

Dipl.-Ing. Arnd Flatten, M. Sc.

**Lokale und nicht-lokale Modellierung und  
Simulation thermomechanischer Lokalisierung  
mit Schädigung für metallische Werkstoffe  
unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen**

Die vorliegende Arbeit entstand an der BAM Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung in Zusammenarbeit mit der Fakultät Maschinenbau der Universität Dortmund.

Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. K. Thermann, Vorsitzender  
Prof. Dr. rer. nat. B. Svendsen, Betreuer  
Dir. u. Prof. Dr.-Ing. D. Klingbeil, Betreuer  
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel, externer Gutachter

Impressum

**Lokale und nicht-lokale Modellierung und  
Simulation thermomechanischer Lokalisierung  
mit Schädigung für metallische Werkstoffe  
unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen**

2008

Herausgeber:  
BAM Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung  
Unter den Eichen 87  
12205 Berlin  
Telefon: +49 30 8104-0  
Telefax: +49 30 8112029  
E-Mail: [info@bam.de](mailto:info@bam.de)  
Internet: [www.bam.de](http://www.bam.de)

Copyright © 2008 by  
BAM Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung

Layout: BAM-Arbeitsgruppe Z.64

ISSN 1613-4249

ISBN 978-3-9812072-9-3

# **Lokale und nicht-lokale Modellierung und Simulation thermomechanischer Lokalisierung mit Schädigung für metallische Werkstoffe unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen**

Von der Fakultät Maschinenbau  
der Universität Dortmund  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur  
(Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

**Arnd Flatten**

Tag der mündlichen Prüfung: 16. November 2007

London 2008



## Zusammenfassung

Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen metallischer Bauteile sind bei einer Vielzahl ingenieurtechnischer Anwendungsbereiche, beispielsweise bei Crash- oder Falltests, bei Umform- oder Spanprozessen mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten oder bei Aufprallproblemen von Komponenten schnell rotierender Bauteile auf das umgebende Gehäuse, z. B. bei Flugzeugturbinen, relevant. Dabei treten in dem beanspruchten Bauteil typischerweise Zonen mit großen, lokalisierten Deformationen auf, die auf die Entfestigung des Werkstoffs durch die Entwicklung von Schädigung und durch die Temperaturerhöhung infolge plastischer Dissipation zurückzuführen sind. Die Ausbildung von Scherbändern stellt dabei eine typische Form der Deformationslokalisierung dar.

Die kontinuumsmechanische Modellierung solcher Vorgänge erfordert im Allgemeinen die Berücksichtigung einer Vielzahl von Faktoren und Effekten, wie beispielsweise dehnratenabhängiges Materialverhalten, mit adiabatischer Erhitzung einhergehende thermische Entfestigung, Reibung und Kontakt sowie Schädigung. Darüber hinaus sind die genannten Effekte in dem Rahmen der Theorie großer Deformationen zu betrachten. Dehnratenabhängige „lokale“ Modelle resultieren dabei nicht zwangsläufig in einer physikalisch sinnvollen Scherbandabbildung, d. h. in einer endlichen Scherbandbreite. Die innere Länge, die eine Begrenzung des Lokalisierungsvolumens darstellt, strebt für verschiedene im Rahmen der Simulation von Hochgeschwindigkeitsbelastungen eingesetzte, nichtlinear dehnratenabhängige Modelle, wie z. B. Potenzgesetz-Modelle oder dem Modell nach JOHNSON & COOK, mit infolge von Entfestigung abnehmender Spannung sowie zunehmender plastischer Dehnrate sehr stark gegen null. Dadurch tritt ein Verlust der lokalisierungsbegrenzenden Wirkung dieser ratenabhängigen Modelle ein, so dass insbesondere jedes, auf diesen Modellen aufbauende Finite-Element Verfahren eine pathologische Netzabhängigkeit der Ergebnisse aufweist.

„Nicht-lokale“ Gradientenmodelle der Plastizität sind dazu geeignet, die beschriebenen Nachteile zu vermeiden. Die innere Länge dieser Modelle weist eine im Vergleich zu lokalen Modellen deutlich reduzierte Abhängigkeit von dem vorherrschenden Spannungszustand sowie der plastischen Dehnrate auf und wird darüber hinaus wesentlich durch den Wert des nicht-lokalen Modellparameters beeinflusst. Die Größenordnung der inneren Länge bleibt dabei selbst für kleine Werte dieses Parameters auch mit Einsetzen von Lokalisierungseffekten zunächst erhalten. Infolge der numerischen Umsetzung nicht-lokaler Modelle mittels der Methode der Finiten-Elemente zeigt sich, dass im Gegensatz zu den auf lokalen Modellen basierenden Verfahren das Volumen der Lokalisierungszone bei stetiger Netzverfeinerung gegen einen endlichen Wert konvergiert. Damit gelingt es durch die Verwendung nicht-lokaler Modelle, die Ausbildung endlicher Scherbanddicken diskretisierungsunabhängig zu simulieren und im Rahmen der Kontinuumsmechanik eine sinnvolle Lösung des zugrunde liegenden physikalischen Problems zu gewährleisten.

## Abstract

High-speed loading of metals is encountered in several engineering applications, for example in crash and drop tests as well as in high-speed cutting or forming processes. Likewise, the impact of rapidly rotating structural components on their surrounding containment, encountered for instance in aircraft turbines, reveals significant, high loading velocities. Typically, this type of loading results in zones with highly localized deformation within the stressed component, as a consequence of softening according to damage evolution and heating due to plastic dissipation. In this context, the formation of shear-bands represents a typical form of thermomechanical localization.

In general, the continuum mechanical description and modelling of such events involves a variety of processes and effects such as high strain-rates, hardening behaviour, thermal softening as a result of adiabatic heating, friction and contact as well as damage. Further, these effects need to be considered in the framework of large deformation theory. Rate-dependent "local" models do not generally result in a physical shear-band development, e.g., involving a finite, non-vanishing shear-band thickness. In general, the intrinsic length incorporated by the rate-dependency of the models acts as a localization limiter. However, for various nonlinearly rate-dependent models, such as power-law models or the model according to JOHNSON & COOK, which are frequently used for the simulation of high-speed loading applications, this intrinsic length tends to zero owing to both increasing strain-rates and stress-drop due to softening behaviour. Thus, a loss of the localization limiting property of these rate-dependent models is encountered, incorporating that each finite-element method based upon these models yields a pathological mesh-dependence of the results.

"Non-local" gradient-plasticity models based on a corresponding extension of the rate-dependence of the material behaviour are appropriate to avoid these disadvantages. In contrast to local models, the intrinsic length of these non-local models reveals a significantly reduced dependence on both the prevailing stress state and the plastic strain-rate but is dominantly influenced by the non-local material parameter. According to the numerical simulation of localization phenomena using finite-element techniques, the domain of the localization zone does converge to a finite volume for subsequent mesh-refinement. Thus, using non-local models it is possible to simulate the development of finite shear-band widths and to ensure a physically reasonable solution of the governing problem within the framework of continuum mechanics.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Notation</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
1.1 Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen . . . . .	1
1.2 Stand der Wissenschaft . . . . .	3
1.3 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit . . . . .	8
<b>2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>9</b>
2.1 Kinematik . . . . .	9
2.1.1 Bewegung und Verschiebung . . . . .	9
2.1.2 Deformations- und Verzerrungsgrößen . . . . .	11
2.1.3 Geschwindigkeitsgrößen und Verzerrungsraten . . . . .	13
2.1.4 Transformationen zwischen materiellen und räumlichen Größen . . . . .	15
2.2 Spannungsgrößen . . . . .	17
2.3 Bilanzgleichungen . . . . .	18
2.3.1 Massenbilanz . . . . .	18
2.3.2 Mechanische Impulsbilanzen . . . . .	19
2.3.3 Hauptsätze der Thermodynamik . . . . .	20
2.4 Materialgleichungen . . . . .	22
2.4.1 Hyperelastizität . . . . .	22
2.4.2 Plastizität und Viskoplastizität . . . . .	24
2.4.3 Wärmeleitung . . . . .	27
2.4.4 Thermomechanische Kopplungen . . . . .	28
<b>3 Lokale Modellformulierung</b>	<b>29</b>
3.1 Modellierungsansätze . . . . .	29
3.2 Entwicklung der lokalen Materialgleichungen . . . . .	32
3.2.1 Thermodynamischer Kontext . . . . .	32
3.2.2 Thermohyperelasto-Thermoviskoplastizität . . . . .	34
3.3 Duktile Schädigung . . . . .	37
3.4 Das lokale Anfangs-Randwertproblem . . . . .	40
3.5 Entfestigung und Lokalisierung . . . . .	41

<b>4</b>	<b>Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie</b>	<b>46</b>
4.1	Möglichkeiten einer nicht-lokalen Modellerweiterung . . . . .	46
4.1.1	Integralansätze . . . . .	46
4.1.2	Gradientenmodelle . . . . .	48
4.1.3	Anmerkungen zu Lokalisierung, Art der nicht-lokalen Formulierung und numerischen Aspekten . . . . .	50
4.2	Entwicklung der nicht-lokalen Materialgleichungen . . . . .	52
4.2.1	Thermodynamischer Kontext . . . . .	52
4.2.2	Thermohyperelasto-Gradiententhermoviskoplastizität . . . . .	54
4.3	Das nicht-lokale Anfangs-Randwertproblem . . . . .	55
4.3.1	Randbedingungen . . . . .	55
4.3.2	Zusammenfassung des nicht-lokalen ARWPs . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Zeitdiskretisierung</b>	<b>58</b>
5.1	Numerische Zeitintegrationsverfahren . . . . .	58
5.2	Zeitdiskretisierung des Verschiebungsfeldes . . . . .	58
5.3	Zeitdiskretisierung des inelastischen Verzerrungsfeldes . . . . .	59
5.4	Integration der Stoffgleichungen . . . . .	60
5.4.1	Spannungsalgorithmus . . . . .	60
5.4.2	Bestimmung des lokalen plastischen Dehnungsinkrements . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Finite-Element Approximation</b>	<b>68</b>
6.1	Ortsdiskretisierung und allgemeines Vorgehen . . . . .	68
6.2	Schwache Formulierung . . . . .	68
6.3	Approximation der Elementgrößen . . . . .	70
6.4	Assemblierung . . . . .	73
6.4.1	Assemblierung zum Gesamtsystem . . . . .	73
6.4.2	Assemblierung der Element-Freiheitsgrade . . . . .	74
6.5	Lösungsalgorithmus . . . . .	75
6.5.1	Iteratives NEWTON-RAPHSON Verfahren . . . . .	75
6.5.2	Bestimmung der Materialtangente . . . . .	76
6.5.3	Lösung des gekoppelten Mehrfeldproblems . . . . .	79
6.5.4	Explizites Lösungsverfahren . . . . .	79
6.5.5	Einhaltung der Nebenbedingung . . . . .	81
6.6	Aspekte der Implementierung in <i>FEAP</i> . . . . .	82

<b>7</b>	<b>Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen</b>	<b>87</b>
7.1	Überblick . . . . .	87
7.2	Untersuchungen für 1D-Kontinua . . . . .	88
7.2.1	Allgemeines Vorgehen . . . . .	88
7.2.2	Verallgemeinerte Modellformulierung . . . . .	91
7.2.3	Lokale Elasto-Plastizität . . . . .	94
7.2.4	Lokale Elasto-Thermoviskoplastizität . . . . .	97
7.2.5	Anwendung 1: Lokales JOHNSON & COOK-Modell . . . . .	100
7.2.6	Anwendung 2: Lokales Modell mit linearer Dehnratenabhängigkeit . . . . .	106
7.2.7	Nicht-lokale Elasto-Plastizität . . . . .	110
7.2.8	Nicht-lokale Elasto-Thermoviskoplastizität . . . . .	114
7.2.9	Anwendung 3: Nicht-lokales JOHNSON & COOK-Modell . . . . .	116
7.3	Zusammenfassung . . . . .	122
<b>8</b>	<b>Berechnungsbeispiele</b>	<b>124</b>
8.1	Untersuchter Werkstoff: INCONEL 718 . . . . .	124
8.2	Illustratives Beispiel für Lokalisierungsphänomene . . . . .	125
8.2.1	Entwicklung der Lokalisierungszone . . . . .	125
8.2.2	Netzabhängigkeit des lokalen Modells . . . . .	126
8.2.3	Einfluss des nicht-lokalen Parameters . . . . .	129
8.2.4	Konvergenz der Lokalisierungsbreite . . . . .	131
8.3	Ausbildung adiabatischer Scherbänder unter Zugbelastung . . . . .	134
8.3.1	Zugscheibe ohne anfängliche Imperfektionen . . . . .	134
8.3.2	Zugscheibe mit seitlich versetzten Kerben . . . . .	137
8.4	Ausbildung adiabatischer Scherbänder unter Druckbelastung . . . . .	142
8.5	Fazit der Untersuchungen . . . . .	145
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>146</b>
<b>A</b>	<b>Tensorrechnung</b>	<b>149</b>
A.1	Produkte von Tensoren . . . . .	149
A.1.1	Skalarprodukte . . . . .	149
A.1.2	Dyadische Produkte . . . . .	150
A.2	Verwendete Tensoroperationen . . . . .	151
A.2.1	Invarianten eines Tensors 2. Stufe . . . . .	151

*Inhaltsverzeichnis*

A.2.2	Norm eines Tensors . . . . .	152
A.2.3	Transponierte und Inverse eines Tensors 2. Stufe . . . . .	152
A.2.4	Spektraldarstellung eines Tensors 2. Stufe . . . . .	152
A.2.5	Weitere Zerlegungen eines Tensors 2. Stufe . . . . .	153
A.2.6	Zusammenfassung verschiedener Identitäten . . . . .	153
A.3	Differentialanalysis . . . . .	155
A.3.1	Ableitungen und Differentiale . . . . .	155
A.3.2	Differentialoperatoren . . . . .	157
A.3.3	Häufig verwendete Ableitungen und Ableitungsregeln . . . . .	157
A.3.4	Materielle Zeitableitung . . . . .	160
A.3.5	Materielle Zeitableitung zeitlich veränderlicher Gebietsintegrale . . . . .	160
A.4	Objektivität . . . . .	161
<b>B</b>	<b>Relevante Ableitungen zur Bildung der Materialtangente</b>	<b>164</b>
<b>C</b>	<b>FE-Netze</b>	<b>168</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>171</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>175</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>176</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>186</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>187</b>

## Notation

Tensoren sind in der Regel fett und kursiv gestellt. Bis zu der 2. Stufe von Tensoren werden entweder lateinische Buchstaben mit Serifen bzw. griechische Buchstaben verwendet. Tensoren 4. Stufe werden durch fette und kursive lateinische Buchstaben mit Serifen, die durch einen zusätzlichen vertikalen Strich ergänzt sind, gekennzeichnet. Eine strikte Trennung von Gross- und Kleinbuchstaben für verschiedene Konfigurationen wird nicht verwendet. Die Zuordnung einer bestimmten Größe zu einer entsprechenden Konfiguration ergibt sich aus dem jeweiligen Zusammenhang.

Bei der Darstellung einer Größe wird zwischen tensorieller und VOIGT'scher Notation unterschieden. Die Vektoren und Matrizen in VOIGT'scher Notation werden mit aufrechten, fetten und soweit möglich serifenlosen Buchstaben dargestellt.

Ferner gilt, sofern nicht anders angegeben, die EINSTEIN'sche Summenkonvention für zweifach auftretende Komponenten-Indizes.

*Notation*

# 1 Einleitung und Motivation

In den letzten Jahrzehnten hat sich die Finite-Elemente Methode (FEM) als numerisches Werkzeug zur Lösung einer Vielzahl ingenieurtechnischer Problemstellungen etabliert. Anwendungsbereiche finden sich unter anderem in der Struktur- und Strömungsmechanik, der Akustik oder Elektrostatik sowie bei der Analyse verschiedener Diffusionsprozesse, wie zum Beispiel thermischer oder chemischer Prozesse. Mit stetig wachsender Rechnerleistung können dabei die numerischen Analysen selbst komplexer Problemstellungen durch detailliertere Materialmodelle und umfangreichere Modellierungen realistisch und wirklichkeitsgetreu durchgeführt werden.

Insbesondere bei der *Beurteilung der Sicherheit und Zuverlässigkeit von Bauteilen* nimmt die Festkörpermechanik in Zusammenhang mit numerischen Lösungsverfahren wie der FEM einen großen Stellenwert mit wachsender Bedeutung ein. So werden die Computermodelle zunehmend zur Kosten reduzierten Konstruktion und Optimierung eines Bauteils herangezogen. Der Kosten reduzierende Aspekt wird unter anderem besonders bei Tests oder Versuchen deutlich, bei denen das Prüfstück im Sinne des Nachweises der Belastbarkeit unter außergewöhnlichen Belastungen, wie z. B. Hochgeschwindigkeitsbelastungen, zerstört wird.

## 1.1 Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen

Die Hochgeschwindigkeitsbeanspruchung metallischer Komponenten und Bauteile ist in weiten Teilen der Technik von großer Relevanz, beispielsweise bei Crash- oder Falltests, bei Umform- oder Spanprozessen mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten oder bei Aufprallproblemen von Komponenten schnell rotierender Bauteile auf das umgebende Gehäuse. Die Sicherheit und Zuverlässigkeit von Maschinen und Anlagen mit schnell rotierenden Teilen ist dabei entscheidend davon abhängig, dass bei einem Bruch dieser rotierenden Teile die Maschine oder Anlage umgebenden Sicherheitseinrichtungen nicht durchschlagen werden. Beispiele hierfür sind Turbinen von Flugzeugen, die von einem Containment umgeben sind, das im Fall eines Schaufelbruchs gewährleistet, dass die abgerissene Schaufel innerhalb des Triebwerks verbleibt.

