die Aussage des Satzes 5.7 kann auch wie folgt mit Hilfe von Aussagen aus der Literatur bewiesen werden. Aus dem Korollar 4.3 [42] folgt, dass der transitive Kern einer Halbordnung eindeutig ist. Im transitiven Kern sind die Vorgänger stets nicht vergleichbar. Ferner ist eine Kante zwischen zwei Knoten genau dann im transitiven Kern gemäß des Lemmas 4.2 [42] enthalten, wenn zwischen den Knoten die direkte Vorgängerbeziehung besteht. Damit bildet die Vorgängermenge im transitiven Kern jedes Rohrschnittgebietes die eindeutige, maximale Menge der direkten Vorgänger.

5.3 Konnektivitätslinienbezogene Formulierung

Maßgeblich für die Schichten sind die trennenden Rohrschnittgebiete. Als Hilfsmittel, anhand dessen entschieden werden kann, ob ein Rohrschnittgebiet trennend ist, kann eine Konnektivitätslinie \mathbf{I} verwendet werden. Es wird daher eine konnektivitätslinienbezogene Kandidatenmenge \mathcal{C}_1 von Rohrschnittgebieten und Öffnungen generiert, wobei hierzu eine neue Ordnung, die auf \mathbf{I} bezogen ist, eingeführt wird. Hierbei wird die Aussage von Satz 2.10 verwendet, nämlich dass ein Rohrschnittgebiet trennend ist, wenn das Rohrschnittgebiet eine ungerade Anzahl von Schnitten mit \mathbf{I} besitzt.

Definition 5.8

Sei l eine Konnektivitätslinie auf W . Sei C ein trennendes Rohrschnittgebiet. Dann bezeichnet $s(C)$ den ersten Schnittpunkt von l und δC und $e(C)$ den letzten Schnittpunkt von l und δC .

Damit ergibt sich als neue Ordnung:

Definition 5.9

Sei l eine Konnektivitätslinie. Seien C_1 und C_2 zwei trennende Rohrschnittgebiete oder Öffnungen mit Konstruktionspunkten \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 , wobei im Fall $C_i = R_a$, $i = 1, 2$, $\mathbf{k}_i := l(0)$ und im Fall $C_i = R_e$, $i = 1, 2$, $\mathbf{k}_i := l(1)$ gesetzt wird.

Dann ist $C_1 \leq_1 C_2$ genau dann, wenn eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

1. $C_1 = C_2$,
2. C_1^- und C_2^- sind disjunkt und der Konstruktionspunkt \mathbf{k}_2 auf l liegt nach oder auf dem Punkt $e(C_1)$ und der Konstruktionspunkt \mathbf{k}_1 auf l liegt vor oder auf dem Punkt $s(C_2)$.

Hiermit lässt sich die konnektivitätslinienbezogene Kandidatenmenge definieren:

Definition 5.10

Sei l eine Konnektivitätslinie, $[\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}]$ eine Folge von Konstruktionspunkten, $\mathbf{k}_0 := l(0)$ und $\mathbf{k}_n := l(1)$. Eine konnektivitätslinienbezogene Kandidatenmenge ist gegeben als

$$C_1 := \bigcup_{i=0}^n \mathcal{F}(\mathbf{k}_i),$$

wobei

1. $\mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$ endliche Mengen von trennenden Rohrschnittgebieten C , mit $\mathbf{k}_i \in \delta C$, $i = 1, \dots, n-1$, sind und $\mathcal{F}(\mathbf{k}_0) := R_a$ und $\mathcal{F}(\mathbf{k}_n) := R_e$ ist und
2. für $C_1 \in \mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$ und $C_2 \in \mathcal{F}(\mathbf{k}_j)$, $i, j = 0, \dots, n$, mit $C_1 \leq_1 C_2$ auch $C_1 \leq_T C_2$ gilt.

Eine konkrete Realisierung der Mengen $\mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$ wird im Abschnitt 5.8 vorgestellt. Vermutlich ist die Eigenschaft 2 in der Regel für alle Rohrschnittgebiete erfüllt. Dies ist jedoch auf Grundlage der bisher bewiesenen Eigenschaften von Rohrschnittgebieten nicht klar. Diese Forderung wird für den Beweis der Transitivität in dem folgenden Satz benötigt:

Satz 5.11

Die Relation \leq_1 ist eine partielle Ordnung auf C_1 .

Beweis

Zu zeigen: \leq_1 ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Reflexivität: Dies ist durch 1. der Definition 5.9 erfüllt.

Antisymmetrie: Sei $C_1 \leq_1 C_2$ mit $C_1 \neq C_2$, d.h. C_1^- und C_2^- sind disjunkt. Dies bedeutet, dass \mathbf{k}_2 vor / auf $e(C_1)$ und \mathbf{k}_1 vor / auf $s(C_2)$ liegt. Wäre zudem $C_2 \leq_1 C_1$, so gelte zusätzlich, dass \mathbf{k}_1 vor / auf $e(C_2)$ und \mathbf{k}_2 vor / auf $s(C_1)$ liegt. Demnach folgt, dass \mathbf{k}_2 vor / auf $s(C_1)$ vor / auf \mathbf{k}_1 vor / auf $s(C_2)$. Da stets $s(C_2)$ vor / auf \mathbf{k}_2 liegt, folgt daher $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass C_1^- und C_2^- disjunkt sind.

Transitivität: Seien o.B.d.A. $C_1 \neq C_2 \neq C_3$ mit $C_1 \leq_1 C_2$ und $C_2 \leq_1 C_3$. Damit gilt auch $C_1 \leq_T C_2$ und $C_2 \leq_T C_3$. Ferner folgt aus der Transitivität von \leq_T , dass $C_1 \leq_T C_3$, also insbesondere, dass C_1^- und C_3^- disjunkt sind. Ferner gilt wegen $C_1 \leq_1 C_2$, dass k_1 vor / auf $s(C_2)$ und $e(C_1)$ vor / auf k_2 auf der Konnektivitätslinie liegt. Ebenso gilt wegen $C_2 \leq_1 C_3$, dass k_2 vor / auf $s(C_3)$ und $e(C_2)$ vor / auf k_3 auf der Konnektivitätslinie liegt. Demnach folgt, dass $e(C_1)$ vor / auf k_2 vor / auf $s(C_3)$ vor / auf k_3 liegt und k_1 vor / auf $s(C_2)$ vor / auf k_2 vor / auf $s(C_3)$ liegt. Daraus folgt $C_1 \leq_1 C_3$. \square .

Bemerkung 2

Problematisch für den Beweis der Transitivität von \leq_1 auf C_1 ist, dass für drei Rohrschnittgebiete C_1, C_2 und C_3 mit $C_1 \leq_1 C_2$ und $C_2 \leq_1 C_3$ gezeigt werden muss, dass entweder $C_1 = C_3$ oder C_1^- und C_3^- disjunkt sind. Aus diesem Grund wird in der Definition 5.10 für Rohrschnittgebiete mit $C_i \leq_1 C_j$ gefordert, dass auch $C_i \leq_T C_j$ erfüllt ist.

Bemerkung 3

Im Gegensatz zu der Eigenschaft 2 aus der Definition 5.10 folgt im Allgemeinen aus $C_1 \leq_T C_2$ nicht, dass $C_1 \leq_1 C_2$. Die Abbildung 5.3 soll dies verdeutlichen. Hier ist ein Rohr mit drei Rohrschnittgebieten

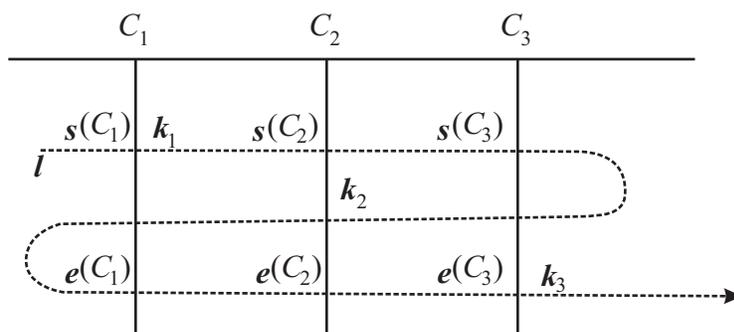


Abbildung 5.3: Beispiel für die Ordnung von trennenden Rohrschnittgebieten entlang einer Konnektivitätslinie l (entnommen aus [61])

ten, der Konnektivitätslinie l sowie den Konstruktionspunkten und ersten und letzten Schnittpunkten der Rohrschnittgebiete dargestellt.

Betrachte die Rohrschnittgebiete C_1 und C_2 . Es ist $C_1 \leq_T C_2$, aber $C_1 \leq_1 C_2$ ist nicht erfüllt, da der Konstruktionspunkt von C_2 zwischen dem ersten und letzten Schnittpunkt von l von C_1 liegt.

Andererseits sind alle Bedingungen erfüllt, so dass $C_1 \leq_1 C_3$ gilt.

Bei der Bestimmung von Mengen von direkten Vorgängern stellt sich die Frage nach deren Gestalt. Es muss berücksichtigt werden, dass die Verwendung von Konturen aus $\mathcal{F}(k_i)$ nicht zwangsläufig erzwingt, dass direkte Vorgänger in $\mathcal{F}(k_{i-1})$ vorhanden sein müssen. Eine solche Situation ist in der Abbildung 5.4 dargestellt.

Hier sind Rohrschnittgebiete zu drei Konstruktionspunkten dargestellt (großes Rohr). In den darunter liegenden drei kleineren Rohren ist erkennbar, dass die Rohrschnittgebiete des mittleren Konstruktionspunktes entweder alle Gebiete des vorhergehenden oder des nachfolgenden Konstruktionspunktes schneiden, also die Rohrschnittgebiete nicht vergleichbar sind. Es lässt sich keine Auswahl dreier Gebiete an unterschiedlichen Konstruktionspunkten treffen, ohne dass sich zwei Konturen schneiden. Diese Situation wird *Blockadesituation* genannt. Eine solche Blockadesituation kann sich auch über zwei oder mehrere Konstruktionspunkte erstrecken. Diese Gegebenheit erhöht zwangsläufig den

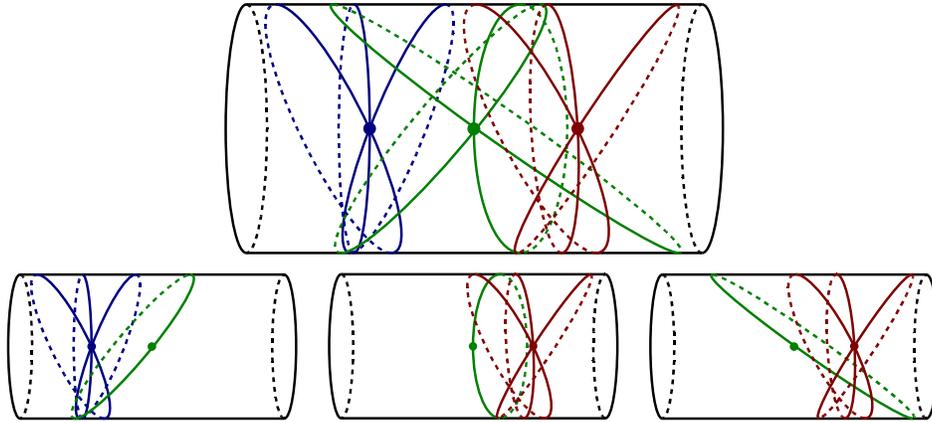


Abbildung 5.4: Blockadesituation von Rohrschnittgebieten zu drei Konstruktionspunkten in einem Zylinder (entnommen aus [61])

Aufwand, direkte Vorgänger zu finden. Im nächsten Abschnitt wird ein entsprechender Algorithmus vorgestellt.

5.4 Bestimmung der direkten Vorgänger

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie für eine gegebene Kandidatenmenge \mathcal{C}_1 gemäß Definition 5.10 zu einem gegebenen Rohrschnittgebiet $C \in \mathcal{C}_1$ eine Menge von direkten Vorgängern bestimmt werden kann. Dabei wird die Ordnungsrelation \leq_1 verwendet.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Menge zu bestimmen. In Aho [2] und Krayl [38] wird die Ordnungsbeziehung \leq_1 auf \mathcal{C}_1 in einer Adjazenzmatrix abgespeichert. An der Position (i, j) steht eine 1, wenn $C_i \leq_1 C_j$, andernfalls steht an der Stelle eine 0. Auf Basis dieser Matrix wird eine neue Adjazenzmatrix erzeugt, die dann die direkte Vorgängerschaft repräsentiert, d.h. steht an der Position (i, j) eine 1, so ist C_i ein direkter Vorgänger von C_j , andernfalls ist C_i kein direkter Vorgänger von C_j . In La Poutré [42] wird eine Input-Matrix N erzeugt. An der Position (i, j) steht dabei die Anzahl der möglichen Wege, um von C_i zu C_j über einen Weg $C_i = C^0, \dots, C^m = C_j$ zu gelangen, mit $C^m \leq_1 C^{m+1}$, $m = 1, \dots, n - 1$. Der transitive Kern ist dann durch die Elemente gegeben, deren Einträge in N eins sind.

In dieser Arbeit wird der transitive Kern mit einem Verfahren bestimmt, das sich an gewünschte Gegebenheiten anpasst. Es erlaubt, eine Auswahl aus der Menge der direkten Vorgänger eines Rohrschnittgebietes C zu bestimmen und damit eine geringere Rechenzeit zu erzielen. So ist es in der Regel ausreichend, Schlauchstützstellen zu ermitteln, so dass die Konstruktionspunkte der Vorgänger-Rohrschnittgebiete benachbart sind und in der unmittelbaren Nachbarschaft von C liegen. Sollte es zu C direkte Vorgänger mit Konstruktionspunkt \mathbf{k}_{C_V} geben, so muss ein direkter Vorgänger C_W , dessen Konstruktionspunkt "weit" von \mathbf{k}_{C_V} entfernt ist, eine sehr "schräge" Lage im Rohr haben, um die direkte Vorgängerbeziehung zu erfüllen. Ein solches Rohrschnittgebiet ist allerdings für eine optimale Schlaucheinpassung nicht wünschenswert. Diese Einschränkung hat zudem den Vorteil, dass sich nicht nur der Rechenaufwand bei der Bestimmung der direkten Vorgängern selbst reduziert, sondern auch bei den Algorithmen, die die Mengen der direkten Vorgänger verwenden.

Es wurde bereits gezeigt, dass die Rohrschnittgebiete, die in der Menge der direkten Vorgänger ge-

speichert sind, paarweise nicht vergleichbar sind. Diese Eigenschaft wird bei der Bestimmung des transitiven Kerns durch eine Hilfsmenge von nicht vergleichbaren Rohrschnittgebieten berücksichtigt. Die beiden genannten Mengen sind Gegenstand der folgenden Definition.

Zur einfacheren Beschreibung des Algorithmus werden folgende Mengen definiert:

Definition 5.12

Sei $[\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}]$ eine Folge von Konstruktionspunkten auf einer Konnektivitätslinie \mathbf{l} , $\mathbf{k}_0 := \mathbf{l}(0)$ und $\mathbf{k}_n := \mathbf{l}(1)$. Dann bezeichnen

$\mathcal{V}(C)$, $C \in \mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$, $i = 1, \dots, n$, die endliche, maximale Menge von direkten Vorgängern aus \mathcal{C}_1 ,

$\mathcal{I}(C)$, $C \in \mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$, $i = 2, \dots, n$, die Menge der Rohrschnittgebiete C' mit $C' \in \mathcal{F}(\mathbf{k}_j)$, $j = 1, \dots, i-1$, die mit C bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind.

Das vorgestellte Verfahren bestimmt zunächst zu jedem Rohrschnittgebiet C die Menge $\mathcal{V}(C)$. Im Abschnitt 5.5 wird gezeigt, wie der Algorithmus verändert werden kann, um eine reduzierte Menge von direkten Vorgängern, wie oben beschrieben, zu ermitteln.

Die Grundidee des dazu verwendeten Algorithmus besteht darin, alle generierten Rohrschnittgebiete in der Reihenfolge der ihnen zugeordneten Konstruktionspunkte zu durchlaufen und zu jedem Gebiet C die jeweilige Menge $\mathcal{V}(C)$ zu bestimmen und abzuspeichern. Dabei wird verwendet, dass

1. die Konstruktionspunkte der direkten Vorgänger vor dem von C liegen,
2. die direkten Vorgänger paarweise bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind,
3. die Menge $\mathcal{V}(C)$ Obermenge aller Mengen von direkten Vorgängern von C ist,
4. \leq_1 eine partielle Ordnung und insbesondere transitiv ist.

Die Eigenschaften 1 und 2 legen die im Verlauf des Algorithmus zu untersuchenden Kandidaten fest. Insbesondere erlaubt die Eigenschaft 2 die Menge der untersuchten Schnittkonturen einzuschränken. Zu diesem Zweck wird zu jedem Rohrschnittgebiet die Menge $\mathcal{I}(C)$ von Rohrschnittgebieten unterhalten, deren Konstruktionspunkte vor dem von C liegen und die mit C bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind.

Die Eigenschaft 3 erlaubt die Hinzunahme von nicht vergleichbaren Vorgängern von C in einer beliebigen Reihenfolge beim Aufbau von $\mathcal{V}(C)$, da das Endergebnis nach Satz 5.7 eindeutig ist.

Die Eigenschaft 4 bedeutet, dass für den Fall, dass zwei Rohrschnittgebiete C_1 und C_2 mit $C_1 \leq_1 C_2$ betrachtet werden, Rohrschnittgebiete D mit $D \leq_1 C_1$ nicht weiter berücksichtigt werden müssen, da diese wegen der Eigenschaft 2 nicht als direkte Vorgänger in Frage kommen.

Der Algorithmus durchläuft die Konstruktionspunkte in aufsteigender Reihenfolge. Die Rohrschnittgebiete eines Konstruktionspunktes werden in beliebiger Reihenfolge abgearbeitet. Für jedes Rohrschnittgebiet C werden die Mengen $\mathcal{V}(C)$ und $\mathcal{I}(C)$ komplett ermittelt, bevor zum nächsten Rohrschnittgebiet übergegangen wird. Zu Beginn sind $\mathcal{V}(C)$ und $\mathcal{I}(C)$ leere Mengen.

Zur Bearbeitung des aktuellen Rohrschnittgebietes C wird eine Kandidatenliste \mathcal{L} von Rohrschnittgebieten initialisiert. \mathcal{L} wird sukzessive von vorn abgearbeitet, wobei die bearbeiteten Schnittgebiete in \mathcal{L} entfernt werden, aber in der Regel auch neue Rohrschnittgebiete an \mathcal{L} angefügt werden. Die Bearbeitung endet, wenn \mathcal{L} leer ist.

Die Rohrschnittgebiete in \mathcal{L} haben die Eigenschaft, Vorgänger von C zu sein. Ferner sind alle Rohrschnittgebiete in \mathcal{L} paarweise nicht vergleichbar.

Zur Initialisierung von \mathcal{L} durchläuft der Algorithmus zunächst die Konstruktionspunkte, die vor dem Konstruktionspunkt \mathbf{k}_i von C liegen, in fallender Reihenfolge. Dieser Durchlauf endet am ersten Konstruktionspunkt \mathbf{k}_j , $j < i$, zu dem es ein Rohrschnittgebiet gibt, das Vorgänger von C ist. Alle Rohrschnittgebiete mit Konstruktionspunkt \mathbf{k}_j , die die Eigenschaft haben, Vorgänger von C zu sein, werden in \mathcal{L} aufgenommen.

Bei der Abarbeitung von \mathcal{L} wird das jeweils erste Rohrschnittgebiet C' aus \mathcal{L} entfernt. Dann werden die Mengen $\mathcal{V}(C)$ und $\mathcal{I}(C)$ sowie \mathcal{L} aktualisiert:

Zur Aktualisierung von $\mathcal{V}(C)$ wird überprüft, ob C' mit allen Rohrschnittgebieten in der aktuellen Menge $\mathcal{V}(C)$ nicht vergleichbar ist. Wenn dies der Fall ist, wird C' in $\mathcal{V}(C)$ eingefügt. Andernfalls wird C' verworfen.

Die Aktualisierung von $\mathcal{I}(C)$ geschieht dadurch, dass diejenigen Rohrschnittgebiete aus $\mathcal{I}(C')$ in $\mathcal{I}(C)$ eingefügt werden, welche mit C bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind.

Die restlichen Rohrschnittgebiete C'' aus $\mathcal{I}(C')$ werden zur Aktualisierung von \mathcal{L} verwendet. Dabei werden zunächst alle Rohrschnittgebiete $C_{\mathcal{L}}$ aus \mathcal{L} entfernt, für die $C_{\mathcal{L}} \leq_1 C'' \leq_1 C$ ist. Dann wird C'' in \mathcal{L} eingefügt, sofern es kein Schnittgebiet $C_{\mathcal{L}}$ in \mathcal{L} gibt, für das $C'' \leq_1 C_{\mathcal{L}}$ ist.

Der Algorithmus lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Algorithmus "Berechnung der Mengen direkter Vorgänger"

Eingabe:

Eine konnektivitätslinienbezogene Kandidatenmenge $\mathcal{C}_1 := \bigcup_{i=0}^n \mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$.

Ausgabe:

Die Mengen $\mathcal{V}(C)$ aller Gebiete $C \in \mathcal{C}_1$.

Ablauf:

```

for  $i = 1, \dots, n$  do
  for all  $C \in \mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$  do
     $\mathcal{V}(C) = \emptyset$ ;
     $\mathcal{I}(C) = \emptyset$ ;
     $\mathcal{L} = \emptyset$ ;
     $j = i$ ;
    repeat
       $j = j - 1$ ;
      for all  $C' \in \mathcal{F}(\mathbf{k}_j)$  do
        if  $C'$  und  $C$  sind bezüglich  $\leq_1$  vergleichbar then
          füge  $C'$  in  $\mathcal{L}$  ein;
        else
          füge  $C'$  in  $\mathcal{I}(C)$  ein;
        end if
      end for
    until  $\mathcal{L} \neq \emptyset$ 

  while  $\mathcal{L} \neq \emptyset$  do
    entferne erstes Element  $C'$  aus  $\mathcal{L}$ ;
    /* Aktualisiere  $\mathcal{V}(C)$  */
    if  $\mathcal{V}(C) \neq \emptyset$  then

```

```

        if  $C'$  ist mit allen Elemente in  $\mathcal{V}(C)$  bezüglich  $\leq_1$  nicht
        vergleichbar then
            füge  $C'$  in  $\mathcal{V}(C)$  ein;
        end if
    else
        füge  $C'$  in  $\mathcal{V}(C)$  ein;
    end if
    for all  $C'' \in \mathcal{I}(C')$  do
        /* Aktualisiere  $\mathcal{I}(C)$  */
        if  $C''$  ist mit  $C$  bezüglich  $\leq_1$  nicht vergleichbar then
            füge  $C''$  in  $\mathcal{I}(C)$  ein;
            /* Aktualisiere  $\mathcal{L}$  */
        else
            lösche alle  $C_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$  mit  $C_{\mathcal{L}} \leq_1 C'' \leq_1 C$  aus  $\mathcal{L}$ ;
            if es existiert kein  $C_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$  mit  $C'' \leq_1 C_{\mathcal{L}}$  then
                füge  $C''$  in  $\mathcal{L}$  ein;
            end if
        end if
    end if
end for
end while
end for
end for

```

Mit den folgenden Aussagen wird die Korrektheit des Algorithmus nachgewiesen.

Lemma 5.13

Nach jeder Aktualisierung von $\mathcal{V}(C)$ sind alle Rohrschnittgebiete in $\mathcal{V}(C)$ paarweise bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar. Sie sind alle Vorgänger von C .

Beweis

Dies folgt aus der Konstruktion von $\mathcal{V}(C)$ im Algorithmus. Zunächst werden in der *repeat*-Schleife die ersten direkten Vorgänger ab dem Konstruktionspunkt von C in fallender Reihenfolge gesucht. Anschließend werden nur solche Rohrschnittgebiete C' zu $\mathcal{V}(C)$ hinzugenommen, mit $C' \leq_1 C$ und die mit allen Elementen aus $\mathcal{V}(C)$ bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind. \square

Lemma 5.14

Nach jeder Aktualisierung sind alle Rohrschnittgebiete in \mathcal{L} paarweise bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar. Sie sind alle Vorgänger von C .

Beweis

Zunächst werden in der *repeat*-Schleife die ersten direkten Vorgänger ab dem Konstruktionspunkt von C in fallender Reihenfolge gesucht und in \mathcal{L} eingefügt. In der *while*-Schleife werden nur Rohrschnittgebiete in \mathcal{L} eingefügt, die mit C bezüglich \leq_1 vergleichbar sind und deren Konstruktionspunkt vor dem von C liegt. \square

Lemma 5.15

Wenn zwei Rohrschnittgebiete C und C' bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind und der Konstruktionspunkt von C' vor dem von C bezüglich \leq_1 liegt, wird von dem Algorithmus C' in $\mathcal{I}(C)$ eingefügt.

Beweis

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion über die Folge der Konstruktionspunkte zwischen C'

und C .

Induktionsanfang: $n = 1$

Zwischen C' und C liegt genau ein Konstruktionspunkt. Dadurch wird in der *repeat*-Schleife C' in $\mathcal{I}(C)$ eingefügt.

Induktionsschluss: $n \rightarrow n + 1$

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei für n Konstruktionspunkte zwischen C' und C erfüllt.

Sei C_A das erste Rohrschnittgebiet in der *repeat*-Schleife, das in \mathcal{L} eingefügt wird. C_A liegt demnach an dem Konstruktionspunkt, an dem die *repeat*-Schleife beendet wird.

Es können zwei Fälle auftreten:

1. Der Konstruktionspunkt von C' liegt nicht vor dem von C_A .
2. Der Konstruktionspunkt von C' liegt vor dem von C_A .

zu 1:

Weil C' und C bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind, wird C' in der *repeat*-Schleife in $\mathcal{I}(C)$ eingefügt.

zu 2:

Wegen der Transitivität von \leq_1 sind C_A und C' nicht vergleichbar. Wären sie vergleichbar, so könnte auf Grund der Lage der Konstruktionspunkte nur $C' \leq_1 C_A$ gelten. Da nach Voraussetzung $C_A \leq_1 C$ gilt, wären C' und C vergleichbar.

Nach Definition von $\mathcal{I}(C_A)$ gilt daher $C' \in \mathcal{I}(C_A)$: da der Konstruktionspunkt von C_A vor dem von C liegt, kann die Induktionsvoraussetzung mit $C = C_A$ und C' angewendet werden. Demnach wird von dem Algorithmus C' in $\mathcal{I}(C_A)$ eingefügt, so dass zum Zeitpunkt der Abarbeitung von C tatsächlich auch C' in $\mathcal{I}(C_A)$ liegt. Daraus und da C_A ein direkter Vorgänger von C ist, ergibt sich, dass C' während der Durchführung der *while*-Schleife für C in $\mathcal{I}(C)$ eingefügt wird. \square

Lemma 5.16

Nach Abarbeiten von \mathcal{L} enthält $\mathcal{V}(C)$ nur direkte Vorgänger von C . D.h. es gibt kein Rohrschnittgebiet C' , so dass $C'' \leq_1 C' \leq_1 C$ für ein Rohrschnittgebiet C'' in $\mathcal{V}(C)$.

Beweis

Nach dem Lemma 5.13 enthält $\mathcal{V}(C)$ nur Vorgänger. In dem Algorithmusteil "Aktualisiere $\mathcal{V}(C)$ " werden ferner nur Elemente aus \mathcal{L} verwendet. Angenommen, es existiert ein Rohrschnittgebiet C' , so dass $C'' \leq_1 C' \leq_1 C$ zu einem $C'' \in \mathcal{V}(C)$.

C'' ist nach Voraussetzung mit allen Elementen aus $\mathcal{V}(C)$ nicht vergleichbar. In $\mathcal{V}(C)$ sind nach Konstruktion die direkten Vorgänger enthalten, die am ersten Konstruktionspunkt liegen, der überhaupt direkte Vorgänger enthält. Dies wird in der *repeat*-Schleife erreicht. Dies bedeutet, dass nach dem Lemma 5.15 $C'' \in \mathcal{I}(C_V)$ gilt, wobei C_V ein direkter Vorgänger an dem ersten Konstruktionspunkt ist, der direkte Vorgänger enthält. Wegen der Transitivität von \leq_1 ist C' mit diesem Rohrschnittgebiet C_V nicht vergleichbar, denn andernfalls wäre $C'' \leq_1 C' \leq_1 C_V$ und damit wären C'' und C_V vergleichbar. Der Konstruktionspunkt von C' liegt vor dem von C_V . Andernfalls wäre C' ein direkter Vorgänger am ersten Konstruktionspunkt und dadurch wird C'' wegen $C'' \leq_1 C'$ nicht in $\mathcal{V}(C)$ eingefügt. Nach dem Lemma 5.15 wird C' in $\mathcal{I}(C_V)$ eingefügt und bei der Aktualisierung von \mathcal{L} berücksichtigt. Damit bleibt aber C'' nicht in \mathcal{L} enthalten beziehungsweise wird nicht in \mathcal{L} eingefügt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. \square

Satz 5.17

Nach Abarbeiten von \mathcal{L} ist $\mathcal{V}(C)$ maximal. D.h. es gibt keinen Vorgänger von C , der mit allen Schnittgebieten in $\mathcal{V}(C)$ bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar und nicht Element von $\mathcal{V}(C)$ ist.

Beweis

Sei $C \in \mathcal{C}_1$ und $\mathcal{V}(C)$ die vom Algorithmus "Berechnung der Mengen direkter Vorgänger" generierte Menge von direkten Vorgängern. Nach dem Lemma 5.16 ist die generierte Menge Teilmenge der Menge von direkten Vorgängern. Es bleibt zu zeigen, dass sie maximal ist.

Wenn es direkte Vorgänger von C gibt, werden diejenigen in der *repeat*-Schleife gefunden, die als erste in absteigender Richtung der Konstruktionpunkte bezüglich l vor dem Konstruktionpunkt von C liegen. Daher kann $\mathcal{V}(C) \neq \emptyset$ angenommen werden. Angenommen, es gäbe ein $C'' \in \mathcal{C}_1$, das mit allen Elementen aus $\mathcal{V}(C)$ nicht vergleichbar ist, aber durch den Algorithmus ist $C'' \notin \mathcal{V}(C)$.

Sei $C' \in \mathcal{V}(C)$. Weil die ersten direkten Vorgänger in absteigender Richtung bezüglich l von C gefunden werden, liege der Konstruktionpunkt von C'' vor dem von C' . Weil C' nach Voraussetzung als direkter Vorgänger von C gefunden und C'' nach dem Lemma 5.15 in $\mathcal{I}(C')$ eingefügt wird, wird somit spätestens in der *while*-Schleife C'' in $\mathcal{V}(C)$ eingefügt. Dies bedeutet, dass die getroffene Annahme falsch ist. \square

Dies zeigt die Korrektheit des vorgestellten Verfahrens.

5.5 Aufwand des Verfahrens zur Bestimmung der direkten Vorgänger

In diesem Abschnitt wird die Laufzeit und der Speicherplatzbedarf des vorgestellten Algorithmus abgeschätzt.

Es gilt:

Satz 5.18

Sei $[k_1, \dots, k_{n-1}]$ eine Folge von Konstruktionpunkten auf einer Konnektivitätslinie l , $k_0 := l(0)$ und $k_n := l(1)$ und

- m die maximale Anzahl von Rohrschnittgebieten pro Konstruktionpunkt,
- $c_1 := \max_{C \in \mathcal{C}_1} \{j - i + 1 \mid k_j \in \delta C', k_i \in \delta C'', C', C'' \in \mathcal{I}(C), j \geq i\}$ die maximale Länge des Bereiches von Konstruktionpunkten, der von einem Rohrschnittgebiet oder einer Öffnung C und einem Element aus $\mathcal{I}(C)$ begrenzt wird,
- $c_2 := \max_{C, C' \in \mathcal{L}} \{j - i + 1 \mid k_j \in \delta C, k_i \in \delta C', j \geq i\}$, die maximale Länge des Bereiches von Konstruktionpunkten, der während der Laufzeit durch die Elemente aus \mathcal{L} begrenzt wird,
- $c_3 := \max_{C \in \mathcal{C}_1} \{j - i + 1 \mid k_j \in \delta C', k_i \in \delta C'', C', C'' \in \mathcal{V}(C), j \geq i\}$ die maximale Länge des Bereiches von Konstruktionpunkten, der von Elementen aus $\mathcal{V}(C)$ eines Rohrschnittgebietes oder Öffnung C begrenzt wird.

Dann benötigt der Algorithmus "Berechnung der Mengen direkter Vorgänger" eine Laufzeit $O((c_1 + 1) \cdot (n + 1) \cdot m^2 + c_2 \cdot c_3 \cdot (n + 1) \cdot m^3 + c_1 \cdot c_2^2 \cdot (n + 1) \cdot m^4)$ und einen Speicherplatz von $O((c_1 + c_2 + c_3) \cdot (n + 1) \cdot m^2)$.

Beweis

In den beiden äußeren *for*-Schleifen im Algorithmus werden alle Rohrschnittgebiete betrachtet. Dies bedeutet, es handelt sich um Schleifen über insgesamt $(n + 1) \cdot m$ Rohrschnittgebiete. In diesen Schleifen ist die *repeat*-Schleife enthalten, in der $O((c_1 + 1) \cdot m)$ Elemente betrachtet werden, da nach der Voraussetzung höchstens $c_1 + 1$ Konstruktionpunkte betrachtet werden müssen, um einen direkten Vorgänger zu finden. In den beiden äußeren Schleifen ist zudem die *while*-Schleife enthalten,

in der über die Menge \mathcal{L} iteriert wird. Diese Menge wird zum einen in der *repeat*-Schleife erzeugt, zum anderen wird sie in der *while*-Schleife erweitert. Insgesamt werden hierfür nach Voraussetzung $O(c_2 \cdot m)$ Rohrschnittgebiete betrachtet. In dieser *while*-Schleife wird zu dem jeweils aktuellen Rohrschnittgebiet C die Menge $\mathcal{V}(C)$ gefüllt. Dabei wird überprüft, ob die entsprechenden Elemente mit den bereits abgespeicherten Rohrschnittgebieten in $\mathcal{V}(C)$ bezüglich \leq_1 nicht vergleichbar sind, d.h. es wird eine Laufzeit $O(c_3 \cdot m)$ benötigt. Anschließend werden in der *for*-Schleife die entsprechenden Hilfsmengen $\mathcal{I}(C)$ und \mathcal{L} aktualisiert. Diese Schleife läuft wegen den getroffenen Annahmen über $O(c_1 \cdot m)$ Rohrschnittgebiete. In dieser Schleife werden bei der Aktualisierung von \mathcal{L} alle $O(c_2 \cdot m)$ Rohrschnittgebiete aus \mathcal{L} überprüft, bevor ein Rohrschnittgebiet in \mathcal{L} eingefügt wird. Insgesamt ergibt das eine Laufzeit von $O((c_1 + 1) \cdot (n + 1) \cdot m^2 + c_2 \cdot c_3 \cdot (n + 1) \cdot m^3 + c_1 \cdot c_2^2 \cdot (n + 1) \cdot m^4)$.

Für den benötigten Speicherplatz ist zu beachten, das zu jedem Rohrschnittgebiet C drei Mengen im Algorithmus erzeugt werden, $\mathcal{I}(C)$, $\mathcal{V}(C)$ und \mathcal{L} . Die Menge $\mathcal{I}(C)$ benötigt wegen den getroffenen Annahmen einen Speicherplatz von $O(c_1 \cdot m)$, \mathcal{L} einen Platz von $O(c_2 \cdot m)$ und die Menge $\mathcal{V}(C)$ einen Bedarf von $O(c_3 \cdot m)$. Damit ist der erforderliche Speicherplatz durch $O((c_1 + c_2 + c_3) \cdot (n + 1) \cdot m^2)$ beschränkt. \square

Piepenstock [61] hat als Beschleunigung des Verfahrens vorgeschlagen, die Anzahl an *repeat*- und *while*-Schleifendurchläufen zu begrenzen. Dies kann in dem hier vorgestellten Algorithmus durch eine Begrenzung der Werte c_1 , c_2 und c_3 konkretisiert werden. Zum einen ist es im Allgemeinen ausreichend, direkte Vorgänger nur in der unmittelbaren Nachbarschaft zu suchen, d.h. $c_1 \leq 3$. Sofern dies nicht für die Rohrschnittgebiete erfüllt ist, ist in der Regel ein Grund in starken Schräglagen der Rohrschnittgebiete untereinander zu suchen, was für eine erwartete Leitlinie nicht wünschenswert ist. Zum anderen geht in der Regel keine für eine optimale Lösung benötigte Kombinationsmöglichkeit verloren, falls $c_2 = c_3 = 2$ gewählt wird, d.h. falls ab dem Konstruktionspunkt \mathbf{k}_i , an dem als erstes ein direkter Vorgänger gefunden wurde, höchstens die Rohrschnittgebiete an dem Konstruktionspunkt \mathbf{k}_{i-1} betrachtet werden. Dadurch ergibt sich eine Laufzeit von $O((n + 1) \cdot m^4)$ und ein Speicherplatzbedarf von $O((n + 1) \cdot m^2)$. Im theoretischen, unrealistischen Worst-Case-Fall, d.h. $c_1 = c_2 = c_3 = (n + 1)$ ergibt sich somit eine Laufzeit von $O((n + 1)^4 \cdot m^4)$ und ein Speicherplatzbedarf von $O((n + 1)^2 \cdot m^2)$.

Der Speicher- und Zeitaufwand der von Aho [2] und La Poutré [42] vorgestellten Algorithmen zur Berechnung des transitiven Kerns der Halbordnung \leq_1 wird durch den Aufwand einer Matrizenmultiplikation zweier $((n + 1) \cdot m) \times ((n + 1) \cdot m)$ -Matrizen dominiert. Nach einer von Wegener [77] (1996) und Robinson [63] (2005) erstellten Übersicht ist mit dem von Coppersmith und Winograd [15] vorstellten Verfahren aus dem Jahr 1988 mit einer Laufzeit von $O(((n + 1) \cdot m)^{2.38})$ die bisher bestmögliche Laufzeitermittlung der Matrixmultiplikation erreicht worden. Jedoch beinhaltet dieses Verfahren eine große Anzahl von Operationen, die in der O -Notation enthalten sind. Deren Vernachlässigung wird erst bei sehr großen Matrizendimensionen möglich. Demnach ist nach Wegener [77] die erste Arbeit von Strassen [72] aus dem Jahr 1969 bislang die einzige Methode, die die Schulmethode mit der Laufzeit von $O(((n + 1) \cdot m)^3)$ für realistische Werte von $(n + 1) \cdot m$ übertrifft. Die Methode von Strassen [72] benötigt eine Laufzeit von $O(((n + 1) \cdot m)^{2.81})$. Somit hat das vorgestellte Verfahren zur Ermittlung der eingeschränkten Menge der direkten Vorgänger eine bessere Laufzeit, falls $(n + 1) \cdot m^4 < z_1 \cdot ((n + 1) \cdot m)^{2.81}$, $z_1 \in \mathbb{R}$, ist, d.h. $m < z_2 \cdot (n + 1)^{1.52}$, $z_2 \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass mit wachsender Anzahl von Konstruktionspunkten überproportional mehr Schnittgebiete pro Konstruktionspunkt möglich sind, ohne den Aufwand gegenüber dem anderen Verfahren zu verschlechtern. Bezüglich des Speicherplatzbedarfes lässt sich feststellen, dass das Verfahren von Strassen [72] einen Aufwand von $O(((n + 1) \cdot m)^2)$ hat, also das vorgestellte, eingeschränkte Verfahren für alle n, m einen geringeren Bedarf hat.

In dem vorgestellten Algorithmus werden Rohrschnittgebiete in einer Menge \mathcal{L} abgespeichert. Bei

der Überprüfung, ob die Elemente paarweise nicht vergleichbar sind, können nach einem beschleunigenden Vorschlag von Piepenstock [61] diejenigen Rohrschnittgebiete ausgespart werden, die den gleichen Konstruktionspunkt haben. Da für die Bestimmung der direkten Vorgänger wegen der praxisnahen Annahme $c_1 \leq 3$ und $c_2 = c_3 = 2$ gewählt wurde, ergibt sich eine Reduzierung der Laufzeit um den Faktor 2. Dies kann dadurch eingesehen werden, dass bei der Aktualisierung von \mathcal{L} nur noch maximal m statt maximal $c_2 \cdot m = 2 \cdot m$ Rohrschnittgebiete betrachtet werden müssen.

In der Diplomarbeit von Piepenstock [61] wird diese Beschleunigung zur Berechnung der direkten Vorgänger angewendet. Dies ergibt sich durch eine etwas andere Wahl der zu Grunde liegenden Datenstruktur. Hier wird anstelle von \mathcal{L} eine Liste von Rohrschnittgebieten verwendet, wobei jede Menge eines Listeneintrags den gleichen Konstruktionspunkt besitzt. Der Vorteil des Verfahrens dieser Dissertation ist die Konzentration auf das Wesentliche, die eine überschaubarere Formulierung des Korrektheitsnachweises erlaubt, der in der Diplomarbeit nicht geführt wurde.

5.6 Bestimmung einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge

Nun sind die Voraussetzungen zur Formulierung des Verfahrens der Bestimmung einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge mit der in Abschnitt 5.1 geschilderten Einschränkung der Suche der dynamischen Programmierung auf direkte Vorgänger gegeben. Ausgehend von der Kandidatenmenge \mathcal{C}_1 sowie der Menge von direkten Vorgänger zu jedem $C \in \mathcal{C}_1$, die zuerst ermittelt werden, wird zunächst ein Schlauchstützstellengraph \mathcal{G}_1 erzeugt. Dafür sind zwei Schritte erforderlich:

Erzeuge angepasste Kandidatenmenge \mathcal{C}_1^a

Ausgehend von den direkten Vorgängern von R_e werden lediglich diejenigen Rohrschnittgebiete C in $\mathcal{V}(R_e)$ belassen, wenn die Verbindung der Leitpunkte von R_e und C innerhalb des Rohres verläuft. Als Leitpunkt wird der Schwerpunkt des Rohrschnittgebietes beziehungsweise der Öffnung gewählt. Sollte eine stückweise lineare Schlauchapproximation ermittelt werden, wird zudem überprüft, ob auf dem Teilrohr $W(C, R_e)$ eine lineare Schlauchapproximation existiert. Dadurch ergibt sich die Menge $\mathcal{V}^a(R_e)$ von angepassten direkten Vorgängern von R_e . Anschließend wird iterativ zu allen Rohrschnittgebieten aus $\mathcal{V}^a(R_e)$ die Menge deren direkter Vorgänger analog angepasst. Die Vereinigung aller dieser betrachteten Mengen von angepassten direkten Vorgängern ergibt dann eine neue angepasste Menge \mathcal{C}_1^a von Rohrschnittgebieten.

Erzeuge Schlauchstützstellengraph \mathcal{G}_1 auf \mathcal{C}_1^a

Der Graph $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{S}, \mathcal{K})$ ist dann dadurch gegeben, dass für $S_1 = (C_1, \mathbf{r}_1)$ und $S_2 = (C_2, \mathbf{r}_2)$, $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_1^a$ genau dann eine Kante $(S_1, S_2) \in \mathcal{K}$ existiert, wenn $C_1 \in \mathcal{V}^a(C_2)$ ist.

Ausgehend davon kann nun die eigentliche Suche nach einer optimierten Schlauchstützstellenfolge angegeben werden. Hierfür wird der Begriff des direkten Vorgängers von Rohrschnittgebieten auf Schlauchstützstellen in dem Graphen \mathcal{G}_1 erweitert. Zu jedem $S \in \mathcal{S}$ besteht die Menge $\mathcal{V}^a(S) \subset \mathcal{S}$ aus genau denjenigen Schlauchstützstellen S_V , für die $(S_V, S) \in \mathcal{K}$ gilt.

In der folgenden Darstellung des Algorithmus, die einer Formulierung in der Diplomarbeit Piepenstock [61] folgt, werden Zwischenergebnisse in Tripelform abgespeichert. Zu $S \in \mathcal{S}$ werden Wege $[S_0, S_1, \dots, S_j, S]$ als Tripel

$$(S_0, [S_1, \dots, S_j], E)$$

betrachtet, mit

1. einem Eintrag einer Vorgängerstützstelle S_0 , die zur Rekonstruktion benötigt wird,

2. einer maximal $k - 1$ Schlauchstützstellen umfassenden Folge S_1, \dots, S_j mit $j = 1, \dots, k - 1$, von Vorgängern von S und Nachfolgern von S_0 und
3. einem Wert E der die Bewertung der besten auf $[S_1, \dots, S_j, S]$ endenden, bisher gefundenen Teilfolge mit $S_1 \notin \mathcal{S}_a$ enthält.

Algorithmus "Berechnung einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge"

Eingabe:

1. Die Mengen $\mathcal{V}^a(S)$, $S \in \mathcal{S}_1$, zu einem Graphen $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{S}_1, \mathcal{K}_1)$, wie zuvor definiert.
2. Die von \mathcal{G}_1 induzierte Schichtenzerlegung \mathcal{S}_i , $i = 0, \dots, l$, von \mathcal{S} nach Definition 5.2.

Ausgabe:

Eine Zuordnung von optimierten Bewertungen E sowie Vorgänger-Stützstellen S zu Stützstellenfolgenden der Länge k .

Ablauf:

```

for all  $S \in \mathcal{S}_0$  do
  initialisiere die Menge der  $S$  zugeordneten Tripel  $\mathcal{Z}(S) = \{(-, [], 0)\}$ ;
end for
for  $i = 1, \dots, l$  do
  for all  $S \in \mathcal{S}_i$  do
    initialisiere  $\mathcal{Z}(S) = \emptyset$ ;
    for all Vorgänger von  $S_v \in \mathcal{V}^a(S)$  do
      for all zugeordneten Tripel  $(\cdot, [S_1, \dots, S_j], E) \in \mathcal{Z}(S_v)$  do
        /* falls  $\mathcal{Z}(S) = \emptyset$  wird die for Schleife mit  $j = 0$  betreten */
        if  $j = k - 1$  then
          if  $E(S_1, \dots, S_j, S_v, S)$  liefert eine gültige Bewertung then
             $newE := E + E(S_1, \dots, S_j, S_v, S)$ ;
            if  $\exists(S_0, [S_2, \dots, S_j, S_v], E') \in \mathcal{Z}(S)$ ,  $S_0, E'$  beliebig then
              if  $newE$  eine bessere Bewertung als  $E'$  ist then
                ersetze im gespeicherten Zuordnungseintrag den Wert  $E'$  durch
                 $newE$  und die Vorgängerstützstelle  $S_0$  durch  $S_1$ ;
              end if
            end if
          else
            füge  $(S_1, [S_2, \dots, S_j, S_v], newE)$  zur Menge  $\mathcal{Z}(S)$  hinzu;
          end if
        end if
      end if
    end for
  end for
  füge  $(-, [S_1, \dots, S_j, S_v], 0)$  zur Menge  $\mathcal{Z}(S)$  hinzu;
end if
end for
end for
end for

```

Ist das Optimum gefunden, soll nicht nur dessen Wert, sondern die dazugehörige Folge aus der Menge der Gesamtfolgen ausgegeben werden. Diese lässt sich leicht rekonstruieren, da in dem Tripel zu einem Folgenende aus k Stützstellen die Vorgängerstützstelle mit abgespeichert ist.

Algorithmus "Rekonstruktion einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge"**Eingabe:**

1. Die Stützstellen \mathcal{S}_e .
2. Die vom Algorithmus "Berechnung einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge" berechneten Zwischenergebnisse in Form der Zuordnungs-Tripel zu den gegebenen Stützstellen $\mathcal{Z}(S)$.

Ausgabe:

Eine vom obigen Algorithmus bestbewertete Schlauchstützstellenfolge

Ablauf:

Unter allen $S \in \mathcal{S}_e$ und allen Zuordnungstriplen $(S_0, [S_1, \dots, S_i], E) \in \mathcal{Z}(S)$ suche eines mit dem besten E -Wert und das dazugehörige S ;

if es existieren keine solche Tripel **then**

der obige Algorithmus hat keine Folge der gewünschten Art gefunden;

gebe eine entsprechende Meldung aus und Ende des Algorithmus;

end if

repeat

füge das aktuelle S vorn an die Ausgabefolge an;

if S_0 definiert **then**

suche das Zuordnungstriplel $(S'_0, [S'_1, \dots, S'_j], E) \in \mathcal{Z}(S_i)$ für das

$S'_1 = S_0, \dots, S'_j = S_{i-1}$ gilt;

else

suche solches mit $S'_1 = S_1, \dots, S'_j = S_{i-1}$ (bei $i = 1$ ist $j = 0$);

end if

$S = S_i$;

$i = j$;

$S_0 = S'_0, \dots, S_i = S'_j$;

until $i = 0$

füge das aktuelle S vorn an die Ausgabefolge an;

Um unnötige Sonderfälle und Ausnahmen zu vermeiden, die die Lesbarkeit dieses Algorithmus stark beeinträchtigen, wird die Zuweisung auch von nicht definierten Werten zugelassen. Dies ist beispielsweise in der drittletzten Zeile für $S_0 = S'_0$ der Fall, falls der *else*-Zweig ausgeführt wird. In solchen Fällen wird die Zuweisung nicht durchgeführt.

Dieser Algorithmus gilt für die Schlauchstützstellenapproximation und die diskretisierte stückweise lineare Schlauchapproximation gleichermaßen. Der Unterschied ergibt sich durch die verwendete Bewertungsfunktion, die entweder nur die Stützstellen oder die Scharen zwischen den Stützstellen, wie in den Abschnitten 4.1 und 4.2 beschrieben, bei der Berechnung berücksichtigt.

Der Algorithmus setzt das Prinzip der dynamischen Programmierung direkt für die gegebene Situation um, woraus seine Korrektheit unmittelbar gegeben ist.

5.7 Aufwand des Verfahrens zur Bestimmung einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge

In diesem Abschnitt soll die Laufzeit sowie der benötigte Speicherplatzbedarf des Algorithmus "Berechnung einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge" untersucht werden.

Satz 5.19

Sei $[\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}]$ eine Folge von Konstruktionspunkten auf einer Konnektivitätslinie \mathbf{l} , $\mathbf{k}_0 := \mathbf{l}(0)$ und $\mathbf{k}_n := \mathbf{l}(1)$ und

- m die maximale Anzahl von Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt,
- $k + 1$ die Anzahl der Parameter der Zielfunktion,
- c_3 wie in Satz 5.18.

Dann benötigt der Algorithmus "Berechnung einer optimierten approximierenden Schlauchstützstellenfolge" eine Laufzeit $O(c_3^k \cdot m^{k+1} \cdot (n+1))$ und einen Speicherplatz von $O(c_3^{k-1} \cdot m^k \cdot (n+1) \cdot k)$.

Beweis

Der vorgestellte Algorithmus bildet alle erlaubten Teilfolgen der Länge $k+1$ und bewertet diese. Nach Voraussetzung ist m die maximale Anzahl an Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt. Gemäß der Konstruktion von c_3 können direkte Vorgänger eines Rohrschnittgebietes beziehungsweise einer Öffnung an c_3 benachbarten Konstruktionspunkten liegen. Damit ist die Zahl der Teilfolgen der Länge $k+1$, die bei einem Rohrschnittgebiet C enden, beschränkt durch $O(c_3^k \cdot m^k)$. Weil zu jedem der $(n+1) \cdot m$ Rohrschnittgebiete solche Teilfolgen gebildet werden, ist die Laufzeit beschränkt durch $O(c_3^k \cdot m^{k+1} \cdot (n+1))$.

Wie im Algorithmus ersichtlich, werden Wege der Länge k zu jedem Rohrschnittgebiet gespeichert. Weil jedoch die erste Schlauchstützstelle jedes Weges so gewählt ist, dass die Bewertung des Weges minimal ist, ist der Speicherplatzbedarf durch $O(c_3^{k-1} \cdot m^k \cdot (n+1))$ beschränkt. Zu jeder dieser Bewertungen müssen jedoch auch die k Stützstellen der Teilfolge mit aufgezeichnet werden. Es ergibt sich ein Speicherplatzbedarf von $O(c_3^{k-1} \cdot m^k \cdot n \cdot k)$. \square

5.8 Hierarchische Suche

Bislang wurde die Menge $\mathcal{F}(\mathbf{k}_i)$ von Rohrschnittgebieten zu den Konstruktionspunkten zwar genannt, aber noch nicht konkret mit Rohrschnittgebieten gefüllt. Dies soll in diesem Abschnitt geschehen.

Es wird dazu eine diskrete Folge von Punkten $[\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}]$ in vorgegebener Dichte auf der Konnektivitätslinie benötigt. Eine Möglichkeit sind äquidistante Punktfolgen. Diese lassen sich wie folgt berechnen:

Zu einem $n \in \mathbb{N}$ und einer Konnektivitätslinie $\mathbf{l} = [\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_m]$ sei mit $L_i := \sum_{j=0}^{i-1} d(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{j+1})$ die

Berechnungsvorschrift für die Konstruktionspunkte

$$\mathbf{k}_j := \frac{x_j - L_i}{L_{i+1} - L_i} \cdot \mathbf{r}_{i+1} + \frac{L_{i+1} - x_j}{L_{i+1} - L_i} \cdot \mathbf{r}_i,$$

mit $L_i \leq x_j = L_m \cdot \frac{j}{n} \leq L_{i+1}$, $j = 1, \dots, n-1$.

Aus algorithmischer Sicht ist es empfehlenswert zu vermeiden, dass Konstruktionspunkte auf Knoten der Konnektivitätslinie fallen (vgl. Abschnitt 3.2.2), da es sonst aufwändiger ist, trennende Rohrschnittgebiete zu generieren.

Die Laufzeitbetrachtungen aus den Sätzen 5.18 und 5.19 zeigen, dass die Anzahl der Konstruktionspunkte und die Anzahl von Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt mehr als linear in Zeit- und Speicherbedarf eingehen können. Eine feine Diskretisierung, die die Chance des Erreichens einer guten Approximation des ursprünglich kontinuierlichen Problems erhöht, kann somit hohen, wenn nicht

unpraktikablen Rechenaufwand zur Folge haben. Im Folgenden wird eine hierarchische Suche zur Minderung dieser Schwierigkeit skizziert, die heuristisch ist, da sie nicht notwendigerweise globale Optima findet. Sie ist in der Diplomarbeit von Piepenstock [61] in der folgenden Weise konkretisiert worden.

Ausgehend von einer relativ groben Menge an Rohrschnittgebieten wird eine Lösung mit dem beschriebenen Algorithmus ermittelt. Zu jeder Kontur der Lösung wird dann ein feinerer Suchraum bereitgestellt. Dabei gilt der Grundgedanke, dass das Verfahren eine Lösung gefunden hat, die nahe an der optimalen Lösung liegt. Dieses Verfahren wird bis zu einem gegebenen Maß wiederholt, um so dem Optimum näher zu kommen. Diese Methode hat natürlich den Nachteil, dass so in lokalen Minima steckengeblieben werden kann.

Ausgehend von einer Startnormalen \mathbf{n}_0 erstreckt sich der Bereich möglicher Normalen \mathbf{n} in einem Winkelbereich α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ um eine Achse senkrecht zu der Normalen sowie in einem Bereich β zwischen 0 und 2π um die Normale selbst. Die Abbildung 5.5 soll dies verdeutlichen. Zu jeder Start-

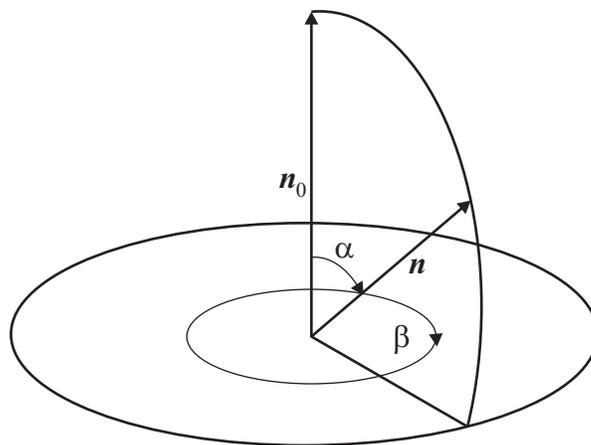


Abbildung 5.5: Rotation um eine Ausgangsnormale (entnommen aus [61])

normalen wird mittels einer von Piepenstock [61] vorgeschlagenen Wahrscheinlichkeitsverteilung eine feste Anzahl von Normalenvektoren ermittelt. Diese Normalenvektoren sollen zusammen mit den jeweiligen Konstruktionspunkten trennende Rohrschnittgebiete erzeugen. Dabei sind die Ausgangsnormalen der ersten Iteration mittels eines Zufallsgenerators erzeugt worden. Die Ausgangsnormalen weiterer Iterationen sind durch den gefundenen optimierten Schlauchstützstellenkantenzug gegeben. Sollte eine Ausgangsnormale kein trennendes Rohrschnittgebiet erzeugen, wird mittels eines Zufallsgenerators solange eine neue Normale bestimmt, bis ein trennendes Gebiet entsteht. Sollte durch Rotation der Ausgangsnormale ein ungültiges Rohrschnittgebiet entstehen, wird eine neue Normale bestimmt, bis auch diese ein trennendes Rohrschnittgebiet erzeugt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung berücksichtigt beispielsweise, dass der Oberflächenteil der Einheitskugel mit der Parametrisierung $\alpha \in [0, \frac{\pi}{18}]$ und $\beta \in [0, 2\pi[$ kleiner ist als der mit $\alpha \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{2}] = [\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}]$ und $\beta \in [0, 2\pi[$. Dadurch wird insgesamt eine ausgeglichene Verteilung der Normalenvektoren erreicht. Ferner wird von Iteration zu Iteration der Wertebereich von α immer weiter eingeschränkt, d.h. $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$, $\alpha_{\max} < \frac{\pi}{2}$.

In der Abbildung 5.6 wird die Einschränkung der Normalenvektoren selbst, in der Abbildung 5.7 die Auswirkungen für die Rohrschnittgebiete erkennbar.

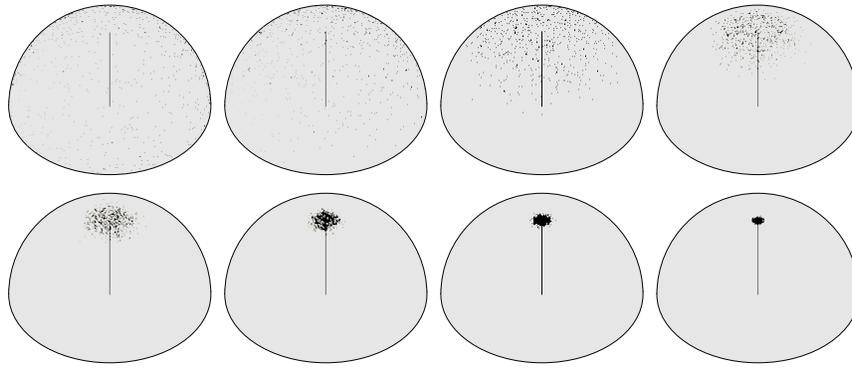


Abbildung 5.6: Beispiel schrittweise eingeschränkter Normalenrichtungen auf einer Halbkugel (entnommen aus [61])

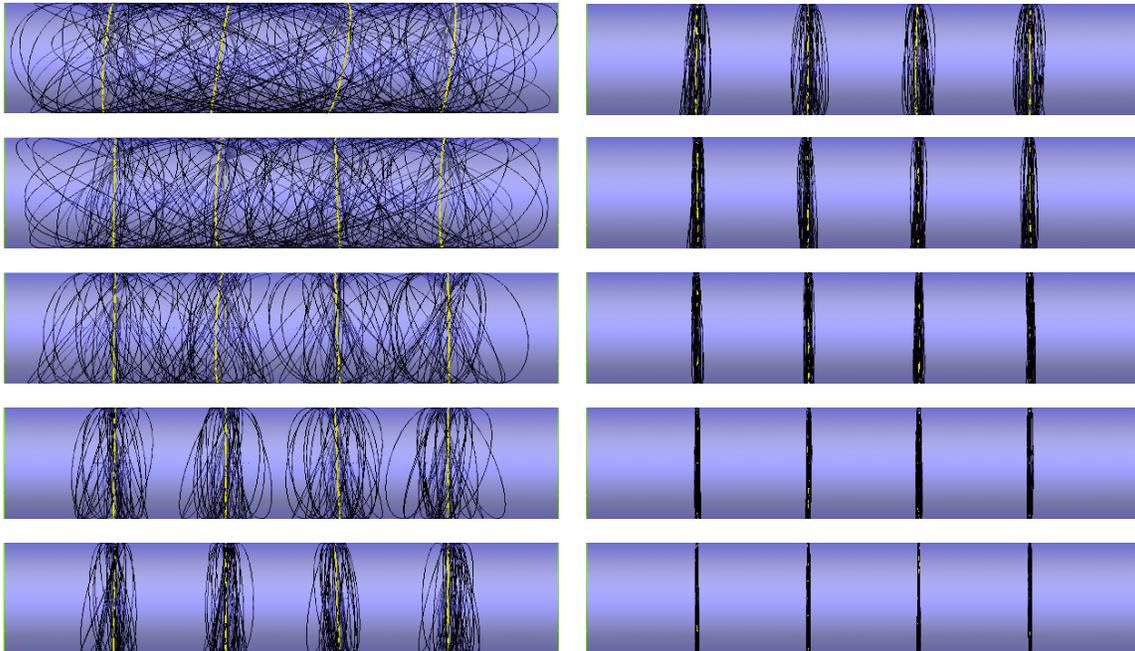


Abbildung 5.7: Beispiel schrittweise eingeschränkter Normalenrichtungen in einem Rohr; es ist zu erkennen, dass der Rotationsbereich der Rohrschnittgebiete immer kleiner wird (entnommen aus [61]).

5.9 Experimentelle Analyse

Gegenstand dieses Abschnitts ist die experimentelle Evaluierung des Verfahrens, das in diesem Kapitel vorgestellt wurde, sowie der Tragfähigkeit der Modellierung des Problems der Schlaucheinpassung anhand der Lösungen, die dieses Verfahren liefert. Die Evaluierung basiert auf einer Implementierung, die in der Diplomarbeit Piepenstock [61] durchgeführt wurde. Dieser Arbeit entstammen auch im Wesentlichen die Abschnitte 5.9.1 und 5.9.2, die unter Mitwirkung des Autors der Dissertation entstanden sind. Abschnitt 5.9.3 erweitert erste, in der genannten Diplomarbeit durchgeführte Unter-

suchungen auf zwei Fallstudien unterschiedlicher Charakteristik und analysiert diese weitergehend.

Die Analyse beginnt mit einer Untersuchung der Wirkung der Verfahrensparameter. Daran schließen sich die Analyse des Verhaltens der einzelnen Gütefunktionen und des Einflusses der Gewichte in der Gesamtzielfunktion an. Schließlich wird noch auf die benötigte Rechenzeit eingegangen.

5.9.1 Untersuchung von Verfahrensparametern

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen der Verfahrensparameter in dem vorgestellten Verfahren untersucht. Damit ist die Generierung der diskreten Rohrschnittgebiete entlang der Konnektivitätslinie, also die Einschränkung des Suchbereichs der Rohrschnittgebiete durch Winkel in jedem Konstruktionspunkt sowie die Anzahl an Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt gemeint. Ferner ist die Wahl der Konstruktionspunkte selbst ein Parameter, der das Ergebnis beeinflussen kann.

Die Wahl der Parameter für die Winkeleinschränkung aus dem Abschnitt 5.8 bei der Erzeugung von Rohrschnittgebieten an Konstruktionspunkten erweist sich als schwierig. Wählt man die Werte zu restriktiv, kann zum einen das tatsächliche Optimum nicht gefunden werden. Zum anderen besteht so bei zu dicht zusammenliegenden Konstruktionspunkten die Gefahr, dass Blockadesituationen auftreten, so dass eine Lösung entweder nicht alle Konstruktionspunkte berücksichtigt oder im Extremfall keine Lösung existiert. Andererseits bedeutet eine zu großzügige Wahl der Parameter einen viel zu großen Suchraum von nicht mehr praktikablem Ausmaß.

Eine Wahl von sinnvollen Werten hängt von der jeweiligen Rohrgeometrie und der Dichte der Konstruktionspunkte ab. Sie lassen sich nicht allgemeingültig vorgeben. Allerdings können die Anwendenden nach einigen Optimierungsschritten erkennen, in welchem Bereich geeignete Werte zu finden sind.

Zudem ist die Wahl der Dichte der Konstruktionspunkte, die durch deren Anzahl gegeben ist, kritisch. Auch hier kann eine zu hohe Anzahl von Punkten und zu geringe Anzahl von Rohrschnittgebieten pro Punkt Blockadesituationen hervorrufen. Die Folge ist, dass dann Konstruktionspunkte übersprungen werden, was die Laufzeit des Verfahrens erhöht. Somit führt eine hohe Zahl von Konstruktionspunkten automatisch zu einer hohen Zahl von Rohrschnittgebieten pro Punkt und damit zu einer sehr hohen Laufzeit des Verfahrens. Andererseits bedeutet eine zu geringe Wahl von Konstruktionspunkten, dass die Leitlinie selbst nur sehr grob ist. Dieser Punkt wird allerdings im Abschnitt 7.2 noch weiter untersucht, in dem die Rolle der diskretisierten, stückweise linearen Schlauchapproximation betrachtet wird. Es wird gezeigt, dass mit Schlauchapproximationen, die eine geringe Anzahl von Konstruktionspunkten besitzen, gute Ergebnisse für die Leitlinie erzielt werden können.

Das Diagramm in der Abbildung 5.8 zeigt am Beispiel eines kurzen, zylindrischen Rohres, wie mit steigender Anzahl von Konstruktionspunkten (Zahl an den Kurven) die Anzahl der Rohrschnittgebiete pro Punkt steigen muss, damit die gleiche Anzahl an Optimierungsläufen (Anzahl der Iterationen) ohne Blockadesituation auftritt.

Beispielsweise benötigt eine Konnektivitätslinie mit vier Konstruktionspunkten etwa fünf Rohrschnittgebiete pro Punkt um 14 Optimierungsdurchläufe zu generieren. Schon bei fünf Konstruktionspunkten werden über zehn Rohrschnittgebiete benötigt, um die gleiche Anzahl an Iterationen der hierarchischen Suche zu bekommen.

In der Abbildung 5.9 sind die Auswirkungen der Geschwindigkeit der Einschränkung der Parameter dargestellt. Es wurden insgesamt sechs Messungen durchgeführt, in denen sukzessive die Winkeleinschränkung schneller wurde und zugleich weniger Rohrschnittgebiete pro Konstruktionspunkt erzeugt wurden. Die Untersuchungen wurden für das Rohr durchgeführt, welches in der Abbildung 5.10 skizziert ist. Dieses Rohr ist im Prinzip ein gerader Zylinder mit einem Radius von 1 und einer

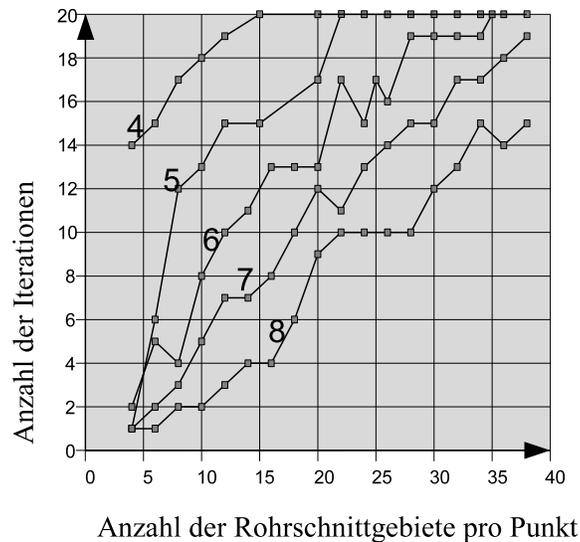


Abbildung 5.8: Abhängigkeit von der Anzahl der Rohrschnittgebiete zum Vermeiden von Blockadesituationen; jede Kurve im Diagramm gehört zu einer festen Anzahl von Konstruktionspunkten, die jeweils den Kurven angefügt ist (entnommen aus [61]).

Länge von 55, der an insgesamt fünf Stellen aufgeweitet wurde.

Auf der Ordinate ist die Größe der Zielfunktion aufgetragen und auf der Abszisse die Anzahl der verwendeten Iterationen. Hierbei besitzt die mit dem Buchstaben a gekennzeichnete Kurve die langsamste Winkeleinschränkung und größte Anzahl an Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt, wohingegen die mit dem Buchstaben f gekennzeichnete die schnellste Winkeleinschränkung und geringste Anzahl an Rohrschnittgebieten repräsentiert. Die restlichen Kurven sind gemäß der Reihenfolge des Alphabets in die Werte von a und f eingeordnet.

Es wird deutlich, dass die mit dem Buchstaben a gekennzeichnete Kurve gemessen an der Anzahl der Iterationen deutlich langsamer die Zielfunktion minimiert als die anderen Kurven. Allerdings wird die Zielfunktion hierdurch nahezu am besten minimiert. Dagegen kann festgestellt werden, dass die mit d gekennzeichnete Kurve die Zielfunktion der Größe nach am schlechtesten minimiert. Dies bedeutet also zusammenfassend, dass bei geringerer Anzahl an Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt und einer schnelleren Winkeleinschränkung die Zielfunktion in lokalen Minima gefangen werden kann und nicht das globale Minimum findet. Dies muss allerdings nicht zutreffen, denn die mit e gekennzeichnete Kurve liegt deutlich besser an dem besten erreichten Wert der Zielfunktion als d.

5.9.2 Untersuchung der einzelnen Gütefunktionen

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Untersuchung der einzelnen Gütefunktionen aus der Zielfunktion. Ihre Probleme und Auswirkung werden separat für jede Funktion betrachtet.

Zentrumsgüte

In den experimentellen Untersuchungen dieses Kapitels werden nur Rohre betrachtet, bei denen sinnvolle Lösungen aus Schlauchstützstellen bestehen, deren Rohrschnittgebiete genau eine Randkontur haben und die zudem die Eigenschaft haben, dass deren Schwerpunkt im Inneren des Rohrschnittgebietes liegt, so wie dies für die Anwendung in der Umformtechnik von Interesse ist. Dies macht es

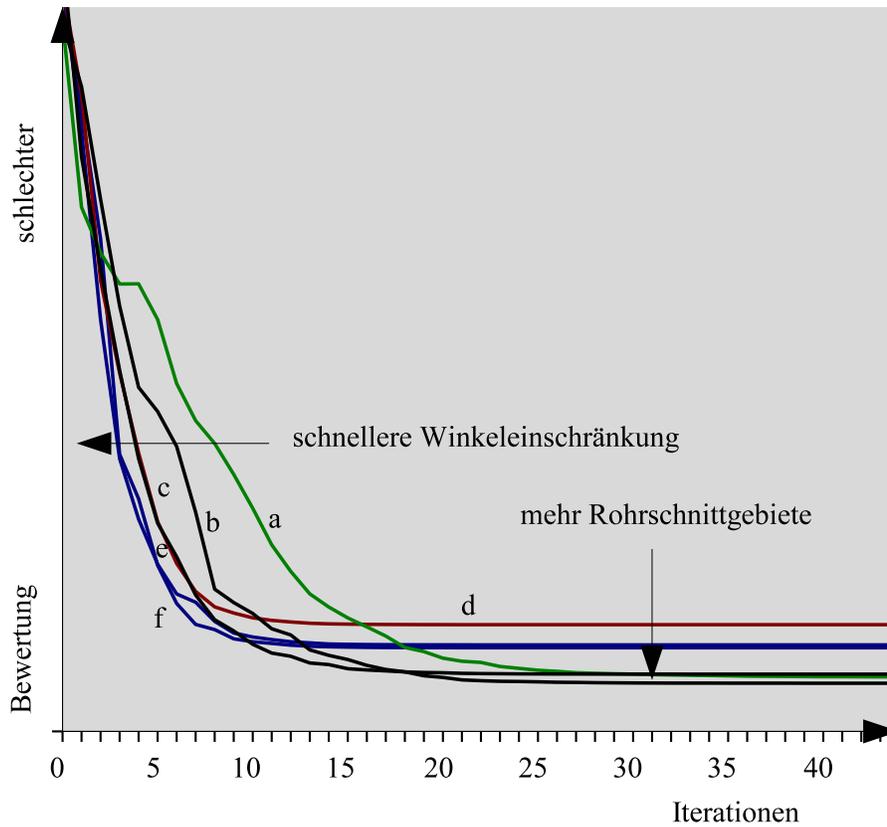


Abbildung 5.9: Konvergenzverhalten im Vergleich der Winkeleinschränkung und der Anzahl der Rohrschnittgebiete pro Konstruktionspunkt; hierbei besitzt die mit dem Buchstaben a gekennzeichnete Kurve die langsamste Winkeleinschränkung und die größte Anzahl an Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt und die mit dem Buchstaben f gekennzeichnete Kurve die schnellste Winkeleinschränkung und die geringste Anzahl an Rohrschnittgebieten pro Konstruktionspunkt. Die restlichen Kurven sind gemäß der Reihenfolge des Alphabets in die Werte a bis f eingeordnet (entnommen aus [61]).