Ähnliche Probleme treten auch im Apparatebau auf, wenn durch möglicherweise vorkommende Deflagrationen oder Detonationen Komponenten durch hohe äußere Geschwindigkeiten belastet werden. Auch hier ist die Sicherheit der Umschließung gefordert. Weitere Anwendungsgebiete dieser Art sind die Crashesicherheit von Strukturen in der Verkehrstechnik, z. B. infolge der Einwirkungen von Fahr- oder Flugzeugen unter Unfallbedingungen auf die untersuchte Struktur. Bei den genannten Aufprallproblemen werden diese Lastfälle bei der Konstruktion, d. h. für die Bemessung der notwendigen Dicke des Gehäuses bzw. der Umschließung, berücksichtigt. Ein möglicherweise irreparabler Schaden wird unter solchen Bedingungen in Kauf genommen; der Nachweis richtet sich hier auf die Gewährleistung, dass entweder die Funktion der Konstruktion noch für gewisse Zeit erhalten bleibt oder aber sofortige katastrophale Auswirkungen vermieden werden. Beispielsweise führt ein Schaufelbruch in einer Flugzeugturbine zu Schäden, die unter Umständen zu deren Ausfall führen. Jedoch ist dadurch, dass die Schaufel das Containment nicht durchschlägt, größerer Schaden, wie beispielsweise das Durchschlagen der Treibstoffleitungen und -tanks in den Flügeln bzw. Schäden im Bereich der tragenden Struktur des Flugzeugs oder der Passagierkabine,

## 1. Einleitung und Motivation

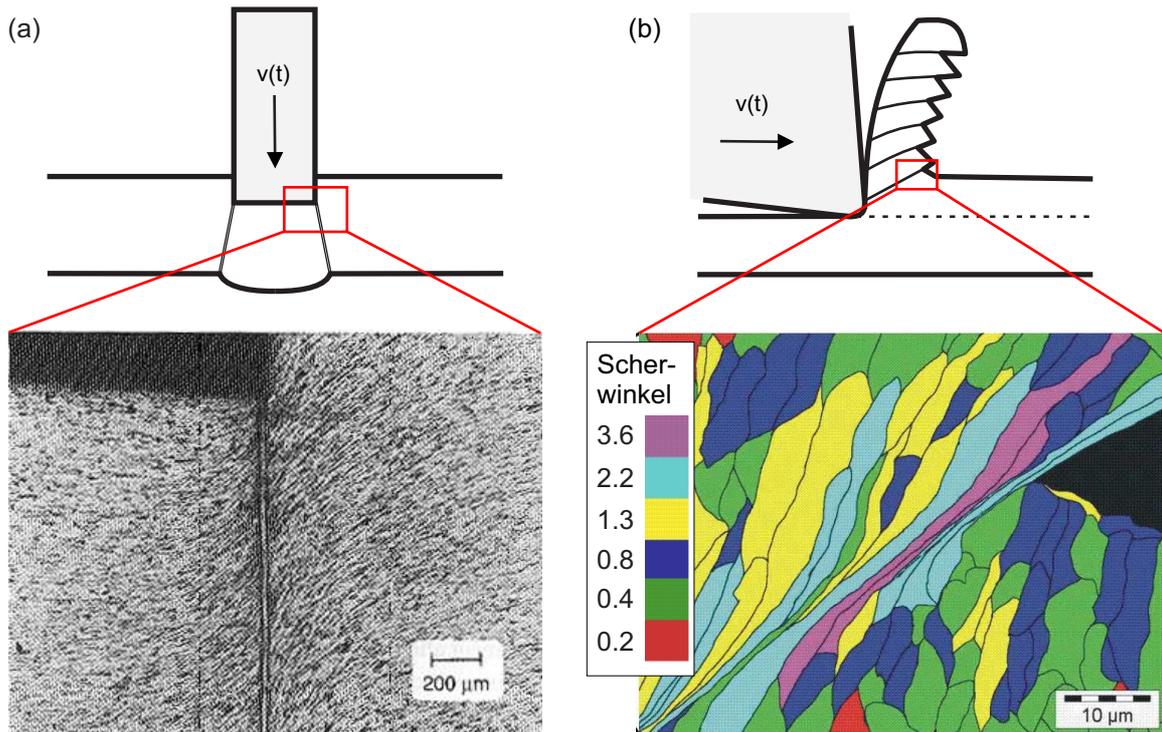


Bild 1.1: Adiabatische Scherbänder in Metallen. (a) Am Rand eines Impact-Kraters in kaltgewalztem Stahl, siehe Wright (2002: Fig. 1.1), und (b) Infolge eines Spanprozesses in einer Nickel-Basis Legierung, siehe Clos et al. (2005).

verhindert worden. Darüber hinaus ist die Situation in der Fertigungstechnik dadurch gekennzeichnet, dass bei Umform-, Stanz- oder Spanprozessen die Belastungs- bzw. Schnittgeschwindigkeit zunehmend erhöht wird, wodurch diese Werkstücke ebenfalls durch hohe Belastungsgeschwindigkeiten beansprucht werden. Hier dient die Analyse dieser Prozesse der Optimierung des Formgebungsprozesses und Reduzierung der erforderlichen Stempel- bzw. Schnittkräfte.

Infolge von Hochgeschwindigkeitsbelastungen treten in dem beanspruchten Bauteil typischerweise Zonen mit großen, lokalisierten Deformationen auf, die auf die örtliche Entfestigung des Werkstoffs durch die Temperaturerhöhung infolge plastischer Dissipation sowie durch die Entwicklung von Schädigung zurückzuführen sind. Die Ausbildung von Scherbändern als typische Form der Deformationslokalisierung repräsentiert dabei eine Instabilität des ursprünglich homogenen Deformationsfeldes aufgrund von inhomogenen Materialverhalten und/oder geometrischen Effekten, die sich bei polykristallinen Metallen in extremen Kornverzerrungen in der Gefügestruktur darstellt. In Bild 1.1 ist die Ausbildung von Scherbändern anhand von zwei Beispielen dargestellt. Darin wird die Struktur der Lokalisierungszone als schmales, nahezu gradliniges Band bzw. ebene Fläche mit extremen Scherverformungen deutlich. Es zeigt sich die große Relativverschiebung der beiden Seiten jenseits des Scherbandes, jedoch bleibt, wie u. a. die Raster-Elektronen-Mikroskopaufnahme in Bild 1.1(b) zeigt, die physikalische Kontinuität von der einen zur anderen Seite zunächst gewahrt. Die Schubverzerrungen können dabei bis in die Größenordnung von mehreren 1000% zunehmen (Wright, 2002). Infolge der extremen plastischen Verformungen ist in einigen metallischen Werkstoffen ferner ein verstärktes Hohlraumwachstum in dem Scherband zu beob-

achten, was letztendlich zur vollständigen Materialtrennung und Bruch des Bauteils führt (Bai und Dodd, 1992). Das Scherband stellt insofern eine makroskopische Repräsentation von mikromechanischen Defekten und Mikroslip dar (Bigoni und Hueckel, 1991). Aufgrund der hohen Belastungsgeschwindigkeit laufen die zugrunde liegenden Prozesse in dem Werkstoff zudem unter adiabatischen Bedingungen ab, so dass die beschriebenen Zonen lokalisierter Deformationen als adiabatische Scherbänder (ASB) bezeichnet werden, deren Breite für metallische Werkstoffe meist in der Größenordnung etlicher Mikrometer  $\mathcal{O}(10 \simeq 100 \mu\text{m})$  liegt. Auch in anderen Materialien, wie z. B. in Polymeren oder Geomaterialien wie Stein, Sand, Ton, oder Fels, ist eine solche Ausbildung von kleinen Zonen lokalisierter Scherverformung zu beobachten. Hier liegt die *in situ* beobachtete Breite der Lokalisierungszone in der Größenordnung einiger Millimeter oder gar Meter,  $\mathcal{O}(\text{mm} \simeq \text{m})$ . Jedoch stellt auch hier die Lokalisierungszone verglichen mit den Gesamtabmessungen der Problemstellung einen Bereich sehr kleinen, allerdings nicht verschwindenden Volumens dar.

Um die Eingangs genannten Anwendungsbeispiele metallischer Werkstoffe unter Hochgeschwindigkeitsbelastungen numerisch zu analysieren und beurteilen zu können, ist es notwendig, die Initiierung und Ausbildung von ASB physikalisch sinnvoll zu modellieren und mittels numerischer Verfahren wie der FEM adäquat zu berechnen. Die Modellierung solcher Vorgänge erfordert daher im Allgemeinen die Berücksichtigung einer Vielzahl von Faktoren und Effekten, wie beispielsweise dehnratenabhängiges Materialverhalten, mit adiabatischer Erhitzung einhergehende thermische Entfestigung, Massenträgheit, Reibung und Kontakt sowie Schädigung und letztendlich Versagen. Im Sinne einer physikalisch sinnvollen Berechnung ist darüber hinaus darauf zu achten, dass insbesondere das Volumen der Lokalisierungszone, in der die dissipativen Prozesse bei der Ausbildung von ASB auftraten, adäquat abgebildet wird. Die Existenz von Lokalisierungsbegrenzern (*engl.: localization limiter*) in der Modellformulierung ist daher absolut notwendig, da andererseits das Volumen der Lokalisierungszone beliebig klein werden kann. Eine Zone mit möglicherweise verschwindendem Volumen repräsentiert den unphysikalischen Zusammenhang, dass die Verformung bis zum Versagen ohne jegliche Dissipation erfolgt, so dass die erhaltenen Ergebnisse nicht länger sinnvoll zu interpretieren sind. Die in diesem Zusammenhang bereits in der Vergangenheit geleisteten Arbeiten und Untersuchungen zur Modellformulierung sowie zur numerischen Simulation dieser Prozesse mittels der FEM werden nachfolgend zusammengefasst sowie erforderliche Erweiterungen und notwendige Verbesserungen aufgezeigt.

## 1.2 Stand der Wissenschaft

Typischerweise werden zur rechnerischen Simulation von Vorgängen mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten Stoffgleichungen eingesetzt, die das Verfestigungsverhalten des Werkstoffs bei hohen Dehnraten, das thermische Entfestigungsverhalten bei steigender Temperatur infolge plastischer Dissipation unter adiabatischen Bedingungen sowie Schädigung und schließlich Versagen beinhalten. Adiabatische Bedingungen können vorausgesetzt werden, da in der Regel die im Rahmen der Hochgeschwindigkeitsbeanspruchung zu untersuchende bzw. zu simulierende Zeitdauer gering im Vergleich zu der charakteristischen Zeit der Wärmeleitungsgleichung ist, siehe Estrin et al. (1997). Die verwendeten Materialmodelle beschreiben dabei die genannten Effekte entweder phänomenologisch, wie z. B. das Modell nach Johnson und Cook (1983, 1985) bzw. Potenzgesetz-Modelle, die zumeist Molinari zuge-

## 1. Einleitung und Motivation

schrieben werden (Molinari und Clifton, 1987, Fressengeas und Molinari, 1987), oder basieren auf einer physikalisch interpretierbaren, thermischen Aktivierung der Versetzungsbewegung, wie z. B. das Modell nach Zerilli und Armstrong (1987, 1990), das Modell nach Bodner und Partom (1975) oder das MTS-Modell (mechanical threshold stress) von Follansbee und Kocks (1988). Weitere physikalisch-basierte Modelle sind u. a. von Estrin et al. (1998) oder Bonora und Milella (2001) formuliert worden.

Bezüglich der Modellierung des Versagenszeitpunktes wurden zunächst Kriterien entwickelt, die auf einer Formulierung kritischer Spannungen bzw. kritischer Dehnungen basieren, wobei die relevanten Größen dieser Kriterien innerhalb der  $J_2$ -Theorie zugänglich sind. In Zusammenhang mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten wird z. B. in Johnson und Cook (1985) eine Versagensdehnung in Abhängigkeit der Mehrachsigkeit sowie der plastischen Dehnrates und der Temperatur angegeben. Bei dieser Art von Kriterien wird eine mögliche kontinuierliche Reduzierung der Belastbarkeit einzig durch die Temperaturentfestigung des Deformationsmodells beschrieben. Erst mit Erreichen des Wertes der kritischen Versagensgröße tritt ein sofortiger Verlust der gesamten restlichen Belastbarkeit an dem entsprechenden Punkt des Kontinuums ein. Hingegen wird durch die Einführung einer Schädigungsvariablen in Zusammenhang mit effektiven Spannungskonzepten, z. B. nach Lemaitre (1992), eine kontinuierliche Reduzierung der Belastbarkeit modelliert. Im Rahmen der Schädigungsmechanik duktiler Werkstoffe wird diesbezüglich das relative Hohlraumvolumen als Schädigungsvariable benutzt, wie in den Modellen von Gurson (1977) und Rousselier (1987). Hierbei ist das im Modell eingeführte relative Hohlraumvolumen eine durch Untersuchungen der Mikrostruktur anschaulich interpretierbare Größe, die das Wachstum und Zusammenwachsen von Poren (nucleation and growth of voids, NAG) beschreibt. In der Kontinuumschädigungsmechanik (continuum damage mechanics, CDM) wird hingegen die Schädigungsvariable ausschließlich phänomenologisch als diejenige Größe eingeführt, die den Wert null zu Beginn des Schädigungsprozesses hat und den Wert eins bei Versagen erreicht.

Die beschriebenen Modelle sind in der Vergangenheit vielfach für die Analyse und numerische Simulation von Vorgängen mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten eingesetzt worden. Hierzu zählt im Wesentlichen die Untersuchung der Durchschlagfestigkeit von bauteilähnlichen Proben, u. a. in Camacho und Ortiz (1997), Meyer und Kleponis (2001), Yadav et al. (2001), Singh und Klingbeil (2002) oder Dey et al. (2007), bzw. die Simulation von Hochgeschwindigkeits-Umformprozessen verschiedener metallischer Bauteile, u. a. in Bonnet-Lebouvier et al. (2002), Inal et al. (2002a), Mitrofanov et al. (2004) oder Hortig und Svendsen (2007). In diesen Arbeiten bleibt die Entwicklung von Schädigungsvariablen unberücksichtigt, ggf. werden Versagenskriterien auf Grundlage kritischer Dehnungen verwendet. Gerade im Zusammenhang mit der Anwendung dieser Modelle im Rahmen der Finiten-Elemente Methode (FEM) erfolgte in den vergangenen Jahren verstärkt die Erweiterung der genannten Modellformulierungen durch die Schädigungskonzepte der CDM, z. B. in Børvik et al. (1999, 2001), Bonora und Milella (2001) oder Sievert et al. (2003), bzw. der NAG nach Gurson, wie z. B. in Eberle et al. (2000), Guduru und Freund (2002) oder Campagne et al. (2005). In diesen Arbeiten werden die Modellerweiterungen ebenfalls für die Simulation der zuvor genannten Vorgänge mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten angewendet.

Vergleichende Untersuchungen in Dey et al. (2007), Campagne et al. (2005), Daridon et al. (2004) oder Liang und Khan (1999) haben gezeigt, dass trotz des phänomenologischen Charakters des JOHNSON & COOK-Modells dieses Modell qualitativ gut brauchbare Ergebnisse

liefert. Zusammen mit dem Vorteil der relativ einfachen Kalibrierung stellt dies einen wesentlichen Grund für die in der Praxis weit verbreitete Verwendung dieses Modells und Bevorzugung gegenüber den anderen genannten Modellen dar. □

Sämtliche, bislang genannten Arbeiten zur Untersuchung des Ver- und Entfestigungsverhaltens von Werkstoffen sowie des Versagens bis zum Bruch basieren auf der lokalen Formulierung von Stoffgleichungen. Bei rechnerischen Analysen lokaler und ratenunabhängiger Modelle besteht immer die Möglichkeit, dass bei fortgeschrittener Schädigung und/oder Temperaturentfestigung der Typ der Differentialgleichung wechselt. In dem quasi-statischen Fall (ohne Berücksichtigung von Massentermen) kann der Typ der Differentialgleichung lokal, d.h. an mindestens einem materiellen Punkt in der untersuchten Struktur, von elliptisch nach hyperbolisch umschlagen, während in dem dynamischen Fall (mit Berücksichtigung von Massentermen) der Typ von hyperbolisch nach elliptisch umschlagen kann. Diese Änderung des Differentialgleichungstyps ist bereits lange bekannt, siehe Arbeiten von Hill (1958, 1962), Rudnicki und Rice (1975), Rice (1976), und ist vornehmlich innerhalb der vergangenen Jahre verstärkt im Zusammenhang mit der rechnerischen Analyse von Strukturen unter quasi-statischen Beanspruchungen untersucht worden, u. a. in de Borst und Mühlhaus (1992), Gers et al. (1998), de Borst et al. (1999), Peerlings et al. (2002), Reusch (2003) oder Reusch et al. (2003a,b). Hintergrund dieser Arbeiten ist die Entwicklung zuverlässiger Methoden zur rechnerischen Analyse von Strukturen unter Berücksichtigung von Versagen.

Dieses Lösungsverhalten der Differentialgleichungen hat zur Folge, dass bei FE-Analysen eine starke Netzabhängigkeit auftritt, die auch durch Netzverfeinerung nicht zu beseitigen ist, da das zugrunde liegende Problem nicht länger korrekt-gestellt ist. Vielmehr führt die Verwendung kleinerer Elemente zu jeweils grundsätzlich anderen, physikalisch nicht sinnvollen Lösungen, wofür auch der Begriff „pathologische“ Netzabhängigkeit verwendet wird (pathological localization bzw. pathological mesh-dependence, u. a. in Needleman, 1988, Peerlings et al., 2002). Diese Netzabhängigkeit ist deshalb grundlegend unterschiedlich zu jener Netzabhängigkeit, die bei der Erzielung konvergenter Lösungen durch die Verwendung jeweils kleinerer Elemente führt. Bei letzterer Art der Netzverfeinerung bleibt der Typ der Differentialgleichung und damit die Eindeutigkeit der Lösung erhalten.

Hingegen kann ein Wechsel des Differentialgleichungstyps für lokale, dehnratenabhängige Modellformulierungen ausgeschlossen werden (Needleman, 1988, Loret und Prevost, 1990), d. h. die Eindeutigkeit der Lösung bleibt selbst für entfestigendes Materialverhalten gewährleistet. Inwiefern die gefundene Lösung in sowohl zeitlicher als auch räumlicher Hinsicht stabil ist, wurde mittels einer Perturbationsanalyse im Sinne von LYAPUNOV zunächst von Bai (1982) für eindimensionale Fälle untersucht und später von Anand et al. (1987) auf dreidimensionale Fälle ausgeweitet. Diese Untersuchungen zeigen, dass eine geringfügige Störung der gefundenen Lösung einen starken Einfluss auf das Lösungsverhalten im weiteren zeitlichen Verlauf haben kann. Die Möglichkeiten, die zu einer solchen Instabilität führen, werden u. a. von Béda (1999), Bigoni und Petryk (2002) als „divergence bzw. flutter instabilities“ bezeichnet. Der Nachweis der letzteren dieser Instabilitäten wird jüngst auch von einigen Autoren zur Bestimmung des Abstandes mehrerer benachbarter Scherbänder verwendet (Wright und Ockendon, 1996, Molinari, 1997, Batra und Chen, 2001, Batra und Wei, 2007).

Desweiteren ist durch die Ratenabhängigkeit der Formulierung direkt eine innere Länge des Modells impliziert, wobei die Existenz einer solchen Länge als Begrenzung der Lokalisie-

## 1. Einleitung und Motivation

rungszone aufgefasst wird, siehe u. a. Lasry und Belytschko (1988) oder Jirásek (2004). Hinsichtlich des Nachweises und Bestimmung dieser inneren Länge führt Sluys (1992) ebenfalls mittels einer Perturbationsanalyse im Sinne von LYAPUNOV eine Dispersionsanalyse durch. Er zeigt für den eindimensionalen Fall, dass für lokale dehnratenabhängige Modelle eine geringfügige Störung exponentiell im Raum abklingt und bezeichnet den Grenzwert dieser Dämpfung als innere Länge des Modells. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt wurde die Bestimmung dieser inneren Länge weder für die eingangs genannten ratenabhängigen Modelle zur Beschreibung von Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen, insbesondere nicht für den allgemeinen mehrdimensionalen Fall, noch für an konkrete Werkstoffe angepasste Modellparameter durchgeführt. Auch in Bezug auf die Simulation von Versuchen mit hohen Belastungsgeschwindigkeiten mittels der FEM existieren solche Untersuchungen bislang nicht. Einige Autoren geben lediglich Hinweise, dass eine Netzabhängigkeit der Ergebnisse bei Verwendung des Potenzgesetzmodells bzw. des Materialmodells nach JOHNSON & COOK existiert, z. B. Wang und Sluys (2000), Børvik et al. (2001), Dey et al. (2007) oder Allix (2007), was durch Untersuchungen von Singh und Klingbeil (2002), Singh et al. (2003) ebenfalls bestätigt wurde. □

Um diese Art der Netzabhängigkeit zu vermeiden, bedarf es einer verbesserten Modellierung des Lokalisierungsprozesses, wobei die in der Größenordnung der relevanten Substruktur auftretenden, mikromechanischen Effekte im Sinne einer adäquaten makroskopischen Repräsentation berücksichtigt werden. Diesbezüglich stellt der Einsatz nicht-lokaler Modelle, die den Einfluss der Umgebung eines materiellen Punktes aufgrund der werkstoffmechanischen Eigenschaften berücksichtigen, eine verbesserte makroskopische Kontinuumstheorie (enriched macroscopic continuum theory) dar. Generell werden nicht-lokale Modelle je nach Art der Berücksichtigung des Umgebungseinflusses in zwei unterschiedliche Gruppen kategorisiert: Modelle mit *Integralansätzen* basieren auf der gewichteten Betrachtung einer Größe in einer bestimmten Einflussumgebung (Rogula, 1965, Eringen, 1966). Als betrachtete Größe sind zunächst von Eringen (1981) und Bažant et al. (1984) die Gesamtverzerrungen angewendet worden. Hinsichtlich einer verbesserten Modellierung von Lokalisierungsphänomenen haben später Bažant und Lin (1988) die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung, bzw. Pijaudier-Cabot und Bode (1992) die Schädigungsvariable als nicht-lokale Größe betrachtet.