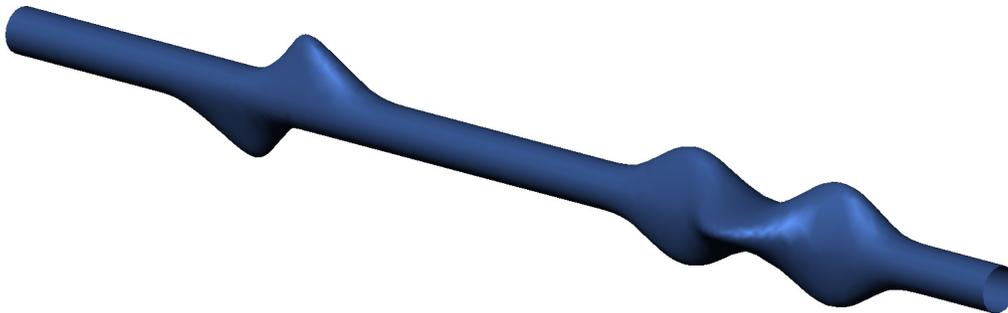


Abbildung 5.10: Beispielrohr, an dem das Konvergenzverhalten verschiedener Parameter gezeigt wird

möglich, den Leitpunkt als den Schwerpunkt fest zu wählen und die Randbedingung des Verlaufs des Leitpolygonzuges im Inneren des Rohres trotzdem erfüllen zu können. Diese Lage entspricht dem Optimum bezüglich der Zielfunktion der Zentrumsgüte. Das bedeutet, dass die Zentrumsgüte aus der Zielfunktion, die durch den Algorithmus zu optimieren ist, entfernt wurde.

Das Ausschalten der Zentrumsgüte als Teil der Zielfunktion bewirkt eine Einschränkung des Suchraumes. Angesichts der gewünschten und in der Regel erfüllbaren Lage der Leitlinie relativ zu den Rohrschnittgebieten einer guten Lösung erscheint dies jedoch nicht zu restriktiv. Der Gewinn besteht in einer Einsparung von Berechnungsaufwand, da die Dimensionen des Suchraums entfallen, die von den Leitpunkten definiert werden.

Umfangsgüte und Flächengüte

Weil die Konstruktionspunkte der Rohrschnittgebiete auf dem Rand gewählt wurden, ist die Umfangs- und Flächengüte in der vorliegenden Situation ein ungünstiges Maß. Bei einem Kegelstumpf ist intuitiv eine Folge von Kreisscheiben, die von Schnittebenen senkrecht zur Achse des Kegelstumpfes induziert werden, eine günstige Schlaucheinpassung. Hingegen ist bei gleichem Konstruktionspunkt das Rohrschnittgebiet mit geringstem Umfang beziehungsweise kleinstem Flächeninhalt nicht ein Kreis, sondern eine Ellipse. Dies soll durch die Abbildung 5.11 weiter verdeutlicht werden. Hier

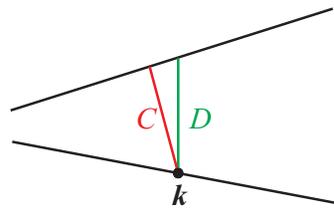


Abbildung 5.11: Kreis ist nicht der Schnitt mit geringstem Umfang

ist ein Schnitt durch einen Kegelstumpf dargestellt. Für die Schlaucheinpassung günstig wäre der Kreis D als Rohrschnittgebiet, tatsächlich besitzt allerdings C mit dem gleichen Konstruktionspunkt k einen kürzeren Umfang.

Eine Möglichkeit zur Behebung dieser Schwierigkeit könnte eine modifizierte Umfangs- beziehungsweise Flächengüte sein, die sich als Quotient der Güte des betrachteten Rohrschnittgebietes C und der Güte eines Rohrschnittgebietes ergibt, das den Leitpunkt $r(C)$ von C enthält und die Güte minimiert. Da die Berechnung dieser minimalen Güte relativ zeitaufwändig ist, wurde diese Gütefunktion nicht weiter verfolgt. In empirischen Tests hat sich gezeigt, dass die Oberflächensteigungsgüte, die Parallelitätsgüte und die tangentielle Ausrichtungsgüte die durch die Umfangs- und Flächengüte erwünschte Wirkung zeigen, so dass die Umfangs- und Flächengüte in der zu optimierenden Zielfunktion nicht berücksichtigt werden.

Oberflächensteigungsgüte

Diese Güte verwendet die Ausrichtung der von einem Rohrschnittgebiet geschnittenen Dreiecke. Dabei ist das Ziel, dass die Oberflächensteigung möglichst senkrecht zum Schnittebenenvektor steht.

Allerdings hat dieses Gütemaß Problemfälle, bei denen sich nicht das erwartete Verhalten zeigt. In der Abbildung 5.12 ist die Entwicklung dieser Güte in einem kreisrunden Rohr gegenüber der Neigung der Konturebenen dargestellt. Zum einen ist ein gerader Zylinder verwendet worden, zum anderen ein konisches Rohr, welches in der Abbildung 5.13 zu sehen ist. Die gewünschte Leitlinie ist in bei-

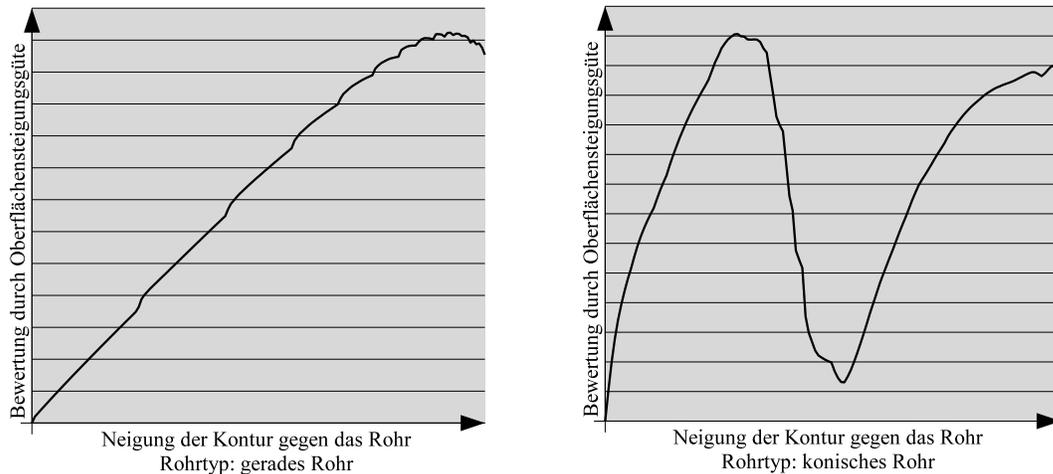


Abbildung 5.12: Werte der Oberflächensteigungsgüte für zwei Beispielrohre (entnommen aus [61])

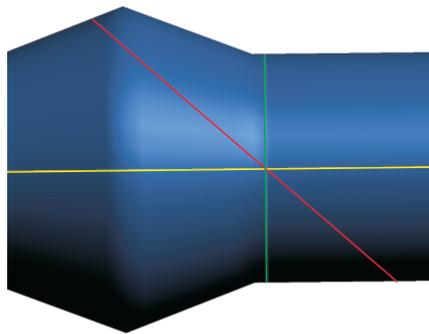


Abbildung 5.13: Rohr mit der erwarteten Leitlinie und zwei Rohrschnittgebieten mit gleichem Konstruktionspunkt, bei denen die Oberflächensteigungsgüte minimal ist.

den Fällen eine Gerade. Die bewerteten Rohrschnittgebiete wurden um einen festen Rotationspunkt gedreht. Die Rotationsachse ist hierbei senkrecht zur Leitlinie gewählt. Bei dem Zylinder liefert der senkrechte Beschnitt den besten Wert. Bei den Werten der Oberflächensteigung für das konische Rohr erkennt man allerdings zwei Minima. Die dazugehörigen Rohrschnittgebiete sind in der Abbildung 5.13 zusammen mit dem Rohr und der erwarteten Leitlinie dargestellt. Hier besteht somit die Gefahr, dass eine Schräglage bevorzugt wird. Dies bedeutet für das dargestellte Rohr eine schlechtere Leitlinie, da der Schwerpunkt des schrägen Beschnittes nicht auf der erwarteten Leitlinie liegt. Allerdings sind in der Regel die anderen Güten so gewählt, dass sie solche Fehllagen nicht unterstützen.

Ferner zeigt sich bei Rohren, die starke Krümmungsänderungen an der Oberfläche besitzen, dass diese Heuristik keine verwendbaren Resultate liefert. In Hinblick auf den Anwendungsbereich in der Umformtechnik können diese Probleme allerdings vernachlässigt werden, da solche Rohre praktisch nicht vorkommen.

Parallelitätsgüte und tangentiale Ausrichtungsgüte

Diese Güten orientieren sich nicht lokal an einem Rohrschnittgebiet, sondern verwenden Informationen aus benachbarten Rohrschnittgebieten. Experimentell wurde beobachtet, dass diese Güten sich gut mit der Oberflächensteigungsgüte ergänzen. Diese Ausrichtungsgüten scheinen eine gute Ergänzung zu den unerwünschten Minima der Oberflächensteigungsgüte zu sein. Ein solches Verhalten ist in den Abbildungen 5.14 und 5.15 dargestellt.

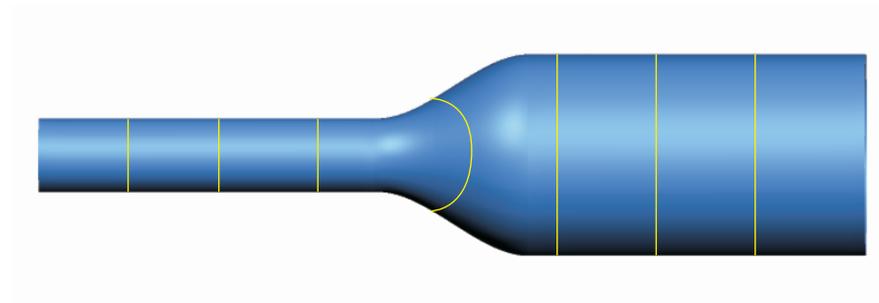


Abbildung 5.14: Die Oberflächensteigungsgüte alleine erreicht ein lokales Minimum (entnommen aus [61])

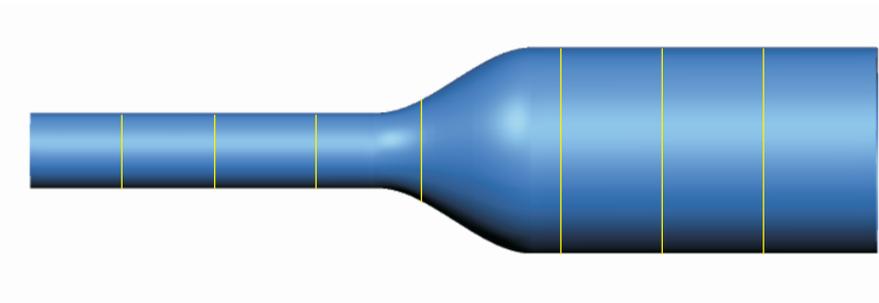


Abbildung 5.15: Zusammen mit den Neigungsheuristiken werden senkrechte Schnitte erzeugt (entnommen aus [61])

Allerdings gibt es auch bei diesen Gütemaßen Probleme. Beim Übergang von einem geraden in einen gekrümmten Bereich, beziehungsweise umgekehrt, versuchen diese Gütemaße auch die Rohrschnittgebiete zu neigen. Hier zeigt sich allerdings, dass beide Güten zusammengenommen dafür sorgen, dass die Rohrschnittgebiete intuitiv korrekt ausgerichtet sind. Ein solches Verhalten ist in den Abbildungen 5.16 bis 5.18 dargestellt.

Gleichzeitig ist in den Abbildungen 5.16 und 5.17 zu erkennen, dass in dieser Situation auch die Oberflächensteigungsgüte diesen beiden Ausrichtungsgüten entgegenwirkt, was in zahlreichen Versuchen bestätigt wurde. Damit zeigt sich, dass sich diese drei Gütemaße gut ergänzen.

Krümmungsgüte

Die Auswirkungen dieser Güte lassen sich einzeln nur bedingt testen. Durch diese Güte wird die Kurve, die durch die Schwerpunkte der Rohrschnittgebiete gegeben ist, geglättet. Das Minimum dieses Wertes ist eine Gerade. Durch die Rohrform bedingt, ist dies allerdings nicht immer möglich, wenn

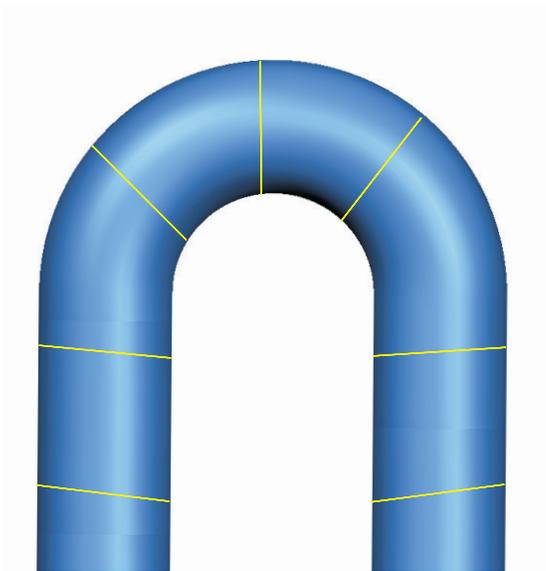


Abbildung 5.16: Schwierigkeiten der Parallelitätsgüte (entnommen aus [61])

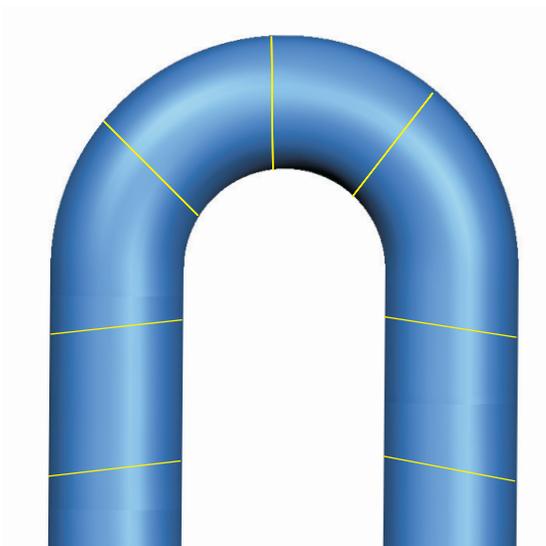


Abbildung 5.17: Schwierigkeiten der tangentialen Ausrichtungsgüte (entnommen aus [61])

bedacht wird, dass die Leitlinie innerhalb des Rohres verlaufen soll. Dementsprechend erzwingt eine geringere Krümmung automatisch schräge Schnitte, was exemplarisch an einem Beispiel dargestellt wird (vgl. Abbildung 5.19). Hier sind drei Rohrschnittgebiete zusammen mit den Leitpunkten in einem Bogen skizziert.

Die Krümmung ist ferner mit dem Abstand der Leitpunkte skaliert. Durch die Schrägstellung wird nicht nur die Krümmung geringer, sondern der Abstand der Leitpunkte größer, was somit den Effekt des Kippens noch weiter verstärkt. Relativ hohe Krümmungen sind dann an kurzen Segmenten zu erwarten. Schließlich wird für die Rohrenden keine Krümmung berechnet, was einer Krümmung Null entspricht. Dies bedeutet, dass die Rohrschnittgebiete noch weiter am Rand gekippt werden. Diese

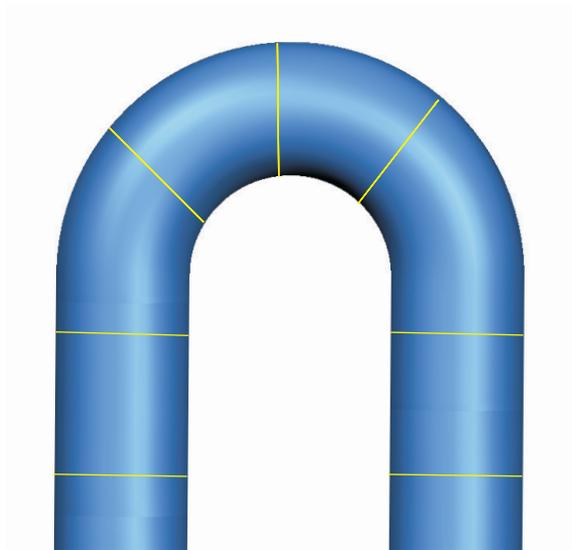


Abbildung 5.18: Die Effekte bei der Anwendung beider Gütemaße heben sich auf (entnommen aus [61])

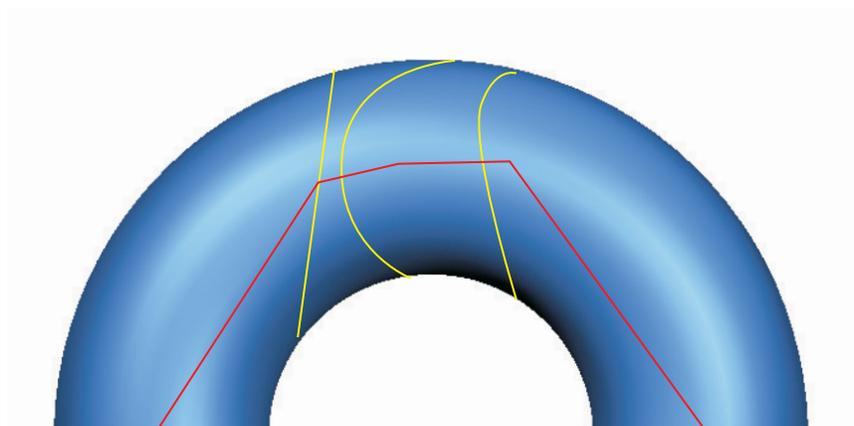


Abbildung 5.19: Schräge Rohrschnittgebiete bei der Verwendung der Krümmungsgüte (entnommen aus [61])

Schräglage wird dann zudem durch die Parallelitätsgüte auch auf Nachbargebiete übertragen.

5.9.3 Untersuchung des Einflusses der Gewichte in der Zielfunktion

In diesem Abschnitt wird zum einen das kombinierte Verhalten der Gütefunktionen in Hinblick auf ihre wechselseitige Beeinflussung untersucht. Zum anderen wird die Erreichbarkeit der anwendungsseitig als günstig angesehenen Lösungen als über die Zielfunktion beschriebene günstige Lösungen analysiert.

Wie bereits oben erwähnt, erzwingt die Krümmungsgüte Schräglagen von Rohrschnittgebieten. Das Ergebnis ist dann eine Leitlinie mit geringerer Krümmung, allerdings kann sie die intuitiv geforderte Leitlinie stark verlassen. Dies beruht auf der Tatsache, dass das Rohr selbst gekrümmt ist und somit auch die intuitiv gewünschte Leitlinie ein gewisses Maß an Krümmung aufweisen muss. Es wurde

beobachtet, dass das Verfahren sehr sensibel auf das Krümmungsgewicht reagiert. Zu kleine Gewichte bei der Krümmungsgüte führen zu kaum Einfluss, während zu große Gewichte die Leitlinie zu stark verformen. Insbesondere durch die Parallelitätsgüte werden auch benachbarte Rohrschnittgebiete gekippt. Insgesamt wurde festgestellt, dass die Krümmungsgüte nicht in kontrollierbarem Maße Einfluss auf die Leitlinienbestimmung ausübt. Es wurde beobachtet, dass die anderen Güten bei nicht zu irregulären und unförmigen Rohren zu brauchbaren Leitlinienergebnissen geführt haben.

Der Parallelitätsgüte und die tangentiale Ausrichtungsgüte üben in der Regel eine Glättungsfunktion bei der Leitlinienberechnung aus. Sie belohnen das gleichmäßige Ausrichten von Rohrschnittgebieten beziehungsweise senkrechte Ausrichten gegenüber der Leitlinie.

Diese beiden Heuristiken erweisen sich als diejenigen, die am meisten zum Auffinden einer intuitiv guten Leitlinie beisteuern.

Exemplarisch sollen nun die von zwei Versuchsreihen entstandenen Messergebnisse diskutiert werden. Sie können als repräsentativ für die Rohre angesehen werden, die in der Umformtechnik auftreten.

Erstes Beispielrohr

In den Abbildungen 5.22 bis 5.25 sind die Ergebnisse der ersten Messungen zusammengefasst, die anhand des Rohres, welches in der Abbildung 5.20 dargestellt ist, entstanden sind.

Es wurden verschiedene Iterationsprozesse durchgeführt, wobei jeder Prozess aus einzelnen Iteratio-

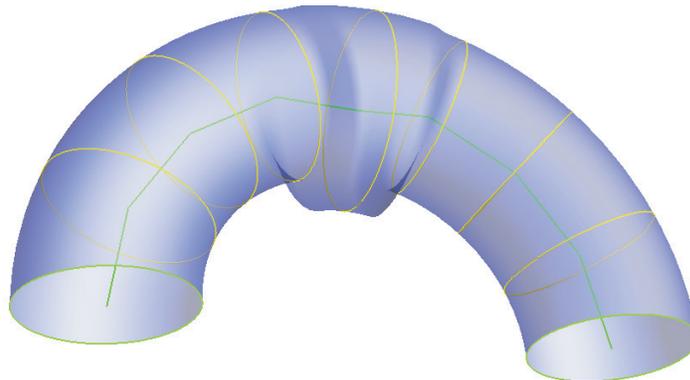


Abbildung 5.20: Beispielrohr für die erste Versuchsreihe mit einer berechneten Leitlinie

nen besteht. Jede Iteration wird durch einen blauen Messpunkt und das Ergebnis eines Iterationsprozesses durch einen roten Messpunkt dargestellt. Für jede Iteration wurde der Winkelbereich, in dem nach dem jeweiligen Optimum gesucht wurde, weiter eingeschränkt. Das erste Rohr ist im wesentlichen ein halber Torus mit einem Rotationskreis in der (x, y) -Ebene mit Radius 0.5, der mit dem Radius 1.5 um die x -Achse rotiert wurde.

Jede Versuchsreihe besteht dabei aus einer vorgegebenen Anzahl m von Leitlinienbestimmungen. Für $i = 1, \dots, m$ wurden die Gewichte $\alpha_k(i)$, $\alpha_p(i)$, $\alpha_l(i)$, $\alpha_o(i)$ fest gewählt. Dabei ist α_k das Gewicht der Krümmungsgüte E_k , α_p das Gewicht der Parallelitätsgüte E_p , α_l das Gewicht der tangentialen Ausrichtungsgüte E_l und α_o das Gewicht der Oberflächensteigungsgüte E_o . Die Gewichte wurden dabei nach einer Vorschrift bestimmt, so dass die Summe der Gewichte Eins ergibt. Da es insgesamt vier Gewichte gibt, werden drei Schleifen benötigt. Das vierte Gewicht ergibt sich als Subtraktion der

Summe der drei anderen Gewichte von Eins. Der Bestimmung der Gewichte ist ein dreidimensionales, tetraederförmiges Netz zu Grunde gelegt, wobei in jede Hauptachsenrichtung sieben äquidistante Knoten erzeugt wurden. Damit ergibt sich:

Algorithmus "Bestimmung der Gewichte für die Versuchsreihen"

```

i = 0
for k = 0, ..., 6
    for l = 0, ..., 6 - k
        for p = 0, ..., 6 - k - l
             $\alpha_k(i) = \frac{k}{6}$ 
             $\alpha_l(i) = \frac{l}{6}$ 
             $\alpha_p(i) = \frac{p}{6}$ 
             $\alpha_o(i) = \frac{6-k-l-p}{6} = 1 - \alpha_k - \alpha_l - \alpha_p$ 
            i = i + 1
        end for
    end for
end for

```

Für $k = 0$ ergeben sich somit 28 verschiedene Gewichte, für $k = 1$ noch 21, für $k = 2$ noch 15, für $k = 3$ noch zehn, für $k = 4$ noch sechs, für $k = 5$ noch drei verschiedene Gewichte und für $k = 6$ gerade noch ein Gewicht. Dies bedeutet, dass insgesamt 84 verschiedene Gewichtssituationen vorliegen.

Zu jeder Kombination $\alpha_k(i), \alpha_p(i), \alpha_l(i), \alpha_o(i)$ wurden dann zu neun Konstruktionspunkten insgesamt 15 Iterationen der hierarchischen Suche gemacht, so dass sich $15 \cdot 84 = 1260$ Berechnungen ergeben.

Anhand der berechneten Leitlinie kann der vierdimensionale Vektor

$$(\bar{E}_k(i), \bar{E}_p(i), \bar{E}_l(i), \bar{E}_o(i)),$$

$i = 1, \dots, 1260$, aus durchschnittlichen Güten ermittelt werden. Durch die Verwendung der durchschnittlichen Güten werden die entstehenden Diagramme normiert, so dass die Ergebnisse mit Rohren unterschiedlicher Länge verglichen werden können.

Zur Visualisierung höherdimensionaler Punkt- oder Vektormengen gibt es eine Reihe von Verfahren [69]. Ein weit verbreiteter Ansatz sind die Scatter Plots. Bei diesen werden die gegebenen Punkte senkrecht auf alle Ebenen projiziert, die von je zwei Koordinatenachsen aufgespannt werden. Im Folgenden werden ebenfalls Projektionen betrachtet, wobei die Projektion jedoch teilweise anders gewählt wird. Dies soll durch die Abbildung 5.21 verdeutlicht werden.

Zur einfacheren Darstellung wird hierbei das Problem im dreidimensionalen Raum betrachtet. Das vorliegende vierdimensionale Problem verhält sich analog. Gegeben ist ein Punkt $\mathbf{p} = (x, y, z)$, wobei die Koordinaten verschiedenen Güten entsprechen. Es soll z gegenüber der Summe $d = x + y$ betrachtet werden. Diese Summe kann als Geradengleichung $y = -x + d$ der Winkelhalbierenden verstanden werden, so dass die Summe d der Achsenabschnitt auf der y -Achse zum Ursprung ist.

Dies bedeutet also, dass bei der Gegenüberstellung einer einzelnen Güte gegen die Summe der restlichen drei Güten im vorliegenden Fall der Achsenabstand der Ebene, die durch die drei Güten gegeben ist, mit der einzelnen Güte verglichen wird. Ein solcher Vergleich wird bezüglich der Krümmungsgüte und Oberflächensteigungsgüte vorgenommen. Zudem wird die Summe der Parallelitäts- und Ausrichtungsgüte mit der Oberflächensteigungsgüte verglichen, um die des öfteren gemachte Aussage, dass diese Güten sehr gut zusammenspielen, darzustellen.

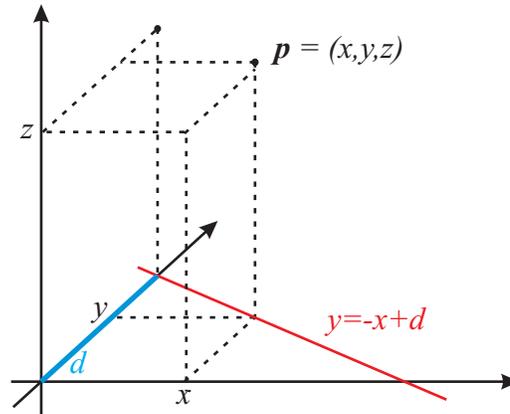


Abbildung 5.21: Bedeutung des Bezuges einer Güte gegenüber der Summe der anderen Güten

Für $i = 1, \dots, 1260$ ist ein Punkt im Diagramm 5.22 dabei gegeben als

$$(\overline{E}_p(i) + \overline{E}_l(i) + \overline{E}_o(i), \overline{E}_k(i)),$$

im Diagramm 5.23

$$(\overline{E}_k(i) + \overline{E}_p(i) + \overline{E}_l(i), \overline{E}_o(i)),$$

im Diagramm 5.24

$$(\overline{E}_p(i) + \overline{E}_l(i), \overline{E}_o(i)),$$

und im Diagramm 5.25

$$(\overline{E}_l(i), \overline{E}_p(i)).$$

Das Verfahren der dynamischen Programmierung sollte Ergebnisse erzeugen, die auf der Pareto-Front liegen, d.h. der Vektor $(\overline{E}_p(j), \overline{E}_l(j), \overline{E}_o(j), \overline{E}_k(j))$ wird von keinem anderen Vektor dominiert, d.h. es existiert kein $k \in \{1, \dots, m\}$, so dass $\overline{E}_{en}(j) \geq \overline{E}_{en}(k)$, mit $en = p, l, o$ oder k , wobei für eine durchschnittliche Güte $\overline{E}_{en}(j) > \overline{E}_{en}(k)$ gelten muss. Eine Untersuchung der jeweiligen vierdimensionalen Vektoren hat ergeben, dass nur etwa 30 Prozent der Punkte auf der Pareto-Front liegen. Vergrößert man allerdings den Begriff der Pareto-Optimalität, so dass der Vektor $(\overline{E}_p(j), \overline{E}_l(j), \overline{E}_o(j), \overline{E}_k(j))$ von keinem anderen Vektor dominiert wird, wenn es kein $k \in \{1, \dots, m\}$ gibt, so dass $\overline{E}_{en}(j) \geq \overline{E}_{en}(k) + \delta_{en}$, mit $en = p, l, o$ oder k und $\delta_{en} > 0$, wobei auch hier für eine durchschnittliche Güte $\overline{E}_{en}(j) > \overline{E}_{en}(k) + \delta_{en}$ gelten muss, so werden über 97 Prozent der Werte durch das Kriterium erfasst, wenn die δ_{en} auf 5 Prozent der jeweiligen maximal ermittelten Werte der betreffenden Güten gesetzt werden.

Diese Unschärfe der Pareto-Optimalität ergibt sich unter anderem aus der Verwendung der durchschnittlichen Güten, da bei der Leitlinienbestimmung die Güten optimiert werden, aber in den Diagrammen die normierten Güten dargestellt sind. Die Länge der Leitlinie ist nur in etwa bei jeder Iteration der hierarchischen Suche identisch. Ferner wird die Unschärfe durch Diskretisierungsfehler der Dreiecksnetze verursacht, der insbesondere bei der Oberflächensteigung Auswirkungen hat. Durch die Initialisierung der Schnittebenen bei jeder Iterationsschleife mittels des Zufallsgenerators werden ferner bei dem vorgestellten Verfahren niemals die gleichen Mengen betrachtet. Zusammen mit der Eigenschaft, dass die Lösung nur aus einer diskreten Menge bestimmt wird, wird das tatsächliche Optimum nicht gefunden. Schließlich werden für jede Kombination an Gewichten insgesamt 15 Iterationen berechnet, wobei erst bei den letzten Berechnungen das Verfahren sich dem tatsächlichen Optimum annähert. Da auch die Ergebnisse jedes Iterationsprozesses mit in den Diagrammen

berücksichtigt sind, ist dies eine weitere Begründung dafür, dass nicht alle Werte Pareto-optimal sind. Bezogen auf die Ergebnisse der Iterationsdurchläufe sind etwa 65 Prozent Pareto-optimal und 100 Prozent erfüllen die durch δ_{en} , $en = p, l, o$ oder k , vergrößerte Pareto-Optimalitätsbedingung. Insgesamt sprechen diese Resultate daher für die Funktionstüchtigkeit des Verfahrens.

Im Diagramm 5.22 ist erkennbar, dass Häufungen an Krümmungswerten zwischen 0.4 und 0.5 zu finden sind. Dies entspricht dem Quadrat der Krümmung der erwarteten Leitlinie, das exakt $\frac{1}{(1.5)^2} = 0.\bar{4}$ ist. Zudem lässt sich ablesen, dass ein gewisses Maß an Krümmung nicht unterschritten werden kann. Dies liegt an der Krümmung des Rohres, da somit auch die Leitlinie eine gewisse Krümmung besitzen muss.

Das Diagramm 5.22 zeigt ein gegenläufiges Verhalten der Krümmung gegenüber der Summe der restlichen Güten. Dies ist daran erkennbar, dass große Werte der Krümmungsgüte kleinen Werten der Summe der restlichen Güten entsprechen beziehungsweise umgekehrt. Insgesamt ist beobachtet worden, dass die Krümmungswerte die anderen Werte der Größe nach dominieren.

Die Diagramme 5.24 und 5.25 liefern einen empirischen Beweis für die bereits öfters gemachten Aussagen: die Oberflächensteigungsgüte harmoniert sehr gut mit der Parallelitätsgüte und der tangentialen Ausrichtungsgüte. Eine Verbesserung des einen Wertes verbessert gleichzeitig auch den anderen Wert. Ferner harmonisieren die Parallelitätsgüte und die tangentiale Ausrichtungsgüte ebenfalls, da auch hier eine Verbesserung des einen eine Verbesserung des anderen Gewichtes erwirkt. Allerdings bedeutet dieses "gleichläufige" Verhalten nicht zwangsläufig, dass die Güten gleiche optimale Lösungen haben. Die durch das Optimum der einen Güte erzielten schrägen Rohrschnittlagen werden durch das Optimum der anderen Güte aufgerichtet, da das Rohrschnittgebiet dieses Optimums in eine andere Richtung geneigt ist. Dies ist bereits am Anfang dieses Abschnittes, beispielsweise in den Abbildungen 5.16 bis 5.18, diskutiert worden. Die Dominanz der Krümmung und die gute Harmo-

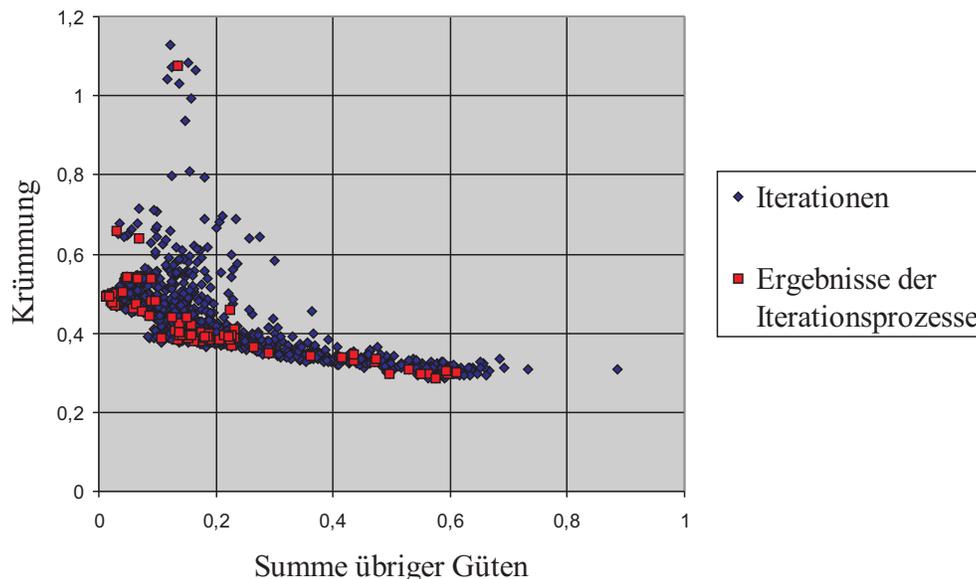


Abbildung 5.22: Bewertung der Krümmungsgüte im Vergleich mit der Summe der übrigen Güten für das erste Beispielrohr

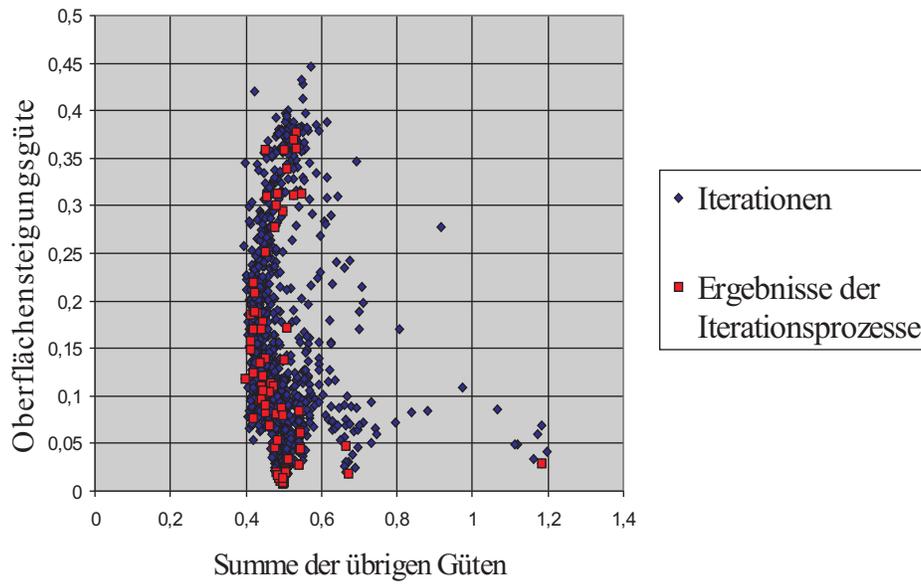


Abbildung 5.23: Bewertung der Oberflächensteigungsgüte im Vergleich mit der Summe der übrigen Güten für das erste Beispielrohr

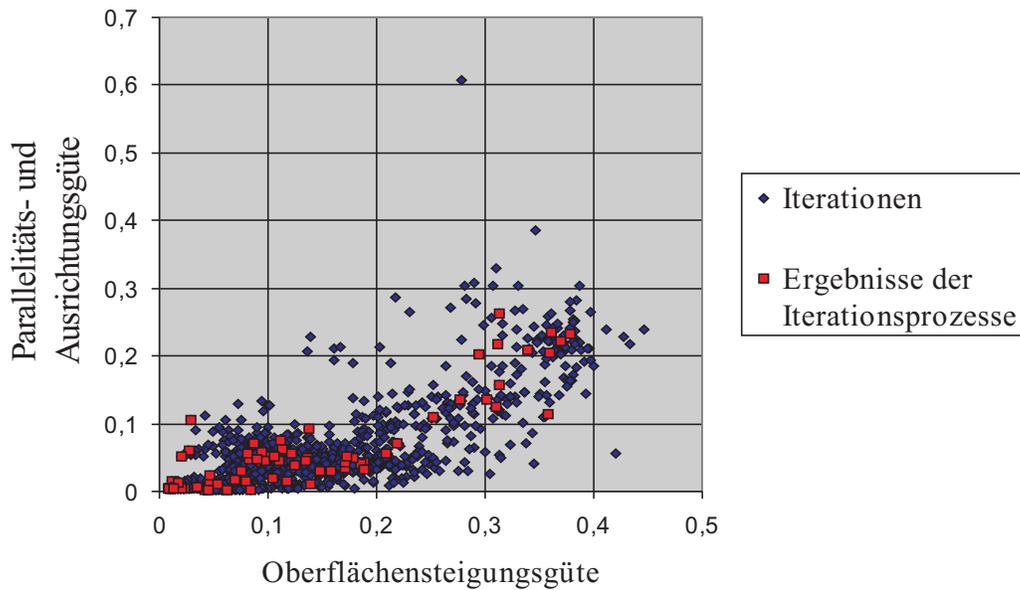


Abbildung 5.24: Bewertung der Parallelitäts- und Ausrichtungsgüte im Vergleich mit der Oberflächensteigungsgüte für das erste Beispielrohr

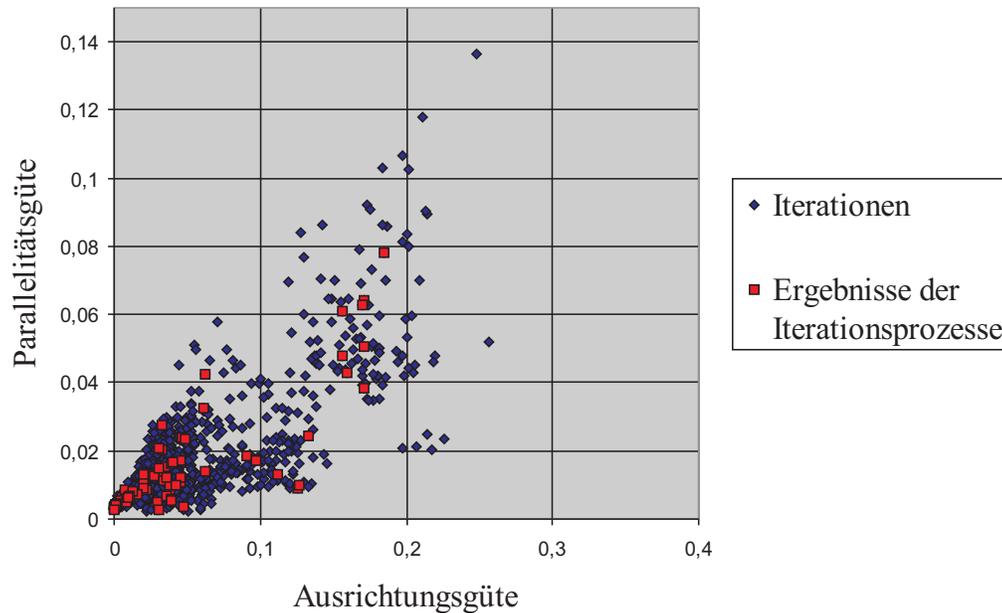


Abbildung 5.25: Bewertung der Parallelitätsgüte im Vergleich mit der Ausrichtungsgüte für das erste Beispielrohr

nisierung der anderen Güten ist auch der Grund, warum Diagramm 5.23 eine qualitative Spiegelung von Diagramm 5.22 an der Winkelhalbierenden ist.

Diese Ergebnisse sind exemplarisch für alle gekrümmten Rohre zu sehen.

Zweites Beispielrohr

In den Abbildungen 5.27 bis 5.30 sind die Resultate für das in der Abbildung 5.26 dargestellte Rohr zusammengefasst. Das zweite Rohr ist im Prinzip ein Zylinder, der in der Mitte aufgeweitet wurde. Der Radius des Kreisteiles des Zylinders beträgt 2 und seine Länge 27. Die hieran vorgestellten Resultate geben ein Indiz für das Verhalten für alle nicht gekrümmten Rohre.

Die Diagramme sind nach der gleichen Art und Weise wie beim ersten Rohr entstanden. Es ist festzustellen, dass sich die Parallelitäts-, die Ausrichtungs- und die Oberflächensteigungsgüte ähnlich zu dem ersten Rohrtyp zueinander verhalten: Eine Verschlechterung des einen Wertes führt zu einer Verschlechterung des anderen Wertes (siehe jeweils in den Abbildungen 5.24 und 5.29 sowie 5.25 und 5.30). Dass die Punkte nicht exakt auf einer Geraden liegen, folgt aus dem nicht zylindrischen Anteil in der Mitte des Rohres. In einer Messreihe mit einem Zylinder liegen die Messergebnisse dieser drei Güten in den Abbildungen 5.28 bis 5.30 dargestellten Relationen auf einer Geraden.

Dagegen ist das Verhalten der Krümmungsgüte gegenüber der Summe der übrigen Güten völlig anders. Bei dem zylindrischen Rohr ergibt sich bei einer Verschlechterung der Krümmung eine Verschlechterung der Summe anderen Güten. Dies kann dadurch begründet werden, dass für einen Zylinder die geradlinige Verbindung der Mittelpunkte des Start- und Endrandes die optimale Leitlinie ergibt. Diese Linie besitzt Krümmung 0, die Oberflächensteigung entlang dieser Linie ist optimal und die Parallelitäts- und Ausrichtungsgüte sind minimal. Bezüglich der Krümmungsgüte ist ferner

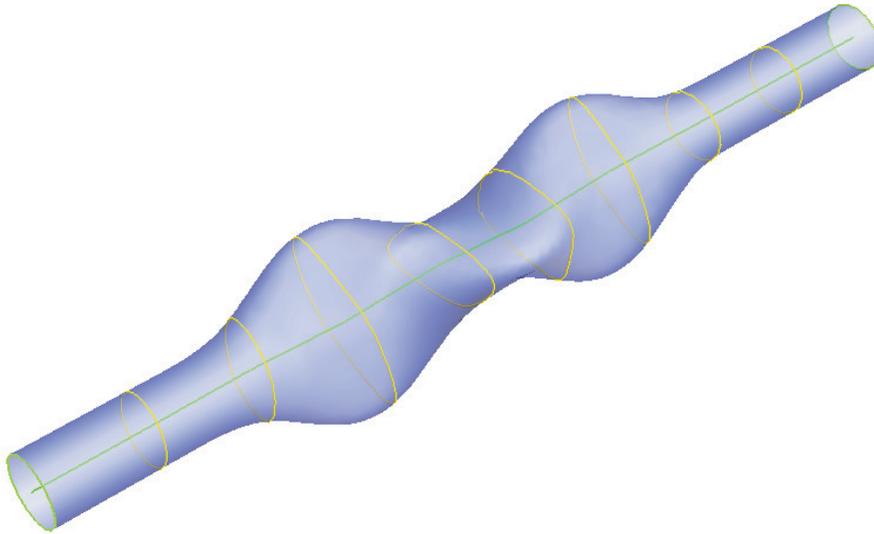


Abbildung 5.26: Beispielrohr für die zweite Versuchsreihe mit einer berechneten Leitlinie

festzustellen, dass eine Verschlechterung der Summe der übrigen Kriterien dennoch zu einer kleinen Krümmung führt. Dies folgt aus der Tatsache, dass einige schräge Rohrschnittgebiete im Zylinder zwar den Mittelpunkt auf der idealen Leitlinie haben (also Krümmung gleich Null) aber die Rohrschnittgebiete schräg und gegebenenfalls nicht parallel zueinander liegen. Dadurch erhöht sich zwangsläufig die Summe der anderen Güten. Dieses Verhalten kann in den Diagrammen an genau

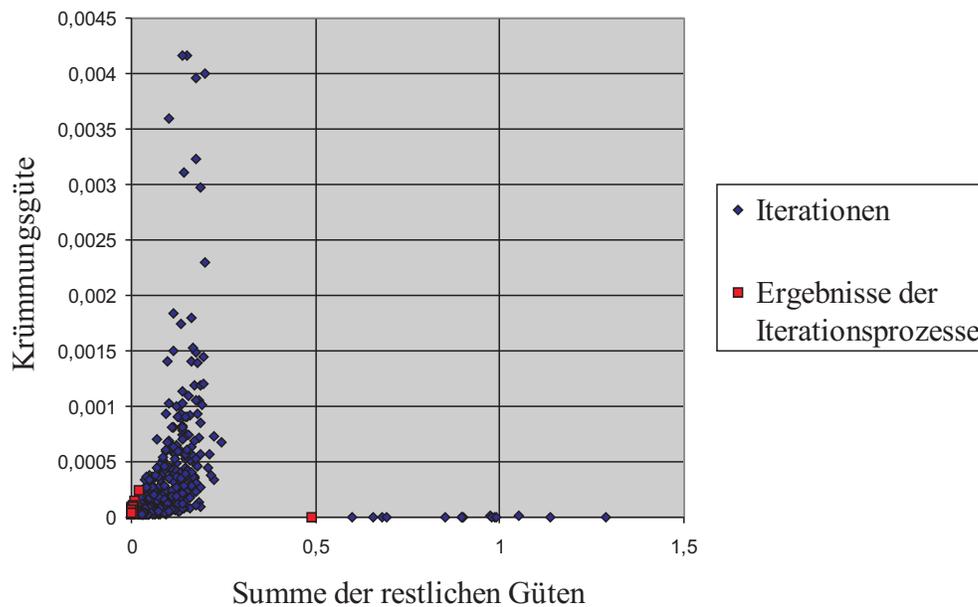


Abbildung 5.27: Bewertung der Krümmungsgüte im Vergleich mit der Summe der übrigen Güten für das zweite Beispielrohr

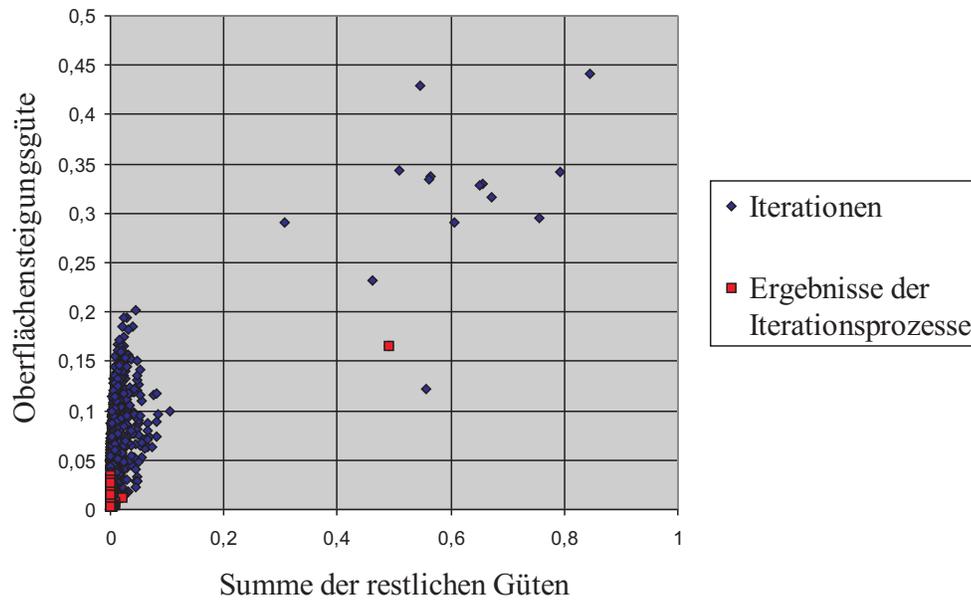


Abbildung 5.28: Bewertung der Oberflächensteigungsgüte im Vergleich mit der Summe der übrigen Güten für das zweite Beispielrohr

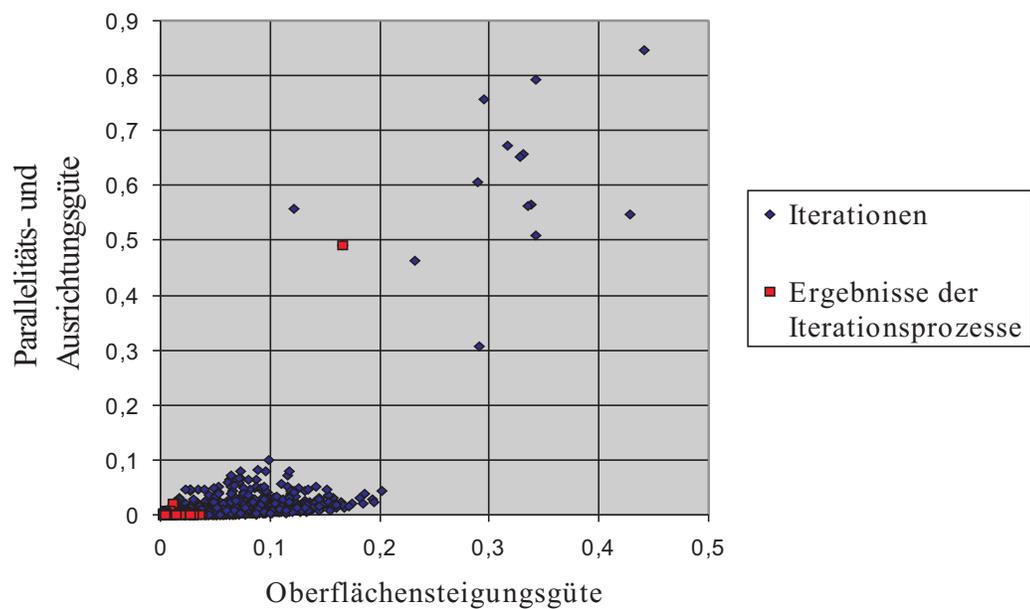


Abbildung 5.29: Bewertung der Parallelitäts- und Ausrichtungsgüte im Vergleich mit der Oberflächensteigungsgüte für das zweite Beispielrohr

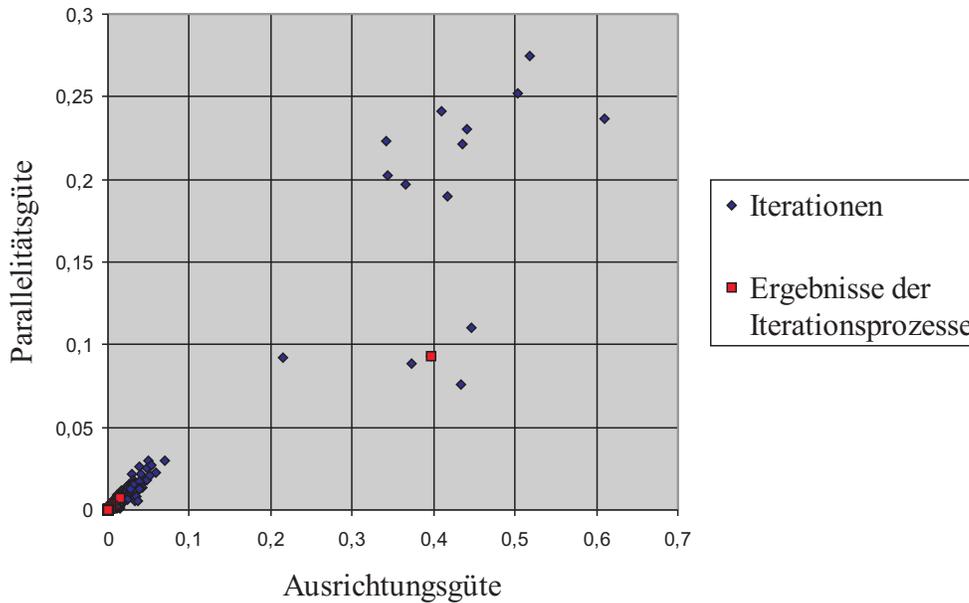


Abbildung 5.30: Bewertung der Parallelitätsgüte im Vergleich mit der Ausrichtungsgüte für das zweite Beispielrohr

einem Ergebnis eines Iterationsprozesses beobachtet werden. In dieser Situation ist $\alpha_k = 1$ und $\alpha_l = \alpha_p = \alpha_o = 0$, d.h. es wird nur die Krümmungsgüte optimiert.

Die Funktionsfähigkeit des Algorithmus kann zudem dadurch erkannt werden, dass die Messpunkte der Ergebnisse der Iterationsprozesse entweder im jeweiligen Ursprung der Koordinatensystemen liegen oder auf einer der Koordinatenachsen. Wie bereits begründet, ist das Optimum aller Güten im Koordinatenursprung zu suchen. Die Abweichung daraus lässt sich erneut aus dem nicht zylindrischen Anteil in der Mitte des Rohres begründen. Wäre das Rohr ein Zylinder gewesen, so lägen die Ergebnisse der Iterationsprozesse stets im Ursprung.

Ferner wird hier festgestellt, dass die Diagramme 5.27 und 5.28 im Gegensatz zu den Diagrammen 5.22 und 5.23 nicht an der Winkelhalbierenden qualitativ spiegelsymmetrisch sind. Dies kann wieder anhand der Krümmung begründet werden. Die Krümmung spielt der Größe nach keine Rolle. Dies kann am Wertebereich der einzelnen Güten erkannt sowie an den Diagrammen 5.28 und 5.29 beobachtet werden. Diese sind nach Vertauschung der jeweiligen Achsen völlig identisch, wobei im Diagramm 5.29 keine Krümmung berücksichtigt wird.

Schließlich kann auch hier festgestellt werden, dass fast 99 Prozent der Messungen auf der vergrößerten Pareto-Front liegen. Die Ergebnisse der Iterationsprozesse sind dagegen zu 50 Prozent Pareto-optimal, wohingegen mit einer kleinen Toleranz von 5 Promille der maximal ermittelten Werte der jeweiligen Güten etwa 90 Prozent auf der vergrößerten Pareto-Front liegen. Auch diese Messungen ergeben eine Bestätigung der Funktionstüchtigkeit des Algorithmus.

Lösungen aus Sicht der Anwendung

Bei dem ersten Beispielrohr entsprachen etwa 47 Prozent der generierten Leitlinien den Anforderungen der Anwendenden. Diese Zahl wurde dadurch ermittelt, dass alle ermittelten Leitlinien vom Autor

betrachtet wurden und diese nach subjektiven Empfinden in die beiden Gruppen "gut" und "schlecht" einsortiert wurden. Da dieses Rohr gekrümmt ist, kann eine Differenzierung von "guten" zu "schlechten" Leitlinien anhand des jeweiligen Krümmungswertes bestimmt werden. Liegt der entsprechende Wert im Intervall von 0.42 und 0.49, ist die generierte Leitlinie akzeptabel. Eine deutlich höhere Quote von "guten" Rohren ist beim zweiten Bauteil erreicht worden. Sie liegt etwa bei 79 Prozent. Die restlichen 21 Prozent erzeugten allerdings keine "schlechten" Leitlinien. Bei diesen wurden bei einzelnen Schnitten nur die lokalen Minima der Oberflächensteigungsgüte erreicht, wie es bereits in den Abbildungen 5.12 und 5.13 skizziert wurde. Die Leitlinie dagegen verläuft auch hier mittig durch das Rohr. Da dieses Rohr Krümmung 0 hat, kann anhand dieses Gütwertes keine Differenzierung der generierten Leitlinien vorgenommen werden. Hier kann statt dessen der Wert der Parallelitätsgüte verwendet werden. Je kleiner dieser Wert ist, desto paralleler sind die Schnitte, d.h. desto weniger lokale Minima wurden gefunden.

Zusammenfassend werden die Ergebnisse der Messreihen in der Tabelle 5.1 aufgeführt. Dabei bedeutet "gute Ergänzung", dass die entsprechenden Güten zusammengenommen Rohrschnittgebiete erzeugen, die den Anforderungen der Anwendenden entsprechen, während die einzelnen Werte nicht zwangsläufig die erwartete Ausrichtung bewirken. Ferner bedeutet "linear", dass der Wert der einen Güte näherungsweise linear von dem Wert der anderen Güte abhängt.

Rohrtyp	Krümmungsgüte	Oberflächensteigungsgüte	tangentiale Ausrichtungsgüte	Parallelitätsgüte
gekrümmte Rohre	starker Einfluss, wirkt gegen alle anderen Güten	gute Ergänzung zu $E_l + E_p$	gute Ergänzung zu E_p	gute Ergänzung zu E_l
geradlinige Rohre	kein Einfluss	gute Ergänzung zu $E_l + E_p$; Abhängigkeit zu $E_l + E_p$ um so linearer, je ähnlicher das Rohr einem Zylinder ist	gute Ergänzung zu E_p ; Abhängigkeit zu E_p um so linearer, je ähnlicher das Rohr einem Zylinder ist	gute Ergänzung zu E_l ; Abhängigkeit zu E_l um so linearer, je ähnlicher das Rohr einem Zylinder ist

Tabelle 5.1: Zusammenfassung der gefundenen Resultate der Güten

5.9.4 Rechenzeit

Die Bestimmung einer allgemeinen Rechenzeit für die Erzeugung einer Leitlinie ist sehr schwierig. Die benötigte Zeit des Verfahrens hängt wie beschrieben von der Wahl der Parameter ab. Für die hier vorgestellten Resultate betrug die Rechenzeit bei 15 Iterationen auf einem Pentium 4, 3 GHz PC etwa 40 Sekunden.

Kapitel 6

Ein intuitives adaptives Unterteilungsverfahren

Dieses Kapitel stellt ein anschauliches, heuristisches Verfahren für das Schlaucheinpassungsproblem vor. Eine Übersicht des hier eingeschlagenen Lösungsweges ist im Abschnitt 6.1 zu finden: Ausgehend von einer zulässigen Lösung, die im ersten Schritt bestimmt wird (Abschnitt 6.2), wird in einem zweiten Schritt eine verbesserte Lösung generiert (Abschnitt 6.3). Vorteile des vorgestellten Verfahrens sind seine hohe Ausführungsgeschwindigkeit und einfache Implementierbarkeit, ein Nachteil die Möglichkeit, nicht zufriedenstellende Lösungen zu finden, wie in einer Analyse festgestellt wird. Anschließend wird eine experimentelle (Abschnitt 6.4) und danach eine theoretische Analyse gegeben (Abschnitt 6.5).

6.1 Übersicht

Der Ansatz zur Lösung des Schlaucheinpassungsproblems, der in diesem Kapitel verfolgt wird, lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Verfahrensrahmen "Adaptives Unterteilungsverfahren zur Schlauchstützstellenapproximation"

Gegeben: Ein Rohr (W, R_a, R_e).

Gesucht: Ein Schlauchstützstellenkantenzug, der gegebene Bedingungen möglichst gut erfüllt.

Ablauf:

1. Bestimme einen initialen Schlauchstützstellenkantenzug.
2. Optimierte den initialen Schlauchstützstellenkantenzug.

Bei dieser Optimierung wird allerdings das Ziel, die gegebene Zielfunktion zu minimieren, anders gelöst. Es gilt die Annahme, dass günstig liegende Stützstellen ein günstiges Ergebnis erzeugen.

Die Lösung von Optimierungsproblemen in zwei derartigen Schritten ist bei denjenigen Optimierungsverfahren gebräuchlich, die ausgehend von einer oder mehreren zulässigen Lösungen sukzessive zulässige Lösungen mit dem Bestreben generieren, den Wert der Zielfunktion zu verbessern (siehe beispielsweise [25], Kapitel 5).

Die Berechnung einer initialen zulässigen Lösung geschieht bei dem in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren durch rekursives Zerteilen des gegebenen Rohres durch Schlauchstützstellen (Abschnitt 6.2). Die Verbesserung erfolgt durch Drehung der Schnittebenen der Schlauchstützstellen um

deren Leitpunkte, sowie dem Einfügen neuer Schlauchstützstellen (Abschnitt 6.3).

Das Verfahren hat den Vorteil einer geringen Rechenzeit und eines geringen Implementierungsaufwandes, kann jedoch eingabeabhängig ungünstige Ergebnisse liefern.

6.2 Initiale Schlaucheinpassung

Das Problem der initialen Schlaucheinpassung lässt sich so zusammenfassen:

Problem "Initialer Schlauchstützstellenkantenzug"

Gegeben: Ein Rohr (W, R_a, R_e) .

Gesucht: Ein Schlauchstützstellenkantenzug $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, mit $C_0 = R_a, C_n = R_e$.

Bei der Lösung des Problems sollte auch darauf geachtet werden, dass sich ein Schlauchstützstellenkantenzug ergibt, der günstig für die zweite Phase, die Optimierung, ist. Dabei ist die Lage der Rohrschnittgebiete wichtig, so dass Verfahren zweckmäßig erscheinen, die die Leitpunkte und die Rohrschnittgebiete simultan bestimmen.

Das folgende Verfahren ist an den Algorithmus zur Approximation von Kurven durch Polygonzüge in Abschnitt 2.4.1 angelehnt. Da ein Rohr im Verhältnis zu seiner Dicke in Anwendungen häufig recht lang ist, erscheint dies zumindest für diese Situation sinnvoll.

Algorithmus "Intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug"

Eingabe: Ein Rohr (W, R_a, R_e) sowie ein Schwellwert $Z > 0$.

Ausgabe: Ein Schlauchstützstellenkantenzug $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, mit $C_0 = R_a, C_n = R_e$

Ablauf:

Gib S_0 und S_n mit $C_0 = R_a, C_n = R_e, \mathbf{r}_0$ und \mathbf{r}_n die Schwerpunkte der beiden Rohröffnungen R_a und R_e , als die erste beziehungsweise letzte Schlauchschnittstelle aus;
Schlauchschnittstellenkantenzug $((C_0, \mathbf{r}_0), (C_n, \mathbf{r}_n), Z)$;

Unteralgorithmus *Schlauchschnittstellenkantenzug* $((C_a, \mathbf{r}_a), (C_e, \mathbf{r}_e), Z)$

if Abstand zwischen \mathbf{r}_a und \mathbf{r}_e ist kleiner als Schwellwert Z **then**

 Ende des Algorithmus;

else

 Bestimme die Ebene E als Mittelebene zwischen \mathbf{r}_a und \mathbf{r}_e , d.h. als die Ebene durch den Mittelpunkt \mathbf{r}_M der Strecke zwischen \mathbf{r}_a und \mathbf{r}_e , die senkrecht auf dieser Strecke steht;

if E ist gemäß der Definition 2.7 nicht trennend **then**

 Versuche durch Verschieben von \mathbf{r}_M auf der Verbindungsstrecke einen Punkt \mathbf{r}'_M und eine Ebene E' durch \mathbf{r}'_M parallel zu E zu finden, so dass E' trennend ist;

else

 Ende des Algorithmus;

```

end if
Wähle von den Rohrschnittgebieten, die durch  $E'$  induziert werden, eines der
erzeugten trennenden Rohrschnittgebiete,  $C$  genannt, dessen Schwerpunkt  $\mathbf{r}$ 
den geringsten Abstand zu  $\mathbf{r}'_M$  besitzt;
Schlauchschnittstellenkantenzug( $(C_a, \mathbf{r}_a), (C, \mathbf{r}), Z$ );
Gib  $(C, \mathbf{r})$  aus;
Schlauchschnittstellenkantenzug( $(C, \mathbf{r}), (C_e, \mathbf{r}_e), Z$ );
end if

```

Abbildung 6.1 illustriert die ersten Schritte an einem Beispielrohr. Abbildung 6.2 zeigt die Leitlinie nach einer vollständigen Ausführung des Algorithmus.

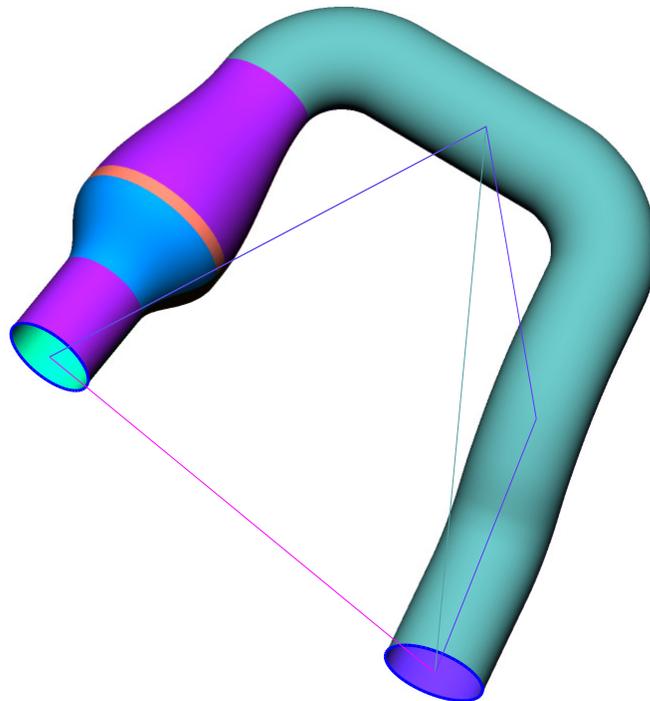


Abbildung 6.1: Die ersten Schritte des Algorithmus "Intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug"

In diesem Algorithmus wird vereinfacht die Annahme getroffen, dass der Schwerpunkt stets innerhalb des jeweiligen Rohrschnittgebietes liegt. Ferner verwendet der Algorithmus verschiedene geometrische Operationen, von denen die Wesentlichen die Ebenenschnittberechnung, Schnittgebietenberechnung und Schwerpunktberechnung sind. Deren Realisierung hängt von der geometrischen Repräsentation des Rohres ab. Kapitel 3 gibt effiziente algorithmische Realisierungen für Rohre, die durch Dreiecksnetze gegeben sind.

Der Vorteil des Verfahrens ist seine Einfachheit. Es wählt die nächste Schnittkontur nach einer sehr einfachen Heuristik aus und verzichtet auf Kriterien, die aufwändig zu implementieren oder rechenzeitaufwändig sind. Die Anwendung in der Umformtechnik hat gezeigt, dass es die meisten dort vorkommenden Problemstellungen löst. Es zeigt sich aber auch, dass es auch in "realen" Beispielen zu Schwierigkeiten kommen kann, die in keiner Lösung enden. Im Folgenden wird eine solche Situation dargestellt.

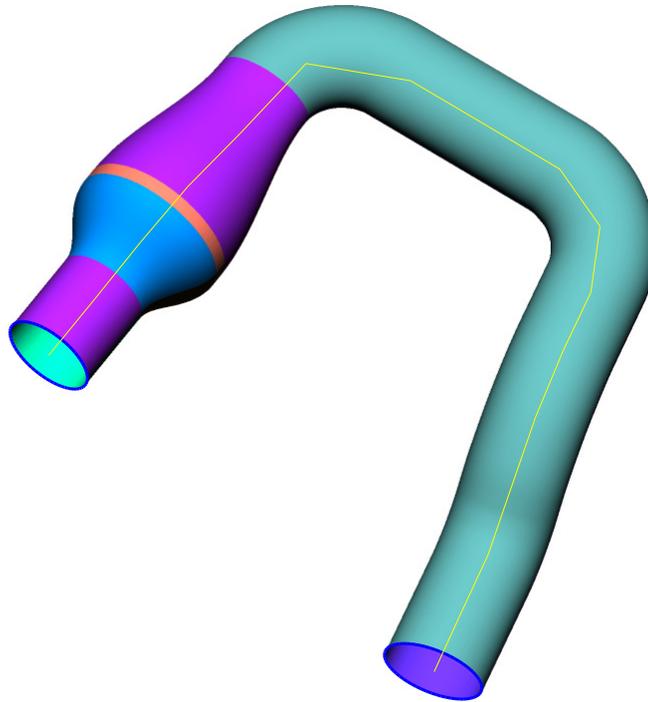


Abbildung 6.2: Erste Näherung an die Leitlinie

In diesem Verfahren hat Z eine zentrale Bedeutung. Sollte Z zu klein sein, ist es möglich, dass das Verfahren nicht terminiert. Dieses Problem wird durch die Skizze in Abbildung 6.3 verdeutlicht. Sie zeigt einen Längsschnitt durch einen Zylinder sowie eine sukzessive Unterteilung eines bestehenden Polygonzuges. Ausgehend von den beiden Punkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 wird der Punkt \mathbf{r}_3 in der Mitte von \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 berechnet. Anschließend wird der Punkt \mathbf{r}_4 in der Mitte von \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_3 bestimmt. Anhand der Ebenen E_3 und E_4 ist deutlich zu erkennen, dass eine weitere Gliederung von \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_4 Ebenen produzieren würde, die noch weiter nach rechts kippen, so dass der Winkel in \mathbf{r}_1 immer größer wird. Die unendliche Fortsetzung entsteht nun dadurch, dass irgendwann eine Schnittebene E_i vorhanden ist, die fast parallel zu den beiden Konturlinien ist, so dass der neue Punkt \mathbf{r}_i irgendwo im Zylinder liegt. Eine weitere Unterteilung der Strecke \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_1 kann dann zu einem ähnlichen Problem wie bei den Ausgangspunkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 führen, so dass schließlich zwischen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 unendlich viele Punkte

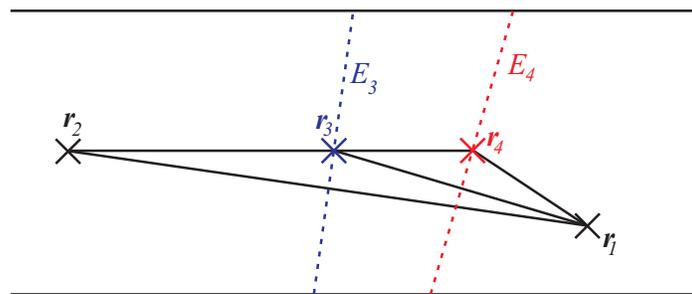


Abbildung 6.3: Illustration des Problems der Nichtterminierung des Algorithmus "Intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug"

eingefügt werden.

Bei diesem konkreten Beispiel liegt die Ursache der Nichtterminierung an dem stark übertriebenen falschen Startpunkt \mathbf{r}_1 . Dieses Beispiel tritt in der Praxis nicht auf, weil nach den beschriebenen Methoden \mathbf{r}_1 niemals diese Position hätte. Alle Schwerpunkte von Schnitten durch den Zylinder liegen auf der Geraden durch \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 und \mathbf{r}_4 . Allerdings lässt sich an diesem Rohr das tatsächlich auftretende Problem sehr gut illustrieren.

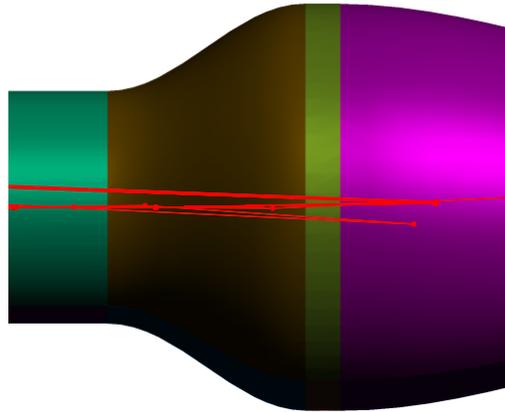


Abbildung 6.4: Nichtterminierung des Algorithmus "Intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug" an einem Realteil

Nichtterminierung kann beispielsweise bei Rohren eintreten, wenn sich die Form in einem kleinen Bereich sehr stark ändert, wie in der Abbildung 6.4 zu erkennen ist. In einer solchen Situation ist die Wahrscheinlichkeit sehr groß, dass durch falsche Startpunkte eine Punktfolge nicht terminiert. Durch Vergrößerung des Schwellwertes Z ist es in der Regel möglich, dieses Problem abzufangen. Bei einem zu kleinen Z lässt sich feststellen, dass, obwohl viele Punkte im Polygonzug der ersten Näherung vorhanden sind, Punkte existieren, die einen großen Abstand zu ihren Nachbarn haben. Hieran wird deutlich, dass eine größere Anzahl von Punkten keineswegs eine bessere Approximation bedeutet.

Auf Grund dieser Beobachtungen erscheint die Wahl der Schranke Z abhängig vom gegebenen Rohr nach folgender Weise zweckmäßig. Für die beiden Öffnungen R_a beziehungsweise R_e des Rohres W wird der minimale Abstand des Mittelpunktes \mathbf{r}_a beziehungsweise \mathbf{r}_e zu W ermittelt und das Minimum dieser beiden Werte als Schranke Z genommen. Sollte dieser Wert zu einem nicht günstigen Verhalten des Algorithmus führen, wird Z solange verdreifacht, bis ein geeigneter Polygonzug entsteht.

Die geschilderte Vorgehensweise ist nur heuristisch und nicht bewiesen sicher. Trotz der Gefahr der Nichtterminierung hat der Algorithmus "Intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug" den schon genannten Vorteil, einfach implementierbar zu sein und geringere Rechenzeit zu haben.