Im Gegensatz dazu berücksichtigen *Gradientenmodelle* den Einfluss der Umgebung mittels Differentialoperatoren unterschiedlicher mechanischer Größen. Motiviert durch die Betrachtung von Verzerrungsgradienten in Zusammenhang mit den thermodynamisch konjugierten Spannungen höherer Ordnung, die auch als „higher-order-stresses“ oder „coupled bzw. double stresses“ bezeichnet werden, beschreiben Fleck und Hutchinson (1993, 1997) ein nicht-lokales Modell durch die zusätzliche Berücksichtigung dieser Spannungen höherer Ordnung in der Fließbedingung. Dieses Modell ist zwar physikalisch durch die Beschreibung der statistisch gespeicherten und geometrisch notwendigen Versetzungsdichte (statistically stored dislocations, SSD, und geometrically necessary dislocations, GND) motiviert, jedoch bleibt die Formulierung phänomenologisch. Eine mikromechanisch basierte Erweiterung nach Nix und Gao (1998) dient als Grundlage der MSG-Plastizität (mechanism-based strain-gradient plasticity, siehe Gao et al., 1999, Huang et al., 2000).

Ein alternatives Vorgehen formuliert die Fließfläche in Abhängigkeit der Spannungen und inneren Größen sowie den Gradienten der inneren Größen. Diesbezüglich berücksichtigen

Aifantis (1984) bzw. Zbib und Aifantis (1988) Gradienten verschiedener Ordnung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung und -dehnrates, bzw. Maugin (1990) den Gradienten der Schädigung. Die meisten Formulierungen von Gradientenmodellen im Rahmen der Thermodynamik (siehe Maugin, 1990, Svedberg und Runesson, 1997, Polizzotto et al., 1998, Liebe et al., 2001) basieren auf notwendigen Bedingungen zur Erfüllung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Mit Hilfe des MÜLLER-LIU Entropieprinzips wurden in Svendsen (1999) auch hinreichenden Bedingungen zur Erfüllung des zweiten Hauptsatzes angegeben. Im Rahmen solcher thermodynamisch-konsistent formulierten nicht-lokalen Materialmodelle ist es möglich, das Randwertproblem für Deformationslokalisierung als Variationsproblem zu formulieren bzw. Deformationslokalisierung als materielle Instabilität zu modellieren (Svendsen, 2004).

Der Zugang zur Analyse metallischer Bauteile mit Gradientenmodellen hat sich bei praktischen Anwendungen mit starken Gradienten der Deformation als erfolgreich herausgestellt, wie u. a. Arbeiten von Geers et al. (1998), Peerlings et al. (2001, 2002), Reusch et al. (2003a,b) oder Pamin (2004) zeigen. Besonders die Berücksichtigung des Gradienten 2. Ordnung hat sich dabei für die numerische Umsetzung mittels der FEM durchgesetzt. Dieses Vorgehen resultiert in einer Differentialgleichung vom HELMHOLTZ-Typ für die entsprechende Größe. Eine solche nicht-lokale Erweiterung trägt somit zu einer entscheidenden Reduzierung der Netzabhängigkeit bei FE-Analysen bei. Eine mögliche Formulierung der Gradientenplastizität bzw. der Gradientenschädigung in Verbindung mit großen Deformationen wird u. a. in Liebe et al. (2003) bzw. Reusch et al. (2003a,b) angegeben.

Durch die nicht-lokale Formulierung der Stoffgleichung wird im einfachsten Fall ein weiterer Materialparameter eingeführt, der in der Literatur vielfach als „intrinsic oder material length parameter“ bezeichnet wird. Dieser nicht-lokale Parameter kann aus Betrachtungen der geometrisch notwendigen Versetzungsdichte (GND) geschlossen werden, wobei dessen Größe zu dem Längenmaß korrespondiert, bei dem die Effekte des Verzerrungsgradienten mit denen der Verzerrungen vergleichbar werden, siehe u. a. Fleck et al. (1994), Tvergaard und Needleman (1995), Gao et al. (1999) bzw. Jirásek und Bažant (2001) oder Abu Al-Rub und Voyiadjis (2006). Die Berücksichtigung von Gradienten der duktilen Schädigung oder der plastischen Vergleichsdehnung führt bei quasi-statischen und ratenunabhängigen Problemstellungen dazu, dass der Typ der Differentialgleichung elliptisch bleibt, oder zumindest der Punkt, an dem der Typ der Differentialgleichung von elliptisch zu hyperbolisch umschlägt, identifiziert werden kann. Aus diesen Ergebnissen ist dann zu ersehen, unter welchen Bedingungen die Elliptizität des Differentialgleichungssystems gewahrt bleibt (Reusch, 2003, Reusch et al., 2003a,b) und insofern auf die Zuverlässigkeit der numerischen Ergebnisse geschlossen werden kann. Die Verwendung von Gradientenmodellen unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Ratenabhängigkeit und von Massenkräften sowie der erforderlichen Lösung der Differentialgleichungen mittels eines FE-Verfahrens ist bisher nicht bearbeitet bzw. angewendet worden. Eindimensionale Untersuchungen von Béda (2000) zeigen jedoch die Tendenz, dass auch für diesen Fall die gewünschte „Korrekt-Gestelltheit“ des ARWPs gewährleistet bleibt. Die Relevanz einer solchen Aufgabe ergibt sich aus dem anfangs erwähnten Spektrum sicherheitsrelevanter Fragestellungen für Komponenten, Bauteile und Strukturen.

### 1.3 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der durch den Einsatz nicht-lokaler Modellformulierungen verbesserten Beschreibung und numerischen Simulation von Lokalisierungsphänomenen, die bei Bauteilen metallischer Werkstoffe unter Hochgeschwindigkeitsbelastungen auftreten. In diesem Zusammenhang ist zu klären, warum bei Verwendung lokaler und ratenabhängiger Modellformulierungen eine pathologische Netzabhängigkeit der Ergebnisse auftritt. Diesbezüglich soll ein Kriterium entwickelt werden, das es erlaubt, die infolge einer FE-Analyse erhaltenen Ergebnisse hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit zu beurteilen. Die Grundlage zur Entwicklung eines solchen Kriteriums stellt die Untersuchung der „Korrekt-Gestelltheit“ sowie der Dispersionseigenschaften der zugrunde liegenden Gleichungen mittels einer linearen Perturbationsanalyse im Sinne von LYAPUNOV dar. Die Unterschiede der lokalen und nicht-lokalen Formulierungen sind dabei sowohl hinsichtlich ihrer aus den dispersiven Eigenschaften resultierenden und lokalisierungsbegrenzenden inneren Länge einerseits als auch hinsichtlich der Ergebnisse von FE-Analysen andererseits zu untersuchen und interpretieren.

In Kapitel 2 werden die erforderlichen kontinuumsmechanischen Größen und Beziehungen eingeführt. Darauf aufbauend werden in Kapitel 3 lokale Formulierungen zur Modellierung von Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen angegeben. Die Formulierung nach JOHNSON & COOK wird als repräsentatives Modell dieser Gruppe lokaler Modelle unter zusätzlicher Berücksichtigung von isotroper Schädigung in den Rahmen der Thermoelasto-thermoviskoplastizität finiter Deformationen eingebettet und näher beschrieben. Aufgrund der genannten Aspekte von Lokalisierungsphänomenen wird in Kapitel 4 dieses lokale Modell hinsichtlich der Berücksichtigung der Gradienten-Plastizitätstheorie erweitert.

Für die Umsetzung und Implementierung dieser beiden Modelle im Rahmen der FEM erfolgt in Kapitel 5 die zeitliche Diskretisierung der jeweiligen Anfangs-Randwertprobleme. Daran schließt sich in Kapitel 6 die Approximation der zugrunde liegenden Gleichungen im Kontext der Methode der Finiten-Elemente an, wobei gesondert auf verschiedene Aspekte zur Lösung des gekoppelten Mehrfeldproblems eingegangen wird.

Eine genaue Untersuchung der „Korrekt-Gestelltheit“ der Gleichungen verschiedener lokaler als auch nicht-lokaler Modelle erfolgt in Kapitel 7. Die Lösungen unterschiedlicher, eindimensionaler Modellformulierungen werden dabei hinsichtlich ihrer Eindeutigkeit und Stabilität untersucht. Besonderes Augenmerk fällt auf die Bestimmung der inneren Länge ratenabhängiger und/oder nicht-lokaler Modelle.

Die Auswirkungen einer lokalen und nicht-lokalen Modellformulierung hinsichtlich der numerischen Ergebnisse von FE-Analysen werden anschließend in Kapitel 8 anhand verschiedener FEM-Simulationen von Lokalisierungsproblemen herausgestellt und interpretiert.

Die Arbeit schließt mit einer Diskussion der Ergebnisse und einem Ausblick auf zukünftig erforderliche Arbeiten.

## 2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel werden die grundlegenden kontinuumsmechanischen Größen und Beziehungen eingeführt, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet werden. Eine ausführliche Beschreibung der kontinuumsmechanischen Grundlagen findet sich z. B. in Malvern (1969), Chadwick (1976) bzw. Belytschko et al. (2001) oder Betten (2001).

### 2.1 Kinematik

#### 2.1.1 Bewegung und Verschiebung

Zur Beschreibung der Bewegung eines Kontinuums existieren im Wesentlichen zwei unterschiedliche kinematische Betrachtungsweisen, die sich darin unterscheiden, ob die Bewegung eines Punktes dieses Kontinuums primär

- körperbezogen, d. h. durch die anfängliche Position  $\mathbf{X}$  des Punktes zur Zeit  $t = 0$  sowie der Zeit  $t$  (LAGRANGE'sche Betrachtungsweise), oder
- raumbezogen, d. h. durch die aktuelle Position  $\mathbf{x}$  des Punktes zur Zeit  $t$  sowie der Zeit  $t$  (EULER'sche Betrachtungsweise)

beschrieben wird. Die erste Darstellungsform eignet sich, um die Position eines einzelnen materiellen Punktes im Laufe der Zeit zu verfolgen und wird daher in der Strukturmechanik verwendet. Hingegen eignet sich die zweite Darstellungsform für die Bestimmung, welcher Bewegungszustand zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten, festen Ort im Raum vorliegt, weshalb diese Variante in der Fluidmechanik Verwendung findet. Aus diesen Gründen wird im Folgenden maßgeblich die LAGRANGE'sche Beschreibung betrachtet.

Dabei nimmt ein Körper in seiner Referenzkonfiguration, die der (ursprünglichen) Anfangskonfiguration zum Zeitpunkt  $t = 0$  entspricht, das Gebiet  $\mathcal{B}_r \equiv \mathcal{B}_0$ , sowie in einer zum Zeitpunkt  $t$  eingenommenen, sogenannten Momentankonfiguration, das Gebiet  $\mathcal{B}_c \equiv \mathcal{B}_t$  im Euklidischen Raum ein, siehe *Bild 2.1*. Die zeitliche Änderung des Gebiets wird als Bewegung bezeichnet und wird durch die nichtlineare Abbildung

$$\varphi : \mathcal{B}_0 \mapsto \mathcal{B}_t \quad (2.1)$$

beschrieben, von der gefordert wird, dass sie stetig und ein-eindeutig sei. Infolgedessen ist die Position eines jeden Punktes dieses Kontinuums durch

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

bestimmt. Um eine Durchdringung des Körpers auszuschließen, wird neben der Invertierbarkeit der Deformation  $\varphi$  gesondert gefordert, dass die Funktionaldeterminante

$$J := \det(\partial_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}, t)) \quad (2.3)$$

stets positiv sei, i.e.  $J > 0$ . Unter Verwendung eines orthogonalen, kartesischen Koordinatensystems werden die jeweiligen Ortsvektoren durch

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = X_i \mathbf{E}_i, \quad (2.4)$$

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

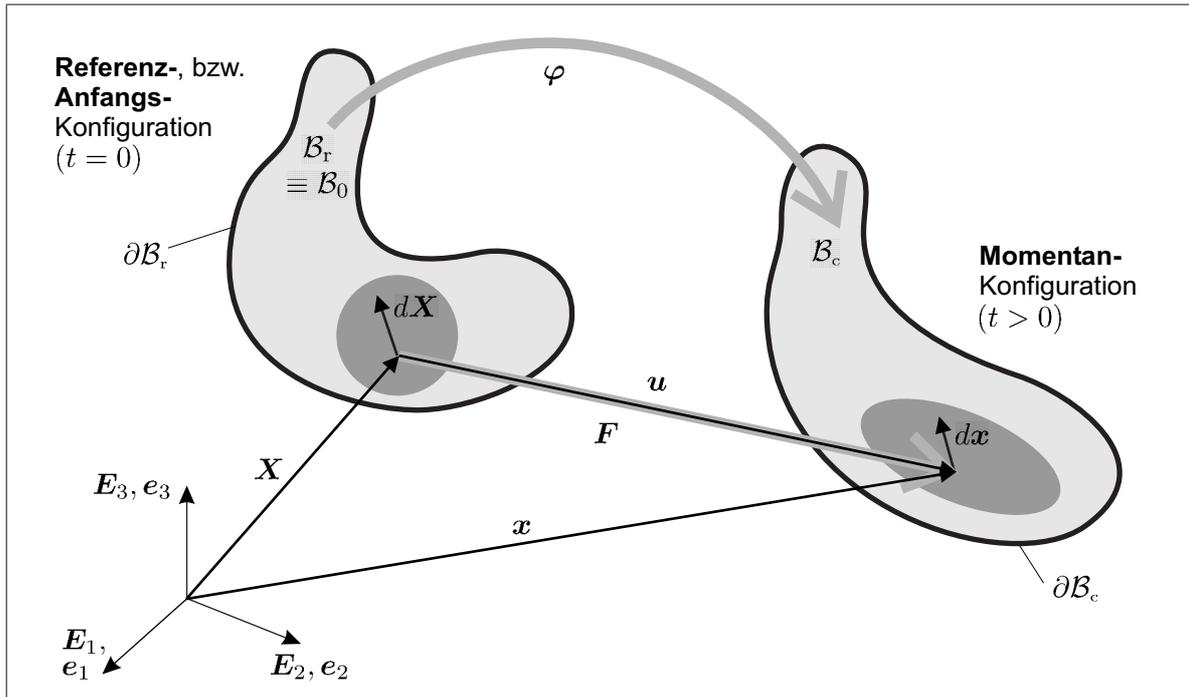


Bild 2.1: Bewegung eines Kontinuums von der Referenz- in die Momentankonfiguration

mit den räumlichen bzw. materiellen Koordinaten  $x_i$  bzw.  $X_i$ , für  $i = 1, 2, 3$ , sowie den entsprechenden Basisvektoren  $e_i$  und  $E_i$ , für  $i = 1, 2, 3$ , angegeben. Im Folgenden wird ferner die Annahme getroffen, dass die jeweiligen Basisvektoren übereinstimmen, i.e.  $e_i \equiv E_i$ , die unterschiedliche Schreibweise wird jedoch zur deutlicheren Darstellung beibehalten.

Häufig werden Größen in der Referenzkonfiguration, die auch als LAGRANGE'sche oder materielle Größen bezeichnet werden, mit Großbuchstaben sowie Größen, die in der Momentankonfiguration auftreten und auch als EULER'sche oder räumliche Größen bezeichnet werden, mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Von dieser Schreibweise wird lediglich bei den Ortsvektoren und den Euklidischen Basen Gebrauch gemacht, alle weiteren Größen ergeben sich aus dem jeweiligen Kontext.

Die Verschiebung eines Punktes wird durch die Differenz seiner momentanen Position zu seiner ursprünglichen Position

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.5)$$

definiert. Darin ist durch die explizite Angabe der Abhängigkeit von den materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  auf die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise hingewiesen. Prinzipiell lässt sich die Verschiebungsgröße auch mit räumlichen Koordinaten

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

beschreiben, wobei zur Unterscheidung der Funktionen die Indizes 'r' und 'c' eingeführt werden.

### 2.1.2 Deformations- und Verzerrungsgrößen

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  entspricht der linearen Abbildung der Bewegung und wird demnach als materieller Gradient des räumlichen Ortsvektors

$$\mathbf{F} := \text{GRAD}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j \quad (2.7)$$

definiert. Daraus ergibt sich die Zweifeld-Tensoreigenschaft des Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j$  mit  $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ , mit der Bedeutung eines linearen Operators zwischen den Linienelementen der Referenz- und Momentankonfiguration. Ein beliebiges Ortsvektordifferential wird demnach durch

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.8)$$

von der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration abgebildet. Weitere, auf dem Deformationsgradienten basierenden Transformationen bzw. Transformations-Operatoren werden in Abschnitt 2.1.4 näher beschrieben.

Als Verformungsgrößen werden der linke räumliche, bzw. rechte materielle CAUCHY-GREEN-Deformationstensor gemäß

$$\mathbf{B} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.9)$$

eingeführt, die aufgrund der Definition der folgenden Verzerrungsgrößen motiviert sind: Als Verzerrungsmaß wird die differentielle Längenmaßänderung  $\frac{1}{2}(ds^2 - dS^2)$  betrachtet, mit  $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  und  $dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$ . Mit der Beziehung (2.8) folgt daraus der entsprechende, auf die jeweilige Konfiguration bezogene Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^{(G)} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{E}^{(A)} := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.10b)$$

wobei  $\mathbf{E}^{(G)}$  den GREEN-LAGRANGE- und  $\mathbf{E}^{(A)}$  den ALMANSI-EULER-Verzerrungstensor bezeichnet. Auf eine Kennzeichnung zur Unterscheidung des räumlichen und materiellen Einheitstensors wird hierbei verzichtet,  $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$ . Weitere Verzerrungsgrößen ergeben sich aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten.