Ein Nachteil des Verfahrens neben der potentiellen Nichtterminierung ist, dass lediglich der Abstand der Punkte des Polygonzuges betrachtet wird. Dies beschleunigt zwar durch den sehr geringen Aufwand auf den ersten Blick das Verfahren, allerdings ist es so möglich, dass unnötige Punkte berechnet werden, wenn der Polygonzug schon völlig im Rohr liegt. Dies ist beispielsweise bei fast geradlinigen Rohren der Fall.

Ein weiterer Nachteil ist, dass besonders bei stark gekrümmten Rohren die Möglichkeit besteht, dass der Polygonzug das Rohr schneidet.

Unter anderem durch Hinzunahme von Tests, die diese Situationen erkennen, lässt sich ein verbessertes Verfahren erreichen.

Algorithmus "Verbesserter intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug"

Eingabe: Ein Rohr (W, R_a, R_e) , eine Leitpunktfunktion $\mathbf{r}(\cdot)$.

Ausgabe: Ein Schlauchstützstellenkantenzug mit der Angabe für jede Kante, ob sie "approximierend" oder "nicht approximierend" ist.

Ablauf:

if Strecke zwischen $\mathbf{r}(R_a)$ und $\mathbf{r}(R_e)$ verläuft im Inneren von W **then**
 Gib die Strecke mit der Angabe "approximierend" aus;
else
 Verbesserter Schlauchschnittstellenkantenzug (W, R_a, R_e) ;
end if

Unteralgorithmus *Verbesserter Schlauchschnittstellenkantenzug* (W', R'_a, R'_e)

Suche ein trennendes Rohrschnittgebiet C in W' ;

if Suche ist nicht erfolgreich **then**
 Füge die Strecke $[(R'_a, \mathbf{r}(R'_a)), (R'_e, \mathbf{r}(R'_e))]$ als "nicht approximierend"
 an die Ausgabe an;
 Ende des Algorithmus;

end if

if maximale Iterationstiefe ist erreicht **then**

 Füge die Strecke $[(R'_a, \mathbf{r}(R'_a)), (R'_e, \mathbf{r}(R'_e))]$ als "nicht approximierend"
 an die Ausgabe an;
 Ende des Algorithmus;

end if

if Strecke zwischen $\mathbf{r}(R'_a)$ und $\mathbf{r}(C)$ schneidet das Rohr W' nicht **then**

 Füge die Strecke $[(R'_a, \mathbf{r}(R'_a)), (C, \mathbf{r}(C))]$ als "approximierend"
 an die Ausgabe an;

else

Verbesserter Schlauchschnittstellenkantenzug (W', R'_a, C) ;

end if

if Strecke zwischen $\mathbf{r}(C)$ und $\mathbf{r}(R'_e)$ schneidet das Rohr W' nicht **then**

 Füge die Strecke $[(C, \mathbf{r}(C)), (R'_e, \mathbf{r}(R'_e))]$ als "approximierend"
 an die Ausgabe an;

else

Verbesserter Schlauchschnittstellenkantenzug (W', C, R'_e) ;

end if

Der Algorithmus verwendet zusätzlich zu den geometrischen Operationen der einfachen Heuristik den Schnitt einer Strecke mit dem Rohr. Weiterhin wird hier berücksichtigt, dass die Rohrschnittgebiete disjunkt sind.

Bei der Suche nach einem trennenden Rohrschnittgebiet könnte die Auswahl in Hinblick auf die Zielfunktionen aus Kapitel 4.1 getroffen werden, die einzelne Schlauchstützstellen bewerten, etwa indem eine diesbezüglich günstigste gewählt wird. Wie in Abschnitt 6.4 exemplarisch dargelegt wird, muss dies jedoch nicht notwendigerweise zu einem guten Ergebnis führen.

6.3 Optimierung der Schlaucheinpassung

Das Problem der Optimierung der Schlaucheinpassung stellt sich informell so dar:

Problem "Optimierung eines Schlauchstützstellenkantenzuges"

Gegeben: Ein Rohr (W, R_a, R_e) , ein Schlauchstützstellenkantenzug $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, mit $C_0 = R_a$, $C_n = R_e$

Gesucht: Ein Schlauchstützstellenkantenzug $S' = [S'_0, \dots, S'_{n'}]$, der im Sinne einer vorgegebenen Zielfunktion E besser ist.

Die Zielfunktion E kann sich im Allgemeinen aus jenen aus Kapitel 4.1 für Rohrschnittgebiete, $E_u(C)$, $E_f(C)$ und $E_z(\mathbf{p}, C)$, zusammensetzen. Das folgende Verfahren greift diese Zielfunktion nicht allgemein auf, sondern beschränkt sich auf die Umfangsgüte $E_u(C)$. Eine Motivation hierfür kann durch die Tatsache gegeben werden, dass bei Zylindern der Kreis das trennende Rohrschnittgebiet ist, dessen Umfang minimal ist. Die in der Abbildung 5.11 gezeigten Probleme treten an dieser Stelle nicht auf, da als Rotationspunkt der Ebene nicht ein Punkt auf der Rohroberfläche, sondern ein Punkt im Inneren des Rohres gewählt wird. Allerdings muss mit den in der Abbildung 4.1 beschriebenen Diskretisierungsproblemen gerechnet werden.

Algorithmus "Intuitive Optimierung eines Schlauchstützstellenkantenzuges"

Eingabe: Ein Rohr (W, R_a, R_e) , ein Schlauchstützstellenkantenzug $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, mit $C_0 = R_a$, $C_n = R_e$, die Umfangsgüte E_u aus Abschnitt 4.1, Schwellwert Z

Ausgabe: Eine verbesserter Schlauchstützstellenkantenzug $S' = [S'_0, \dots, S'_{n'}]$, $S'_i := (C'_i, \mathbf{r}'_i)$, $i = 0, \dots, n'$, mit $C'_0 = R_a$, $C'_{n'} = R_e$.

Ablauf:

```

for  $i = 0, \dots, n$  do
     $(C'_i, \mathbf{r}'_i) := \text{Optimiere}(C_i, \mathbf{r}_i)$ ;
end for
for  $i = 0, \dots, n - 1$  do
    if Abstand zwischen  $\mathbf{r}'_i$  und  $\mathbf{r}'_{i+1}$  größer als  $Z$  then
         $\text{Verfeinere}((C'_i, \mathbf{r}'_i), (C'_{i+1}, \mathbf{r}'_{i+1}), Z)$ ;
    end if
end for

```

Unteralgorithmus $\text{Optimiere}(C_i, \mathbf{r}_i)$

Bestimme eine Ebene E'_i durch \mathbf{r}_i , so dass $E_u(C'_i)$ minimal ist und

1. C'_i ein trennendes Rohrschnittgebiet ist, das durch Ebene E'_i erzeugt wird.
2. \mathbf{r}_i im inneren Gebiet von C'_i enthalten ist.

Berechne \mathbf{r}'_i als kantengewichteten Schwerpunkt von C'_i ;

Gib (C'_i, \mathbf{r}'_i) zurück;

Unteralgorithmus $\text{Verfeinere}((C_a, \mathbf{r}_a), (C_e, \mathbf{r}_e), Z)$

if Abstand zwischen \mathbf{r}_a und \mathbf{r}_e kleiner als Z **then**

Ende des Algorithmus;

else

Bestimme die Ebene E als Mittelebene zwischen \mathbf{r}_a und \mathbf{r}_e , d.h. als die Ebene

durch den Mittelpunkt \mathbf{r}_M der Strecke zwischen \mathbf{r}_a und \mathbf{r}_e , die senkrecht auf dieser Strecke steht;

if E nicht trennend **then**

Versuche durch Verschieben von \mathbf{r}_M auf der Verbindungsstrecke einen Punkt \mathbf{r}'_M und eine Ebene E' durch \mathbf{r}'_M parallel zu E zu finden, so dass

E' trennend ist;

Setze $E = E'$;

Setze $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}'_M$;

if E nicht trennend **then**

Ende des Algorithmus;

end if

Wähle von den Schnittgebieten, die durch E induziert werden, eine der erzeugten trennenden Schnittgebiete, C genannt, dessen Schwerpunkt \mathbf{r} den geringsten Abstand zu \mathbf{r}_M besitzt;

$(C', \mathbf{r}') := \text{Optimiere}(C, \mathbf{r})$;

$\text{Verfeinere}((C_a, \mathbf{r}_a), (C', \mathbf{r}'), Z)$;

Gib (C', \mathbf{r}') aus;

$\text{Verfeinere}((C', \mathbf{r}'), (C_e, \mathbf{r}_e), Z)$;

end if

Die Wahl des Schwellwertes Z des Algorithmus ist ähnlich wie beim Verfahren aus dem Abschnitt 6.2 von zentraler Bedeutung. Dieser Schwellwert sollte kleiner sein als der aus Abschnitt 6.2. Im Fall der Repräsentation eines Rohres durch ein Dreiecksnetz scheint es sinnvoll zu sein, diesen aus den Dreieckskanten des Rohres abzuleiten. Ein fein trianguliertes Rohr besitzt in der Regel mehr Detailinformationen als ein grob trianguliertes. Demnach benötigt auch die Leitlinie mehr Informationen. Als geeignet hat sich $1/3 \cdot \min\{l_k : k = 1, \dots, M\}$, l_k die maximale Kantenlänge des k -ten Dreiecks des Rohres, das aus M Dreiecken besteht, erwiesen.

Zu dem äußeren Rand von C'_i ist der Schwerpunkt gemäß des Satzes 4.9 zu berechnen. Die Verwendung der Umfangsgüte in der Zielfunktion erklärt sich dadurch, dass "schräge" Anschnitte wahrscheinlich unausgeglichener als "senkrechte" Anschnitte sind. Beispielsweise liefern schräge Anschnitte bei Zylindern Ellipsen, ein senkrechter Anschnitt hingegen einen Kreis.

Die Realisierung des Unteralgorithmus *Optimiere* geschieht durch die Methode des steilsten Abstieges, d.h. durch Fortschreiten im Parameterraum in Richtung der stärksten Änderung des Zielfunktionswertes. Die Zielfunktion $E_u(C'_i, \mathbf{r}_i)$ hat einen zweidimensionalen Definitionsbereich. Der Definitionsbereich wird durch die normierte Normale der Ebene, in der C'_i liegt, parametrisiert. Ausgehend von dem Startpunkt, hier der Normalen von C_i , wird in Richtung des steilsten Abstieges bis zu einem Minimum fortgeschritten. Dessen Parameterwert wird als neuer Startpunkt genommen, mit dem iteriert genau so verfahren wird.

Die Suche nach dem Minimum längs der Richtung der größten Änderung erfolgt mit dem Verfahren des goldenen Schnittes ([62], Kapitel 10.1, und [70], Abschnitt 7.4.2).

Ähnlich wie im Abschnitt 6.2 lässt sich auch zu dem hier vorgestellten Algorithmus eine Verbesserung durchführen, indem beispielsweise überprüft wird, ob die ermittelte Leitlinie innerhalb des Rohres verläuft.

6.4 Experimentelle Ergebnisse

Die Anwendung des intuitiven Verfahrens zeigt, dass es im Großen und Ganzen gute Ergebnisse liefert. Es zeigt sich jedoch, dass die auf den ersten Blick sinnvoll erscheinende Vorgehensweise bei der Neuausrichtung der Konturen im ersten Schritt im Unteralgorithmus *Optimiere* zu ungünstigen Lösungen führen kann. Neben den in der Abbildung 4.1 gezeigten Auswirkungen des Diskretisierungsfehlers sind jedoch weitere Probleme denkbar: In Abbildung 6.6 ist ein Ausschnitt aus dem Rohr zu sehen, das in der Abbildung 6.5 dargestellt ist. Die rot dargestellte Kurve repräsentiert die durch das Verfahren gefundene Leitlinie, während die gelbe Kurve der intuitiven Vorstellung entspricht.

Abbildung 6.7 zeigt eine Schnittkontur im kritischen Bereich, die mit Hilfe des Minimierungsverfahrens im ersten Schritt gefunden wurde. Hier wird der Grund für das unerwünschte Verhalten deutlich. Der Ausschnitt des Rohres besteht aus einem geraden Zylinder mit kreisförmiger Grundfläche und zwei Kegelstümpfen. Im Bereich der Übergangsstelle vom Kegelstumpf zum anderen Kegelstumpf ist es möglich, dass der Kreis nicht den kürzesten Umfang besitzt.

In einer Beispielsammlung, die aus ca. 100 Testrohren aus der industriellen Anwendung besteht, war das Problem der stark variierenden Umfangsänderung das einzige, an dem die intuitive Heuristik eine nicht zufriedenstellende Lösung geliefert hat. Die praktische Lösung dieser üblicherweise auf einen lokalen Ausschnitt beschränkten Probleme besteht darin, das problematische Stück des Polygonzuges herauszutrennen und durch eine Strecke zu ersetzen.

Bei den vorhandenen Testbeispielen aus der Umformtechnik wurde beobachtet, dass im Algorithmus "Intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug" wegen sehr geringer Krümmung der Rohre auf die Untersuchung verzichtet werden konnte, ob eine Ebene trennend ist. In dem Algorithmus "Intuitive Optimierung eines Schlauchstützstellenkantenzuges" konnte diese Untersuchung durch eine einfache Heuristik ersetzt werden. Sollten benachbarte Schnitte eine stark unterschiedliche Bogenlänge

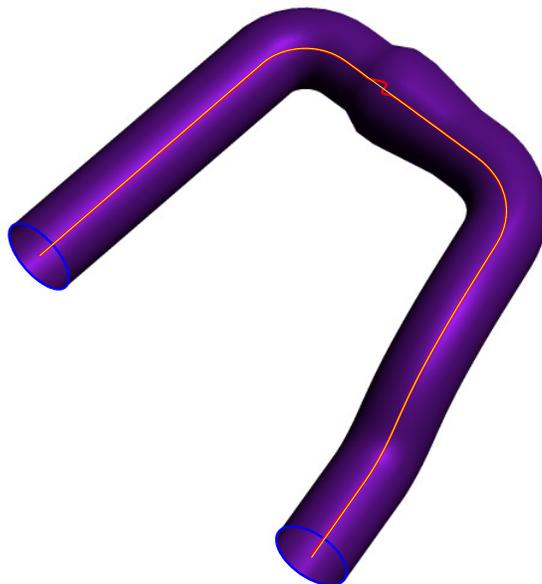


Abbildung 6.5: Eine von der Heuristik zur intuitiven Verbesserung eines Schlauchstützstellenkantenzuges gefundene Leitlinie, repräsentiert durch kubische Spline-Interpolationskurve der Knoten (rote Kurve). Die gelbe Kurve zeigt das wünschenswerte Verhalten.

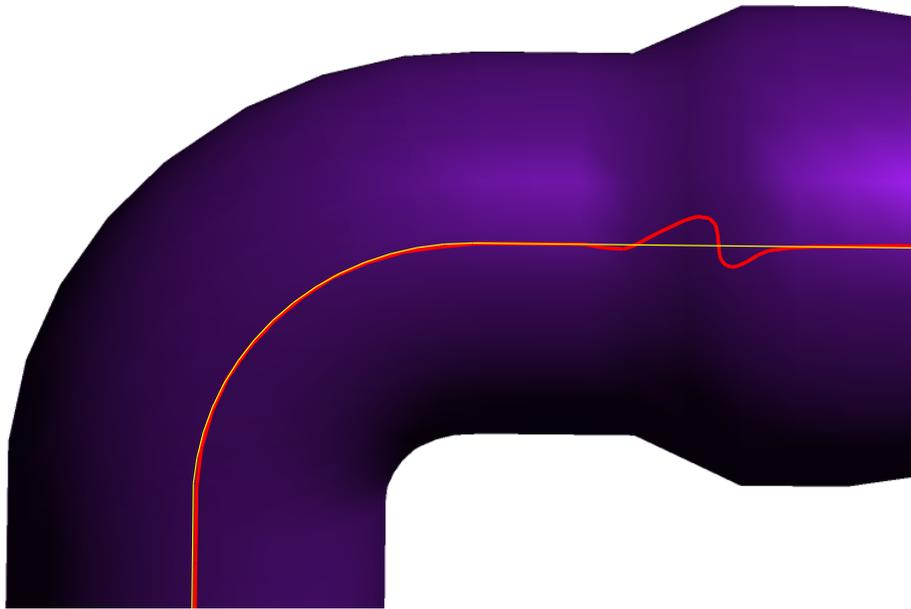


Abbildung 6.6: Vergrößerter Ausschnitt aus der vorangehenden Abbildung. Die Leitlinie zeigt ein unerwünschtes Verhalten.

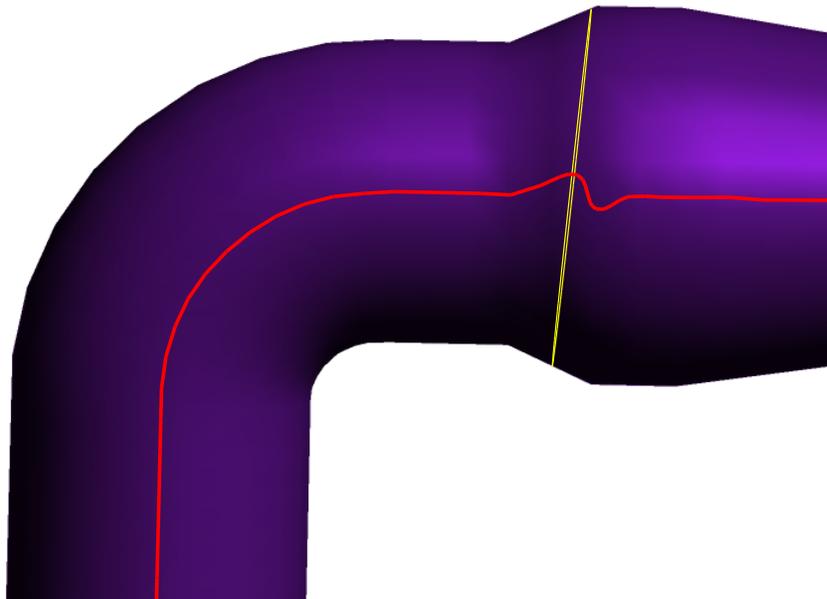


Abbildung 6.7: Ein Schnittgebiet im Problembereich der vorangehenden Abbildung

oder optimierter und nicht optimierter Schnitt start unterschiedliche Normalenvektoren besitzen, so ist dies ein Indiz für eine Kappe oder einen ungünstigen Schnitt. In dieser Situation wurde der Punkt der Leitlinie nicht verbessert. Dies ist vor allem im Hinblick darauf verwendet worden, dass die Anwendenden an einer möglichst schnellen Lösung interessiert sind, die selten in Extrembeispielen leicht modifiziert werden muss.

6.5 Theoretische Analyse

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit der Analyse des Verhaltens des Verfahrens "Verbesserter intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug". Die Analyse geschieht dadurch, dass plausible Anforderungen an die Ergebnisse der von dem Verfahren ausgeführten Operationen formuliert werden, die den Nachweis der Funktionsfähigkeit des Algorithmus erlauben. Im folgenden Abschnitt werden Distanzmaße für Rohrschnittgebiete und Öffnungen eingeführt. Die Idee besteht darin, aus der Plausibilität der Anforderungen für die praktisch interessanten Rohre auf die Funktionsfähigkeit des Verfahrens für diese Fälle zu schließen, wobei die plausiblen Anforderungen mit Hilfe von Distanzmaßen formuliert werden sollen. Im Prinzip ist ein solches Vorgehen für die Optimierung der Schlaucheinpassung ebenfalls möglich.

6.5.1 Distanzmaße für Rohrschnittgebiete und Öffnungen

Distanzmaße für Rohrschnittgebiete und Öffnungen werden durch eine partielle Funktion definiert, deren Eigenschaften denjenigen von Metriken entsprechen.

Definition 6.1

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, $\mathcal{C}(W)$ die Menge aller trennenden Rohrschnittgebiete und Öffnungen von W , $\mathcal{C}^2(W)$ die Menge aller Paare (C, C') , $C, C' \in \mathcal{C}(W)$, so dass C^- und C'^- disjunkt oder identisch sind. Eine Funktion $d : \mathcal{C}^2(W) \rightarrow [0, \infty)$ heißt Distanzmaß für trennende Rohrschnittgebiete, wenn gilt:

1. $d(C, C') = 0$ genau dann, wenn $C = C'$,
2. $d(C, C') = d(C', C)$,
3. $d(C_1, C_3) \leq d(C_1, C_2) + d(C_2, C_3)$.

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar:

Folgerung 6.2

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, $\mathcal{C}(W)' \subseteq \mathcal{C}(W)$ eine Menge paarweise disjunkter trennender Rohrschnittgebiete, d ein Distanzmaß auf $\mathcal{C}(W)$. Dann ist d eine Metrik auf $\mathcal{C}(W)'$.

In der folgenden Definition werden exemplarisch einige zumeist intuitive Distanzmaße für Rohrschnittgebiete und Öffnungen genannt.

Definition 6.3

Hausdorff-Distanz: die Hausdorff-Distanz von Mengen, angewendet auf trennende Rohrschnittgebiete beziehungsweise Öffnungen A, B

$$(6.1) \quad d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{\mathbf{a} \in A} \left\{ \inf_{\mathbf{b} \in B} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right\}, \sup_{\mathbf{b} \in B} \left\{ \inf_{\mathbf{a} \in A} d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right\} \right\}.$$

Schwerpunktdistanz: die Euklidische Distanz der Schwerpunkte zweier trennender Rohrschnittgebiete beziehungsweise Öffnungen, wobei für Rohrschnittgebiete und Öffnungen vorausgesetzt wird, dass der Schwerpunkt innerhalb des Rohrschnittgebietes beziehungsweise der Öffnung liegt.

Min/Max-Konnektivitätsliniendistanz: der Betrag der Differenz der Parameterwerte des ersten (bei der Min-Version) beziehungsweise des letzten (bei der Max-Version) Punktes einer gegebenen Konnektivitätslinie auf zwei trennenden Rohrschnittgebieten beziehungsweise Öffnungen.

Satz 6.4

Die Hausdorff-Distanz, die Schwerpunktdistanz und die Konnektivitätsliniendistanz sind Distanzmaße für Rohrschnittgebiete und Öffnungen.

Beweis

Hausdorff-Distanz: Die Hausdorff-Distanz erfüllt die Metrikeigenschaften ganz allgemein für Mengen im \mathbb{R}^n und damit insbesondere auch die Eigenschaften als Distanzmaß.

Schwerpunktdistanz: Die Schwerpunktdistanz erfüllt die Metrikeigenschaften für Punkte im \mathbb{R}^3 . Damit gelten die Eigenschaften 2. und 3. für Distanzmaße. Da die Schwerpunkte innerhalb der Rohrschnittgebiete beziehungsweise innerhalb der Öffnungen liegen und diese paarweise disjunkt sind, können die Schwerpunkte genau dann gleich sein, wenn die Rohrschnittgebiete gleich sind.

Min-Konnektivitätsliniendistanz: Die Punkte 1. und 2. für Distanzmaße sind klar. Seien $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}(W)$ paarweise disjunkt. Sei l die Konnektivitätslinie und seien t_{c_1}, t_{c_2} und t_{c_3} die Parameterwerte des ersten Punktes auf l .

Sei $t_{c_1} < t_{c_2} < t_{c_3}$.

Damit ist

$$\begin{aligned} d(C_1, C_2) &= t_{c_2} - t_{c_1} = t_{c_2} - t_{c_3} + (t_{c_3} - t_{c_1}) \\ &\leq t_{c_3} - t_{c_2} + (t_{c_3} - t_{c_1}) \\ &= d(C_2, C_3) + d(C_1, C_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(C_1, C_3) &= t_{c_3} - t_{c_1} = t_{c_3} - t_{c_2} + (t_{c_2} - t_{c_1}) \\ &= d(C_2, C_3) + d(C_2, C_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(C_2, C_3) &= t_{c_3} - t_{c_2} = t_{c_3} - t_{c_1} + (t_{c_1} - t_{c_2}) \\ &\leq t_{c_3} - t_{c_1} + (t_{c_2} - t_{c_1}) \\ &= d(C_1, C_3) + d(C_2, C_1) \end{aligned}$$

Damit gilt die dritte Forderung für Distanzmaße.

Max-Konnektivitätsliniendistanz: verläuft analog zum Beweis von Min-Konnektivitätsliniendistanz. \square

Unter Verwendung von Distanzmaßen für Rohrschnittgebiete und Öffnungen wird nun die Schlauchlänge eines Rohres definiert:

Definition 6.5

Sei

- (W, R_a, R_e) ein Rohr mit partieller Ordnungsrelation \leq für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen,
- d ein Distanzmaß für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen auf W ,
- (W_T, R_1, R_2) ein Teilrohr von W ,

- $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, ein Schlauchstützstellenkantenzug von W_T , d.h. $C_0 = R_1$, $C_n = R_2$, $C_i \leq C_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$, wobei C_i , $i = 0, \dots, n$, auch trennend bezüglich W ist und $C_i \leq C_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$, auch bezüglich W gilt.

Die Länge von S bezüglich d ist gegeben durch

$$L_W(S) := \sum_{i=0}^{n-1} d(C_i, C_{i+1}).$$

Sei \mathcal{K} die Menge aller Schlauchstützstellenkantenzüge von W_T mit den oben genannten Eigenschaften. Dann ist die Schlauchlänge von W_T definiert durch

$$L_W(W_T) := \sup\{L_W(S) \mid S \in \mathcal{K}\}.$$

Beobachtung:

Die Öffnungen und Rohrschnittgebiete "vernünftiger" Teilrohre und Rohre sind in beiden Rohren trennend und erfüllen in beiden Rohren die entsprechenden Ordnungsrelationsbedingungen. Ebenso ist die Schlauchlänge dieser Rohre bezüglich der Distanzmaße aus Definition 6.3 in der Regel endlich. Ein "vernünftiges" Rohr ist etwa ein Rohr, das wie ein gewundener Schlauch mit leichten Deformationen der Oberfläche, z.B. leichten Radiusänderungen, aussieht.

Satz 6.6

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr mit einer partiellen Ordnung \leq für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen, d ein Distanzmaß für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen auf W , $W_1 := W(R_a, C)$ und $W_2 := W(C, R_e)$ Teilrohre von (W, R_a, R_e) . Dann gilt:

$$L_W(W) \geq L_W(W_1) + L_W(W_2).$$

Beweis

Seien $[C_{1,0}, \dots, C_{1,n}]$ und $[C_{2,0}, \dots, C_{2,m}]$ die Folge der Rohrschnittgebiete beziehungsweise Öffnungen von Schlauchstützstellenkantenzügen von W_1 und W_2 gemäß Definition 6.5. Die Abstände der Öffnungen und Rohrschnittgebiete, die die Trennungs- und Ordnungseigenschaften auch in W erfüllen, werden bezüglich W gemessen. Demnach gibt es einen Schlauchstützstellenkantenzug von W , der die Vereinigung $[C_{1,0}, \dots, C_{1,n}, C_{2,1}, \dots, C_{2,m}]$ als Folge von Rohrschnittgebieten beziehungsweise Öffnungen hat ($C_{1,n} = C_{2,0} = C$) und Definition 6.5 erfüllt ist. Damit wird das Supremum, das für $L_W(W)$ auf der linken Seite zu bilden ist, über mindestens dieselbe Menge wie für die rechten Seite der Ungleichung gebildet, wodurch sich die \geq -Beziehung ergibt. \square

Definition 6.7

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, $S = (E, C, \mathbf{r})$ eine Schlauchapproximation von W mit Parameterintervall $[a, e]$. Ein Distanzmaß d für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen heißt stetig bezüglich der Schlauchapproximation S , wenn $C(\cdot)$ eine stetige Funktion von $[a, e]$ nach $(C[a, e], d)$ ist.

"Vernünftige" Rohre sollten in der Regel Schlauchapproximationen besitzen, bezüglich derer die Distanzmaße aus Definition 6.3 stetig sind. Allerdings ist die Stetigkeit nicht notwendigerweise gegeben. Die Schwerpunktdistanz kann an Singularitäten unstetig sein. Bei sich windenden Konnektivitätslinien kann es zu Unstetigkeiten der Konnektivitätsliniendistanz kommen, selbst wenn die Schlauchapproximation keine Singularitäten besitzt. Eine Unstetigkeit bezüglich der Schwerpunktdistanz ist in der Abbildung 6.8 dargestellt. Hier sind die Schwerpunkte betreffender, benachbarter Schnitte durch gestrichelte Linien dargestellt. In dieser Situation liegt auch eine Unstetigkeit bezüglich der Hausdorff-Distanz vor.

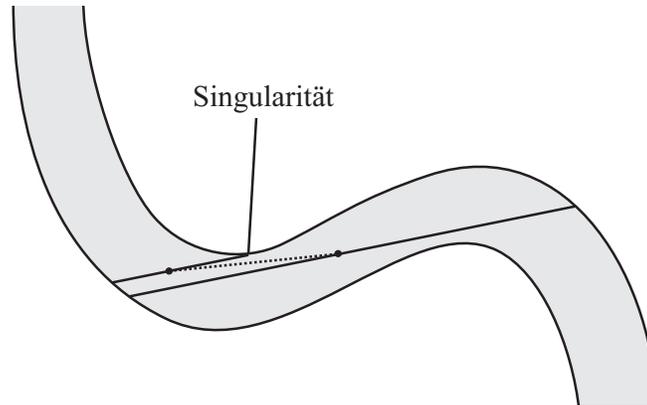


Abbildung 6.8: Unstetigkeit benachbarter Schnitte bezüglich der Schwerpunktdistanz

Definition 6.8

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, $S = (E, C, \mathbf{r})$ eine Schlauchapproximation von W mit Parameterintervall $[a, e]$, d ein Distanzmaß für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen. Ein Rohrschnittgebiet $C := C(t)$, $t \in [a, e]$, heißt ausgewogen trennend, wenn $d(R_a, C) = d(C, R_e)$.

Satz 6.9

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, $S = (E, C, \mathbf{r})$ eine Schlauchapproximation von W mit Parameterintervall $[a, e]$, d ein bezüglich S stetiges Distanzmaß für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen. Dann gibt es ein ausgewogen trennendes Rohrschnittgebiet.

Beweis

Sei $h(t) := d(R_a, C(t)) - d(C(t), R_e)$ für $t \in [a, e]$. Da $R_a \neq R_e$, gilt

$$h(a) = -d(R_a, R_e) < 0,$$

$$h(b) = d(R_a, R_e) > 0.$$

Da h stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz [32] ein $t \in (a, e)$ mit $h(t) = 0$, d.h. $d(R_a, C(t)) - d(C(t), R_e) = 0$, also $d(R_a, C(t)) = d(C(t), R_e)$. \square

Es erscheint möglich, einen etwas modifizierten Begriff der ausgewogenen trennenden Rohrschnittgebiete zu definieren, der auch für Schlauchapproximationen anwendbar ist, bei denen das Distanzmaß endlich viele Unstetigkeitsstellen hat und der den Anforderungen, die im Beweis zu Satz 6.11 benötigt werden, genügt.

Definition 6.10

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr, d ein Distanzmaß für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen, $\mathbf{r}(\cdot)$ eine Leitpunktfunktion. W hat die δ -Abstandseigenschaft bezüglich d und $\mathbf{r}(\cdot)$, wenn für je zwei trennende Rohrschnittgebiete beziehungsweise Öffnungen C_1 und C_2 , deren Abschluss disjunkt ist und für die $d(C_1, C_2) < \delta$ gilt, die Strecke zwischen $\mathbf{r}(C_1)$ und $\mathbf{r}(C_2)$ das Rohr W nicht schneidet.

Diese Definition bedeutet, dass die Strecke zweier Leitpunkte innerhalb des Rohres verläuft, sofern der Abstand der Rohrschnittgebiete oder Öffnungen hinreichend klein ist. Dies entspricht der intuitiven Vorstellung von Rohren, muss allerdings nicht generell erfüllt sein. Diese Bedingung kann als Terminierungskriterium für das vorgestellte Verfahren gesehen werden.

6.5.2 Analyse des Verfahrens

Der folgende Satz formuliert Bedingungen, die hinreichend für die Terminierung des Verfahrens "Verbesserter intuitiver initialer Schlauchschnittstellenkantenzug" sind.

Satz 6.11

Sei W ein Rohr mit einer partiellen Ordnung \leq für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen. Sei ferner

1. d ein Distanzmaß für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen von (W, R_a, R_e) ,
2. alle verwendeten Öffnungen und Rohrschnittgebiete in Teilrohren erfüllen auch in W die Trennungs- und entsprechenden Ordnungseigenschaften, entsprechend zu Definition 6.5,
3. die Länge von W bezüglich d ist beschränkt,
4. die δ -Abstandseigenschaft erfüllt.

Dann gilt:

1. Wenn in Schritt 1 des Unteralgorithmus "Verbesserter Schlauchschnittstellenkantenzug" stets ein ausgewogen trennendes Rohrschnittgebiet gefunden wird, dann terminiert der Algorithmus auch ohne die Verwendung des Abbruchkriteriums bezüglich der Iterationstiefe und liefert einen approximierenden Schlauchstützstellenkantenzug.
2. Wenn das Rohrschnittgebiet in Schritt 1 des Unteralgorithmus "Verbesserter Schlauchschnittstellenkantenzug" als ausgewogen trennend gewählt wird, dann terminiert der Algorithmus auch ohne die Verwendung des Abbruchkriteriums bezüglich der Iterationstiefe.

Beweis

Wir nehmen entsprechend zu Aussage 1 an, dass jede Ausführung der Suche in Schritt 1 ein ausgewogen trennendes Rohrschnittgebiet liefert.

Die Ausgabe des Algorithmus lässt sich als Baum verstehen. Die Wurzel des Baumes wird vom Eingaberohr, die Nachfolger eines inneren Knotens des Baumes werden von den zwei Teilrohren, die von dem Rohrschnittgebiet C im Unteralgorithmus induziert werden, definiert.

Falls der Algorithmus ohne die Verwendung des Abbruchkriteriums bezüglich der Iterationstiefe nicht terminiert, gibt es aufgrund von Voraussetzung 4 zu jedem $n > 0$ einen Knoten (W', R_a^n, R_e^n) im Baum, dessen Abstand von der Wurzel gleich n ist und für den $d(R_a^n, R_e^n) > \delta$ gilt. Wir betrachten den Baum zum Zeitpunkt der Erzeugung des Knotens (W', R_a^n, R_e^n) . Dieser Baum ist endlich. Es gilt:

Zwischenbehauptung

Die Summe der Distanzen der Öffnungen der Teilrohre in den Blättern dieses Baumes ist größer als $(n - 1) \cdot \delta/2$.

Zwischenbeweis

Dies kann wie folgt eingesehen werden. Jeder Knoten auf einem Pfad mit Ausnahme der Wurzel ist durch Teilung seines Vorgängerrohres entstanden. Jeder durch die Teilung entstandene Partnerknoten eines Pfadknotens ist Wurzel eines Unterbaums, für den die Summe der Distanzen der Rohröffnungen

jedes Teilrohres größer als δ ist. Dies ergibt sich zum einen aus der ausgewogenen Teilung, die zur Folge hat, dass die Teilrohre der Partnerknoten ebenfalls eine Öffnungsdistanz größer als $\delta/2$ haben. Zum anderen erfüllen die Rohrschnittgebiete auch in W die Trennungs- und entsprechenden Ordnungseigenschaften, d.h. alle Abstände werden bezüglich des Ausgangsrohres gemessen, so dass die Summe der Öffnungsdistanzen in den Blättern eines Unterbaumes genauso so groß ist wie die Summe der Distanzen der Öffnungen beziehungsweise der entsprechenden Rohrschnittgebiete in seinem Wurzelrohr. Daraus ergibt sich die Zwischenbehauptung. \square

Die vom Algorithmus zum Zeitpunkt der Erzeugung des Knotens (W', R_a^n, R_e^n) erzeugten Rohrschnittgebiete definieren zusammen mit den Öffnungen des Eingaberohres und den entsprechenden Leitpunkten einen Schlauchstützstellenkantenzug. Aufgrund von Voraussetzung 3 ist seine Länge L durch eine globale Konstante L_0 beschränkt, d.h. $L < L_0$. Wegen der obigen Behauptung gilt ferner $(n - 1) \cdot \delta/2 < L$. Beides zusammen führt auf

$$(n - 1) \cdot \delta/2 < L_0.$$

Dies bedeutet, dass n beschränkt ist und damit alle Pfade des zu Beginn definierten Baumes endlich sind, d.h. der Algorithmus ohne die Verwendung des Abbruchkriteriums bezüglich der Iterationstiefe terminiert.

Aus der Annahme von Aussage 1, dass jede Ausführung der Suche in Schritt 1 ein ausgewogen trennendes Rohrschnittgebiet liefert, folgt, dass Schritt 2 "Suche nicht erfolgreich" nie ausgeführt wird. Der Unteralgorithmus kann also nur in Schritt 4 oder 5 eine Ausgabe erzeugen. Alle dabei ausgegebenen Segmente des Schlauchstützstellenkantenzuges sind approximierend, so dass der ausgegebene Schlauchstützstellenkantenzug insgesamt approximierend ist. Damit ist Aussage 1 bewiesen.

Aussage 2 unterscheidet sich von Aussage 1 dadurch, dass es sein kann, dass kein Rohrschnittgebiet in Schritt 1 gefunden wird, das ausgewogen trennend ist. In diesem Fall endet die Ausführung des entsprechenden Zweiges der Rekursionshierarchie mit Schritt 2 des Unteralgorithmus und der Ausgabe eines Segments des Schlauchstützstellenkantenzuges mit Attribut "nicht approximierend". Der entstehende Baum entspricht ansonsten dem im Beweis von Aussage 1. Der Algorithmus terminiert daher, jedoch mit dem Unterschied, dass Segmente des resultierenden Schlauchstützstellenkantenzuges auch "nicht approximierend" sein können. \square

Die Kandidatenmenge für ausgewogen trennende Rohrschnittgebiete wird für Distanzmaße, die auf Referenzpunkten (z.B. Schwer- oder Leitpunkten) trennender Rohrschnittgebiete basieren, durch die Mittelebene zwischen den Referenzpunkten der beiden Rohröffnungen bestimmt. Auf dieser müssen in diesem Fall die Referenzpunkte der ausgewogen trennenden Rohrschnittgebiete liegen.

Satz 6.12

Sei W ein Rohr mit partieller Ordnungsrelation \leq für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen. Sei jedes Teilrohr (W', R_a', R_e') , für das der Unteralgorithmus aufgerufen wird, ein Rohr, für das eine Schlauchapproximation existiert, bezüglich der d stetig ist. Dann gibt es in Schritt 1 des Unteralgorithmus "Verbesserter Schlauchschnittstellenkantenzug" ein ausgewogen trennendes Rohrschnittgebiet C .

Beweis

Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Satz 6.9 über die Existenz ausgewogen trennender Rohrschnittgebiete. \square

Kapitel 7

Diskussion der Schlaucheinpassung

Dieses Kapitel befasst sich mit einer Diskussion der vorgestellten Verfahren der Schlaucheinpassung. In Abschnitt 7.1 ist ein Vergleich an praxisrelevanten Bauteilen zwischen den Ergebnissen des adaptiven Unterteilungsverfahrens und der dynamischen Programmierung zu finden. Abschnitt 7.2 präsentiert Variationen der Algorithmen zur Schlaucheinpassung. Das Kapitel endet mit einer Diskussion der Problematik einer vollen Automatisierung.

7.1 Vergleich der Schlaucheinpassungen

Im Folgenden werden die Schlaucheinpassungen mit dem adaptiven Unterteilungsverfahren und die Methode der dynamischen Programmierung bezüglich der Qualität der Ergebnisse verglichen. Die Beurteilung wird anhand der ermittelten Leitlinien vorgenommen. Dazu werden zwei exemplarische Rohre betrachtet. Da diese Rohre für die Praxis typische Bestandteile umfassen, können die daraus abgeleiteten Beobachtungen in diesem Sinne als repräsentativ angesehen werden, so dass eine Untersuchung auf weiteren Beispielen nicht notwendig erscheint.

Abbildung 7.1 zeigt das erste ausgewählte Rohr, das auch in der ersten, größeren Versuchsreihe aus dem Kapitel 5 verwendet wurde, mit einer Leitlinie, die mit dem adaptiven Verfahren bestimmt wurde. Dieses Ergebnis entspricht in etwa dem intuitiv geforderten. Mit einer von den Anwendenden sinnvollen Gewichtung für die dynamische Programmierung von $\alpha_k = \frac{1}{6}$, $\alpha_o = 0$, $\alpha_p = \frac{1}{6}$ und $\alpha_l = \frac{2}{3}$ hat sich nach 15 Iterationen das in der Abbildung 7.2 dargestellte Ergebnis für die Leitlinie ergeben. Man erkennt, dass beide Verfahren nahezu gleichwertige Leitlinien generieren.

Im Fall der dynamischen Programmierung können sich bei anderer Wahl der Gewichte jedoch auch ungünstige Resultate ergeben. So wird beispielsweise für $\alpha_k = 0$, $\alpha_o = 1$, $\alpha_p = 0$ und $\alpha_l = 0$ nach 15 Iterationen das in der Abbildung 7.3 dargestellte Ergebnis erzeugt. Da die Krümmung für dieses Rohr die maßgebliche Größe ist, sollte für eine Wahl der Leitlinie das Diagramm 5.22 verwendet werden. Es zeigt sich, dass die Resultate der Iterationen aus dem Häufungsbereich dieses Diagramms, also Ergebnisse, die Krümmungswerte zwischen 0.42 und 0.49 erzielen, "guten" Leitlinien entsprechen. Bei der in der Abbildung 7.3 dargestellten "schlechten" Leitlinie beträgt der Wert der durchschnittlichen Krümmungsgüte 1.08.

Das zweite Beispiel ist das bereits in Kapitel 6.4 diskutierte Rohr, das in Abbildung 7.4 noch einmal gezeigt wird. Das Verfahren der dynamischen Programmierung ermöglicht das Auffinden einer Schlaucheinpassung, bei der die Leitlinie die gewünschte Form hat (siehe Abbildung 7.5). Bedingt durch die verhältnismäßig langen Geradenanteile in dem Rohr, ist nur eine geringe Abhängigkeit der Leitlinie von den Gewichten zu erkennen. Dies rührt von der Tatsache, dass das Rohr in den geraden Bereichen ein einfacher Zylinder ist, und dort das Minimum aller Güten Null ist.

7.2 Variationen der Schlaucheinpassungsverfahren

Durch Variation und Kombination der beiden in der Dissertation entwickelten Verfahren können weitere Verfahren abgeleitet werden, um die Qualität der Approximation des Optimums und den Berechnungsaufwand gegeneinander zu beeinflussen. Eine grundsätzliche Vorgehensweise, die im Folgenden diskutiert wird, besteht darin, mit einem der Verfahren Teilrohrzerlegungen zu generieren, die wiederum mit einem der Verfahren weiterverarbeitet werden.

Eine erste derartige Variation ist, zunächst das adaptive Verfahren für die Zerlegung zu verwenden.

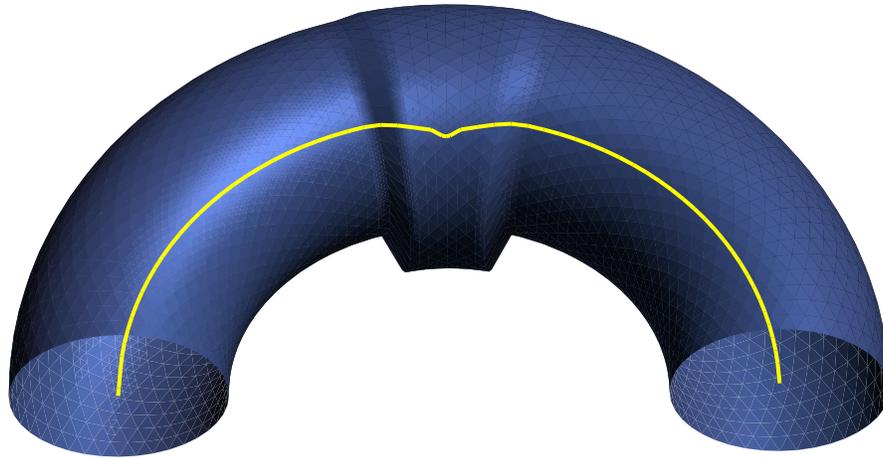


Abbildung 7.1: Eine mit dem adaptiven Unterteilungsverfahren bestimmte Leitlinie

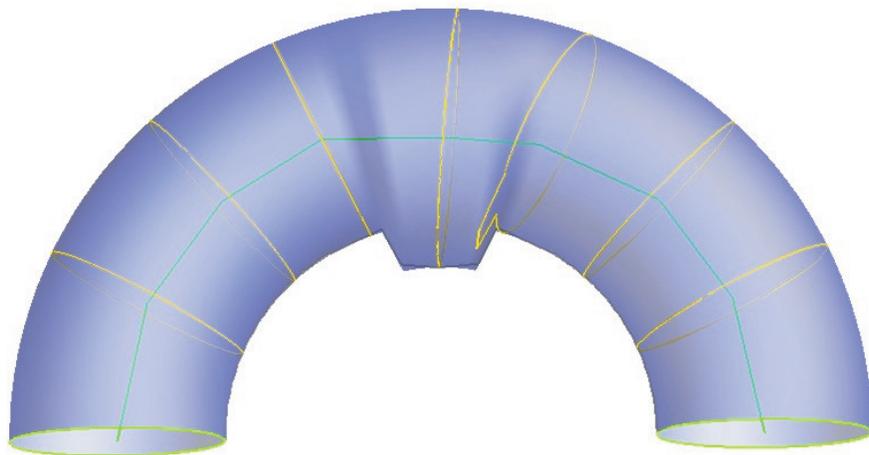


Abbildung 7.2: Eine mit sinnvoller Gewichtung mit der dynamischen Programmierung bestimmte Leitlinie

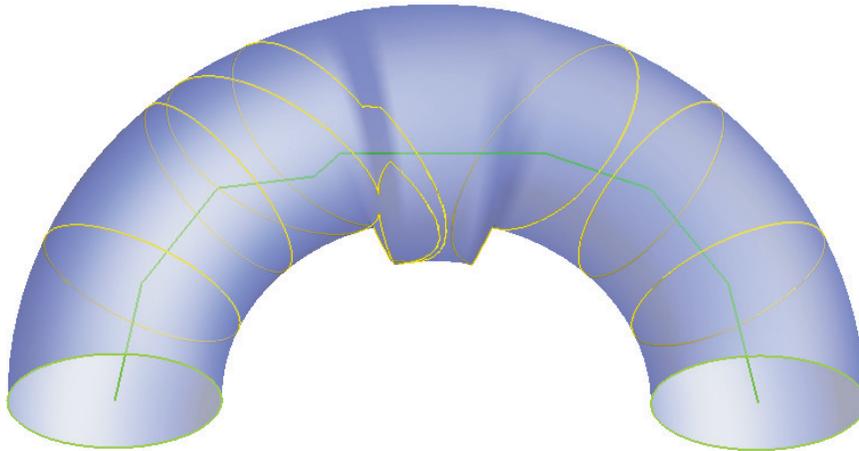


Abbildung 7.3: Eine bei nicht geeigneter Gewichtung mit der dynamischen Programmierung bestimmte Leitlinie

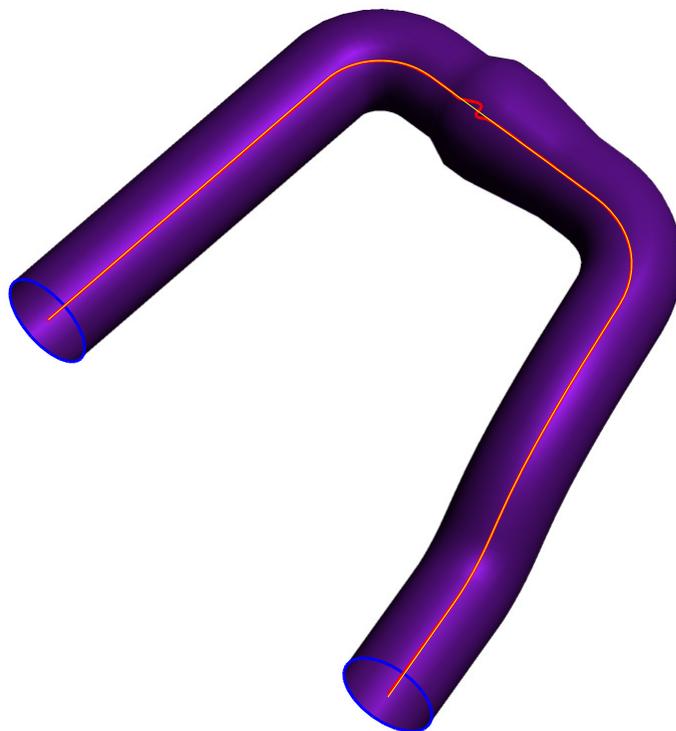


Abbildung 7.4: Eine von dem adaptiven Unterteilungsverfahren zur intuitiven Verbesserung eines Schlauchstützstellenkanten-zuges gefundene Leitlinie, repräsentiert durch kubische Spline-Interpolationskurve der Knoten (rote Kurve). Die gelbe Kurve zeigt das wünschenswerte Verhalten.

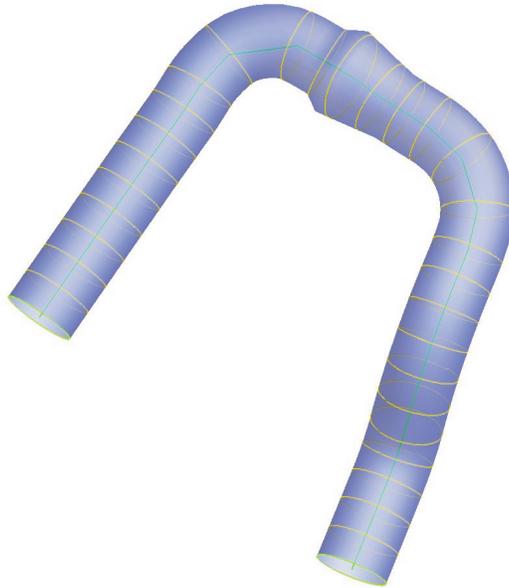


Abbildung 7.5: Die Berechnung einer Leitlinie mit gewünschtem Verhalten mit dem Verfahren der dynamischen Programmierung.

Sollten "schwierige" Teilrohre auftreten, werden diese mit dem Verfahren der dynamischen Programmierung bearbeitet.

Eine zweite Variation ist die Anwendung des Verfahrens der dynamischen Programmierung mit wenigen Konstruktionspunkten, die gleichmäßig über eine Leitlinie verteilt sind. Während der Berechnung werden auf den Abschnitten der Leitlinie zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konstruktionspunkten, die sich für das Auffinden einer Lösung als problematisch erweisen, neue Konstruktionspunkte eingefügt. Schließlich wird die erhaltene Lösung dann noch in den Teilrohren zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schnittgebieten der gefundenen Lösung um weitere Konstruktionspunkte erweitert, in denen die Schlaucheinpassung verbesserbar erscheint.

Eine Schwierigkeit bei solchen Vorgehensweisen ist, dass die Lage der Schnittgebiete, die die Teilrohre einer Zerlegung festlegen, die möglichen Lösungen in den Teilrohren beeinflussen. Daher könnte es interessant sein, Verfahren zu finden, die die begrenzenden Schnittgebiete von Teilrohren variieren können, wenn sich herausstellen sollte, dass für ein Teilrohr keine gute Lösung zu finden ist. Gesucht sind hier Verfahren, die einen geringeren Aufwand als die direkte Anwendung der dynamischen Programmierung auf das Startrohr haben.

7.3 Problematik der vollen Automatisierung

Die Erfahrung mit den entwickelten Verfahren, aber auch anderen Problemstellungen ähnlichen Typs, zeigt, dass eine anschaulich gute automatisierte Lösung für alle möglichen Eingaben von existierenden Verfahren nicht erzielt wird, auch wenn ein Optimum der Zielfunktion bestimmt wurde. Hierfür können zwei Gründe identifiziert werden.

Ein erster Grund könnte in der nicht geeigneten Wahl der Zielfunktion liegen, die die Schlaucheinpassungsaufgabe modelliert. Die Modellierung geschieht als mehrkriterielles Optimierungsproblem,

bei dem sich die Zielfunktion aus Teilfunktionen zusammensetzt, die jeweils eine wünschenswerte Eigenschaft der gesuchten Schlaucheinpassung formulieren. Um überhaupt eine gute Lösung finden zu können, ist es notwendig, dass sich unter den Pareto-optimalen Lösungen auch gute befinden.

Der zweite Grund liegt in dem Problem, unter den Pareto-optimalen Lösungen mit akzeptablem Aufwand gute Lösungen herausfiltern, beziehungsweise Gewichte der Teilzielfunktionen zu finden, die eine intuitiv gute Lösung liefern. Je mehr gute Lösungen dabei sind, desto eher kann erwartet werden, eine gute Lösung mit akzeptablem Aufwand zu finden.

Dies ergibt die folgenden möglichen Konsequenzen:

1. Es muss akzeptiert werden, dass ein Verfahren für manche Eingaberohre keine befriedigende Lösung findet.
2. Bei Rohren, für die keine befriedigende automatische Schlaucheinpassung gefunden wird, kann eine direkte graphisch-interaktive Konstruktion vorgenommen werden.
3. Bei Rohren, für die keine befriedigende automatische Schlaucheinpassung gefunden wird, kann eine interaktive Steuerung des Lösungsprozesses des Lösungsverfahrens vorgenommen werden.

Die erste und die zweite Konsequenz kann insbesondere beim ersten oben genannten Grund notwendig sein, d.h. die Modellierung des Problems liefert nicht immer gute Lösungen.

Zur Realisierung der zweiten Konsequenz gibt es verschiedene Möglichkeiten. Konnte überhaupt eine zulässige Schlaucheinpassung generiert werden, wenn auch keine zufriedenstellende, kann sie in Problembereichen modifiziert werden. Hier besteht eine Möglichkeit darin, einen Problembereich zu kennzeichnen. Falls sich dabei ein Teilrohr ergibt, können die bestehenden Algorithmen auf dieses Rohr angewendet werden, in der Hoffnung, dass sich nun eine zufriedenstellende Lösung ergibt. Sollte es nicht möglich sein, ein Teilrohr zu generieren oder die Algorithmen auch in diesem Bereich keine geeignete Lösung generieren, kann die Schlaucheinpassung durch die Anwendenden manipuliert werden. Entweder werden hierbei die Knoten der Leitlinie verändert und die Schlaucheinpassung hieran angepasst oder es wird eine völlig interaktive Schlaucheinpassung durchgeführt. Ein Lösungsvorschlag hierzu ist in der Diplomarbeit von Schlienkamp [66] zu finden. Hier wird eine Methode vorgestellt, in der zu einem gegebenen Rohr ein Schlauch erzeugt wird, dessen Mittellinie die gesuchte Leitlinie ist. Dabei bewegen sich die Anwendenden durch das gegebene Rohr und bestimmen Rohrschnittgebiete. Zu jedem dieser Gebiete wird ein Kreis berechnet, der innerhalb des Rohres liegt. Nachdem alle von den Anwendenden gewünschten Kreise erzeugt wurden, werden sie zu dem Schlauch zusammengefügt.

Die dritte Konsequenz ist beim zweiten zu Beginn genannten Grund ein möglicher Ansatz. Eine Steuerung des Verfahrens, das auf dynamischer Programmierung beruht, mit dem Ziel des Auffindens einer der existierenden, guten Lösung kann etwa sein, die Gewichte der Zielfunktion interaktiv zu variieren. Wenn festgestellt wird, dass beispielsweise die Wertebereiche der Zielfunktionen stark unterschiedlich sind, können die Gewichte der kleineren Güten vergrößert werden, so dass die Teilzielfunktionen zusammen mit den Gewichten einen vergleichbaren Wertebereich haben. Auf der anderen Seite kann auch ein Gewicht verkleinert werden, wenn festgestellt wird, dass der Einfluss der entsprechenden Gütefunktion zu unerwünschten Resultaten führt. Schließlich besteht eine Möglichkeit, die Rohrschnittgebiete zu manipulieren:

1. Veränderung des Rotationsbereiches zur Generierung von Rohrschnittgebieten bei der hierarchischen Suche,
2. Veränderung der Konnektivitätslinie,

3. Veränderung der Konstruktionspunkte,
4. Veränderung der Anzahl der Rohrschnittgebiete pro Konstruktionspunkt.

Bei dem adaptiven Verfahren gibt es dagegen nur sehr wenige Möglichkeiten interaktiv die Generierung der Schlaucheinpassung zu beeinflussen. Auf Grund der Wahl eines einfachen Verfahrens mit möglichst wenig Parametern können hier lediglich die Schwellenwerte angepasst werden. Dies sind die Abbruchbedingungen der einzelnen Algorithmen.

Kapitel 8

Approximation der Leitlinie durch U-Spline-Kurven

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln Verfahren zur Generierung der Schlaucheinpassung vorgestellt wurden, wird in diesem Kapitel ein Verfahren präsentiert, mit dem die gegebene Leitlinie beziehungsweise allgemein ein dreidimensionaler Polygonzug durch eine U-Spline-Kurve approximiert wird. Das Ergebnis ist eine G^1 -stetige Kombination von Geraden- und Kreiskomponenten. G^1 bedeutet "geometrische Stetigkeit" und steht für die Existenz einer C^1 -stetigen, d.h. tangentialstetigen, Parametrisierung der Kurve (vgl. [21], Kapitel 11). Das Kapitel beginnt mit einer Definition des vorliegenden Problems und der Definition von U-Spline-Kurven (Abschnitt 8.1). Anschließend wird im Abschnitt 8.2 eine Übersicht von verwandten Problemen gegeben. Das Verfahren zur U-Spline Approximation ist im Abschnitt 8.3 zu finden. Verbesserungsvorschläge und eine Analyse des Verfahrens werden in den Abschnitten 8.4 und 8.5 behandelt. Dieses Kapitel ist teilweise bereits in dem Forschungsbericht des Autors [80] veröffentlicht worden.

8.1 Problemdefinition

Dieser Abschnitt stellt die nötigen Definitionen bereit und formuliert das gegebene Problem. Wichtigste Hilfsmittel sind die Kurven, die aus Geraden- und Kreiskomponenten bestehen.

Definition 8.1

Eine Kurve heißt tangentialstetig, wenn an jedem ihrer Punkte eine eindeutige Tangente existiert. Eine tangentialstetige Kombination von einem Kreissegment und zwei Geradensegmenten, je eins an den Enden des Kreissegmentes, heißt U-Segment. Eine tangentialstetige Kurve, die aus endlich vielen U-Segmenten zusammengesetzt ist, heißt U-Spline-Kurve.

Eine alternative Sichtweise ist, dass sich eine U-Spline-Kurve aus Strecken und Kreisbogensegmenten so zusammensetzt, dass sich Kreisbogensegmente und Strecken abwechseln und die Kurve insgesamt tangentialstetig ist. In der Anwendung wird diese Kurve auch als Biegelinie bezeichnet.

Damit lassen sich nun Schlauchstützstellen-U-Spline-Züge und U-Spline-förmige Schlauchapproximationen definieren und somit wird eine Beziehung zur Schlaucheinpassung hergestellt. Zunächst wird der Schlauchstützstellen-U-Spline-Zug definiert, der sich an der Definition 2.24 des Schlauchstützstellenkantenzuges orientiert:

Definition 8.2

Sei (W, R_a, R_e) ein Rohr mit partieller Ordnungsrelation \leq für trennende Rohrschnittgebiete und

Öffnungen. Eine endliche Folge $S = [S_0, \dots, S_n]$, $S_i = (C_i, \mathbf{r}_i)$, $i = 0, \dots, n$, von Schlauchstützstellen heißt Schlauchstützstellen-U-Spline-Zug, wenn gilt:

1. $C_0 = R_a, C_n = R_e$.
2. $C_i \leq C_{i+1}$, $i = 0, \dots, n - 1$.
3. \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_{i+1} , $i = 0, \dots, n - 1$, sind die Endpunkte einer Strecke oder eines Kreisbogens, die zusammen eine U-Spline-Kurve \mathbf{r} bilden.
4. Die U-Spline-Kurve \mathbf{r} verläuft vollständig in $W^{*,\circ}$. \mathbf{r} wird Leitlinie genannt.

Jetzt wird eine U-Spline-förmige Schlauchapproximation definiert, die sich an die Definition 2.29 der stückweisen linearen Schlauchapproximation anpasst.

Definition 8.3

Sei W ein Rohr mit partieller Ordnungsrelation \leq für trennende Rohrschnittgebiete und Öffnungen. Eine Schlauchapproximation $S = (E, C, \mathbf{r})$ von W heißt U-Spline-förmig, wenn bei entsprechender Bezeichnung aus der Definition 2.29 der stückweisen linearen Schlauchapproximation gilt:

1. $E_i : [t_i^+, t_{i+1}^-] \rightarrow \mathcal{E}$ ist eine stückweise lineare Ebenenschar.
2. Die Leitlinie im Intervall $[t_i^+, t_{i+1}^-]$ wird von einer U-Spline-Kurve \mathbf{r}_i mit Strecken- und Kreisbogensequenzen mit Trennpunkten $\mathbf{r}_{i,0}, \dots, \mathbf{r}_{i,m_i}$ gebildet.
3. Wenn $E_i(t_i^+)$ und $E_i(t_{i+1}^-)$ nicht parallel sind, dann schneidet die Schnittgerade der beiden Ebenen keines der Rohrschnittgebiete $C(E_i(t))$, $t \in [t_i^+, t_{i+1}^-]$.

Für U-Spline-förmige Schlauchapproximationen ist wünschenswert, dass die lineare Ebenenschar auf dem Segment zwischen $\mathbf{r}_{i,j}$ und $\mathbf{r}_{i,j+1}$ in Punkt 2 der Definition mit der Schar der Ebenen senkrecht zu dem Segment übereinstimmt, $j = 0, \dots, m_i - 1$. Dies wird im Folgenden nicht weiter thematisiert. Eine Möglichkeit der Bestimmung einer U-Spline-förmigen Schlauchapproximation, die dies nicht notwendigerweise erfüllt, ist, zunächst eine polygonzugorientierte Leitlinie mit den zuvor beschriebenen Methoden zu bestimmen und hinterher den Polygonzug durch eine U-Spline-Kurve zu approximieren. Dies führt auf das U-Spline-Approximationsproblem, das Gegenstand dieses Kapitels ist:

U-Spline-Approximationsproblem:

Gegeben: Ein Polygonzug im Raum, ein Fehlermaß und eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$.

Gesucht: Eine U-Spline-Kurve, für die gilt:

1. Die beiden Endpunkte des Polygonzuges stimmen mit den beiden Endpunkten der U-Spline-Kurve überein.
2. Die U-Spline-Kurve weicht maximal ε bezüglich des Fehlermaßes vom Polygonzug ab.
3. Die U-Spline-Kurve besteht aus möglichst wenigen U-Segmenten.

8.2 Verwandte Arbeiten

In der Literatur sind einige Verfahren zur Approximation von Punktfolgen durch Kreisbogen-Spline-Kurven (*engl.* Arc Spline) zu finden. Der Unterschied zu den U-Spline-Kurven ist, dass bei Kreisbogen-Spline-Kurven in der Regel kein Geradensegment zwischen zwei Kreisbögen vorhanden ist.

Es gibt eine Reihe von Arbeiten zur Approximation einer Punktfolge durch Kreisbogen-Spline-Kurven für den zweidimensionalen Fall [45], [50], [51] [54] und [82]. Lediglich Hoschek [28] behandelt neben dem zwei- auch den dreidimensionalen Fall. Im zweidimensionalen Fall beschreibt er eine Interpolation und eine Approximation. Für den dreidimensionalen Fall untersucht er allerdings nur die Interpolation einer gegebenen Punktfolge durch Kreisbogen-Spline-Kurven. Er verbindet jeweils zwei Punkte, denen jeweils ein Tangentenvektor zugeordnet ist, mit zwei Kreisbögen. Dies resultiert in einer Anzahl von Kreisbögen, die in der Größenordnung der Anzahl der gegebenen Punkte liegt und daher hier nicht in Frage kommt. Bei dem vorgestellten Approximationsverfahren ist zudem zu beachten, dass zwischen zwei Kreisbögen explizit keine Geraden zu finden ist. Allerdings lässt sich zumindest die Grundidee der Approximation auf das vorliegende Problem anwenden. Zu den gegebenen Punkten, wird ein neuer Polygonzug bestimmt, in den dann die Kreisbögen G^1 -stetig eingebettet werden. In der Abbildung 8.1 ist dieses Verfahren abgebildet: Zu den gegebenen, rot dargestellten

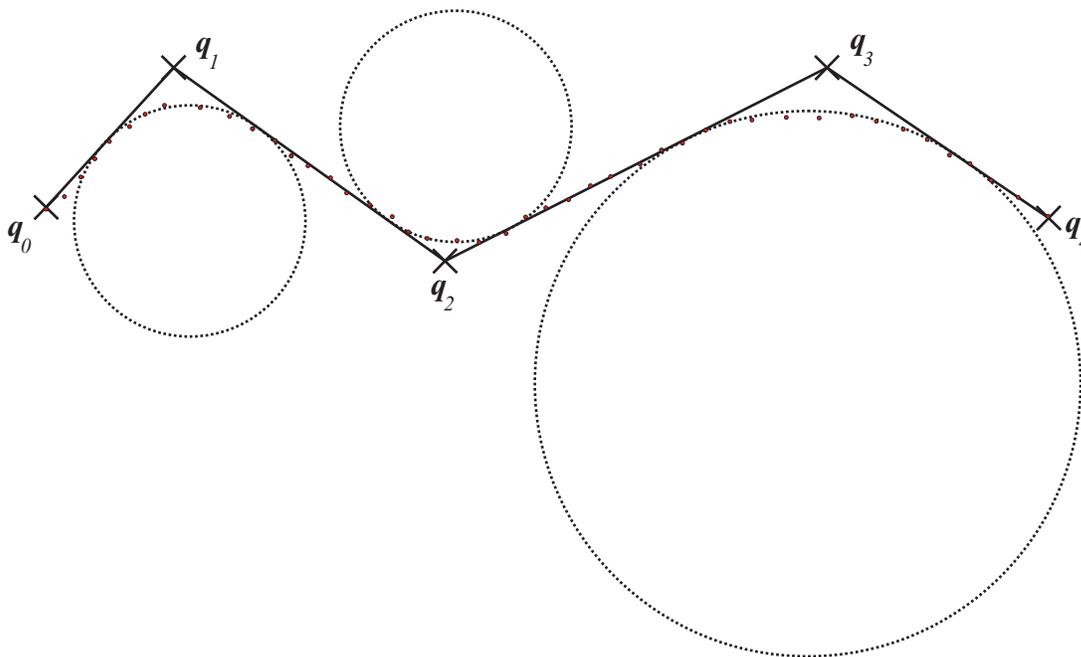


Abbildung 8.1: Neuer Polygonzug zur Approximation einer Punktfolge

Punkten wird ein neuer Polygonzug q_0, \dots, q_4 bestimmt. Dieser legt die Position der Kreisbögen fest, da die Kreissegmente so ermittelt werden, dass sie tangentialstetig in den Polygonzug eingebettet werden können. Die Kreise werden dabei so ermittelt, dass die entsprechenden Kreissegmente die Kurve innerhalb einer gegebenen Fehlerschranke approximieren.

Die Approximationsmethode von Hoschek [28] lässt sich allerdings nicht direkt in den dreidimensionalen Raum übertragen. Sie setzt voraus, dass der Startpunkt eines Kreisbogens, dessen Mittelpunkt sowie der Mittelpunkt des vorherigen Kreises auf einer Geraden liegen. Diese Bedingung ist im dreidimensionalen Raum nicht zwangsläufig erfüllt.

Ein weiteres Problem des zweidimensionalen Approximationsverfahrens von Hoschek [28] ist der hohe Rechenaufwand. Es führt auf ein Least-Squares-Problem, dessen Lösung unter anderem zu großen Matrizen führt. In diesem Kapitel wird ein heuristisches Verfahren vorgestellt, das in der Regel einen geringeren Aufwand besitzt.

In den Arbeiten von Leopoldseder ([47] und [48]) wird dieses Problem der dreidimensionalen Arc-Spline-Approximation auf eine ganz andere Art und Weise gelöst. Hier wird eine gegebene Kurve $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, g C^∞ -stetig, durch Kreisbögen approximiert. Dazu werden zu einer Menge von diskreten Kurvenpunkten die *Schmiegekreise* bestimmt. Dies sind Kreise, die die Kurve in zweiter Ordnung berühren (vgl. [75]). Anschließend werden diese Schmiegekreise in der Regel durch einen Kreis oder im Extremfall durch ein Geradensegment G^1 -stetig miteinander verbunden. Leopoldseder stellt dazu eine Möglichkeit bereit, so dass die Kurve innerhalb einer gegebenen Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ durch Geradensegmente und Kreise approximiert wird.

Auf den ersten Blick scheint dies die Lösung des vorliegenden Problems zu sein. Hierzu muss lediglich der gegebene Polygonzug durch eine dreidimensionale Kurve approximiert werden. Dies kann beispielsweise mit einer Spline-Approximation realisiert werden. Eine Schwierigkeit liegt in der Verbindung der Schmiegekreise durch weitere Kreise, was die Anzahl der Kreissegmente der gesamten Approximation um den Faktor 2 erhöht. Ferner gibt es keine explizite Steuermöglichkeit im Hinblick auf das Spline-Verhalten bei Geraden/Kreis-Alternierung.

In der von Safonova und Rossignac [65] vorgestellten Methode wird ein Polygonzug $P = [\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$ durch eine minimale Anzahl Kreisbögen innerhalb einer gegebenen Fehlertoleranz approximiert. Hierzu wird zu allen Teilzügen $S_{i,j} \subset P$, $S_{i,j} = [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_j]$, $i < j$, für die das möglich ist, eine Ebene bestimmt, so dass alle Knoten von $S_{i,j}$ einen Abstand kleiner als eine gegebene Toleranz von der Ebene besitzen. Auf diese Art und Weise ist das Problem lokal in den zweidimensionalen Raum transformiert worden. Es wird nun versucht, $S_{i,j}$ innerhalb einer gegebenen Toleranz durch einen Kreisbogen zu approximieren. Dabei wird ein Geradensegment als Kreisbogen mit unendlichem Radius angesehen. Es ist weiterhin vorgeschrieben, dass sowohl \mathbf{p}_i als auch \mathbf{p}_j Elemente des Kreisbogens sind. Der nächste Teilzug, für den analog verfahren wird, muss mit dem Element \mathbf{p}_j beginnen. Ansonsten können die Stetigkeitsbedingungen nicht eingehalten werden, denn die gewünschte Kurve erhält man dann durch Vereinigung der einzelnen Kreisbögen. Dies bedeutet allerdings, dass im Allgemeinen keine G^1 -stetige Kurve entsteht. Ferner werden in der Regel keine alternierenden Kreisbögen und Strecken auftreten.

Bezogen auf das Glattheitsproblem kann eine Verbesserung des Verfahrens von Rossignac in der Diplomarbeit [44] gefunden werden. Dort werden zwei verschiedene Verfahren präsentiert:

1. Zunächst wird mit dem Verfahren von Safonova und Rossignac [65] eine Kreisbogenapproximation erzeugt. Danach durchläuft eine Schleife alle Übergangsstellen von zwei Kreisbögen und trennt jeweils die Kreisbogenapproximation auf. Danach werden diese Lücken durch zwei neue Kreisbögen wieder geschlossen, so dass insgesamt ein Kreisbogen-Spline entsteht.
2. Ausgangspunkt für das zweite Verfahren ist erneut der Algorithmus von Safonova und Rossignac [65]. Anstatt jetzt jedoch die Anzahl der Kreisbögen zu erhöhen wird die gegebene Kreisbogenapproximation geglättet. Hierfür wird die Lage der Kreisbögen so verändert, dass sie "besser" aneinander passen, d.h. der Winkel zwischen den Tangenten benachbarter Kreisbögen näher an π ist.

Das erste Verfahren löst das Problem, jedoch mit einer großen Anzahl zusätzlicher Kreisbögen. Bei dem zweiten Verfahren wird das Knickproblem zwar gemindert, aber im Allgemeinen keine Tangentstetigkeit erreicht.

Der im folgenden Abschnitt 8.3 beschriebene Algorithmus verwendet die Krümmung κ , um eine erste Näherung an der gesuchten U-Spline-Kurve zu finden. Unter der Annahme, dass der gegebene Polygonzug annähernd eine U-Spline-Kurve ist, kann davon ausgegangen werden, dass mit Hilfe der Krümmungsinformation eine fast minimale Anzahl von Kreisbögen gefunden werden kann. Im Abschnitt 8.4 wird ein weiterentwickeltes Verfahren vorgestellt, das auf Basis des Algorithmus von Rossignac [65] arbeitet. Es wird sich zeigen, dass die Ergebnisse beider Verfahren bei gängigen Rohren aus der Umformtechnik vergleichbare Resultate generieren.