**Polare Zerlegung** Die Polare Zerlegung des Deformationsgradienten in einen Rotations- und Streckungsanteil erfolgt gemäß

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.11)$$

mit dem orthogonalen Zweifeld-Tensor  $\mathbf{R}$ , sowie dem rechten materiellen Strecktensor  $\mathbf{U}$  und dem linken räumlichen Strecktensor  $\mathbf{V}$ . Eine anschauliche Interpretation dieser Zerlegung ist in *Bild 2.2* dargestellt. Aufgrund der Orthogonalität des Rotationstensors, i.e.  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ , folgt

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2, \quad (2.12)$$

so dass sich mittels der Spektralzerlegung von  $\mathbf{B}$  bzw.  $\mathbf{C}$  in die (identischen) Eigenwerte  $\lambda_a^2$  sowie die Eigenvektoren  $\mathbf{l}_a$  bzw.  $\mathbf{r}_a$ , für  $a = \text{I, II, III}$ , die Verzerrungstensen gemäß

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

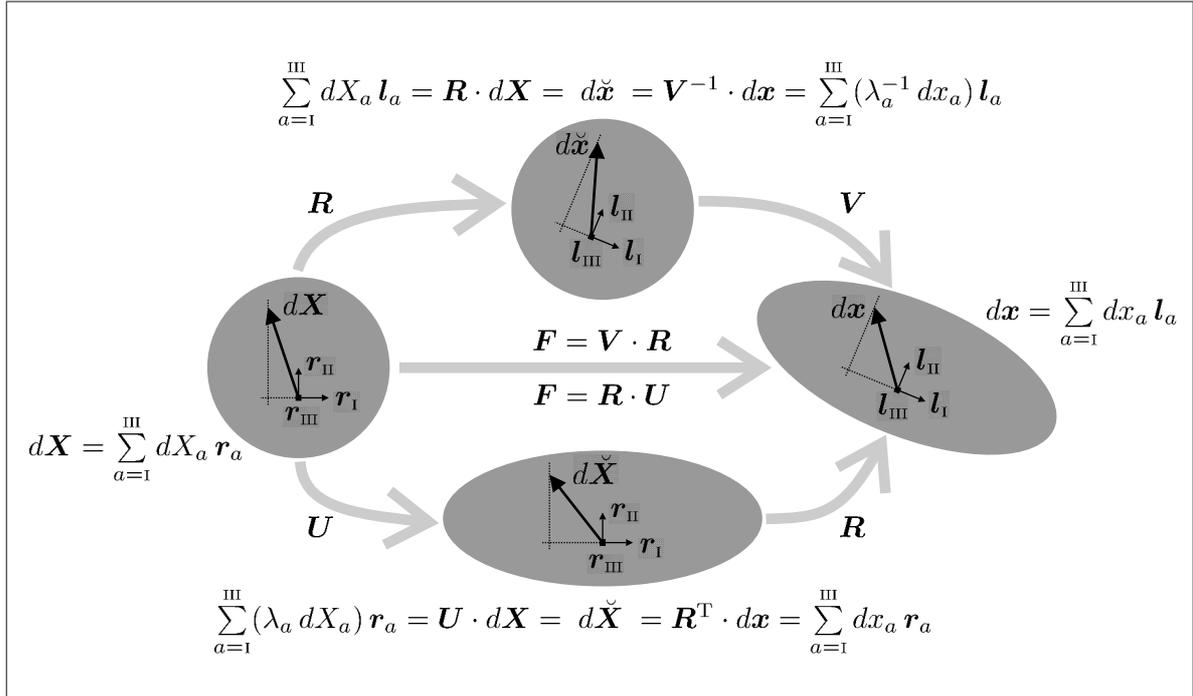


Bild 2.2: Polare Zerlegung des Deformationsgradienten in einen Rotations- und Streckungsanteil mit Angabe der jeweiligen Komponenten und Basen eines Vektordifferentials

$$\mathbf{V} = V_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \sum_{a=1}^{\text{III}} \lambda_a \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{l}_a \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{U} = U_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j = \sum_{a=1}^{\text{III}} \lambda_a \mathbf{r}_a \otimes \mathbf{r}_a \quad (2.13b)$$

ergeben. Der Rotationstensor ist in dieser Form durch

$$\mathbf{R} = R_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j = \sum_{a=1}^{\text{III}} \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{r}_a \quad (2.14)$$

und entsprechend der Deformationsgradient durch

$$\mathbf{F} = F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j = \sum_{a=1}^{\text{III}} \lambda_a \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{r}_a \quad (2.15)$$

gegeben. Besondere Bedeutung kommt den logarithmischen Streckungsmaßen zu. Eine Verallgemeinerung des effektiven Dehnungsmaßes für einen eindimensionalen Dehnstab nach LUDWIK, i.e.

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \int_{l_0}^l \frac{dl^*}{l^*} = \ln(l/l_0) \equiv \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.16)$$

mit der anfänglichen Länge  $l_0$  und der augenblicklichen Länge  $l$  des Stabes führt beispielsweise auf den linken logarithmischen Verzerrungstensor  $\ln \mathbf{V}$ , der ebenfalls über die Spektralzerlegung von  $\mathbf{B}$  bestimmt wird,

$$\ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{B}) = \sum_{a=1}^{\text{III}} \frac{1}{2} \ln(\lambda_a^2) \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{l}_a. \quad (2.17)$$

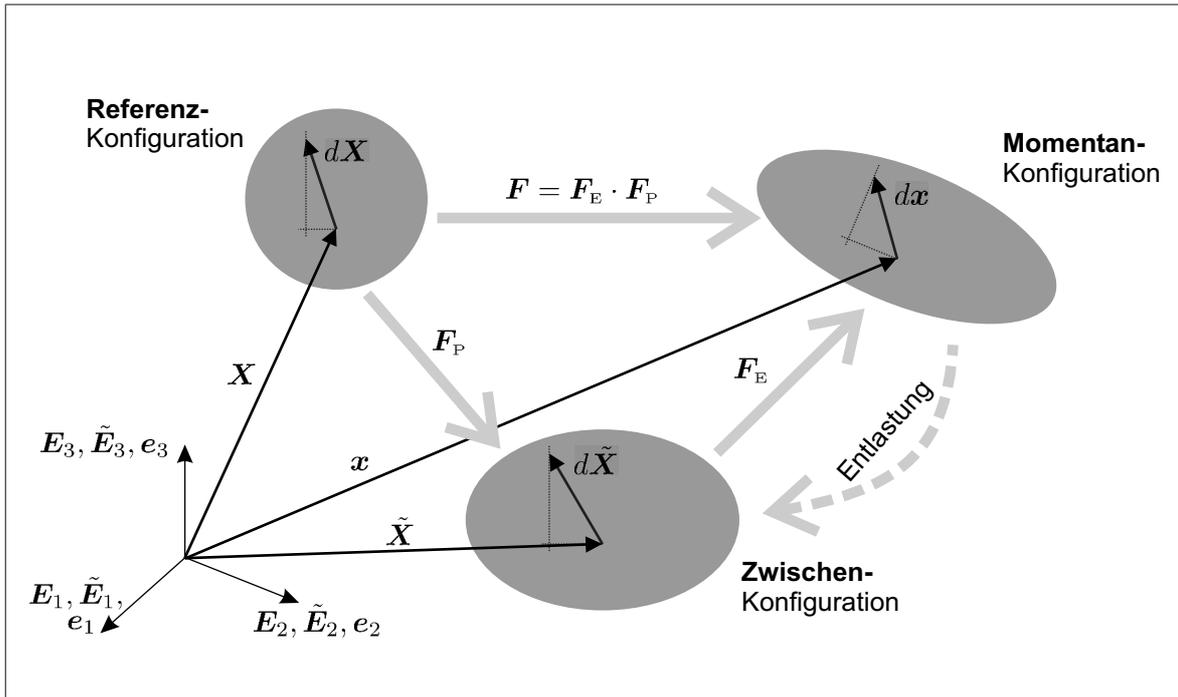


Bild 2.3: Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und plastischen Anteil

**Multiplikative Zerlegung** Die Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und plastischen (inelastischen) Anteil

$$F = F_E \cdot F_P \quad (2.18)$$

geht auf Lee (1969) zurück und kann durch eine plastische (spannungsfreie) Zwischenkonfiguration verdeutlicht werden, vgl. Bild 2.3. Die elastischen bzw. inelastischen Anteile aller in diesem Abschnitt auf Basis des Gesamt-Deformationsgradienten eingeführten Größen ergeben sich dann durch Verwendung des jeweiligen Anteils des Deformationsgradienten, z. B.

$$B_E = F_E \cdot F_E^T \quad \text{und} \quad B_P = F_P \cdot F_P^T, \quad \text{bzw.} \quad (2.19a)$$

$$C_E = F_E^T \cdot F_E \quad \text{und} \quad C_P = F_P^T \cdot F_P \quad (2.19b)$$

für die elastischen und plastischen Anteile des linken bzw. rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors. Insbesondere folgt daraus die Identität

$$B_E = F \cdot C_P^{-1} \cdot F^T. \quad (2.20)$$

### 2.1.3 Geschwindigkeitsgrößen und Verzerrungsraten

Die Geschwindigkeit  $v$  eines Punktes entspricht der zeitlichen Änderung seines Ortes, i.e. unter Verwendung der materiellen Koordinaten  $X$

$$v_r(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(X, t), \quad (2.21)$$

bzw. allgemein

$$v = v_r(X, t) = v_c(x, t). \quad (2.22)$$

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Um die materielle Zeitableitung, also die zeitliche Änderung bezüglich konstanter materieller Koordinaten, zu kennzeichnen wird die Schreibweise  $(\bullet)' \equiv d(\bullet)/dt$  für eine beliebige räumliche oder materielle Größe  $(\bullet)$  eingeführt<sup>1</sup>. Mit dieser Schreibweise vereinfacht sich die Angabe der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$  zu

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{u}} \quad (2.23)$$

und die der Beschleunigung  $\boldsymbol{a}$  als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit zu

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{\boldsymbol{u}}. \quad (2.24)$$

Eine besondere Bedeutung besitzt der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\boldsymbol{L} := \text{grad}(\boldsymbol{v}) = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}, \quad (2.25)$$

mit der Rate des Deformationsgradienten  $\dot{\boldsymbol{F}} = \text{GRAD}(\dot{\boldsymbol{x}})$ . Der symmetrische Anteil stellt den Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\boldsymbol{D}$  und der antimetrische Anteil den Drehgeschwindigkeitstensor  $\boldsymbol{W}$  dar, *i.e.*

$$\boldsymbol{D} := \text{sym}(\boldsymbol{L}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{W} := \text{skw}(\boldsymbol{L}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^T). \quad (2.26)$$

Damit existiert unter Verwendung der Definition der Verzerrungstensoren (2.10a,b) der Zusammenhang

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^{(G)} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \dot{\boldsymbol{E}}^{(A)} + \boldsymbol{E}^{(A)} \cdot \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T \cdot \boldsymbol{E}^{(A)}. \quad (2.27)$$

zwischen dem Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\boldsymbol{D}$  und den Raten der Verzerrungstensoren  $\dot{\boldsymbol{E}}^{(G)}$  und  $\dot{\boldsymbol{E}}^{(A)}$ . Es ist zu beachten, dass generell die materielle Zeitableitung einer räumlichen Größe nicht objektiv<sup>2</sup> ist.

Gemäß der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (2.18) folgen aus (2.25) die elastischen und inelastischen Anteile des räumlichen Geschwindigkeitstensors zu

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_E + \boldsymbol{L}_P, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{L}_E = \dot{\boldsymbol{F}}_E \cdot \boldsymbol{F}_E^{-1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{L}_P = \boldsymbol{F}_E \cdot \tilde{\boldsymbol{L}}_P \cdot \boldsymbol{F}_E^{-1} \quad (2.28)$$

wobei mit  $\tilde{\boldsymbol{L}}_P = \dot{\boldsymbol{F}}_P \cdot \boldsymbol{F}_P^{-1}$  der plastische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten bezüglich der Zwischenkonfiguration angegeben ist. Insbesondere durch Anwendung der Transformationsvorschrift (2.28)<sub>3</sub> zwischen Momentan- und Zwischenkonfiguration auf den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten, *i.e.*  $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{F}_E^{-1} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{F}_E$ , folgt entsprechend

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{L}}_E + \tilde{\boldsymbol{L}}_P, \quad \text{mit} \quad \tilde{\boldsymbol{L}}_E = \boldsymbol{F}_E^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}_E \quad \text{und} \quad \tilde{\boldsymbol{L}}_P = \dot{\boldsymbol{F}}_P \cdot \boldsymbol{F}_P^{-1}. \quad (2.29)$$

Die symmetrischen Anteile dieser Größen werden unter Zuhilfenahme des elastischen rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors gemäß

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{\square} := \text{sym}(\boldsymbol{C}_E \cdot \tilde{\boldsymbol{L}}_{\square}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}_E \cdot \tilde{\boldsymbol{L}}_{\square} + \tilde{\boldsymbol{L}}_{\square}^T \cdot \boldsymbol{C}_E) \quad (2.30)$$

<sup>1</sup>Siehe dsbzgl. auch Abschnitt A.3.4 „Materielle Zeitableitung“ im Anhang auf Seite 160.

<sup>2</sup>Der Begriff der Objektivität wird in den Abschnitten 2.4 sowie A.4 näher erläutert.

gebildet, so dass insbesondere auch

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}_E + \tilde{\mathbf{D}}_P, \quad \text{jeweils mit } \tilde{\mathbf{D}}_{\square} = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{D}_{\square} \cdot \mathbf{F}_E \quad (2.31)$$

folgt, wobei hier der Index '□' einen Platzhalter für sowohl die jeweilige Gesamtgröße als auch deren elastischen und plastischen Anteil darstellt.

Mit dem plastischen Anteil des Streckungsratentensors ergibt sich ferner die äquivalente plastische Vergleichsdehnrate zu

$$\dot{\varepsilon}_P = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}_P : \mathbf{D}_P}. \quad (2.32)$$

und dementsprechend daraus die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung zu einem Zeitpunkt  $t$  zu

$$\varepsilon_P(t) = \varepsilon_P(0) + \int_{\tau=0}^t \dot{\varepsilon}_P d\tau. \quad (2.33)$$

#### 2.1.4 Transformationen zwischen materiellen und räumlichen Größen

**Deformation eines Volumenelementes** Die Transformation eines Volumenelementes zwischen Anfangs- und Momentankonfiguration erfolgt über die Funktionaldeterminante (*cf.* 2.3)

$$J = \det(\mathbf{F}), \quad (2.34)$$

die auch als JACOBI-Determinante bezeichnet wird. Hieraus folgt dann die Beziehung

$$dV = JdV_0 \quad (2.35)$$

zwischen einem anfänglichen und momentanen Volumenelement  $dV_0$  und  $dV$ .

**Deformation eines Flächenelementes** Die Transformation eines Flächenelementes zwischen Anfangs- und Momentankonfiguration ist durch die NANSON-Formel

$$d\mathbf{A} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}_0 \quad (2.36)$$

gegeben. Darin bezeichnet  $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$  ein gerichtetes Flächenelement in der Momentankonfiguration mit Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  und Fläche  $dA$  sowie  $d\mathbf{A}_0 = \mathbf{n}_0dA_0$  entsprechend ein gerichtetes Flächenelement in der Referenzkonfiguration mit Normalenrichtung  $\mathbf{n}_0$  und Fläche  $dA_0$ .

**Push-Forward  $\Phi_*$  und Pull-Back  $\Phi^*$**  Der Push-Forward bzw. Pull-Back Operator  $\Phi_*$  bzw.  $\Phi^*$  transformiert tensorielle Größen zweiter Stufe zwischen Referenz- und Momentankonfiguration. Dabei existieren jeweils vier unterschiedliche Variationen, die auf Grundlage der allgemeinen Formulierung der Kontinuumsmechanik in krummlinigen Koordinaten eingeführt sind, *cf.* Başar und Weichert (2000). Auch wenn hier lediglich orthogonale, kartesische Koordinaten betrachtet werden, werden nachfolgend die jeweils vier Möglichkeiten angegeben.

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Eine materielle Grösse  $(\bullet)_r$  wird durch Anwendung des Push-Forward Operators in die Momentankonfiguration abgebildet:

$$\text{Push-Forward} \quad \Phi_{*b}((\bullet)_r) = \mathbf{F}^{-T} \cdot (\bullet)_r \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.37a)$$

$$\Phi_{*\sharp}((\bullet)_r) = \mathbf{F} \cdot (\bullet)_r \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.37b)$$

$$\Phi_{*b\sharp}((\bullet)_r) = \mathbf{F}^{-T} \cdot (\bullet)_r \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.37c)$$

$$\Phi_{*\sharp b}((\bullet)_r) = \mathbf{F} \cdot (\bullet)_r \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.37d)$$

Entsprechend wird eine räumliche Grösse  $(\bullet)_c$  durch Anwendung des Pull-Back Operators in die Referenzkonfiguration abgebildet:

$$\text{Pull-Back} \quad \Phi^{*b}((\bullet)_c) = \mathbf{F}^T \cdot (\bullet)_c \cdot \mathbf{F} \quad (2.38a)$$

$$\Phi^{*\sharp}((\bullet)_c) = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\bullet)_c \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.38b)$$

$$\Phi^{*b\sharp}((\bullet)_c) = \mathbf{F}^T \cdot (\bullet)_c \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.38c)$$

$$\Phi^{*\sharp b}((\bullet)_c) = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\bullet)_c \cdot \mathbf{F} \quad (2.38d)$$

Die Indizes 'b' und 'sharp' weisen dabei auf die unterschiedlichen Varianten hin. Als Beispiel sei an dieser Stelle auf die Zusammenhänge

$$\mathbf{E}^{(A)} = \Phi_{*b}(\mathbf{E}^{(G)}) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_E = \Phi_{*\sharp}(\mathbf{C}_P^{-1}) \quad (2.39)$$

zwischen dem ALMANSI- und GREEN-Verzerrungstensor bzw. dem linken elastischen und rechten plastischen CAUCHY-GREEN-Deformationstensor hingewiesen.

**LIE-Ableitung**  $\mathcal{L}_v$  Die LIE-Ableitung  $\mathcal{L}_v$  entspricht einer speziellen Zeitableitung einer räumlichen Grösse: Zunächst wird diese Grösse mittels Pull-Back Operator in die Referenzkonfiguration zurück transformiert, dort zeitlich differenziert und anschließend wieder in die Momentankonfiguration mittels Push-Forward Operator vorgeschoben

$$\mathcal{L}_v((\bullet)_c) := \Phi_* \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \Phi^*((\bullet)_c) \right) \right\} . \quad (2.40)$$

Beispielsweise erhält man infolge der Beziehungen

$$\Phi^{*b}(\mathbf{E}^{(A)}) = \mathbf{E}^{(G)}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}^{(G)}}{\partial t} = \dot{\mathbf{E}}^{(G)} \quad \text{und} \quad \Phi_{*b}(\dot{\mathbf{E}}^{(G)}) = \mathbf{D} \quad (2.41)$$

mit der LIE-Ableitung den einfachen Zusammenhang

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{E}^{(A)}) = \mathbf{D} \quad (2.42)$$

zwischen ALMANSI-EULER-Verzerrungstensor und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor.