8.3 U-Spline-Approximation durch adaptive Zerlegung

Der hier vorgestellte Algorithmus arbeitet wie folgt:

Algorithmus "U-Spline-Approximation durch adaptive Zerlegung"

1. Glätte den gegebenen Polygonzug $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$ durch lokale Polynomapproximation und erhalte den Polygonzug $[\bar{\mathbf{p}}_0, \dots, \bar{\mathbf{p}}_n]$.
2. Bestimme einen Krümmungskreis für jeden Knoten des Polygonzuges und suche die Punkte mit lokal minimalem Krümmungsradius.
3. Bestimme ausgehend von den Punkten mit lokal minimalem Krümmungsradius eine Folge von stückweise approximierenden Kreisbögen. Der Schnittpunkt der beiden Tangentialgeraden an den Endpunkten eines Kreisbogens wird als mittlerer Kontrollpunkt des Kreisbogens bezeichnet.
4. Verbinde die mittleren Kontrollpunkte der Kreisbögen sowie \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_n zu einem Polygonzug.
5. Wandle den Polygonzug in eine U-Spline-Kurve \mathbf{k} . Dabei dienen die Knoten des Polygonzuges als mittlere Kontrollpunkte der Kreissegmente der U-Spline-Kurve. Die Kreissegmente sollten einen Radius haben, der ähnlich dem der Kreissegmente ist, die die Knoten des Polygonzuges induzieren. Ermittle den Abstand von \mathbf{k} zu $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$. Sollte dieser größer als eine vorgegebene Schranke ε sein, ermittle den Punkt \mathbf{p}_i , der den größten Abstand zu \mathbf{k} besitzt. Berechne an dieser Stelle einen Krümmungskreis und ermittle so einen stückweise approximierenden Kreisbogen. Erhalte so einen zusätzlichen mittleren Kontrollpunkt. Fahre mit Schritt 4 fort.

Als Fehlermaß wird in diesem Kapitel der maximale Abstand von den ermittelten U-Spline-Kurven zu den Kanten des gegebenen Polygonzuges P genommen. Hierfür wird zunächst die U-Spline-Kurve durch einen Polygonzug mit einer gegebenen Toleranz $\delta > 0$ approximiert. Von den Knoten dieses Polygonzuges ist dann das Fehlermaß als der kürzeste Abstand zu den Kanten von P gegeben.

8.3.1 Glättung des Polygonzuges

Die Ausführung von Schritt 1, den gegebenen Polygonzug zu glätten, ist erforderlich, da so kleine Ungenauigkeiten aus der Berechnung der Leitlinie gefiltert werden. Würde der Polygonzug nicht geglättet werden, ist die Wahrscheinlichkeit sehr groß, dass an zu vielen Stellen mit dem im Schritt 3 und 5 verwendeten Verfahren Kreisbögen erzeugt werden, da beispielsweise so Störungen berücksichtigt werden. Es ist natürlich dabei zu beachten, dass die Glättung des Polygonzuges nicht oberhalb der Fehlerschranke ε liegt und zudem der geglättete Polygonzug weiterhin innerhalb des Rohres verläuft. Als Fehlermaß wird das Minimum von d_1 und d_2 genommen, wobei d_1 der kürzeste Abstand der Knoten des gegebenen Polygonzuges P zu den Kanten des geglätteten Polygonzuges \bar{P} ist und d_2 der kürzeste Abstand der Knoten von \bar{P} zu den Kanten von P ist.

Die Glättung des Polygonzuges kann beispielsweise durch die Berechnung eines Ausgleichspolynoms zweiter Ordnung mittels der Least-Squares-Methode erfolgen. Eine Herleitung ist in [67], Abschnitt 3.2, gegeben, wobei das dort beschriebene Verfahren eindimensional ist. Daher muss es hier für jede Komponente der Elemente des Polygonzuges angewendet werden. Es ist jedoch klar, dass ein Ausgleichspolynom für den gesamten Polygonzug keinen Sinn macht, da so in der Regel zu große Abweichungen entstehen und damit die Fehlerschranke ε nicht eingehalten werden kann. Statt dessen wird das Verfahren von [67] lediglich wie bei digitalen Filtern (vgl. [67], Abschnitt 6.1) für kleine Teilpolygonzüge des gegebenen Polygonzuges verwendet. Konkret wird zu geeigneten $k, l, r > 0$ der Punkt \mathbf{p}_k geglättet, indem ein Ausgleichspolynom zu $\mathbf{p}_{k-l}, \dots, \mathbf{p}_{k+r}$ ermittelt wird und $\bar{\mathbf{p}}_k$ als der entsprechende, auf Bogenlänge parametrisierte Wert des Ausgleichspolynoms gesetzt wird. In der Praxis wurde festgestellt, dass $l = r = 3$ gute Resultate erzielt.

Empirische Tests haben gezeigt, dass eine Glättung oberhalb der zulässigen Schranke ein Indiz für ein zu kleines ε beziehungsweise für eine schlechte Qualität der Leitlinie ist. Aus diesem Grund erscheint es praktisch zweckmäßig, den Punkt ohne Rücksicht auf die Toleranz zu verschieben, selbst wenn dies möglicherweise die Toleranzschranke verletzt.

8.3.2 Bestimmung eines Krümmungskreises und Suche nach lokal minimalen Krümmungsradien

Nach erfolgter Glättung wird im Schritt 2 jedem Punkt ein Radius zugeordnet. Verschiedene, hierfür vorhandene Ansätze sind im Zusammenhang mit der Krümmungsgüte im Abschnitt 4.1.1 genannt worden. Auch hier wird zu drei aufeinanderfolgenden Punkten $\bar{\mathbf{p}}_{i-1}$, $\bar{\mathbf{p}}_i$ und $\bar{\mathbf{p}}_{i+1}$, $1 < i < n$, der Umkreis ermittelt und der Radius dem Punkt $\bar{\mathbf{p}}_i$ zugeordnet. Eine praktische Berechnung des Umkreises ist im Anhang A.1 zu finden. Damit jedem Punkt ein Radius zugeordnet wird, erhalten der erste und letzte Punkt den ermittelten Radiuswert der jeweiligen Nachbarn.

Zum Schluss werden zu der so berechneten Folge von Radien lokale Minima gesucht. Hierbei gilt die Annahme, dass lokal minimale Radien einem besonders gekrümmten Teil des Polygons entsprechen und somit durch einen Kreisbogen approximiert werden müssen. Daher wird ein Element

$$r_j \in \{r_0, \dots, r_n\}$$

lokal minimal genannt, falls

$$(8.1) \quad r_{j-2} \geq r_{j-1} \geq r_j$$

$$(8.2) \quad r_j \leq r_{j+1} \leq r_{j+2}$$

mit $1 < j < n - 2$ gilt.

8.3.3 Bestimmung einer Folge von approximierenden Kreisbögen

Im Schritt 3 des Algorithmus werden die Minima der Radien ausgewertet. Dies bedeutet, dass untersucht wird, wie groß die Umgebung um ein lokales Minimum ist, die zu einem Bogen zu zählen ist. Aus diesem Grund wurden im vorigen Abschnitt auch die Minima der Krümmungsradien gesucht: In diesen Bereichen ist die Krümmung sehr groß, so dass Kreise anstelle von Geradensegmenten zur Approximation zu verwenden sind.

Zunächst werden hierfür in dem Polygonzug $[\bar{\mathbf{p}}_0, \dots, \bar{\mathbf{p}}_n]$ Umgebungen gesucht, die dann durch einen Kreisbogen approximiert werden. Die Umgebung wird mit den Punkten initialisiert, die den Werten der Liste der Minima der Radien entsprechen. Die Punkte werden dann in auf- und absteigende Indexrichtung untersucht und gegebenenfalls mit in die Umgebung aufgenommen. Ein Punkt wird mit

zu einer Umgebung gezählt, sofern der ihm zugeordnete Radius in einer gegebenen Toleranz zu dem entsprechenden Minimum des Radius liegt.

Diese Umgebungssuche lässt sich wie folgt im Detail formulieren:

Algorithmus "Umgebungssuche"

Gegeben: Ein Polygonzug $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$, deren Glättung $[\bar{\mathbf{p}}_0, \dots, \bar{\mathbf{p}}_n]$, eine Folge $[r_0, \dots, r_n]$ von Radien, eine Folge $[m_0, \dots, m_k] \subset [r_0, \dots, r_n]$, $k \leq n$, von lokalen Minima der Radien, ein Fehlermaß und eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$.

Gesucht: Umgebungen $\{U_i\}_{i=0}^l$, $U_i \subset [\bar{\mathbf{p}}_0, \dots, \bar{\mathbf{p}}_n]$, $l \leq k$, zu jedem m_i , so dass jedes U_i von einem Kreisbogen K_i , $i \in \{0, \dots, l\}$, approximiert werden kann, wobei der Abstand der entsprechenden Punkte \mathbf{p}_i zu K_i bezüglich des Fehlermaßes kleiner als ε ist.

Ablauf:

```

for  $i = 0, \dots, k$ , do
  1. Initialisiere Schranke  $S_i > 0$ ;
end for
for  $i = 0, \dots, k$ , do
  2. Setze  $t_0 := t$  mit  $r_t = m_i$ ,  $t \in \{0, \dots, n\}$ ,  $U_i := \emptyset$ ;
  3.  $U_i := U_i \cup \{\bar{\mathbf{p}}_t\}$ ;
  4. if  $t \leq 0$  oder  $\bar{\mathbf{p}}_{t-1} \in U_{i-1}$  then
    goto Schritt 7;
    end if
  5. Berechne  $|r_{t-1} - m_i|$ ;
  6. if  $|r_{t-1} - m_i| < S_i$  und  $r_{t-1} \notin [m_0, \dots, m_k]$  then
     $U_i := U_i \cup \{\bar{\mathbf{p}}_{t-1}\}$ ;
     $t := t - 1$ ;
    goto Schritt 4;
    end if
  if  $|r_{t-1} - m_i| < S_i$  und  $r_{t-1} \in [m_0, \dots, m_k]$  then
    lösche  $r_{t-1}$  aus  $[m_0, \dots, m_k]$ ;
     $k = k - 1$ ;
     $U_i := U_i \cup \{\bar{\mathbf{p}}_{t-1}\}$ ;
     $t := t - 1$ ;
    goto Schritt 4;
    end if
  if  $|r_{t-1} - m_i| > S_i$  then
    goto Schritt 7;
    end if
  7. Führe die Schritte 4 - 6 entsprechend für die aufsteigende
    Indexrichtung mit  $t = t_0 + 1$  aus;
end for
8. Berechne für jedes  $U_i$  einen approximierenden Kreisbogen
 $K_i$ ,  $i \in \{0, \dots, l\}$ ;
9. if maximale Abstand der entsprechenden Teilpolygonzüge von  $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$  zu
 $K_i$  größer als  $\varepsilon$  then
  verkleinere  $S_i$ ;
  lösche jedes  $U_i$ ;
  stelle die ursprüngliche Folge  $[m_0, \dots, m_k]$  wieder her;

```

starte für $i = 0$ mit Schritt 2;
end if

Aus empirischen Daten hat sich die Wahl von S_i in Schritt 1 als $0.6 \cdot m_i$ als günstig erwiesen. Diese Initialisierung ist allerdings rein heuristisch und muss nicht zu guten Resultaten führen. Falls in Schritt 9 mit diesem S_i festgestellt wird, dass ein Kreisbogen das Fehlerkriterium nicht erfüllt, so kann dann $S_i = 0.5 \cdot S_i$ gesetzt werden. Aber auch diese Art der Verkleinerung ist heuristisch und hat in den Versuchsreihen zu guten Resultaten geführt.

Aus Effizienzgründen werden im Schritt 6 lediglich Radien verglichen. Alternativ könnten sukzessive links und rechts solange Punkte in die Menge U_i eingefügt werden, bis es keinen Kreis mehr gibt, der U_i innerhalb der Fehlerschranke approximiert. Dieses Verfahren ist natürlich viel aufwändiger. Daher werden lediglich die Radien, unter der Annahme, dass ähnliche Radien zu einem Bogen zu zählen sind, verglichen.

Bei der Kreisapproximation in Schritt 8 gibt es insgesamt vier verschiedene Möglichkeiten:

1. Wenn die Anzahl der Elemente von U_i gerade Eins ist, wird der entsprechende Radius gleich Null gesetzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Schranke $\varepsilon > 0$ zu klein gewählt worden ist.
2. Wenn die Anzahl der Elemente von U_i gerade Zwei ist, kann kein eindeutiger Kreis gefunden werden. Dann werden zwei neue, einpunktige Umgebungen erzeugt, die jeweils aus den Punkten von U_i bestehen. Jeder dieser Umgebung wird ein Kreis mit Radius Null zugeordnet. Anschließend wird U_i gelöscht.
3. Bei drei Elementen ist der Kreis als Umkreis bekannt, sofern die Elemente nicht kollinear sind. Wenn sie kollinear sind, werden wie bei 2. anstelle von U_i einpunktige Umgebungen und Kreise mit Radius Null erzeugt.
4. Der allgemeine Fall ist, dass die Mengen U_i aus mehr als drei Elementen bestehen. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze. Eine Möglichkeit ist, das Verfahren von [23] zu verwenden. Mit diesem Verfahren wird ein Kreisbogen zu einer gegebenen Menge von Punkten berechnet, der einen lokal minimalen Abstand zu einer Punktfolge besitzt, gemessen über einer Funktion von approximierenden Kreisbögen. Damit jedoch ein Kreisbogen erzeugt wird, müssen die gegebenen Punkte in einer Ebene liegen. Somit entsteht ein weiteres Problem: Die Erzeugung einer mittleren Ebene E , so dass die Punkte von U_i innerhalb der Fehlertoleranz in E liegen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine solche Ebene zu bestimmen. Eine ist in [65] beschrieben.

Ein empirischer und wesentlich einfacherer Ansatz ist, den Umkreis aus dem ersten, letzten und einem mittleren Punkt aus U_i zu berechnen. Der mittlere Punkt kann beispielsweise relativ zur Bogenlänge des Polygonzuges in U_i ermittelt werden. In empirischen Tests hat sich herausgestellt, dass dieser Startwert für die Berechnungen bereits ausreichend ist. Sollte kein solcher Umkreis berechenbar sein, werden wie bei 2. anstelle von U_i einpunktige Umgebungen und Kreise mit Radius Null erzeugt.

Sollten in den Punkten 2 bis 4 Kreise mit Radius Null erzeugt werden, ist die Forderung $l \leq k$, d.h. dass höchstens so viele Kreisbögen gefunden werden sollen, wie es lokale Minima von Radien gibt, in der Regel nicht zu erfüllen.

Die Abstandsberechnung von K_i zu dem entsprechenden Teilpolygonzug im Schritt 9 erfolgt gemäß des gegebenen Fehlermaßes.

8.3.4 Bestimmung des Polygonzuges aus mittleren Kontrollpunkten

Die Bestimmung des Polygonzuges aus mittleren Kontrollpunkten $[\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{l+1}]$ ist relativ einfach. Zunächst wird $\mathbf{t}_0 := \mathbf{p}_0 = \bar{\mathbf{p}}_0$ sowie $\mathbf{t}_{l+1} := \mathbf{p}_n = \bar{\mathbf{p}}_n$ gesetzt. Analog zu dem Verfahren zur Bestimmung der Umkreise im Anhang A.1, empfiehlt es sich, die Punkte $\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_l$ nicht als Schnittpunkt zweier Geraden im \mathbb{R}^3 zu ermitteln, sondern statt dessen den Schnittpunkt einer Geraden mit einer passenden Ebene zu ermitteln. Ein Problem tritt allerdings auf, wenn der Kreisbogen ein Halbkreis ist. Dann sind die beiden Tangentialgeraden an den Endpunkten des Kreisbogens parallel. In dieser Situation sollte der Halbkreis in zwei Viertelkreise geteilt werden, so dass das gerade beschriebene Verfahren angewendet werden kann.

8.3.5 Erzeugung einer U-Spline-Kurve

Im Schritt 5 des Algorithmus wird die gesuchte U-Spline-Kurve ermittelt. Hier werden zunächst Kreisbögen in den Polygonzug aus mittleren Kontrollpunkten eingepasst. Sollte dadurch keine U-Spline-Kurve entstehen, werden die Radien der entsprechenden Kreise solange verkleinert, bis eine G^1 -stetige Kurve entsteht. Danach wird überprüft, ob die Approximation innerhalb der gegebenen Schranke erfolgt ist. Ist dies nicht der Fall, werden neue mittlere Kontrollpunkte generiert und anschließend erneut versucht, eine neue U-Spline-Kurve zu berechnen.

Das Verfahren sieht im Einzelnen so aus:

Algorithmus "Erzeugung einer U-Spline-Kurve"

Gegeben: Eine Folge $[\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{l+1}]$ von mittleren Kontrollpunkten, ein zu approximierender Polygonzug $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$, ein Fehlermaß und eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$.

Gesucht: Eine U-Spline-Kurve \mathbf{k} , die $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$ mit einer Fehlerschranke ε bezüglich des Fehlermaßes approximiert.

Ablauf:

```

for  $\mathbf{t}_i \in \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_l\}$  do
  Passe den Kreisbogen  $\bar{K}_i$  in den Polygonzug  $[\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{l+1}]$  unter Beibehaltung des
  gegebenen Radius  $r_i$  ein; (*)
  if  $i > 1$  then
    if  $\bar{K}_i$  und  $\bar{K}_{i-1}$  können nicht  $G^1$  stetig durch eine Strecke miteinander
    verbunden werden then
      reduziere die Radien von  $\bar{K}_i$  und  $\bar{K}_{i-1}$ ; (**)
    end if
  end if
end for
Vereinige die ermittelten Kreisbögen  $\bar{K}_i$  zu einer U-Spline-Kurve  $\mathbf{k}$ , indem die
jeweiligen Enden mit Strecken verbunden werden;
if Abstand von  $[\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n]$  zu  $\mathbf{k}$  kleiner als  $\varepsilon$  then
  Ende des Algorithmus;
else
  Berechne an der Stelle der maximalen Abweichungen gemäß des Algorithmus
  "Umgebungssuche" eine neue Umgebung und füge diese in den Polygonzug
   $[\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{l+1}]$  ein;
  beginne nochmal mit diesem Algorithmus "Erzeugung einer U-Spline-Kurve";
end if

```

In dem mit (*) markierten Schritt wird zu gegebenem Radius r_i ein neuer Kreisbogen \overline{K}_i berechnet. Zu drei aufeinanderfolgenden Punkten $\mathbf{p} := \mathbf{t}_{i-1}$, $\mathbf{q} := \mathbf{t}_i$ und $\mathbf{t} := \mathbf{t}_{i+1}$, $0 < i < l + 1$, liegt der Mittelpunkt von \overline{K}_i auf der Geraden g mit

$$(8.3) \quad g: s \mapsto \mathbf{q} + s \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{d(\mathbf{p}, \mathbf{q})} + \frac{\mathbf{t} - \mathbf{q}}{d(\mathbf{t}, \mathbf{q})} \right).$$

Da der Radius des Kreisbogens bekannt ist, kann mit Hilfe einfacher geometrischer Beziehungen die konkrete Position des Mittelpunktes bestimmt werden (Strahlensatz). Die Endpunkte des Kreisbogens können mit Hilfe orthogonaler Projektion des Mittelpunktes auf die jeweilige Geraden g_1 beziehungsweise g_2

$$(8.4) \quad g_1 : s \mapsto \mathbf{q} + s \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

$$(8.5) \quad g_2 : s \mapsto \mathbf{q} + s \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{q})$$

ermittelt werden.

Durch dieses Verfahren ist allerdings keinesfalls garantiert, dass zwei benachbarte Kreisbögen G^1 -stetig durch ein Geradensegment miteinander verbunden werden können. Sollte dies nicht der Fall sein, müssen die Radien und damit auch die Mittelpunkte in dem mit (**) markierten Schritt neu berechnet werden. Diese Situation ist in der Abbildung 8.2 skizziert, wobei die problematische Strecke rot gekennzeichnet ist.

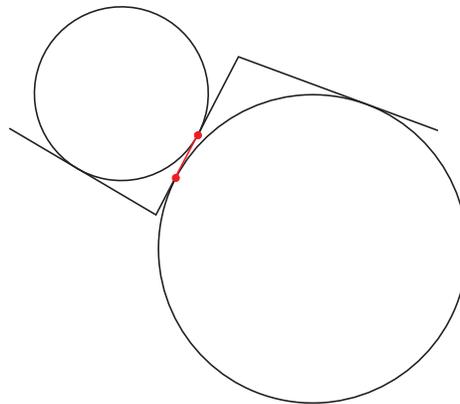


Abbildung 8.2: Bogen in Bogen

Eine Lösung des Problems kann mit Hilfe des Strahlensatzes erreicht werden, da die Mittelpunkte weiterhin auf den oben genannten Geraden liegen. Eine konkrete Berechnung ist im Anhang A.2 zu finden.

Durch die sukzessive Kontrolle und Verbesserung des Splines ähnelt dieses Verfahren einer Methode, die als *ICP* (*Iterated Closest Point*) beziehungsweise als *fine matching* bezeichnet wird (vgl. [7]). Die Konvergenz des Verfahrens ist gesichert: Sollte die gegebene Schranke ε zu klein sein, werden die gegebenen $n + 1$ Punkte im schlechtesten Fall durch $n + 1$ Kreise approximiert, wobei jeder Kreis den Radius 0 hat und als Mittelpunkt den entsprechenden Punkt aus $\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n\}$ besitzt.

8.3.6 Rechenzeit

Zum Schluss soll der Zeitbedarf abgeschätzt werden, den der Algorithmus der U-Spline-Approximation benötigt. Sei hierzu $n + 1$ die Elementzahl des zu approximierenden Polygonzuges P .

Der erste Schritt, die Glättung des gegebenen Polygonzuges, benötigt $O(n + 1)$ Zeit. Der zweite Schritt, die Bestimmung der Krümmungskreise und die Suche nach minimalen Krümmungsradien benötigt ebenfalls $O(n + 1)$ Zeit. Im dritten Schritt, die Bestimmung stückweise approximierender Kreisbögen im Schritt 9 des Algorithmus "Umgebungssuche", ist der Aufwand $O(k_1 \cdot (n + 1))$, wobei $k_1 \in \mathbb{N}$ eine vorgegebene maximale Anzahl von durchgeführten Verbesserungen ist. Falls innerhalb dieser Vorgabe die gewünschte Approximation nicht erreicht wird, gilt der Polygonzug als nicht approximierbar. Die Erzeugung des neuen Polygonzuges im vierten Schritt benötigt ebenfalls höchstens $O(n + 1)$ Zeit. Im letzten Schritt ist der Aufwand $O(k_2 \cdot (n + 1))$, wobei $k_2 \in \mathbb{N}$ die vorgegebene maximale Anzahl von Verbesserungen ist. Sollten mehr Iterationen notwendig sein, gilt auch hier der Polygonzug als nicht approximierbar. Insgesamt beträgt die Gesamtrechenzeit damit $O((n + 1) + (k_1 + k_2) \cdot (n + 1))$.

8.4 Kombiniertes Verfahren

In dem Abschnitt 8.3.2 wurde ein Verfahren beschrieben, anhand dessen eine Folge von Kontrollpunkten generiert werden kann, in die schließlich die Kreisbögen G^1 -stetig eingepasst werden können. Dieses Verfahren orientiert sich an der Krümmung der Kurve. Im Allgemeinen kann davon ausgegangen werden, dass diese Krümmungsinformationen eine fast minimale Anzahl von Kreisbögen erzeugen. Allerdings ist dieses Verfahren rein heuristisch.

Zumindest vergleichbare Qualität sollte daher eine Kombination der Methode von Rossignac [65] und dem hier vorgestellten Verfahren liefern. Konkret sollen die ersten Kontrollpunkte durch die Kreisbögen bestimmt werden, die durch Anwendung des Verfahrens von Rossignac entstehen werden. Das Verfahren garantiert eine minimale Anzahl von Kreisbögen, so dass erwartet werden kann, dass zunächst weniger Kontrollpunkte entstehen, als auf Basis der Krümmung ermittelt werden. Anschließend werden die Punkte aus dem hier beschriebenen Algorithmus abgearbeitet und eine Kreisbogenapproximation an den gegebenen Polygonzug erzeugt.

Weil die restlichen Punkte des Verfahrens die Einhaltung der Fehlerschranke kontrollieren, ist es zudem zweckmäßig, Kreisbögen von Rossignac [65] mit großem Radius zu löschen. Dadurch wird die Anzahl der Kontrollpunkte weiter verringert. Ein Vergleich der verschiedenen Verfahren ist im Abschnitt 8.5.2 zu finden.

8.5 Experimentelle Analyse

In diesem Abschnitt wird eine experimentelle Analyse des Verfahrens vorgenommen. Dabei wird zunächst anhand von vier Beispielen die Funktionsweise des Algorithmus aus Abschnitt 8.3 besprochen. Anschließend wird dieses Verfahren mit anderen Verfahren verglichen und die Resultate diskutiert.

8.5.1 Beispiele

Ein Ergebnis dieses Verfahrens ist in der Abbildung 8.3 dargestellt. Abbildung 8.4 zeigt ein Rohr, in dem die Leitlinie als Zusammensetzung kubischer Polynome (gelbe Kurve) und deren Annäherung durch Geradensegmente und Kreise (grüne Kurve) dargestellt ist. Das Rohr ist dabei ein Beispiel aus der Praxis, bei dem nicht planare Öffnungen vorhanden sind. In diesem Fall sind fünf Kreisbögen verwendet worden, wobei als Fehlerschranke

$$(8.6) \quad \varepsilon = \frac{L}{2 \cdot (n + 1)}$$

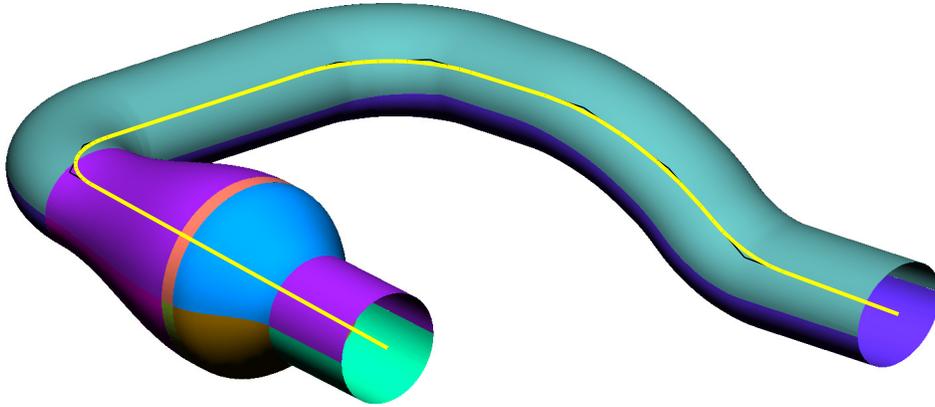


Abbildung 8.3: Beispielrohr mit Kurvenapproximation

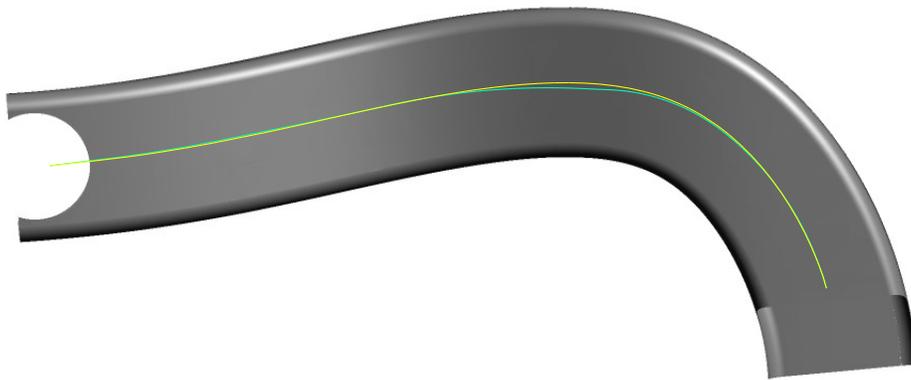


Abbildung 8.4: Verbesserte Näherung an die Leitlinie

benutzt wurde. Hierbei ist L die Bogenlänge der Leitlinie und $n + 1$ deren Punktzahl. Eine solche Fehlerschranke hat sich in empirischen Tests als günstig erwiesen. In der Regel kann um so gröber approximiert werden, je länger das Rohr ist und je weniger Punkte die Leitlinie hat. Bei dem vorliegenden Beispiel ist $\varepsilon = 5.32$, mit $L = 606.61$ und $n + 1 = 57$. Die Berechnung der ersten Approximation, die aus zwei Bögen besteht, hat einen Fehler von 9.05 (vgl. Abbildung 8.5, blaue Kurve).

Der Fehler der ersten Verbesserung mit drei Kreisbögen beträgt noch 8.68, der der zweiten Verbesserung mit vier Kreisbögen 5.88 und schließlich der der dritten Verbesserung mit fünf Kreisbögen 4.41.

Durch Reduktion von ε auf

$$(8.7) \quad \varepsilon = \frac{L}{10 \cdot (n + 1)},$$

d.h. $\varepsilon = 1.06$, sind insgesamt sechs Verbesserungen erforderlich, so dass schließlich eine U-Spline-Kurve mit sieben Kreisbögen entsteht.

An dieser Stelle sollen zwei weitere Beispiele gezeigt werden. Sie sind jedoch für das gegebene Problem, die Erzeugung einer Biegelinie, ungeeignet, da Rohre mit diesen Leit- beziehungsweise

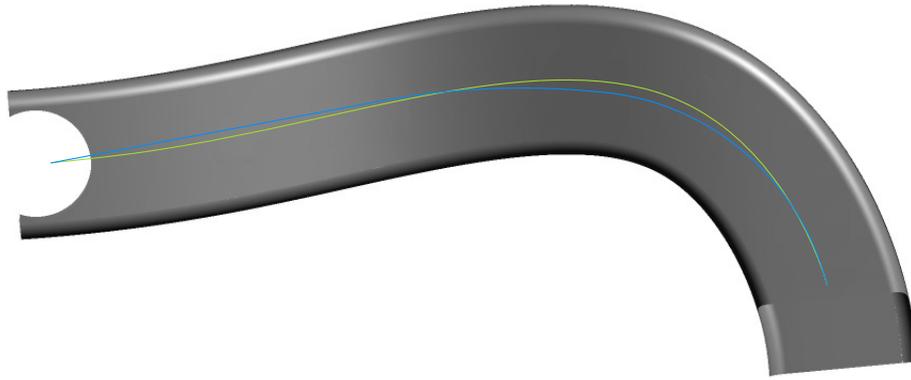


Abbildung 8.5: Erste Näherung an die Leitlinie

Biegelinien in der Regel aus technischen Gründen nicht hergestellt werden können. Allerdings kann so dieses Verfahren mit anderen Methoden verglichen werden. Das erste Beispiel ist eine Spirale (vgl. Abbildung 8.6).

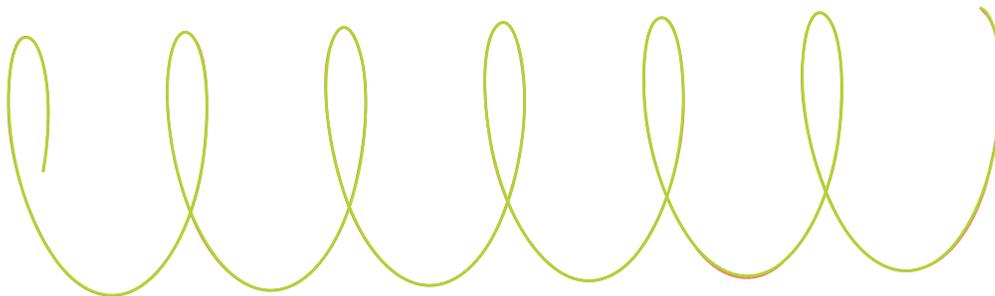


Abbildung 8.6: Spirale

In diesem Beispiel sind der gegebene Polygonzug P gelb und die Kreisbogenapproximation rot dargestellt. Die Spirale ist parametrisiert als

$$(8.8) \quad \begin{aligned} H_r &: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ H_r(t) &:= \left(r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{40} \cdot t\right), r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{40} \cdot t\right), t \right)^T, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Der gegebene Polygonzug ergibt sich mit $r = 60$ und $I = [0, 12.475 \cdot \pi]$ zu

$$(8.9) \quad P := [H_{60}(0), H_{60}(1), H_{60}(2), \dots, H_{60}(499)].$$

Durch das vorgestellte Verfahren werden $\varepsilon := 2.0$ mit insgesamt 37 Kreisbögen erzeugt. Da ε im Verhältnis zur Spiralgröße sehr klein ist, ist in der Abbildung 8.6 eigentlich nur eine Kurve zu sehen.

Die Spirale besitzt keine Minima bezüglich der Krümmung. Daher wird in dem Algorithmus "Erzeugung einer U-Spline-Kurve" zunächst nur ein Kreisbogen ermittelt. Dieser reicht natürlich nicht aus, so dass der Kreisbogen unterteilt wird. Dies geschieht dann solange, bis die gewünschte Genauigkeit

erreicht wurde.

Ein weiteres theoretisches Beispiel ist in der Abbildung 8.7 zu sehen.



Abbildung 8.7: Leitlinie mit S-Kurve

Diese S-Kurve ist auf Grund ihrer engen Bögen für das Rohrbiegen uninteressant. Die Bogenlänge dieser blau dargestellten Kurve ist 361.31 und besteht aus 42 Punkten. Der Algorithmus produziert 6 Bögen (grüne Kurve), um die Kurve innerhalb der Toleranz von $\varepsilon := 2.0$ zu approximieren.

Ergebnis:

Durch die Approximation mittels einer U-Spline-Kurve wurden insgesamt wesentlich weniger Kreise als die Punktzahl der Leitlinie verwendet.

Es ist natürlich denkbar, dass die bei Durchführung des Verfahrens ermittelte Approximation durch Geradensegmente und Kreise nicht den Erwartungen der Anwendenden entspricht. Ein Ansatz zur Verbesserung des Ergebnisses ist die halbautomatische Nachbearbeitung, indem einzelne Radien der Kreise sowie der Polygonzug der mittleren Kontrollpunkte verändert werden, wobei insbesondere Kreisbögen interaktiv entfernt und hinzugefügt werden können, indem Punkte in diesem Polygonzug gelöscht beziehungsweise eingefügt werden. Nachdem gegebenenfalls ein neuer Polygonzug aus mittleren Kontrollpunkten entstanden ist, können in diesen durch Ausführung von Schritt 2 des Algorithmus "Erzeugung einer U-Spline-Kurve" die Kreisbögen zu den gegebenen Radien eingepasst werden.

Für die bereits erwähnte Sammlung aus 100 Testrohren aus der Praxis konnte so, gegebenenfalls durch geringe Modifikationen, stets ein gewünschtes Ergebnis erzielt werden.

8.5.2 Vergleich verschiedener Verfahren

In der Einleitung wurde erwähnt, dass mit dem hier vorgestellten Verfahren nicht notwendigerweise eine minimale Kreisbogenanzahl erzeugt wird. Dies war Gegenstand des Verfahrens von Safonova und Rossignac [65], das allerdings nicht glatte Arc-Splines erzeugt. Das in der Einleitung aufgeführte erste Verfahren von Lauer [44] liefert durch Einfügen zusätzlicher Kreisbögen glatte Arc-Splines. Beide Verfahren generieren jedoch in der Regel keine U-Splines. Wegen der Verwandtschaft der U-Spline- und Arc-Spline-Approximation erscheint dennoch ein Vergleich der Verfahren angebracht. Tabelle 8.1 zeigt exemplarisch die Anzahlen der erzeugten Kreisbögen für eine Spirale, die sich mit diesen drei Ansätze bei unterschiedlichen Fehlerschranken ergaben.

Die Daten aus dem Rossignac-Algorithmus wurden mit dem in der Diplomarbeit von Kudlacik [39] implementierten Verfahren ermittelt. Es zeigt sich, dass das Verfahren von Lauer eine obere Schranke für die hier vorgestellte Approximation ist. Dies bedeutet, dass das vorliegende Resultat besser ist, als das Ergebnis von Rossignac herzunehmen und die Kreisbögen G^1 -stetig durch weitere Kreisbögen zu verbinden.

Bei einem Vergleich des ursprünglichen Verfahrens mit der Verbesserung durch das Rossignac-Verfahren aus Abschnitt 8.4 kann zunächst beobachtet werden, dass an gängigen Bauteilen aus der Umformtechnik mit beiden Verfahren nahezu die gleiche Anzahl von Kreisbögen erzielt wird. In der Tabelle 8.2 sind exemplarisch die Resultate für das in der Abbildung 8.3 gezeigte Rohr dargestellt,

Fehlerschranke ε	0.01	0.1	0.5	2.1
Rossignac [65]	15	7	5	4
Lauert [44]	43	19	13	11
Wortmann (Abschnitt 8.3)	38	18	9	8

Tabelle 8.1: Experimentell ermittelte Anzahl von Kreisbögen durch verschiedene Verfahren für eine Helix; Grundlage der Messungen ist eine Helix mit Radius 10, Höhe 24, die für $\varepsilon = 0.01$ und $\varepsilon = 0.1$ durch einen Polygonzug mit 600 äquidistanten Punkten, für $\varepsilon = 0.5$ und $\varepsilon = 2.1$ mit 100 äquidistanten Punkten dargestellt wurde. Bei dem hier vorgestellten Verfahren wurden nur die Kreisbögen gezählt, die zumeist sehr kurzen Geradenstücke wurden nicht berücksichtigt.

während die Tabelle 8.3 die Resultate für das in der Abbildung 8.4 gezeigte Rohr zusammenfasst.