## 2.2 Spannungsgrößen

Die Oberfläche  $S$  stellt entweder die natürliche Berandung des Körpers  $\mathcal{B}_t$  in der Momentankonfiguration oder eine virtuelle Schnittfläche durch diesen Körper dar, wie in *Bild 2.4a* veranschaulicht. Der an einem Teil dieser Fläche  $\Delta S$  mit der Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  angreifende Kraftvektor  $\Delta \mathbf{f}$  führt im Grenzfall

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} \right] = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \quad (2.43)$$

auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  (Kraft pro Einheitsfläche). Dieser definiert durch

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.44)$$

den räumlichen CAUCHYSchen Spannungstensor  $\mathbf{T}$ , vgl. *Bild 2.4b*. Die CAUCHY-Spannungen  $\mathbf{T}$  repräsentieren den wahren Spannungszustand eines Punktes des verformten Kontinuums. Alle weiteren Spannungsgrößen entsprechen Skalierungen und/oder Transformationen auf andere Konfigurationen: Die KIRCHHOFF-Spannungen

$$\mathbf{K} := J\mathbf{T} \quad (2.45)$$

sind als mit der JACOBI-Determinante gewichtete CAUCHY-Spannungen definiert. Die Ersten-PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen

$$\mathbf{P} := J\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}_\star := J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad (2.46)$$

entsprechen dem räumlichen Spannungsvektor bezogen auf die Referenz-Einheitsfläche. Insofern handelt es sich bei  $\mathbf{P} = P_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j$  bzw.  $\mathbf{P}_\star = P_{\star ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{e}_j$  um Zweifeld-Tensoren, die zwischen Momentan- und Referenzkonfiguration agieren. Unter Vorwegnahme der Symmetrie des CAUCHY'schen Spannungstensors (*cf.* Gl. 2.57) entspricht die eine Definition in (2.46) genau der Transponierten der anderen Definition, *i.e.*  $\mathbf{P}_\star = \mathbf{P}^T$ . Die Zweiten-PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen

$$\mathbf{S} := J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \Phi^{\star\#}(\mathbf{K}) \quad (2.47)$$

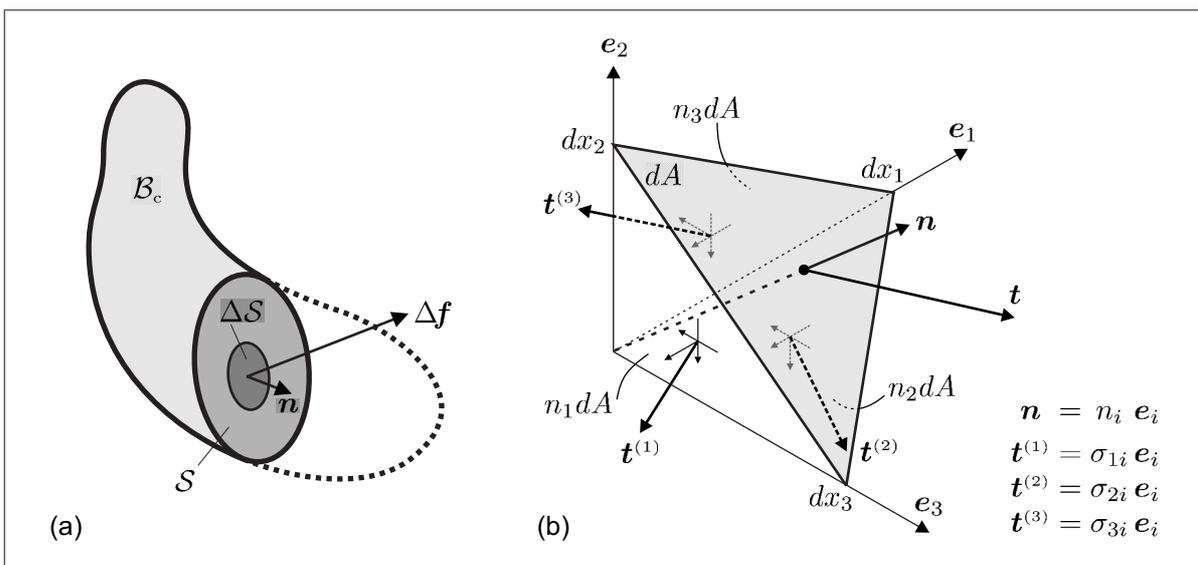


Bild 2.4: (a) Kraftvektor am virtuellen Schnittufer des verformten Kontinuums und (b) CAUCHY'sches Spannungstetraeder

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

entsprechen der Transformation der KIRCHHOFF-Spannungen auf die Referenzkonfiguration mittels Pull-Back Operator. Die zugrunde liegenden Transformationen zwischen den genannten Spannungstensoren sind in *Tabelle 2.1* zusammengefasst.

*Tabelle 2.1: Beziehungen zwischen den Spannungstensoren*

	CAUCHY	KIRCHHOFF	1.-PIOLA-KIRCHHOFF	2.-PIOLA-KIRCHHOFF
$\mathbf{T} =$		$J^{-1}\mathbf{K}$	$J^{-1}\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$	$J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$
$\mathbf{K} =$	$J\mathbf{T}$		$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$
$\mathbf{P} =$	$J\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-T}$		$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$
$\mathbf{S} =$	$J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P}$	

## 2.3 Bilanzgleichungen

### 2.3.1 Massenbilanz

Die Masse  $\mathcal{M}$  eines Körpers bleibt während seiner Bewegung und Deformation erhalten, d. h. sie ist in der Momentan- und Anfangskonfiguration äquivalent

$$\mathcal{M} = \int_{\mathcal{B}_c} \varrho dV = \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0 dV_0, \quad (2.48)$$

wobei darin  $\varrho = \varrho_r(\mathbf{X}, t) = \varrho_c(\mathbf{x}, t)$  die räumlichen Massendichteverteilung zu einem Zeitpunkt  $t$  und dementsprechend  $\varrho_0$  die anfängliche Massendichteverteilung zum Zeitpunkt  $t = 0$  bezeichnet. Mit (2.35) führt dies auf die lokale Form

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{dV}{dV_0} = J. \quad (2.49)$$

Der Satz der Massenerhaltung impliziert direkt, dass die zeitliche Änderung der Gesamtmasse des Körpers gleich null ist. Unter Verwendung der materiellen Zeitableitung zeitveränderlicher Gebietsintegrale folgt als lokale Form die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\mathcal{M}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_c \text{ und } \forall t \quad (2.50)$$

mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eines Partikels: Für ein räumlich begrenztes Gebiet entspricht die zeitliche Änderung der Masse in diesem Gebiet dem Massenstrom über den Rand dieses Gebietes. Wird diese lokale Formulierung in der Referenzkonfiguration dargestellt, ergibt sich die triviale Aussage

$$\dot{\mathcal{M}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varrho}_0 = 0, \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_c \text{ und } \forall t \quad (2.51)$$

dass sich die anfängliche Massendichteverteilung zeitlich nicht ändert.

### 2.3.2 Mechanische Impulsbilanzen

Nach dem zweiten NEWTONSchen Axiom entspricht die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses bei der Bewegung eines Körpers der Summe aller an diesem Körper angreifenden Kräfte, i.e.  $\dot{\mathbf{I}} = \sum \mathcal{F}$ . Mit der zeitlichen Änderung des Gesamtimpulses gemäß

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_c} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{B}_c} \{(\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v})) \mathbf{v} + \rho \dot{\mathbf{v}}\} dV \quad (2.52)$$

folgt unter Berücksichtigung von (2.50) schließlich

$$\int_{\mathcal{B}_c} \rho \dot{\mathbf{v}} dV = \int_{\partial \mathcal{B}_c} \hat{\mathbf{t}} dA + \int_{\mathcal{B}_c} \rho \mathbf{b} dV, \quad (2.53)$$

wobei  $\hat{\mathbf{t}}$  den Spannungsvektor am Rand des Körpers und  $\mathbf{b}$  den im Körper angreifenden Volumenlastvektor bezeichnet. Unter Verwendung des GAUSSSchen Integralsatzes zur Umformung eines Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral folgt die lokale Impulsbilanz

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_c \text{ und } \forall t, \quad (2.54)$$

die zu jedem Zeitpunkt an jedem Punkt des Kontinuums erfüllt sein muss. Diese räumliche Bilanzgleichung lässt sich auch für die Menge aller materieller Punkte in der Referenzkonfiguration formulieren. Mit (2.49) sowie (2.22) und  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_c(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{b}_r(\mathbf{X}, t)$  folgt

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{DIV}(\mathbf{P}_\star) + \rho_0 \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_r \text{ und } \forall t. \quad (2.55)$$

Das Kräftegleichgewicht wird stets in der verformten Konfiguration gebildet, was in (2.55) lediglich durch materielle Größen ausgedrückt wird.

Besitzt der Impuls eines Punktes des Kontinuums eine Komponente senkrecht zum Ortsvektor  $\mathbf{x}$ , so führt dieser eine Drehbewegung aus. Aus der Drehimpulsbilanz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_c} [\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}] dV = \int_{\partial \mathcal{B}_c} [\mathbf{x} \times \hat{\mathbf{t}}] dA + \int_{\mathcal{B}_c} [\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b}] dV, \quad (2.56)$$

folgt unter Verwendung des Permutationssymbols für das Kreuzprodukt<sup>3</sup> und Ausnutzung der lokalen Bilanzgleichung (2.54) die Symmetrie des CAUCHYSchen Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2.57)$$

Mit den Beziehungen (2.45) bis (2.47) folgen daraus die äquivalenten Beziehungen

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T, \quad \mathbf{P}_\star = \mathbf{P}^T, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T. \quad (2.58)$$

<sup>3</sup>Für zwei Vektoren  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$  gilt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i$ , wobei die Definition des Permutationssymbols in Gleichung (A.19) auf Seite 151 angegeben ist.

### 2.3.3 Hauptsätze der Thermodynamik

**Erster Hauptsatz der Thermodynamik (Energieerhaltung)** Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass in einem abgeschlossenen System die zeitliche Änderung der Gesamtenergie der Summe aus Arbeitsleistung und Wärmeleistung entspricht. Die Gesamtenergie des Kontinuums setzt sich aus der kinetischen Energie  $\mathcal{K}$  und der inneren Energie  $\mathcal{U}$  zusammen, mit

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_c} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad \text{und} \quad \mathcal{U} = \int_{\mathcal{B}_c} \rho u_\epsilon dV, \quad (2.59)$$

wobei  $u_\epsilon$  die innere Energiedichte, d. h. den spezifischen Wert der inneren Energie, bezeichnet. Infolge von (2.53) ist die Arbeitsleistung  $\dot{\mathcal{A}}$  durch

$$\dot{\mathcal{A}} = \int_{\partial \mathcal{B}_c} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dA + \int_{\mathcal{B}_c} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \quad (2.60)$$

bestimmt. Die Wärmeleistung, d. h. die am geschlossenen System pro Zeiteinheit übertragene innere Energie, ergibt sich entsprechend gemäß

$$\dot{\mathcal{Q}} = - \int_{\partial \mathcal{B}_c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\theta dA + \int_{\mathcal{B}_c} \rho \zeta_\theta dV. \quad (2.61)$$

Darin bezeichnet  $\mathbf{q}_\theta$  den Wärmefluss über die Berandung des Kontinuums mit der nach außen gerichteten Normalen  $\mathbf{n}$  sowie  $\zeta_\theta$  die spezifische Wärmestrahlung. Für adiabatische Prozesse gilt  $\dot{\mathcal{Q}} = 0$ , d. h. dem System wird weder Wärme zu- noch abgeführt. Aus der Bilanz der Gesamtenergieeraten

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{K} + \mathcal{U}) = \dot{\mathcal{A}} + \dot{\mathcal{Q}} \quad (2.62)$$

folgt unter Berücksichtigung der Massenbilanz (2.50) sowie der Impulsbilanz (2.54) und der Drehimpulsbilanz (2.57) die innere Leistungsbilanz

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U} = \dot{\mathcal{A}}_{\text{in}} + \dot{\mathcal{Q}}, \quad (2.63)$$

wobei die innere Arbeitsleistung gemäß

$$\dot{\mathcal{A}}_{\text{in}} := \int_{\mathcal{B}_c} \mathbf{T} : \mathbf{D} dV \quad (2.64)$$

definiert ist. Die innere Energiebilanz (2.63) führt somit auf die lokale Form

$$\rho \dot{u}_\epsilon = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \text{div}(\mathbf{q}_\theta) + \rho \zeta_\theta, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_c \text{ und } \forall t \quad (2.65)$$

für die Menge aller räumlichen Punkte des Kontinuums. Den CAUCHY-Spannungstensor  $\mathbf{T}$  und den Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{D}$  nennt man daher zueinander thermodynamisch konjugierte Größen. Bezogen auf die Referenzkonfiguration ergeben sich die folgenden, äquivalenten thermodynamisch konjugierten Paare

$$\dot{\mathcal{A}}_{\text{in}} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{K} : \mathbf{D} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^{(\text{G})} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{M} dV_0, \quad (2.66)$$

so dass sich entsprechend die lokale Form der inneren Energiebilanz für die Menge aller materiellen Punkte des Kontinuums gemäß

$$\varrho_0 \dot{u}_\epsilon = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \text{DIV}(J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}_\theta) + \varrho_0 \zeta_\theta, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_r \text{ und } \forall t \quad (2.67)$$

formulieren lässt. Die Gesamtenergiebilanz (2.62) wird ebenfalls auch lokal, d. h. für jeden einzelnen Punkt des Kontinuums, formuliert. Es gilt dann

$$\frac{d}{dt}(\varrho e) + \varrho e \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\mathbf{h}) + \varrho \zeta_e, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_c \text{ und } \forall t, \text{ bzw.} \quad (2.68a)$$

$$\frac{d}{dt}(\varrho_0 e) = \text{DIV}(\mathbf{h}_r) + \varrho_0 \zeta_e, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_r \text{ und } \forall t \quad (2.68b)$$

wobei die allgemeinen Größen  $e$  für die Gesamtenergiedichte,  $\mathbf{h}$  für die Gesamtenergieflussdichte (mit  $\mathbf{h}_r = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{h}$ ) sowie  $\zeta_e$  für die Gesamtenergiequellrate eingeführt werden.

**Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik (Entropieungleichung)** Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik liefert eine Aussage über die Entropieproduktion in dem betrachteten System. Die Entropiebilanz besagt, dass die zeitliche Änderung der Entropie des geschlossenen Systems der Summe aus der Produktionsrate der Entropie, dem Entropiefluss über den Rand sowie der Quellrate der Entropie entspricht, *i.e.*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_c} \varrho \eta \, dV = \int_{\mathcal{B}_c} \varrho \pi \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_c} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi}_\eta \, dA + \int_{\mathcal{B}_c} \varrho \zeta_\eta \, dV \quad (2.69)$$

wobei  $\eta$  die Entropiedichte,  $\pi$  die Entropieproduktionsratendichte,  $\boldsymbol{\phi}_\eta$  den Entropiefluss und  $\zeta_\eta$  die Entropiequellratendichte bezeichnet. Lokal, d. h. für jeden einzelnen Punkt des Kontinuums, erhält man daraus

$$\frac{d}{dt}(J\varrho\eta)J^{-1} = \varrho \pi - \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}_\eta) + \varrho \zeta_\eta, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_c \text{ und } \forall t, \text{ bzw.} \quad (2.70a)$$

$$\frac{d}{dt}(\varrho_0 \eta) = \varrho_0 \pi - \text{DIV}(\boldsymbol{\phi}_{\eta r}) + \varrho_0 \zeta_\eta, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_r \text{ und } \forall t \quad (2.70b)$$

mit  $\boldsymbol{\phi}_{\eta r} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\phi}_\eta$ , wobei für die Produktionsratendichte der Entropie gewährleistet sein muss, dass diese nicht abnimmt, *i.e.*

$$\pi \geq 0. \quad (2.71)$$

Lediglich für reversible Prozesse, wie z. B. bei rein elastischen Vorgängen, wird keine Entropie produziert, d. h. es gilt  $\pi = 0$ . Durch Einführung der HELMHOLTZschen freien Energiedichte gemäß

$$\psi := u_\epsilon - \theta \eta, \quad (2.72)$$

mit den spezifischen Größen  $u_\epsilon$  und  $\eta$  für die innere Energiedichte bzw. Entropiedichte sowie der absoluten Temperatur  $\theta$  sind die lokale innere Energiebilanz und lokale Entropiebilanz miteinander verknüpft. Durch zeitliche Differentiation von (2.72) folgt

$$\varrho \dot{\psi} = \varrho \dot{u}_\epsilon - \varrho \dot{\theta} \eta - \varrho \theta \dot{\eta}, \quad (2.73)$$

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

und mit weiterer Berücksichtigung von (2.65) und (2.70a) unter Ausnutzung der Massenbilanz (2.49, 2.51), i.e.  $\frac{d}{dt}(J\rho\eta)J^{-1} = \rho\dot{\eta}$ , sowie den CLAUSIUS-DUHEM Beziehungen

$$\phi_\eta = \mathbf{q}_\theta/\theta, \quad \zeta_\eta = \zeta_\theta/\theta \quad (2.74)$$

folgt aus (2.73) mit (2.71) die Dissipationsungleichung

$$\delta_\epsilon := \rho\theta\pi = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho\dot{\theta}\eta - \nabla\ln\theta \cdot \mathbf{q}_\theta \geq 0 \quad (2.75a)$$

hier in der lokalen Form bezüglich der Momentankonfiguration. Für die Umformung ist ferner die Identität  $\nabla\ln\theta = 1/\theta \nabla\theta$  verwendet worden. Entsprechend folgt die Dissipationsungleichung bezüglich der Referenzkonfiguration durch Transformation zu

$$\delta_{\epsilon r} := \rho_0\theta\pi = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0\dot{\psi} - \rho_0\dot{\theta}\eta - \nabla_r\ln\theta \cdot \mathbf{q}_{\theta r} \geq 0 \quad (2.75b)$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kann keine zusätzliche Feldgleichung eines Randwertproblems abgeleitet werden, jedoch liefert er Einschränkungen für die konstitutiven Beziehungen, die verhindern, dass als Lösung der Feldgleichungen physikalisch nicht mögliche Prozesse resultieren.

## 2.4 Materialgleichungen

Die in den vorangegangenen Abschnitten eingeführten kinematischen Beziehungen und Bilanzgleichungen sind von den konkreten Materialeigenschaften unabhängig und sind für alle Kontinua gleichermaßen anzuwenden. Die Charakteristik eines speziellen Werkstoffs wird durch geeignete Materialgleichungen beschrieben, die das reale Werkstoffverhalten durch eine mathematische Formulierung idealisiert abbilden. Diese mechanischen konstitutiven Gleichungen stellen somit einen funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen dar, sowie in thermischer Hinsicht zwischen Wärmefluss und Temperatur und vervollständigen somit das zu lösende Gleichungssystem.

Bei der Formulierung von Materialgleichungen muss u. a. die Einhaltung der **Objektivität** der Gleichungen beachtet werden: Die realen Materialeigenschaften sind von der Wahl eines bestimmten Bezugssystems und den Bewegungen eines Beobachters im Raum unabhängig. Das bedeutet, dass die Materialgleichungen invariant gegenüber Starrkörpertranslationen und -rotationen sein müssen<sup>4</sup>. Ferner müssen die Stoffgleichungen im Sinne der **physikalischen Konsistenz** den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. Diesbezüglich ist außerdem zu beachten, dass die bei der Formulierung verwendeten Spannungs- und Verzerrungsgrößen zueinander thermodynamisch konjugierte Größen darstellen.

### 2.4.1 Hyperelastizität

Elastische Materialien, bei denen die geleistete Arbeit unabhängig von dem Belastungspfad ist, werden *hyperelastische* Materialien genannt. Dies ist der Fall, wenn für ein bestimmtes

<sup>4</sup>Eine weiterführende mathematische Betrachtung der Objektivität ist für materielle bzw. räumliche Tensoren verschiedener Stufe im Anhang wiedergegeben, siehe Abschnitt A.4.

Energiepotential  $\mathcal{W}$  die Spannungen, resultierend aus der Ableitung dieses Energiedichtepotentials nach den Verzerrungen, thermodynamisch konsistent zu diesen Verzerrungen sind. Beispielsweise folgen die zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen dann zu

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{E}^{(G)})}{\partial \mathbf{E}^{(G)}} = 2 \frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2.76)$$

hier für verschiedene Formen der Potentialfunktion,  $\tilde{\mathcal{W}}$  bzw.  $\check{\mathcal{W}}$ . Die zwischen zwei Verzerrungszuständen  $\mathbf{E}_1^{(G)}$  und  $\mathbf{E}_2^{(G)}$  geleistete bzw. gespeicherte Arbeit hängt so lediglich von den beiden Verzerrungszuständen, nicht jedoch von dem Deformations- bzw. Belastungspfad ab,

$$\int_{\mathbf{E}_1^{(G)}}^{\mathbf{E}_2^{(G)}} \mathbf{S} : d\mathbf{E}^{(G)} = \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{E}_2^{(G)}) - \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{E}_1^{(G)}). \quad (2.77)$$

Das SAINT VENANT-KIRCHHOFF Modell stellt diesbezüglich die einfachste hyperelastische Materialformulierung dar. Darin wird die aus der Theorie kleiner Deformationen bekannte konstitutive Beziehung auf die Beziehung zwischen zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen und GREEN-LAGRANGE-Verzerrungen übertragen, *i.e.*  $\mathbf{S} = \mathbf{C}_E : \mathbf{E}^{(G)}$ . Unter Verwendung der Materialtangente der Elastizitätstheorie

$$\mathbf{C}_E = \lambda_r \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_r \mathbf{I}^S \quad (2.78)$$

mit den beiden LAMÉ'schen Materialparametern  $\lambda_r$  und  $\mu_r$ , die über die Beziehungen

$$\mu_r = \frac{E_r}{2(1 + \nu_r)} \quad \text{und} \quad \lambda_r = \frac{\nu_r E_r}{(1 + \nu_r)(1 - 2\nu_r)} \quad (2.79)$$

mit dem Elastizitäts- bzw. YOUNG's-Modul  $E_r$  und der Querkontraktions- bzw. POISSON's-Zahl  $\nu_r$  verknüpft sind, setzt sich das freie Energiepotential dann für dieses Modell gemäß

$$\tilde{\mathcal{W}}^{\text{SEVK}}(\mathbf{E}^{(G)}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^{(G)} : \mathbf{C}_E : \mathbf{E}^{(G)} = \frac{1}{2} \lambda_r (\text{tr}(\mathbf{E}^{(G)}))^2 + \mu_r \mathbf{E}^{(G)} : \mathbf{E}^{(G)} \quad (2.80)$$

zusammen. Es ist zu beachten, dass die Formulierung von SAINT VENANT-KIRCHHOFF lediglich für solche Anwendungen eine geeignete Modellierung darstellt, bei denen finite Deformationen hauptsächlich infolge großer Rotationen, nicht jedoch infolge großer Verzerrungen, auftreten (Belytschko et al., 2001: S. 225).

Unter der Annahme anfänglich isotropen, d. h. richtungsunabhängigen Materialverhaltens kann die Potentialfunktion auch lediglich durch die Invarianten des rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors ausgedrückt werden, *i.e.*

$$\mathcal{W} = \check{\mathcal{W}}(\mathbf{E}^{(G)}) = \check{\mathcal{W}}(\mathbf{C}) = \check{\mathcal{W}}(I_C, II_C, III_C). \quad (2.81)$$

In Abhängigkeit dieser Invarianten sind für die unterschiedlichsten Materialien die verschiedensten Potentialfunktionen angegeben worden. Für Metalle eignet sich beispielsweise das kompressible Neo-HOOKE Potential, *i.e.*

$$\check{\mathcal{W}}^{\text{NH}}(I_C, II_C, III_C) = U(\sqrt{III_C}) + \frac{\mu_r}{2} (I_C - 3 - \ln(III_C)), \quad (2.82)$$

wobei für den volumetrischen Anteil  $U(J)$ , mit  $J = \sqrt{III_C}$ , typischerweise Funktionen in der Form

$$U(J) = \frac{\lambda_r}{2} (\ln J)^2, \quad \text{bzw.} \quad U(J) = \frac{\lambda_r}{4} (J^2 - 1 - \ln J) \quad (2.83)$$

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

angegeben werden. Hingegen eignen sich für andere Materialien alternative Beschreibungen des Freien Energiepotentials, wie z. B. für Gummi das Potential nach MOONEY-RIVLIN oder OGDEN, siehe u. a. Belytschko et al. (2001), Armero (2002), worauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird.

### 2.4.2 Plastizität und Viskoplastizität

Bei duktilem Materialverhalten stellt die Formulierung der inelastischen Prozesse einen wesentlichen Bestandteil der Materialmodellierung dar. Den Ausgangspunkt bildet die Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und inelastischen Anteil in der Form (2.18), i.e.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_P$ . Im Sinne der Beschreibung des elastischen Materialverhaltens durch ein hyperelastisches Potential folgt dann analog zu Abschnitt 2.4.1 mit

$$\tilde{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \check{\mathcal{W}}(\mathbf{C}_E)}{\partial \mathbf{C}_E} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{S}} = \Phi_E^{*\sharp}(\mathbf{K}) = \mathbf{F}_E^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}_E^{-T} \quad (2.84)$$

der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor bezogen auf die plastische Zwischenkonfiguration, der die auf diese Konfiguration zurückgezogene KIRCHHOFF-Spannung darstellt. Unter Verwendung der Potentialfunktion in Abhängigkeit der Invarianten (2.81) folgt hier

$$\mathbf{K} = 2\mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial \mathbf{C}_E} \cdot \mathbf{F}_E^T = 2\mathbf{F}_E \cdot \left( \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial I_{C_E}} \frac{\partial I_{C_E}}{\partial \mathbf{C}_E} + \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial II_{C_E}} \frac{\partial II_{C_E}}{\partial \mathbf{C}_E} + \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial III_{C_E}} \frac{\partial III_{C_E}}{\partial \mathbf{C}_E} \right) \cdot \mathbf{F}_E^T \quad (2.85)$$

und insbesondere unter Berücksichtigung der Ableitungen der Invarianten (siehe Gl. A.53 bis A.55 im Anhang A.3.3 ab Seite 157) folgt

$$\mathbf{K} = 2 \left( \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial I_{C_E}} + I_{C_E} \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial II_{C_E}} \right) \mathbf{B}_E - 2 \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial II_{C_E}} \mathbf{B}_E \cdot \mathbf{B}_E + 2 III_{C_E} \frac{\partial \check{\mathcal{W}}}{\partial III_{C_E}} \mathbf{I} \quad (2.86)$$

für die KIRCHHOFF-Spannungen.

Der Zuwachs der inelastischen Deformationen wird durch die Fließregel beschrieben. Durch Überlegungen aus der Kristallplastizität ist für die Fließregel die Form

$$\tilde{\mathbf{L}}_P = \dot{\mathbf{F}}_P \cdot \mathbf{F}_P^{-1} = \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{M}}_P \quad (2.87)$$

motiviert, mit dem plastischen Multiplikator  $\dot{\lambda}$  und der Richtung des plastischen Zuwachses  $\tilde{\mathbf{M}}_P$  bezogen auf die plastische Zwischenkonfiguration, bzw. mit  $\mathbf{M}_P = \mathbf{F}_P^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_P \cdot \mathbf{F}_P$  bezogen auf die Referenzkonfiguration. Insbesondere folgt daraus mit

$$\dot{\mathbf{F}}_P = \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{M}}_P \cdot \mathbf{F}_P = \dot{\lambda} \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{M}_P \quad (2.88)$$

die Entwicklungsgleichung des plastischen Anteils des Deformationsgradienten. Durch Einführung eines plastischen Fließpotentials  $\Psi$  resultiert die Richtung des plastischen Zuwachses aus der Ableitung von  $\Psi$  nach den Spannungen. Unter Berücksichtigung des symmetrischen Anteils von (2.87) gemäß (2.30) folgt dann beispielsweise mit

$$\tilde{\mathbf{D}}_P = \dot{\lambda} \text{sym}(\mathbf{C}_E \cdot \tilde{\mathbf{M}}_P) = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} \quad (2.89)$$

die Fließregel bezogen auf die Zwischenkonfiguration, ausgedrückt in Abhängigkeit des plastischen Fließpotentials. Unter Beachtung der Beziehung (2.31)<sub>2</sub> sowie der aus (2.84)<sub>2</sub> resultierenden Identität

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} = \mathbf{F}_E^{-T} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} \cdot \mathbf{F}_E^{-1} \quad (2.90)$$

folgt aus (2.89) entsprechend mit

$$\mathbf{D}_P = \dot{\lambda} \operatorname{sym}(\mathbf{F}_E \cdot \tilde{\mathbf{M}}_P \cdot \mathbf{F}_E^{-1}) = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} \quad (2.91)$$

die Fließregel bezüglich der Momentankonfiguration. Ist die plastische Fließrichtung zudem proportional zu der Normalen der Fließfläche, *i.e.*

$$\partial_{\tilde{\mathbf{S}}} \Psi \sim \partial_{\tilde{\mathbf{S}}} \phi \quad \text{bzw.} \quad \partial_{\mathbf{K}} \Psi \sim \partial_{\mathbf{K}} \phi, \quad (2.92)$$

so werden Gleichungen (2.89) bzw. (2.91) als *assoziierte* Fließregel bezeichnet, anderenfalls als *nicht-assoziierte* Fließregel. Für die Modellierung von metallischen Werkstoffen wird typischerweise eine assoziative Fließregel angewendet; *nicht-assoziiative* Fließregeln werden beispielsweise in der Bodenmechanik berücksichtigt.

Für den antisymmetrischen Anteil  $\mathbf{W}_P$  existieren je nach Anwendungsbereich zusätzlich Entwicklungsgleichungen, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird. Typischerweise wird im Rahmen von Formulierungen für metallische Werkstoffe der antisymmetrische Anteil zu null gesetzt, *i.e.*  $\mathbf{W}_P = \mathbf{0}$ .

In dem Fall *ratenunabhängiger Plastizität* dient für die Unterscheidung, ob ein elastischer oder inelastischer Zustand vorliegt, die Untersuchung der Fließfläche

$$\phi = \phi(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \phi(\mathbf{K}, \mathbf{q}) = 0, \quad (2.93)$$

hier sowohl in Abhängigkeit der Spannung der Zwischen- als auch der Momentankonfiguration dargestellt. Desweiteren bezeichnet  $\tilde{\mathbf{q}}$  bzw.  $\mathbf{q}$  den entsprechenden Vektor der inneren Größen. Beispiele für skalare innere Größen sind die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung oder der Anteil des Hohlraumvolumens. Der Rückspannungstensor bei Modellen mit kinematischer Verfestigung ist hingegen ein Beispiel für eine tensorielle innere Variable. Die Änderung der inneren Größen wird durch Entwicklungsgleichungen beschrieben, die allgemein in der Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{h}}(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{q}}) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\mathbf{K}, \mathbf{q}) \quad (2.94)$$

angegeben werden. Die jeweiligen Bedingungen für den Belastungs- und Entlastungsfall werden durch die KUHN-TUCKER-Bedingungen

$$\phi \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \phi \dot{\lambda} = 0 \quad (2.95)$$

beschrieben. Durch Einhaltung dieser Bedingungen wird gewährleistet, dass für einen elastischen Prozess,  $\phi < 0$ , kein plastischer Zuwachs auftritt,  $\dot{\lambda} = 0$ , sowie für plastische Zuwächse,  $\dot{\lambda} > 0$ , die Fließbedingung  $\phi = 0$ , nicht verletzt wird. Für inelastische Prozesse wird der Wert des plastischen Multiplikators dann durch die Konsistenzbedingung

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} : \dot{\tilde{\mathbf{S}}} + \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} : \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0 \quad (2.96)$$

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

bestimmt, die hier bezüglich der Zwischenkonfiguration formuliert ist. Aus (2.84)<sub>1</sub>, zusammen mit der Identität  $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}_{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{E}}^{(G)} = \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{E}}$  sowie (2.31)<sub>1</sub> folgt

$$\dot{\tilde{\mathbf{S}}} = \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} : (\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{D}}_{\mathbf{P}}) , \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} = \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{W}}}{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{E}}^{(G)} \partial \mathbf{E}_{\mathbf{E}}^{(G)}} = 4 \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{W}}}{\partial \mathbf{C}_{\mathbf{E}} \partial \mathbf{C}_{\mathbf{E}}} . \quad (2.97)$$

Mit (2.89) in (2.97) und (2.94) in die Konsistenzbedingung (2.96) eingesetzt folgt der plastische Multiplikator zu

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} : \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} : \tilde{\mathbf{D}}}{\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} : \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} - \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \cdot \tilde{\mathbf{h}}} \quad (2.98)$$

so dass damit in (2.97), die inkrementelle Spannungs-Gesamtdehnungsbeziehung

$$\dot{\tilde{\mathbf{S}}} = \left[ \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} - \frac{\left( \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} \right) \otimes \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} : \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} \right)}{\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} : \mathbf{C}_{\mathbf{E}}^{\tilde{\mathbf{S}}} : \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} - \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \cdot \tilde{\mathbf{h}}} \right] : \tilde{\mathbf{D}} \quad := \mathbf{C}_{\mathbf{E}\mathbf{P}}^{\tilde{\mathbf{S}}} : \tilde{\mathbf{D}} \quad (2.99)$$

bezüglich der Zwischenkonfiguration folgt. Insbesondere für assoziierte Fließregeln gemäß (2.92) ergibt sich die Symmetrie dieser elastisch-plastischen Materialtangente  $\mathbf{C}_{\mathbf{E}\mathbf{P}}^{\tilde{\mathbf{S}}}$ . Anders als die materielle Zeitableitung der KIRCHHOFF-Spannung ist die Rate von  $\tilde{\mathbf{S}}$  objektiv. Die gesuchten Spannungen ergeben sich dann aus der entsprechenden Transformation von  $\tilde{\mathbf{S}}$ , z. B. die KIRCHHOFF-Spannungen gemäß (2.84)<sub>2</sub>. Ein typisches Beispiel für eine Fließfläche der ratenunabhängigen Plastizität ist die gemäß der  $J_2$ -Theorie, *i.e.*

$$\phi(\mathbf{K}, \varepsilon_{\mathbf{P}}) = \sigma_{\mathbf{v}} - \sigma_{\mathbf{Y}}(\varepsilon_{\mathbf{P}}) , \quad (2.100)$$

mit der von MISES Vergleichsspannung

$$\sigma_{\mathbf{v}} := \sqrt{3\mathbb{I}_{\mathbf{K}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}(\mathbf{K}) : \text{dev}(\mathbf{K})} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}(\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{E}}) : \text{dev}(\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{E}})} \quad (2.101)$$

und einer von der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung abhängigen Fließspannung  $\sigma_{\mathbf{Y}}(\varepsilon_{\mathbf{P}})$ . Die relevante Ableitung folgt dann mit

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{K}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{K})) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{C}_{\mathbf{E}} \cdot \text{sgn}(\text{dev}(\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{E}})) . \quad (2.102)$$

Hingegen wird bei Modellen *ratenabhängiger Plastizität* der plastische Multiplikator, der der plastischen Vergleichsdehnrate entspricht,  $\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon}_{\mathbf{P}}$ , aus einer direkten Funktionsvorschrift bestimmt

$$\dot{\lambda} = \dot{\varepsilon}_{\mathbf{P}} = g(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{q}}) = g(\mathbf{K}, \mathbf{q}) . \quad (2.103)$$

Für die Formulierung der Bestimmungsfunktion der plastischen Vergleichsdehnrate existieren im Wesentlichen zwei unterschiedliche Herangehensweisen: Bei sogenannten Überspannungsmodellen mit

$$g(\mathbf{K}, \mathbf{q}) = \frac{\phi(\mathbf{K}, \mathbf{q})}{\tilde{\gamma}_{\text{or}}} \quad (2.104)$$

folgt die plastische Vergleichsdehnrate aus dem Quotienten der Überspannung  $\phi$  und der Viskosität  $\bar{\gamma}_{0r}$ . Ein typisches Beispiel für eine Überspannungsfunktion ist durch das Modell nach PERZYNA

$$\phi(\mathbf{K}, \varepsilon_P, \boldsymbol{\alpha}) = \sigma_Y(\varepsilon_P) \left\langle \frac{\sigma_v(\mathbf{K} - \boldsymbol{\alpha})}{\sigma_Y(\varepsilon_P)} - 1 \right\rangle^n \quad (2.105)$$

gegeben, hier in Abhängigkeit der Vergleichsspannung  $\sigma_v = \sqrt{3/2} \|\text{dev}(\mathbf{K} - \boldsymbol{\alpha})\|$  als Funktion des KIRCHHOFF- und Rückspannungstensors, sowie der statischen Fließspannung  $\sigma_Y(\varepsilon_P)$  als Funktion der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung. Darüber hinaus ist mit  $n$  ein raten-sensitiver Materialparameter eingeführt. Die MACAULAY-Klammer (Rampenfunktion)

$$\langle \bullet \rangle := \frac{1}{2}(\bullet + \text{abs}(\bullet)) = \begin{cases} 0, & \text{für } \bullet \leq 0 \\ \bullet, & \text{für } \bullet \geq 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

gewährleistet, dass für Spannungszustände mit einer niedrigeren Vergleichsspannung als der statischen Fließspannung,  $\sigma_v < \sigma_Y$ , ein elastischer Prozess modelliert wird, i.e.  $\dot{\varepsilon}_P = 0$ . Alternativ kann die Bestimmungsfunktion der plastischen Vergleichsdehnrate auch ohne explizite Angabe einer Fließfläche formuliert werden. Wie beispielsweise in dem Modell von Peirce et al. (1984) vorgeschlagen, folgt die plastische Vergleichsdehnrate aus der Vorschrift

$$g(\mathbf{K}, \varepsilon_P, \boldsymbol{\alpha}) = \dot{\varepsilon}_0 \left( \frac{\sigma_v(\mathbf{K} - \boldsymbol{\alpha})}{\sigma_Y(\varepsilon_P)} \right)^{1/m}. \quad (2.107)$$

Darin stellt  $\sigma_Y(\varepsilon_P)$  eine Art Referenzspannung, und  $\dot{\varepsilon}_0$  eine Referenzdehnrate dar. Entspricht für einen bestimmten Spannungszustand die Vergleichsspannung genau dieser Referenzspannung,  $\sigma_v = \sigma_Y$ , so entspricht die plastische Vergleichsdehnrate eben dieser Referenzdehnrate,  $\dot{\varepsilon}_P = \dot{\varepsilon}_0$ . Für Spannungszustände mit einer niedrigeren Vergleichsspannung als der Referenzspannung,  $\sigma_v < \sigma_Y$ , ergeben sich hier weiterhin positive plastische Zuwächse,  $0 < \dot{\varepsilon}_P < \dot{\varepsilon}_0$ , jedoch sind diese Zuwächse für  $0 < m \ll 1$  wesentlich kleiner als die Referenzdehnrate, so dass dann ein „nahezu“ elastisches Verhalten folgt,  $\dot{\varepsilon}_P \approx 0$ .