	Fehlerschranke ε	Anz. Kreisbögen
Rossignac [65]	1.5	7
Wortmann (Abschnitt 8.3)	1.8	12
Rossignac / Wortmann (Abschnitt 8.4)	1.6	13

Tabelle 8.2: Experimentell ermittelte Anzahl von Kreisbögen durch verschiedene Verfahren für das Beispielrohr aus der Abbildung 8.3; die Leitlinie hat eine Länge von 562.17 und besteht aus 76 Punkten. Es wurden für die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden lediglich die Kreisbögen gezählt.

	Fehlerschranke ε	Anz. Kreisbögen
Rossignac [65]	4.5	4
Wortmann (Abschnitt 8.3)	4.2	5
Rossignac / Wortmann (Abschnitt 8.4)	4.9	4

Tabelle 8.3: Experimentell ermittelte Anzahl von Kreisbögen durch verschiedene Verfahren für das Beispielrohr aus der Abbildung 8.4; die Leitlinie hat eine Länge von 606.61 und besteht aus 57 Punkten. Es wurden für die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden lediglich die Kreisbögen gezählt.

Dieses Resultat kann jedoch nicht erreicht werden, wenn mit der Kombination die Spirale approximiert werden soll. Dann ist es durchaus möglich, dass die Anzahl der Kreisbögen deutlich größer ist, als die mit dem ursprünglichen Verfahren. Dies wird in der Tabelle 8.4 gezeigt.

Das Verfahren von Rossignac erzeugt für die gängigen Rohre aus der Umformtechnik bei hinreichend großer Toleranz in der Regel neben den Kreisbögen auch Geradensegmente beziehungsweise Kreisbögen mit sehr großem Radius. Bei der Approximation der Helix dagegen erzeugt die Methode von Rossignac ausschließlich Kreisbögen. Sollte das Ergebnis von Rossignac nach der beschriebenen Art und Weise in eine G^1 -stetige Kurve umgewandelt werden, approximieren die neuen Kreisbögen den Polygonzug in der Regel nicht mehr innerhalb der gewünschten Toleranz. Dadurch werden neue Kreisbögen eingefügt, wodurch sich auch benachbarte Kreisbögen verändern. Die Verschiebung bestehender Kreisbögen durch diese neuen Kreisbögen ist um so geringer, je länger das Geradenseg-

Fehlerschranke ε	0.1	0.5	2.1
Rossignac [65]	7	5	4
Wortmann (Abschnitt 8.3)	18	9	8
Rossignac / Wortmann (Abschnitt 8.4)	27	13	10

Tabelle 8.4: Experimentell ermittelte Anzahl von Kreisbögen durch verschiedene Verfahren für eine Helix; die Daten der Helix entsprechen denen aus Tabelle 8.1. Bei dem hier vorgestellten Verfahren wurden nur die Kreisbögen gezählt, die zumeist sehr kurzen Geradenstücke wurden nicht berücksichtigt.

ment zwischen neu eingefügten Kreisbögen und bestehenden Kreisbögen ist. Weil bei der Helix jedoch kein Geradensegment zwischen den Kreisbögen zu finden ist, verschlechtert das Einfügen neuer Kreisbögen die Qualität der Approximation benachbarter Kreisbögen in der Art, dass das Einfügen weiterer Kreisbögen im Bereich der benachbarten Kreisbögen erforderlich ist. Dies erklärt, warum das hier vorgestellte Verfahren zusammen mit der Methode von Rossignac bei einer Helix eine so viel höhere Anzahl an Kreisbögen erzeugt.

Das Kreisbogenoptimierungsverfahren von Lauert [44] verbessert die Winkel zwischen den Tangenten benachbarter Kreisbögen. Für die Helix, die mit einer Genauigkeit von 0.5 approximiert wird, erzeugt der Rossignac-Algorithmus Winkel zwischen benachbarten Kreisbögen im Bereich zwischen 140 und 150 Grad. Diese werden durch das Verfahren von Lauert auf Winkel in dem Bereich zwischen 150 und 160 verbessert. Bei der Genauigkeit von 0.01 dagegen erzeugt das Verfahren von Rossignac Winkel in der Größenordnung von 179.9. Diese werden durch Lauert und Rossignac in Winkel der Größenordnung von 179.96 verbessert. Diese Winkel sind dagegen eher für eine Biegelinie geeignet. Hierbei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Rechenzeit ein bis zwei Minuten beträgt, wohingegen die hier vorgestellte ursprünglichen Methode wenige Sekunden benötigt. Alternativ kann mit Hilfe des Rossignac-Verfahrens beispielsweise mit der Toleranz von 0.1 eine Approximation ermittelt werden, die dann mit der Methode von Lauert und einer größeren Toleranz von 0.5 optimiert wird. Dann sollte die Verbesserung der Winkel besser werden, da so das Optimierungsverfahren mehr Spielraum hat. Es wurde für eine Helix festgestellt, dass die Rossignac-Approximation insgesamt sieben Kreisbögen erzeugt, wobei der Winkel an benachbarten Kreisbögen im Bereich von 160 bis 165 Grad liegt. Durch das Verfahren von Lauert werden diese in dem Bereich von 170 bis 175 Grad verbessert. Im Vergleich wird mit der hier vorgestellten ursprünglichen Methode eine U-Spline-Kurve mit neun Kreisbögen berechnet, so dass zusammenfassend festgestellt werden kann, dass die ursprüngliche Methode das vorliegende Problem mit einer nahezu gleichen Kreisbogenanzahl in wesentlich geringerer Rechenzeit löst. Ferner generiert auch dieses zweite Verfahren von Lauert [44] keine U-Splines.

Schließlich besteht noch die Möglichkeit mit Hilfe des Rossignac-Algorithmus eine Kreisbogenapproximation zu erzeugen, die dann mit dem hier vorgestellten Verfahren in eine G^1 -stetige Kurve umgewandelt wird. Hierbei werden lediglich die Kontrollpunkte aus dem Rossignac-Verfahren verwendet und die Kreisbögen G^1 -stetig eingebettet. Es werden keine neuen Kreisbögen generiert. Dadurch erhöht sich zwangsläufig der Fehler. Allerdings wurde beobachtet, dass das dadurch erzeugte Ergebnis durchaus vergleichbar mit dem Ergebnis ist, was bei dem hier vorgestellten Verfahren ermittelt worden ist. Beispielsweise erzeugt die G^1 -stetige Verbesserung der Helix mit einer Genauigkeit von 0.1, die aus sieben Kreisbögen besteht, einen Fehler von 0.5. Das hier vorgestellte Verfahren erzeugt mit dieser Genauigkeit eine Approximation mit neun Kreisbögen. Das Problem ist, dass vorher nicht abgeschätzt werden kann, wie groß der Fehler ist, der durch G^1 -stetige Verbesserung entsteht.

Zusammenfassend kann daher gesagt werden, dass eine Kombination von dem Rossignac-Verfahren

mit der hier vorgestellten Heuristik nicht notwendigerweise garantiert, dass das Ergebnis besser ist. Ferner wurde festgestellt, dass die ursprüngliche Methode stets ein besseres Ergebnis als das G^1 -stetige Verfahren von Lauert generiert. Sollte die nicht G^1 -stetige Variante von Lauert verwendet werden, muss mit einer sehr hohen Genauigkeit gerechnet werden, um das Ergebnis als Biegelinie verwenden zu können. Da die Ergebnisse durchaus vergleichbar sind, sollte wegen der wesentlich geringeren Laufzeit die hier vorgestellte ursprüngliche Methode verwendet werden.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Übergeordnetes Thema der Dissertation ist das Reverse Engineering von Rohren. Reverse Engineering bedeutet, ein Fertigungsverfahren für Rohre aus zylinderförmigen Rohlingen dadurch herzuleiten, indem ausgehend vom Rohr durch Rückwärtsdeformation ein geeigneter zylinderförmiger Rohling hergeleitet wird. Der hier verfolgte Ansatz besteht darin, in das gegebene Rohr einen möglichst gut passenden Schlauch einzupassen, wobei ein Schlauch etwa als ein gekrümmter Zylinder angesehen werden kann, eventuell mit variablen Radien. Die algorithmische Lösung des Schlaucheinpassungsproblems stellt den Schwerpunkt der Arbeit dar.

Weitere Schritte für ein komplettes Reverse Engineering, die nicht Gegenstand der Arbeit waren, sind die Deformation des Rohres auf den eingepassten Schlauch, sowie die Deformation des Schlauches zu einem Zylinder. Mathematisch gesehen kann die Rohr-Schlauch-Deformation als das Auffinden einer Parametrisierung des Rohres über dem Schlauch aufgefasst werden. An die Parametrisierung sind Anforderungen zu stellen, die sich aus der Fertigungstechnologie ergeben. Eine Anforderung könnte die Vermeidung starker Verzerrungen sein.

Im Zusammenhang mit der Schlauch-Zylinder-Deformation wurde das Problem der U-Spline-Approximation von Kurven aufgegriffen. U-Spline-Kurven setzen sich alternierend aus Strecken und Kreisbogensegmenten zusammen. Hintergrund ist die technische Deformation von zylindrischen Rohlingen mit Biegescheiben. Die Kreisbogensegmente beschreiben die Stellen entlang eines Rohres, an denen die Biegescheiben anzusetzen sind.

Der erste Schritt bei der Bearbeitung des Schlaucheinpassungsproblems war die Modellierung der Problemstellung in einer Form, die sie der algorithmischen Lösung zugänglich macht (Kapitel 2). Eine Schwierigkeit war dabei die Definition von Rohren. Anschaulich gesehen ist es klar, was unter einem Rohr zu verstehen ist, eine präzise mathematische Definition, die hinreichend umfassend ist, aber pathologische Sonderfälle im Hinblick auf die Wirklichkeit ausschließt, ist jedoch nicht trivial. Es wurde eine tragfähige Definition präsentiert.

Anschließend wurden auf Basis dieses Rohrbegriffes hilfreiche Definitionen und Hilfsmittel eingeführt, von denen die Begriffe eines Rohrschnittgebietes und eines Teilrohres zentral waren. Auf deren Grundlage wurde die Approximation eines Rohres durch einen Schlauch auf zwei Weisen formuliert: als Approximation durch einen Schlauchstützstellenkantenzug und als stückweise lineare Schlauchapproximation. Schließlich wurde ausgehend davon das Schlaucheinpassungsproblem als Optimierungsproblem formuliert, dem mehrere Teilzielfunktionen zu Grunde liegen, die die Qualität einer Schlaucheinpassung beschreiben.

Ferner wurde beobachtet, dass die Klassifikation von trennenden Rohrschnittgebieten über die Schnittanzahl mit einer Kurve, die auf der Oberfläche des Rohres verläuft und die die beiden Rand-

kurven des Rohres verbindet, erfolgen kann. Die Verwendung einer solchen sogenannten Konnektivitätslinie ist aus algorithmischer Sicht ein sehr nützliches Hilfsmittel, um effizient festzustellen, ob ein Rohrschnittgebiet trennend ist oder nicht.

In der Praxis ist die Repräsentation von Rohren durch Dreiecksnetze von großer Bedeutung. Aus diesem Grund wurde diese Repräsentationsform für die Implementierung der entwickelten Verfahren verwendet. Es wurden effiziente algorithmische Realisierungen der wichtigsten Operationen auf Dreiecksnetzen angegeben, die für die Verfahren der Schlaucheinpassung benötigt werden (Kapitel 3). Hier sind der Test einer Strecke auf Schnitt mit einem Dreiecksnetz, Überprüfung der Trenneigenschaft eines Rohrschnittgebietes, die Berechnung von Rohrschnittgebieten, die Erzeugung einer stückweise linearen Schlauchapproximation sowie die Berechnung einer Konnektivitätslinie als kürzester Weg zu nennen.

In Kapitel 4 wurde die erwähnte Formulierung des Schlaucheinpassungsproblems als Optimierungsproblem präzisiert, indem eine Reihe konkreter Teilzielfunktionen zur Qualitätsbeschreibung einer Schlaucheinpassung angegeben wurden: die Krümmungsgüte, die Zentrumsgüte, die Umfangsgüte, die Flächengüte, die Parallelitätsgüte, die tangentielle Ausrichtungsgüte sowie die Oberflächensteigungsgüte.

Die resultierende Optimierungsaufgabe ähnelt dem Optimierungsproblem zur Einpassung aktiver Konturen, die etwa in der Bildverarbeitung im Zusammenhang mit der Bildsegmentierung starkes Interesse gefunden hat. Zur Lösung des Problems der aktiven Konturen sind diverse Möglichkeiten bekannt. Unter diesen wurde ein Ansatz aufgegriffen, der auf diskreter dynamischer Programmierung beruht. Ein Grund lag in der Unstetigkeit einzelner verwendeter Zielfunktionen, die Ansätze, welche auf Variationsrechnung beruhen, nicht unmittelbar anwendbar machen. Ferner wird auf diese Weise die Gefahr gemindert, ein lokales Minimum zu finden, das nicht global ist. Schließlich lassen sich die Zielfunktionen flexibel austauschen. Basierend auf dem genannten Ansatz wurde ein Verfahren für die Schlaucheinpassung auf Grundlage der dynamischen Programmierung entwickelt, das die Problemstruktur zur Reduktion des Suchraums ausnutzt (Kapitel 5). Die experimentelle Analyse auf Rohren unterschiedlicher Charakteristik zeigt die grundsätzliche Funktionsfähigkeit des Ansatzes.

Ein Nachteil der Methode der dynamischen Programmierung ist der hohe Rechenaufwand. Als Alternative wurde ein intuitives adaptives Unterteilungsverfahren aufgegriffen, das auf den Autor zurückgeht und das sich in der industriellen Anwendung bewährt hat (Kapitel 6). Das Verfahren generiert in einem ersten Schritt eine initiale Schlaucheinpassung, welche dann in einem zweiten Schritt optimiert wird. Eine Analyse zeigte, dass es passieren kann, dass das Verfahren nicht terminiert. Für eine etwas erweiterte Version wurden Bedingungen formuliert, deren Erfüllung in der Regel plausibel ist und unter denen die Terminierung des Verfahrens nachgewiesen werden kann.

Die experimentelle Analyse beider Verfahren zeigte, dass sie in der Lage sind, gute Schlaucheinpassungen zu finden. Ausgehend davon wurden verschiedene weitere Aspekte diskutiert (Kapitel 7). So wurde festgestellt, dass sich weitere Möglichkeiten etwa durch deren Kombination eröffnen können, beispielsweise durch Anwenden des einfachen, schnellen adaptiven Verfahrens bei unkritischen Rohren und des komplexen, aber aufwändigen Verfahrens der dynamischen Programmierung auf dabei möglicherweise gefundene kritische Teilrohre. Ferner wurden die Grenzen der vollautomatischen Lösung angesprochen und auf Möglichkeiten des interaktiven Eingriffs eingegangen.

Für das zu Beginn des Kapitels erwähnte Problem der Approximation von Polygonzügen durch U-Spline-Kurven mit möglichst wenigen Segmenten wurde ein heuristisches Verfahren angegeben (Kapitel 8). Dieses Verfahren basiert auf einer Krümmungsanalyse des gegebenen Polygonzuges. Es wurden zwei Alternativen der Krümmungsanalyse verfolgt. Die eine war krümmungskreisbasiert und passte Kreise an Stellen starker Krümmung ein. Die zweite griff das Verfahren von Safonova und

Rossignac [65] zur Approximation mit Kreisbogen-Spline-Kurven auf, um dessen Kreissegmente als Basis zur Konstruktion einer tangentialstetigen U-Spline-Kurve zu nehmen, in der Absicht, ausgehend von dessen minimaler Anzahl von Kreissegmenten eine geringe Anzahl von U-Spline-Segmenten zu erzielen. Eine experimentelle Analyse zeigte, dass sich die einfachere erste Version praktisch mindestens genau so gut wie das aufwändigere Verfahren verhält.

Als Fortführung dieser Arbeit ist eine "explizitere" Schlaucheinpassung durch geeignete Maße von Interesse, die die Abweichung zwischen Rohrfläche und Schlauchfläche genauer angeben, z.B. auch für Schläuche mit nicht kreisförmigem Querschnitt. Damit könnte eventuell auch die Anforderung aufgegeben werden, dass die Leitlinie im Inneren des Rohres verlaufen muss. Ferner könnte der geometriebasierte Ansatz der Arbeit durch eine physikbasierte Vorgehensweise ersetzt werden, etwa indem die physikalischen Eigenschaften von realem Blech bei der Definition von Einpassungsmaßen berücksichtigt werden. Dies würde eine realitätsnähere Planung erlauben, allerdings bei vermutlich deutlich höherem Rechenzeitbedarf. Die Ersetzung der Geometrie durch Physik gilt gleichermaßen für die U-Spline-Approximation.

Aus Sicht der Heuristikanalyse wäre der Ausbau des Konzeptes von Vorbedingungen, unter denen die Funktions- oder Leistungsfähigkeit von Heuristiken beweisbar garantiert ist, ein erstrebenswertes Ziel. Je schwächer die Vorbedingungen desto nützlicher und einsichtiger ist die Heuristik.

Eine Rohrdefinition ist ideal, wenn sie möglichst alle Formen, die anschaulich als Rohre zu verstehen sind, abdeckt und zudem die Eigenschaft hat, dass alle Schnittgebiete, eventuell abgesehen von einzelnen singulären Situationen, zerlegend sind. Die in der Arbeit präsentierte Definition von Rohren ist in Kombination mit der Charakterisierung von zerlegenden Rohrschnittgebieten ein Schritt in diese Richtung. So scheint die Menge der Rohre, bei denen eine für den in dieser Arbeit verfolgten Ansatz der Schlaucheinpassung hinreichende Anzahl an Rohrschnittgebieten die Charakterisierung erfüllen, viele praktische auftretende Rohrformen zu erfassen. Aus mathematischer Sicht stellt sich jedoch die Frage, ob eine weitergehende Definition im oben genannten idealen Sinne möglich ist.

Anhang A

Geometrische Berechnungen

A.1 Berechnung eines Umkreises

In diesem Abschnitt wird zu drei nicht kollinearen Punkten \mathbf{p} , \mathbf{q} und \mathbf{t} ein Umkreis ermittelt.

Für die Bestimmung des Umkreises ist lediglich der Mittelpunkt \mathbf{m} dieses Kreises erforderlich, da so der Radius als

$$r = d(\mathbf{m}, \mathbf{p}) = d(\mathbf{m}, \mathbf{t}) = d(\mathbf{m}, \mathbf{q})$$

gegeben ist.

Für den Mittelpunkt \mathbf{m} gilt:

\mathbf{m} ist der gemeinsame Schnittpunkt der drei *Mittelsenkrechten* des Dreiecks [10]. Somit konzentriert sich die Suche des Mittelpunktes darauf, den Schnittpunkt zweier Geraden zu finden. Dies ist jedoch im Allgemeinen relativ schwierig, da die beiden Geraden im \mathbb{R}^3 liegen. Dagegen ist es relativ einfach, einen Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden zu ermitteln.

Zunächst wird eine Mittelsenkrechte bestimmt. Seien

$$(A.1) \quad \mathbf{d}_1 := \mathbf{q} - \mathbf{p}$$

$$(A.2) \quad \mathbf{d}_2 := \mathbf{t} - \mathbf{q}$$

zwei der drei Seitenvektoren des Dreiecks. Dann ist

$$(A.3) \quad \mathbf{n}_\Delta := \frac{\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\|}$$

der *Normalenvektor* des Dreiecks. Schließlich ist

$$(A.4) \quad \mathbf{n}_L := \frac{\mathbf{n}_\Delta \times \mathbf{d}_1}{\|\mathbf{n}_\Delta \times \mathbf{d}_1\|}$$

der *Richtungsvektor* der Mittelsenkrechten des Dreiecks für die Kante $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$. Die Mittelsenkrechte ist demnach gegeben durch

$$(A.5) \quad M_{\mathbf{d}_1}(\lambda) := \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \lambda \cdot \mathbf{n}_L, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 1

Wegen numerischer Ungenauigkeiten ist es stabiler, bevor \mathbf{n}_Δ als Kreuzprodukt von \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 ermittelt wird, beide Vektoren zu normieren. Andernfalls könnte wegen

$$\|\mathbf{n}_\Delta\| = \|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2\| \leq \|\mathbf{d}_1\| \cdot \|\mathbf{d}_2\|$$

(vgl. [10]) die Norm von \mathbf{n}_Δ sehr klein sein, falls die Norm von \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 sehr klein ist.

Statt eine weitere Mittelsenkrechte zu erzeugen, wird nun eine Ebene bestimmt, die diese Mittelsenkrechte enthält. Dabei muss beachtet werden, dass diese Ebene zusätzlich den Normalenvektor des Dreiecks \mathbf{n}_Δ enthält. Da \mathbf{n}_Δ senkrecht zu *beiden* Mittelsenkrechten ist, ist somit der Schnittpunkt der Ebene mit $M_{\mathbf{d}_1}$ gleich dem Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten. Die betreffende Ebene ist in der "Hesse-Normalform" gegeben durch

$$(A.6) \quad E_{\mathbf{d}_2} := \left(\frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{t}), \frac{\mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_2\|} \right).$$

Die hier beschriebene Rechnung wird in der Abbildung A.1 zusammengefasst. Dabei ist die Ebene $E_{\mathbf{d}_2}$ als eine Gerade dargestellt. Der fehlende Richtungsvektor \mathbf{n}_Δ steht senkrecht zur Papierebene.

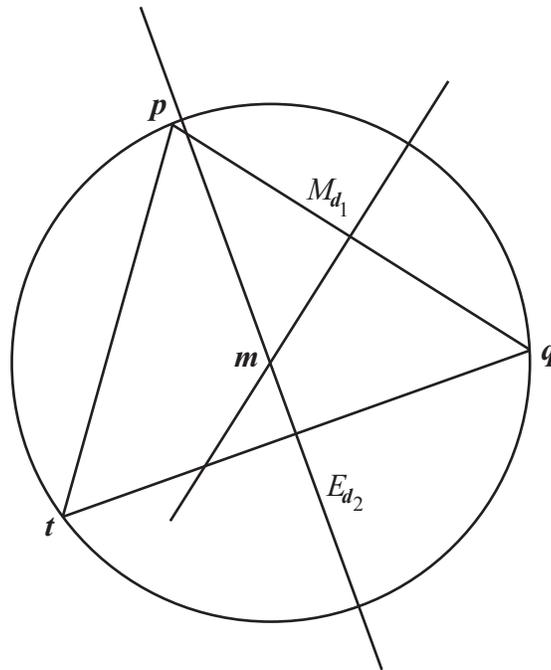


Abbildung A.1: Umkreis

Der Schnittpunkt und damit der Mittelpunkt des Umkreises lässt sich mit

$$(A.7) \quad \mathbf{f}_E := \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{t})$$

$$(A.8) \quad \mathbf{n}_E := \frac{\mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_2\|}$$

$$(A.9) \quad \mathbf{g}_L := \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$$

berechnen.

Für den Schnittpunkt von $M_{\mathbf{d}_1}$ und $E_{\mathbf{d}_2}$ gilt

$$(A.10) \quad \langle \mathbf{f}_E, \mathbf{n}_E \rangle = \langle \mathbf{g}_L + \lambda \cdot \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_E \rangle$$

$$(A.11) \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle \mathbf{f}_E, \mathbf{n}_E \rangle - \langle \mathbf{g}_L, \mathbf{n}_E \rangle}{\langle \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_E \rangle}$$

Damit kann der Mittelpunkt \mathbf{m} als

$$(A.12) \quad \mathbf{m} = \mathbf{g}_L + \frac{\langle \mathbf{f}_E, \mathbf{n}_E \rangle - \langle \mathbf{g}_L, \mathbf{n}_E \rangle}{\langle \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_E \rangle} \cdot \mathbf{n}_L.$$

berechnet werden.

Bemerkung 2

Hierbei ist stets

$$(A.13) \quad \langle \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_E \rangle \neq 0,$$

da andernfalls

$$(A.14) \quad \mathbf{n}_L \perp \mathbf{n}_E$$

gelten würde, was wiederum bedeutet, dass die Punkte des Dreiecks auf einer Linie lägen, also kollinear sind.

A.2 Das Problem Bogen in Bogen

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, das zwei Kreisbögen neu berechnet, die nicht G^1 stetig miteinander verbunden werden können. Eine solche Situation ist in der Abbildung 8.2 dargestellt. Der hier vorgeschlagene Lösungsweg verwendet den Strahlensatz.

Seien hierfür bezüglich der Notation vom Abschnitt 8.3.5 \overline{K}_i und \overline{K}_{i+1} zwei Kreisbögen, die nicht G^1 -stetig an der Strecke zwischen \mathbf{t}_i und \mathbf{t}_{i+1} verbunden werden können. Zunächst muss ein Punkt auf dieser Strecke ermittelt werden, der der neue Endpunkt beider Kreise wird. Dieser Punkt \mathbf{m} kann beispielsweise relativ zu den unterschiedlichen Radien berechnet werden, d.h.

$$(A.15) \quad \mathbf{m} = \mathbf{t}_{i+1} + (\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_{i+1}) \cdot \frac{r_{i+1}}{r_{i+1} + r_i}.$$

Wenn \mathbf{c}_i den Mittelpunkt des Kreisbogens \overline{K}_i und \mathbf{e}_i den ursprünglichen Endpunkt des Kreisbogens \overline{K}_i bezeichnet, ist der neue Mittelpunkt gegeben durch $\overline{\mathbf{c}}_i = \mathbf{t}_i + \frac{l_1}{l_2} \cdot l_3 \cdot \mathbf{d}$, wobei

$$(A.16) \quad \mathbf{d} := \frac{\mathbf{c}_i - \mathbf{t}_i}{d(\mathbf{c}_i, \mathbf{t}_i)}$$

$$(A.17) \quad l_1 := d(\mathbf{m}, \mathbf{t}_i)$$

$$(A.18) \quad l_2 := d(\mathbf{e}_i, \mathbf{t}_i)$$

$$(A.19) \quad l_3 := d(\mathbf{c}_i, \mathbf{t}_i).$$

Analog wird die Verbesserung für den anderen Kreisbogen durchgeführt. Diese Berechnung wird in der Skizze A.2 verdeutlicht.

Literaturverzeichnis

- [1] S. Abramowski and H. Müller. *Geometrisches Modellieren*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991.
- [2] A. V. Aho, M. R. Garey, and J. D. Ullman. The transitive reduction of a directed graph. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Computing*, 1(2):131–137, 1972.
- [3] S. Alexander. Local and global convexity in complete riemannian manifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, 76(2):283–289, 1978.
- [4] A. A. Amini, T. E. Weymouth, and R. C. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(9):855–867, 1990.
- [5] B. G. Baumgart. Winged-edge polyhedron representation for computer vision. In *National Computer Conference*. Stanford University, 1975.
- [6] R. E. Bellman. *Dynamische Programmierung und selbstanpassende Regelprozesse*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1967.
- [7] P. J. Besl and N. D. McKay. A method for registration of 3-d shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2):239–256, 1992.
- [8] A. R. Birkert and R. Sünkel. *Hydroforming - Umformen mit Wirkmedien im Automobilbau*. 230. Verlag Moderne Industrie, Landsberg / Lech, 2002.
- [9] M. Botsch, S. Steinberg, S. Bischoff, and L. Kobbelt. Openmesh - a generic and efficient polygon mesh data structure. In *Symposium OpenSG*, 2002.
- [10] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, zweite Auflage, 1995.
- [11] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1):61–79, 1997.
- [12] I. Cohen, L. D. Cohen, and N. Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-d images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing (CVGIP): Image Understanding*, 56(2):242–263, 1992.
- [13] L. D. Cohen and I. Cohen. Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-d and 3-d images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11):1131–1147, 1993.

- [14] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models: A minimal path approach. In *Proceedings 1996 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 666–673, San Fransisco, 1996.
- [15] D. Coppersmith and S. Winograd. Matrix multiplication via arithmetic progressions. *Journal of Symbolic Computation*, 9:251–280, May 1990.
- [16] D. Daneels, D. van Campenhout, C. W. Niblack, W. Equitz, R. Barber, and F. Fierens. Interactive outlining: an improved approach using active contours. In C. W. Niblack, editor, *Proceedings of SPIE*, volume 1908 of *Storage and Retrieval for Image and Video Databases*, pages 226–233, 1993.
- [17] M. de Berg, D. Halperin, M. H. Overmars, J. S. Snoeyink, and M. van Kreveld. Efficient ray shooting and hidden surface removal. *Algorithmica*, 12(1):30–53, July 1994.
- [18] M. de Berg, M. van Kreveld, M. H. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, Berlin, zweite Auflage, 2000.
- [19] H. Edelsbrunner. *Algorithms in combinatorial geometry*, volume 10 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer, Berlin, 1987.
- [20] M. Ehrgott. *Multicriteria Optimization*. Springer, Berlin, zweite Auflage, 2005.
- [21] G. Farin. *Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design*. Vieweg, Braunschweig, zweite Auflage, 1994.
- [22] N. Gagvani. Skeletons and volume thinning in visualization. Thesis, Rutgers University, New Jersey, 1997.
- [23] J. García-López, P. A. Ramos, and J. Snoeyink. Fitting a set of points by a circle. In J. E. Goodman and R. Pollack, editors, *Discrete & Computational Geometry*, volume 20, pages 389–402, Berlin, 1998. Springer.
- [24] A. S. Glassner. *An introduction to ray tracing*. Academic Press, London, 1989.
- [25] C. Grossmann and H. Kleinmichel. *Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Teubner, Leipzig, zweite Auflage, 1976.
- [26] R. H. Güting. *Datenstrukturen und Algorithmen*. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [27] J. Heinhold and B. Riedmüller. *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Carl Hanser Verlag, München, 1973.
- [28] J. Hoschek. Circular splines. *Computer-Aided Design*, 24(11):611–618, 1992.
- [29] J. Hoschek and D. Lasser. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner, Stuttgart, zweite Auflage, 1992.
- [30] H. Imai and M. Iri. Computational-geometric methods for polygonal approximations of a curve. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing (CVGIP): Image Understanding*, 36:31–41, 1986.
- [31] J. Jäger. *Elementare Topologie*. Schöningh, Paderborn, 1980.
- [32] W. Kabbalo. *Einführung in die Analysis I*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.

- [33] W. Kaballo. *Einführung in die Analysis II*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1997.
- [34] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snkaes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):321–331, 1988.
- [35] A. Kaufman and K. Mueller. Overview of volume rendering. In C. D. Hansen and C. R. Johnson, editors, *The Visualization Handbook*, pages 127–174, Burlington, 2005. Elsevier Academic Press.
- [36] M. Kerschner. Snakes für Aufgaben der digitalen Photogrammetrie und Topographie. Dissertation, Fakultät für Technische Naturwissenschaften und Informatik, Technische Universität Wien, 2005.
- [37] L. Kettner. Using generic programming for designing a data structure for polyhedral surfaces. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 13(1):65–90, 1999.
- [38] H. Krayl, E. J. Neuhold, and C. Unger. *Grundlagen der Betriebssysteme*. Walter de Gruyter, Berlin, 1975.
- [39] P. Kudlacik. Tangentialstetige Approximation von dreidimensionalen Polygonzügen durch Arc-Splines. Diplomarbeit, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2005.
- [40] M. Kukuk. A model-based approach to intraoperative guidance of flexible endoscopy. Dissertation, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2002.
- [41] H. P. Künzi, O. Müller, and E. Nievergelt. *Einführungskursus in die dynamische Programmierung*, volume 6 of *Lecture notes in operations research and mathematical economics*. Springer, Berlin, 1968.
- [42] J. A. La Poutré and J. van Leeuwen. Maintenance of transitive closures and transitive reductions of graphs. Technical report, Universität Utrecht, 1987. RUU-CS-87-25.
- [43] J.-C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer, Boston, 1991.
- [44] J. Lauert. Tangentialstetige Arc-Spline-Approximation von dreidimensionalen Polygonzügen. Diplomarbeit, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2006.
- [45] I.-K. Lee, M.-S. Kim, and G. Elber. Planar curve offset based on circle approximation. *Computer-Aided Design*, 28(8):617–630, 1996.
- [46] S. Lefebvre and H. Hoppe. Perfect spatial hashing. *Special Interest Group on Graphics and Interactive Techniques*, pages 579–588, 2006.
- [47] S. Leopoldseder. Cone spline surfaces and spatial arc splines. Dissertation, Technische Universität Wien, 1998.
- [48] S. Leopoldseder. Algorithms on cone spline surfaces and spatial osculating arc splines. Technical Report 76, Institut für Geometrie, Technische Universität Wien, 2000.
- [49] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Shape modeling with front propagation: A level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2):158–175, 1995.

- [50] K. Marciniak and B. Putz. Approximation of spirals by piecewise curves of fewest circular arc segments. *Computer-Aided Design*, 16(2):87–90, 1984.
- [51] D. S. Meek and D. J. Walton. Approximation of discrete data by G^1 arc splines. *Computer-Aided Design*, 24(6):301–306, 1992.
- [52] K. Miettinen. Some methods for nonlinear multi-objective optimization. In E. Zitzler, K. Deb, L. Thiele, C. A. C. Coello, and D. Corne, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, volume 1993 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–20, Berlin, 2001. Springer.
- [53] G. G. Miller. *Tube Forming Processes: A Comprehensive Guide*. Society of Manufacturing Engineers, Michigan, 2002.
- [54] M. Mokhtari and R. Bergevin. Generic multi-scale segmentation and curve approximation method. In M. Kerckhove, editor, *Scale-Space and Morphology in Computer Vision*, volume 2106 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 227–235, Berlin, 2001. Springer.
- [55] P. Molitor and C. Scholl. *Datenstrukturen und effiziente Algorithmen für die Logiksynthese kombinatorischer Schaltungen*. Teubner, Stuttgart, 1999.
- [56] H. Müller. *Realistische Computergraphik - Algorithmen, Datenstrukturen und Maschinen*. Number 163 in *Informatik - Fachberichte*. Springer, Berlin, 1988.
- [57] W. M. Neuenschwander. Elastic deformable contour and surface models for 2-d and 3-d image segmentation. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1995.
- [58] W. M. Neuenschwander, P. Fua, L. Iverson, G. Székely, and O. Kübler. Ziplock snakes. *International Journal of Computer Vision*, 25(3):191–201, 1997.
- [59] M. Otten and H. Müller. Automatic tracking of interactive virtual players by cameras using a voronoi freespace representation. Technical Report 807, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2006.
- [60] M. Pellegrini. Stabbing and ray shooting in 3 dimensional space. In *Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 177–186, New York, 1990. Association for Computing Machinery.
- [61] D. Piepenstock. Snake-inspirierter Ansatz zur Leitlinienbestimmung für rohrförmige Flächen für das Reverse Engineering. Diplomarbeit, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2006.
- [62] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, zweite Auflage, 1992.
- [63] S. Robinson. Toward an optimal algorithm for matrix multiplication. *Society for Industrial and Applied Mathematics News*, 38(9), November 2005.
- [64] J.-J. Rousselle, N. Vincent, and N. Verbeke. *Genetic Algorithm to Set Active Contour*. Number 2756 in *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin, 2003.
- [65] A. Safonova and J. Rossignac. Compressed piecewise-circular approximations of 3d curves. *Computer-Aided Design*, 35(6):533–547, 2003.
- [66] S. Schlienkamp. Interaktive Approximation rohrförmiger Objekte. Diplomarbeit, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2006.

- [67] E. Schrüfer. *Signalverarbeitung*. Hanser, München, 1990.
- [68] Schuler. *Handbuch der Umformtechnik*. Springer, Berlin, 1996.
- [69] H. Schumann and W. Müller. *Visualisierung - Grundlagen und allgemeine Methoden*. Springer, Berlin, 2000.
- [70] H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, vierte Auflage, 1997.
- [71] M. Schweinoch. Leitlinienbestimmung für rohrförmige Objekte für das Reverse Engineering. Diplomarbeit, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2005.
- [72] V. Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik*, 13:354–356, 1969.
- [73] P. A. Tipler. *Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994.
- [74] J. C. Trinder, U. Maulik, and S. Bandyopadhyay. Semi-automated feature extraction using simulated annealing. In *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, volume 33, pages 905–911, Amsterdam, 2000.
- [75] R. Walter. *Differentialgeometrie*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1978.
- [76] H. H. Weber. *Dynamische Programmierung*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1974.
- [77] I. Wegener. *Effiziente Algorithmen für grundlegende Funktionen*. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [78] K. Weiler. Edge-based data structures for solid modeling in curved-surface environments. *IEEE Computer Graphics and applications*, 5:21–40, 1985.
- [79] D. J. Williams and M. Shah. A fast algorithm for active contours and curvature estimation. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing (CVGIP): Image Understanding*, 55(1):14–26, 1992.
- [80] C. Wortmann. Approximation of spatial polygonal curves by G^1 arc splines. Technical report, Lehrstuhl VII, Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2006.
- [81] C. Xu and J. L. Prince. Gradient vector flow deformable models. In I. Bankman, editor, *Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis*, pages 159–170, London, 2000. Academic Press.
- [82] J.-H. Yong, S.-M. Hu, and J.-G. Sun. A note on approximation of discrete data by G^1 arc splines. *Computer-Aided Design*, 31:911–915, 1999.