### 2.4.3 Wärmeleitung

Die Materialgleichung für den Temperaturzustand wird durch das FOURIER'sche Gesetz der Wärmeleitung beschrieben und verknüpft gemäß

$$\mathbf{q}_\theta = -\kappa_{\theta r} \nabla \theta. \quad (2.108)$$

den Wärmefluss  $\mathbf{q}_\theta$  mit dem Gradienten der Temperatur  $\nabla \theta$ . Desweiteren bezeichnet  $\kappa_{\theta r}$  den Parameter der Wärmeleitfähigkeit. Das Vorzeichen ist derart gewählt, dass der Wärmefluss positive Werte für Änderungen von wärmeren zu kälteren Zuständen annimmt.

Die spezifische Wärmeleitzeit  $\bar{t}_\theta$  kennzeichnet den Zeitraum, in dem die Wärmeleitung Einfluss auf den Temperaturzustand im Kontinuum nimmt, und ist mit

$$\bar{t}_\theta \approx \frac{\rho_r c_{\theta r}}{\kappa_{\theta r}} \ell_{\text{char}}^2 \quad (2.109)$$

in Abhängigkeit der Parameter der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_{\theta r}$ , Dichte  $\rho_r$  und Wärmespeicherkapazität  $c_{\theta r}$ , sowie einer charakteristischen Länge  $\ell_{\text{char}}$  gegeben, siehe Estrin et al. (1997).

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die charakteristische Länge stellt dabei die Größe des Bereichs dar, in der der Temperaturgradient maßgebend ist und liegt für Lokalisierungsprozesse in der Größenordnung der Lokalisierungsbreite. Für Zeitspannen, die kürzer als die spezifische Wärmeleitzeit sind, *i.e.*  $t_{\text{exp}} < \bar{t}_\theta$ , ist der Temperaturfluss infolge der Wärmeleitfähigkeit des Materials vernachlässigbar, so dass die Annahme adiabatischer Bedingungen gerechtfertigt ist. Diese Bedingung ist typischerweise für Hochgeschwindigkeitsprozesse erfüllt; eine genaue Auswertung folgt bei der Berechnung konkreter Anwendungsbeispiele.

### 2.4.4 Thermomechanische Kopplungen

Ein realer Werkstoff zeichnet sich nicht nur durch rein elastisches, oder elasto-plastisches Materialverhalten aus. Die Temperatur hat einen wesentlichen Einfluss auf das mechanische Verformungsverhalten. In der Regel führt ein erhöhter Temperaturzustand auf eine geringere Belastbarkeit des Materials verglichen mit einem Referenz-Temperaturzustand. Dieses Verhalten wird bei der Werkstoffmodellierung durch geeignete, temperaturabhängige Funktionen und/oder temperaturabhängige Materialparameter berücksichtigt. Aufgrund der hohen Relevanz dieser Abhängigkeit wird darauf gesondert in Kapitel 3 eingegangen.

Desweiteren bewirken Temperaturerhöhungen einen volumetrischen Verzerrungszustand

$$\varepsilon_T = \alpha_{\theta T}(\theta - \theta_R)\mathbf{I}, \quad (2.110)$$

mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{\theta T}$  und einer Referenztemperatur  $\theta_R$ . Bei einer Dehnungsbehinderung treten daher infolge einer Temperaturerhöhung thermisch induzierte Spannungen auf. Dieses Verhalten wird bei der Formulierung großer Deformationen durch einen thermischen Anteil der freien Energiedichte berücksichtigt, der auf einer verallgemeinerten DUHAMEL-NEUMANN-Formulierung des HOOKE'schen Gesetzes (Malvern, 1969: S. 290) basiert

$$\psi_T(\theta, \mathbb{I}C_E) = -3\kappa_T \alpha_{\theta T}(\theta - \theta_R) \ln(\mathbb{I}C_E). \quad (2.111)$$

Hier bezeichnet  $\kappa_T$  den Kompressionsmodul (nicht zu verwechseln mit dem Wärmeleitkoeffizienten  $\kappa_{\theta T}$ ), der gemäß

$$\kappa_T = \lambda_T + \frac{2}{3}\mu_T = \frac{E_T}{3(1 - 2\nu_T)} \quad (2.112)$$

mit den elastischen LAMÉ-Konstanten  $\lambda_T$  und  $\mu_T$ , bzw. über (2.79) mit dem Elastizitätsmodul  $E_T$  und der Querkontraktionszahl  $\nu_T$  verknüpft ist.

Andererseits beeinflusst das mechanische Verformungsverhalten maßgeblich den Temperaturzustand. Nur ein geringer Teil der infolge plastischer Verformung dissipierten Energie beschreibt die in den Versetzungsstrukturen gespeicherte Arbeit. Der überwiegende Anteil wird in Wärme umgewandelt, so dass dieser Beitrag zur Temperatur-Quellrate  $\zeta_\theta$  durch

$$\zeta_\theta = \beta_T W_P, \quad \text{mit} \quad W_P = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}_P = \sigma_v \dot{\varepsilon}_P \quad (2.113)$$

angegeben werden kann. In dieser Beziehung stellt  $\beta_T$  den TAYLOR-QUINNEY-Koeffizienten (nach Taylor und Quinney, 1937) dar und  $W_P$  bezeichnet die plastische Leistung. Prinzipiell lässt sich der durch  $\beta_T$  beschriebene Anteil aus thermodynamischen Betrachtungen auch konkret bestimmen, worauf in Kapitel 3 und 4 dieser Arbeit eingegangen wird. Üblicherweise wird allerdings mit  $\beta_T = 0.85 - 1.0$  der TAYLOR-QUINNEY-Koeffizient als konstant angenommen.

### 3 Lokale Modellformulierung

Basierend auf den kontinuumsmechanischen Grundlagen werden in diesem Kapitel zunächst die lokalen Gleichungen für die Modellierung von Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen beschrieben. Ferner wird für die lokale Modellformulierung die Bezeichnung GIV (*Generalized Internal Variable*) eingeführt, da die plastische Vergleichsdehnung als innere Größe betrachtet wird.

#### 3.1 Modellierungsansätze

Für die Modellierung des Werkstoffverhaltens unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen sind Effekte wie eine allgemeine Dehnungsverfestigung, eine zusätzliche dehnratenabhängige Verfestigung sowie eine temperaturabhängige Entfestigung maßgeblich zu berücksichtigen. Die allgemeine Dehnungsverfestigung eines Werkstoffs ist dabei auf die vorhandene Versetzungsdichte in dem Material, d. h. Einlagerungen bzw. Substitutionen von Fremdatomen in der Kristallgitterstruktur sowie das Vorhandensein von Fehlstellen (z. B. Stufen- oder Schraubenversetzungen), zurückzuführen. Diese Versetzungen behindern die Deformation und führen so zu einer erhöhten Festigkeit.

Experimentelle Untersuchungen von Zener und Hollomon (1944) an Stählen unter Zugbelastung und adiabatischen sowie isothermen Zuständen haben ferner die Dehnratenabhängigkeit des Werkstoffs aufgezeigt. Dabei wurde festgestellt, dass mit zunehmender Dehnrate das Material eine höhere Belastbarkeit erreicht. Dieser Effekt ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass infolge einer höheren Belastungsgeschwindigkeit nicht ausreichend Zeit zur Überwindung der vorhandenen Versetzungsstrukturen, d. h. für die Versetzungsbewegung vorliegt. Insofern tritt infolge zunehmender Dehnraten eine zusätzliche, dehnratenabhängige Verfestigung auf.

Andererseits resultiert eine erhöhte Temperatur im Werkstoff in einer Reduzierung der Belastbarkeit. Dieses Verhalten ist darauf zurückzuführen, dass die zur Bewegung von Versetzungen erforderliche Reibspannung mit steigender Temperatur abnimmt. Insbesondere führen die Versetzungen in dem Temperaturbereich oberhalb von etwa 30% der Schmelztemperatur des Metalls thermisch aktivierte Bewegungen durch, so dass sich durch Verformung gebildete Versetzungsstrukturen umordnen oder sogar auflösen können. Durch derartige Versetzungs-umordnungen wird die sich im Zuge der plastischen Verformung einstellende Verfestigung mit einem unmittelbar bzw. später nachfolgenden Entfestigungsprozess überlagert.

In der Vergangenheit sind für die mathematische Beschreibung dieser Effekte eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle formuliert worden. Generell wird dabei zwischen zwei Herangehensweisen unterschieden: Zum einen können die beschriebenen Phänomene und gemessenen experimentellen Daten durch möglichst einfache mathematische Funktionen angepasst werden. Diese Modelle werden daher phänomenologische Modelle genannt. Zum anderen wird versucht, durch eine genauere Untersuchung und Beschreibung der zugrunde liegenden physikalischen Prozesse das Gesamtverhalten des Materials anzunähern, weshalb diese Modelle physikalisch-basiert sind. Nachfolgend sind einige wesentliche Arbeiten beider Klassen kurz beschrieben; für eine umfassendere Übersicht ist auf die Monographien von Bai und Dodd (1992) oder Wright (2002) verwiesen.

### 3. Lokale Modellformulierung

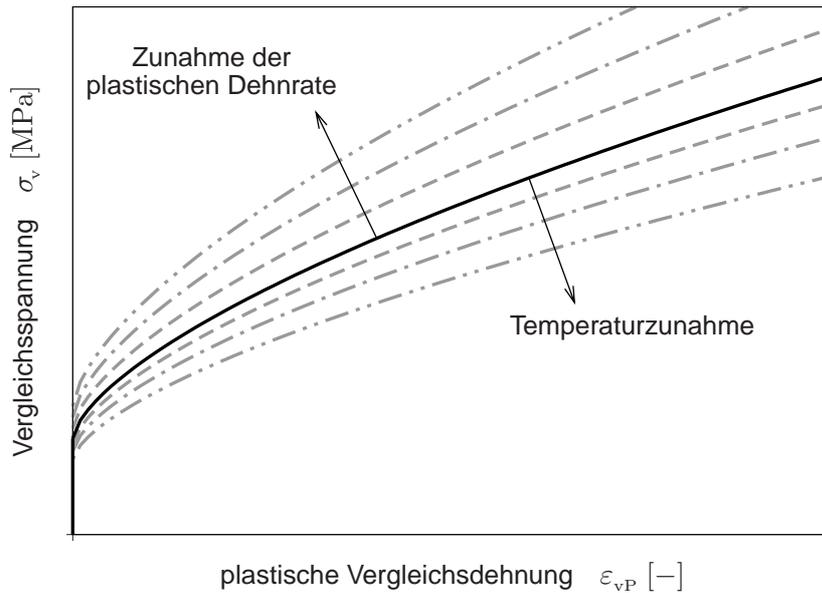


Bild 3.1: Prinzipielles Spannungs- plastisches Dehnungsverhalten von Metallen für verschiedene isotherme Zustände und unterschiedliche, konstante Dehnrates

**Phänomenologische Modelle** Eine Verallgemeinerung der phänomenologischen Modelle ist durch den multiplikativen Zusammenhang für die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = f_h(\epsilon_{vP}) f_r(\dot{\epsilon}_{vP}) f_t(\theta) \quad (3.1)$$

gegeben. Darin bezeichnet  $f_h(\epsilon_{vP})$  eine Funktion, die die allgemeine Verfestigung des Materials in Abhängigkeit der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung beschreibt; desweiteren kennzeichnen  $f_r(\dot{\epsilon}_{vP})$  und  $f_t(\theta)$  die entsprechenden dehnrates- und temperaturabhängigen Faktoren. Die genannten, prinzipiellen Effekte sind schematisch in Bild 3.1 dargestellt.

Potenzgesetz-Modelle in der Form

$$\sigma_v = K \epsilon_{vP}^n \dot{\epsilon}_{vP}^m \theta^{-v} \quad (3.2)$$

stellen diesbezüglich einen sehr einfachen funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen, Dehnrates und absoluter Temperatur dar. Hier sind die Potenzparameter  $n, m, v$  positive Werte; der Parameter  $K$  kennzeichnet für kleine Werte von  $n$  eine Art anfängliche Fließspannung. Ein Nachteil dieses Modells in der Form (3.2) besteht in dem unphysikalischen Zusammenhang, dass für kleine plastische Dehnrates die Spannung verschwindet, weshalb diese Formulierung lediglich für Prozesse mit hohen Dehnrates eingesetzt wird, wobei der elastische Anteil der Verzerrung häufig vernachlässigt wird, siehe u. a. Molinari und Clifton (1987), Fressengeas und Molinari (1987) oder Gioia und Ortiz (1996).

Litoński (1977) konkretisiert den Zusammenhang (3.3) gemäß

$$\sigma_v = A(\epsilon_0 + \epsilon_{vP})^n (1 + B\dot{\epsilon}_{vP})^m (1 - C(\theta - \theta_R)). \quad (3.3)$$

Darin stellen die Größen  $A, \epsilon_0, n, B, m, C, \theta_R$  die Materialparameter des Modells dar. Desweiteren beschreiben Johnson und Cook (1983) das Werkstoffverhalten durch die Beziehung

$$\sigma_v = (A + B(\epsilon_{vP})^n)(1 + C\ln(\dot{\epsilon}_{vP}/\dot{\epsilon}_0))(1 - [T(\theta)]^m) \quad (3.4)$$

mit der homologen Temperatur gemäß

$$T = T(\theta) := \begin{cases} 0 & , \text{ für } \theta \leq \theta_R \\ (\theta - \theta_R)/(\theta_M - \theta_R) & , \text{ für } \theta_R \leq \theta \leq \theta_M \\ 1 & , \text{ für } \theta_M \leq \theta \end{cases} \quad (3.5)$$

die infolge der linearen Interpolation zwischen Raumtemperatur  $\theta_R$  und Schmelztemperatur  $\theta_M$  einer dimensionslosen Größe mit Werten zwischen null und eins entspricht. Die Materialparameter dieses Modells sind durch  $A, B, n$  für das allgemeine Verfestigungsverhalten sowie durch  $C, \dot{\epsilon}_0$  für die Beschreibung der dehnratenabhängigen Verfestigung und durch  $m, \theta_R, \theta_M$  für die temperaturabhängige Entfestigung gegeben.

Weitere phänomenologische Modelle ergeben sich häufig durch geringfügige Modifikationen der beschriebenen Abhängigkeiten. Insbesondere für den thermischen Anteil existieren verschiedene Abhängigkeiten, die entweder direkt auf der absoluten Temperatur  $\theta$  oder auf der homologen Temperatur  $T$  basieren. Ferner lassen sich die Potenzfunktionen einfach per Reihenentwicklung in eine logarithmische Form überführen; es gilt

$$(\epsilon + B\dot{\epsilon}_{vP})^m = e^{m \ln(\epsilon + B\dot{\epsilon}_{vP})} = 1 + m \ln(\epsilon + B\dot{\epsilon}_{vP}) + \mathcal{O}((m \ln(\epsilon + B\dot{\epsilon}_{vP}))^2) \quad (3.6)$$

hier für den dehnratenabhängigen Faktor aus (3.2) mit  $\epsilon = 0$  und  $B = 1$  bzw. für den Faktor aus (3.3) mit  $\epsilon = 1$ . Die Terme höherer Ordnung können insbesondere dann vernachlässigt werden, wenn der Parameter  $m$  klein ist, was typischerweise für Metalle der Fall ist, i. d. R.  $m < 0.1$ .

**Physikalisch-basierte Modelle** Diese Gruppe von Modellen berücksichtigt die thermische Aktivierung der Versetzungsbewegung. Daher folgt die plastische Dehnrate der ARRHENIUS-Beziehung

$$\dot{\epsilon}_{vP} = \Gamma_0 e^{-G/(k_B\theta)} \quad (3.7)$$

mit der Aktivierungsenergie  $G$ , der BOLTZMANN-Konstanten  $k_B$  sowie der absoluten Temperatur  $\theta$ . Desweiteren bezeichnet  $\Gamma_0$  einen konstanten Faktor, der als Referenzdehnrate dient. Auch wenn dieses Vorgehen stärker physikalisch basiert ist als bei der Klasse phänomenologischer Modelle, so existieren auch hier einige Parameter, die ausschließlich empirisch gewonnen werden.

Beispielsweise erfolgt für das Modell nach Zerilli und Armstrong (1987) der Ansatz der Materialgleichung unter der Annahme, dass die Spannung einen sowohl thermischen als auch nicht-thermischen Anteil enthält. Desweiteren wird in dem Ansatz

$$\sigma_v = \begin{cases} \sigma_0 + C (\epsilon_{vP})^{1/2} \exp\{-\beta\theta\} \quad , & \text{(krz)} \\ \sigma_0 + C (\epsilon_{vP})^n + B \exp\{-\beta\theta\} \quad , & \text{(kfz)} \end{cases} \quad (3.8)$$

zwischen kubisch-raumzentrierten (krz) und kubisch-flächenzentrierten (kfz) Kristallgitterstrukturen unterschieden, um der Tatsache Rechnung zu tragen, dass bei krz Metallen die Verfestigung und thermische Aktivierung unabhängige Prozesse darstellen, während bei kfz Metallen diese beiden Prozesse stark gekoppelt sind. Der Koeffizient in der Exponentialfunktion,  $\beta$ , folgt ferner über den Ansatz der Aktivierungsenergie gemäß  $G \equiv k_B\theta(\beta - \beta_0)/\beta_1$  zu

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 \ln(\dot{\epsilon}_{vP}/\Gamma_0) \quad (3.9)$$

### 3. Lokale Modellformulierung

Die Materialparameter dieses Modells sind folglich durch  $\sigma_0, C, \beta_0, \beta_1$  und  $\Gamma_0$  sowie  $n$  bzw.  $B$  gekennzeichnet. Wright (2002) merkt hierzu an, dass obwohl dieser Formulierung einige physikalische Betrachtungen zugrunde liegen, die Gleichungen (3.8) ausschließlich empirisch gewonnen sind, um sie an experimentelle Daten anzupassen.

Das MTS-Modell (mechanical threshold stress nach Follansbee und Kocks, 1988) liefert über eine entsprechende Form für die thermische Aktivierungsenergie  $G$  letztendlich die Beziehung

$$\sigma_v = B + \kappa \left( 1 - (-\beta\theta \ln(\dot{\epsilon}_{vP}/\Gamma_0))^{1/q} \right)^{1/p}, \quad \text{für } 0 < p \leq 1 \text{ und } 1 \leq q \leq 2 \quad (3.10)$$

mit den Modellparametern  $B, \beta, \Gamma_0$  sowie den rein empirischen Konstanten  $p$  und  $q$ , die üblicherweise zu  $p = \frac{2}{3}$  und  $q = 2$  gewählt werden. Die allgemeine Verfestigung wird hier durch die Größe  $\kappa$  mit einer Entwicklungsgleichung in der Form  $\dot{\kappa} = f(\sigma_v, \kappa, \theta)$  angegeben.

## 3.2 Entwicklung der lokalen Materialgleichungen

### 3.2.1 Thermodynamischer Kontext

Die Berücksichtigung der standardmäßigen Formulierungen für die Größen in der Gesamtenergiebilanz (2.68b), *i.e.*

$$e = u_\epsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (3.11a)$$

für die lokale Gesamtenergiedichte  $e$  bestehend aus einem inneren Anteil  $u_\epsilon$  und einem kinetischen Anteil mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  sowie

$$\mathbf{h}_r = -\mathbf{q}_{\theta r} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{v} \quad (3.11b)$$

für den Gesamtenergiefluss  $\mathbf{h}_r$  bestehend aus dem inneren Energie-, d. h. Wärmefluss  $\mathbf{q}_{\theta r}$  und einem mechanischen Spannungsrandfluss gemäß  $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{v}$  und

$$\zeta_e = \zeta_\theta + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \quad (3.11c)$$

für die lokale Gesamtenergiequellratendichte  $\zeta_e$  bestehend aus einem thermischen Anteil  $\zeta_\theta$  sowie einem mechanischen Anteil  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ , führt unter Beachtung der notwendigen Bedingungen zur Erfüllung der Unabhängigkeit von dem gewählten Bezugssystem, *i.e.* Massenbilanz (2.51) sowie Impulsbilanz (2.55), auf die lokale innere Energiebilanz (2.67), *i.e.*

$$\varrho_0 \dot{u}_\epsilon = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \text{DIV}(\mathbf{q}_{\theta r}) + \varrho_0 \zeta_\theta \cdot \quad (3.12)$$

Desweiteren führt die Entropiebilanz (2.75b) durch Einführung der HELMHOLTZ'schen freien Energiedichte (2.72) und Beachtung der CLAUSIUS-DUHEM Beziehungen (2.74) auf die standardmäßige Ungleichungsform der Dissipationsrate (2.75b), *i.e.*

$$\delta_{er} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} - \varrho_0 \dot{\psi} - \varrho_0 \dot{\theta} \eta - \nabla_r \ln \theta \cdot \mathbf{q}_{\theta r} \geq 0, \quad (3.13)$$

hier unter Berücksichtigung der Identität  $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}$ .

Für diese Klasse lokaler Modelle wird die Form der freien Energiedichte  $\psi$  allgemein durch den funktionalen Zusammenhang

$$\psi = \psi(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{F}_P, \varepsilon_{vP}) \quad (3.14)$$

in Abhängigkeit der Temperatur  $\theta$ , des Gesamt-Deformationstensors  $\mathbf{C}$  sowie des plastischen Anteils des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_P$  und der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_{vP}$  beschrieben. Daraus folgt durch zeitliche Differentiation

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_P} : \dot{\mathbf{F}}_P + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vP}} \dot{\varepsilon}_{vP} \quad (3.15)$$

und in (3.13) eingesetzt dann

$$\begin{aligned} \delta_{\text{er}} = & \left( \frac{1}{2} \mathbf{S} - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}} - \varrho_0 \left( \eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} \\ & - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_P} : \dot{\mathbf{F}}_P - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vP}} \dot{\varepsilon}_{vP} - \mathbf{q}_{\theta T} \cdot \nabla_T \ln \theta . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ferner ist unter Beachtung der Entwicklungsgleichung des plastischen Deformationsgradienten (2.88), i.e.  $\dot{\mathbf{F}}_P = \dot{\varepsilon}_{vP} \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{M}_P$ , und durch Einführung einer zu  $\mathbf{M}_P$  konjugierten, spannungsähnlichen Größe gemäß

$$\boldsymbol{\Sigma} := -\varrho_0 \mathbf{F}_P^T \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_P} \quad (3.17)$$

ersichtlich, dass die Ungleichung  $\delta_{\text{er}} \geq 0$  nur dann zu erfüllen ist, wenn die Koeffizienten der 'linearen' Felder  $\dot{\theta}$  und  $\dot{\mathbf{C}}$  verschwinden. Mit diesem COLEMAN-NOLL Ansatz für thermodynamisch kompatible Prozesse, i.e.

$$\mathbf{S} = 2\varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} , \quad (3.18a)$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} , \quad (3.18b)$$

folgt der reduzierte Ausdruck der Dissipationsungleichung (3.16) zu

$$\delta_{\text{er}} = \left( \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{M}_P - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vP}} \right) \dot{\varepsilon}_{vP} - \mathbf{q}_{\theta T} \cdot \nabla_T \ln \theta . \quad (3.19)$$

Diese Beziehung motiviert den funktionalen Ansatz eines Dissipationspotentials  $\mathcal{D}$  in der Form

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\theta, \nabla_T \theta, \dot{\varepsilon}_{vP}) , \quad (3.20)$$

so dass die Dissipationsrate (3.19) allein durch diese Form des Dissipationspotentials bestimmt ist, i.e.

$$\delta_{\text{er}} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varepsilon}_{vP}} \dot{\varepsilon}_{vP} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_T \ln \theta} \cdot \nabla_T \ln \theta . \quad (3.21)$$

Folglich ist dann durch

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varepsilon}_{vP}} \equiv -\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \dot{\varepsilon}_{vP}} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{M}_P - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vP}} \quad (3.22)$$

### 3. Lokale Modellformulierung

die Entwicklungsgleichung für die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung  $\varepsilon_{vP}$  gegeben, und entsprechend folgt mit

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_r \ln \theta} = -\mathbf{q}_{\theta r} \quad (3.23)$$

die Beziehung für die Wärmeleitung. Insbesondere für den Fall, dass das Dissipationspotential nicht von dem Temperaturgradienten abhängt, folgen adiabatische Bedingungen, *i.e.*  $\mathbf{q}_{\theta r} = \mathbf{0}$ . Unter Verwendung von (3.18b) mit (3.14) und (3.19) sowie mit der Definition der spezifischen Wärmekapazität gemäß

$$c_{\theta r} := -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad (3.24)$$

folgt in die Entropiebilanz (2.70b) eingesetzt, schließlich die Temperaturbilanz zu

$$\begin{aligned} \varrho_0 c_{\theta r} \dot{\theta} = & \frac{\theta}{2} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} : \dot{\mathbf{C}} + \left( \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{M}_P - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{vP}} - \theta \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \theta} : \mathbf{M}_P + \varrho_0 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varepsilon_{vP}} \right) \dot{\varepsilon}_{vP} \\ & + \text{DIV}(-\mathbf{q}_{\theta r}) + \varrho_0 \zeta_{\theta} . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die Änderung der Temperatur entspricht demnach der Änderung eines sowohl ‚elastischen‘ als auch ‚plastischen‘ Anteils der gespeicherten Energie sowie dem Fluss und der Quellrate der Temperatur. Für adiabatische Prozesse entspricht diese Gleichung einer Evolutionsgleichung für die Temperatur.

#### 3.2.2 Thermohyperelasto-Thermoviskoplastizität

Die freie Energiedichte ist für das GIV-Modell nun mit

$$\psi^{\text{GIV}}(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{F}_P) = \psi_{\text{TE}}(\theta, \mathbf{F}_P^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_P^{-1}) \quad (3.26)$$

konkretisiert, wobei für isotropes Materialverhalten die Abhängigkeit von  $\mathbf{F}_P$  ausschließlich über die Inverse des rechten plastischen CAUCHY-GREEN Deformationstensors

$$\mathbf{G}_P := \mathbf{C}_P^{-1} = \mathbf{F}_P^{-1} \cdot \mathbf{F}_P^{-T} \quad (3.27)$$

gegeben ist, so dass insbesondere unter Beachtung der Identitäten

$$I_{C_E} = \text{tr}(\mathbf{F}_P^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_P^{-1}) = \mathbf{G}_P : \mathbf{C} , \quad \text{und} \quad (3.28)$$

$$\text{III}_{C_E} = \det(\mathbf{F}_P^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_P^{-1}) = \det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C}) . \quad (3.29)$$

der Zusammenhang

$$\psi_{\text{TE}}(\theta, \mathbf{F}_P^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_P^{-1}) = \check{\psi}_{\text{TE}}(\theta, I_{C_E}, \text{III}_{C_E}) = \bar{\psi}_{\text{TE}}(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{G}_P) \quad (3.30)$$

gilt. Ferner führt (3.27) zusammen mit (2.88) auf eine von  $\mathbf{F}_P$  unabhängige Entwicklungsgleichung für die Inverse des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors, *i.e.*

$$\dot{\mathbf{G}}_P = \overline{\dot{\mathbf{C}}_P^{-1}} = -2\dot{\lambda} \text{sym}(\mathbf{M}_P \cdot \mathbf{G}_P) . \quad (3.31)$$

Desweiteren gilt aufgrund der Definition der spannungsähnlichen inneren Größe  $\Sigma$  gemäß (3.17) mit (3.27) auch<sup>5</sup>

$$\Sigma = -\varrho_0 \mathbf{F}_P^T \cdot \frac{\partial \bar{\psi}^{\text{GIV}}}{\partial \mathbf{G}_P} : \frac{\partial (\mathbf{F}_P^{-1} \cdot \mathbf{F}_P^{-T})}{\partial \mathbf{F}_P} = 2\varrho_0 \frac{\partial \bar{\psi}^{\text{GIV}}}{\partial \mathbf{G}_P} \cdot \mathbf{G}_P. \quad (3.32)$$

Dieses Vorgehen mit den Beziehungen (3.30 bis 3.32) erlaubt es, bei der Entwicklung der Materialgleichungen die symmetrische Größe  $\mathbf{G}_P$  anstatt von  $\mathbf{F}_P$  zu betrachten, siehe auch Svendsen et al. (2006).

Der thermoelastische Anteil der freien Energiedichte ist demnach für die Formulierung nach Neo-HOOKE analog zu (2.82) und mit der thermischen DUHAMEL-NEUMANN Erweiterung (2.111) durch

$$\begin{aligned} \varrho_0 \bar{\psi}_{\text{TE}}(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{G}_P) &= \frac{1}{8} \lambda_r (\ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})))^2 + \frac{1}{2} \mu_r (\mathbf{G}_P : \mathbf{C} - 3 - \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C}))) \\ &\quad - 3\kappa_r \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_r) \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})) \\ &\quad + c_{\theta r} (\theta - \theta_r - \theta \ln(\theta/\theta_r)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

angegeben. Mit (3.18a) folgen dann die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen zu

$$\mathbf{S} = 2\varrho_0 \frac{\partial \bar{\psi}^{\text{GIV}}}{\partial \mathbf{C}} = \left( \frac{1}{2} \lambda_r \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})) - 3\kappa_r \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_r) \right) \mathbf{C}^{-1} + \mu_r (\mathbf{G}_P - \mathbf{C}^{-1}) \quad (3.34)$$

bzw. mit der Beziehung zwischen den Spannungstensoren (2.47) die KIRCHHOFF-Spannungen zu

$$\mathbf{K} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \left( \frac{1}{2} \lambda_r \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})) - 3\kappa_r \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_r) \right) \mathbf{I} + \mu_r (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_P \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \quad (3.35)$$

Unter Verwendung der Identität

$$\begin{aligned} \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})) &= \ln(\text{III}_{\mathbf{C}_E}) = \ln(\text{III}_{\mathbf{B}_E}) = \ln(\det(\exp\{2\ln \mathbf{V}_E\})) \\ &= \ln(\exp\{2 \text{tr}(\ln \mathbf{V}_E)\}) = 2 \text{tr}(\ln \mathbf{V}_E) \end{aligned} \quad (3.36)$$

sowie der auf einer Reihenentwicklung

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_P \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{B}_E = \mathbf{V}_E^2 = \exp\{2\ln \mathbf{V}_E\} \approx \mathbf{I} + 2\ln \mathbf{V}_E + \mathcal{O}((2\ln \mathbf{V}_E)^2) \quad (3.37)$$

basierenden, für kleine elastische Verzerrungen  $\|\ln \mathbf{V}_E\| \ll 1$  gültigen Näherung von  $\mathbf{B}_E$  folgt dann letztendlich die konstitutive Gleichung

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}_E : \ln \mathbf{V}_E - 3\kappa_r \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_r) \mathbf{I} \quad (3.38)$$

für die KIRCHHOFF-Spannungen in Abhängigkeit von den linken logarithmischen elastischen Dehnungen sowie der Temperatur,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\ln \mathbf{V}_E, \theta)$ . Darüber hinaus kennzeichnet  $\mathbf{C}_E = \lambda_r \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_r \mathbf{I}^s$  die isotrope, elastische Materialtangente, siehe auch (2.78).

Die Form der spannungsähnlichen inneren Größe  $\Sigma$  ist mit (3.33) in (3.32) dann durch

$$\Sigma = \left( \frac{1}{2} \lambda_r \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})) - 3\kappa_r \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_r) \right) \mathbf{I} + \mu_r (\mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_P - \mathbf{I}) \quad (3.39)$$

<sup>5</sup>Die Herleitung der Beziehungen (3.31) bzw. (3.32) erfolgt mit Hilfe der im Anhang A ab Seite 149 näher erläuterten Ableitungsregeln und Tensoroperationen.

### 3. Lokale Modellformulierung

bestimmt, so dass ferner dann auch

$$-\theta \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} : M_P = 3\theta \kappa_T \alpha_{\theta T} \mathbf{I} : M_P \quad (3.40)$$

folgt. Insbesondere für den Fall inkompressibler Metall-Plastizität, *i.e.*  $\det(\mathbf{F}_P) = 1$ , folgt unter Verwendung von (2.88) mit

$$\overline{\det(\mathbf{F}_P)} = 0 = \dot{\varepsilon}_{vP} \det(\mathbf{F}_P) \mathbf{F}_P^{-T} : \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{M}_P = \dot{\varepsilon}_{vP} \det(\mathbf{F}_P) \operatorname{tr}(\mathbf{M}_P), \quad (3.41)$$

dass der Richtungstensor des plastischen Zuwachses deviatorisch ist,  $\mathbf{M}_P = \operatorname{dev}(\mathbf{M}_P)$ . Damit verschwindet der Ausdruck in (3.40), *i.e.*  $-\theta \Sigma_{,\theta} : M_P = 0$ . Über die Beziehung zwischen den Spannungstensoren

$$\mathbf{K} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-T} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.42)$$

wird deutlich, dass  $\Sigma$  und  $\mathbf{K}$  die gleichen Invarianten besitzen, so dass insbesondere für die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\operatorname{dev}(\mathbf{K})\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\operatorname{dev}(\Sigma)\| \quad (3.43)$$

gilt, und sich so für die Richtung des plastischen Zuwachses infolge assoziierter Plastizität mit  $\Psi \equiv \sigma_v$  dann

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial \Psi}{\partial \Sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(\operatorname{dev}(\Sigma)) \quad (3.44)$$

ergibt. Daher entspricht das Doppelskalarprodukt

$$\Sigma : M_P = \operatorname{dev}(\Sigma) : \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sgn}(\operatorname{dev}(\Sigma)) = \sigma_v \quad (3.45)$$

eben genau der Vergleichsspannung. Desweiteren folgt unter Beachtung von (3.44) und durch entsprechende Push-Forward Transformation der Entwicklungsgleichung (3.31) in die Momentankonfiguration mit

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{B}_E) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{G}}_P \cdot \mathbf{F}^T = -2\dot{\varepsilon}_{vP} \operatorname{sym}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{B}_E\right) \quad (3.46)$$

die objektive Entwicklungsgleichung für den linken elastischen CAUCHY-GREEN Deformationstensor  $\mathbf{B}_E$ .

Durch den konkreten Ansatz des Dissipationspotentials für eine Formulierung in Anlehnung an das JOHNSON & COOK-Modell, *i.e.*

---


$$\mathcal{D}(\theta, \varepsilon_{vP}, \dot{\varepsilon}_{vP}) = (A + B(\varepsilon_{vP})^n) (1 - C + C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{vP}/\dot{\varepsilon}_0)) (\dot{\varepsilon}_{vP} + \dot{\varepsilon}_0) (1 - [T(\theta)]^m) \quad (3.47)$$


---

und mit der homologen Temperatur  $T$  gemäß (3.5) folgt zusammen mit (3.26) und (3.45) in (3.22) die Entwicklungsgleichung für die plastische Vergleichsdehnung zu

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varepsilon}_{vP}} \stackrel{!}{=} \sigma_v - 0 = (A + B(\varepsilon_{vP})^n) (1 - C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{vP}/\dot{\varepsilon}_0)) (1 - [T(\theta)]^m) \quad (3.48)$$

bzw. entsprechend umgeformt zu

$$\dot{\varepsilon}_{\text{vP}} = \dot{\varepsilon}_0 \left[ \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma_{\text{v}}}{(A + B(\varepsilon_{\text{vP}})^n)(1 - (T(\theta))^m)} - 1 \right) \right\} - 1 \right]. \quad (3.49)$$

Gleichung (3.49) stellt die Bestimmungsfunktion der plastischen Dehnrates dar. Durch die Angabe einer Überspannungsfunktion gemäß

$$\phi = \sigma_{\text{v}} - (A + B(\varepsilon_{\text{vP}})^n)(1 - [T(\theta)]^m) \quad (3.50)$$

wird in Analogie zu (2.105) der viskoplastische Charakter dieser Beziehung deutlich; mit (3.50) in (3.49) gilt unter Berücksichtigung der MACAULAY-Klammer dann

$$\dot{\varepsilon}_{\text{vP}} = \dot{\varepsilon}_0 \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{C} \frac{\phi}{(A + B(\varepsilon_{\text{vP}})^n)(1 - (T(\theta))^m)} \right\} - 1 \right\rangle. \quad (3.51)$$

Da die Terme im Nenner der geschweiften Klammer stets positiv sind, folgt für jede positive Überspannung  $\phi > 0$  ein plastischer Zuwachs  $\dot{\varepsilon}_{\text{vP}} > 0$ , währenddessen infolge von  $\phi \leq 0$  eine elastische Entlastung mit  $\dot{\varepsilon}_{\text{vP}} = 0$  modelliert wird.

Desweiteren ist aus der Form des Dissipationspotentials (3.47) direkt zu erkennen, dass aufgrund der fehlenden Abhängigkeit von dem Temperaturgradienten kein Wärmefluss modelliert wird

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_{\text{r}} \ln \theta} \stackrel{!}{=} -\mathbf{q}_{\theta} = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Unter Berücksichtigung dieser adiabatischen Bedingungen sowie mit

$$\frac{\theta}{2} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} : \dot{\mathbf{C}} = -\frac{3}{2} \theta \kappa_{\text{r}} \alpha_{\theta \text{r}} \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} \quad (3.53)$$

infolge von (3.34), zusammen mit (3.26) sowie (3.45) und (3.40) für den Fall inkompressibler Metall-Plastizität folgt unter Vernachlässigung von Wärmequellen,  $\zeta_{\theta} = 0$ , schließlich die Entwicklungsgleichung der Temperatur (3.25) zu

$$\varrho_0 c_{\theta \text{r}} \dot{\theta} = \sigma_{\text{v}} \dot{\varepsilon}_{\text{vP}} - \frac{3}{2} \theta \kappa_{\text{r}} \alpha_{\theta \text{r}} \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} \quad (3.54a)$$

$$\approx \beta_{\text{r}} \sigma_{\text{v}} \dot{\varepsilon}_{\text{vP}}. \quad (3.54b)$$

Darin bezeichnet  $\beta_{\text{r}}$  den TAYLOR-QUINNEY-Koeffizienten, der den in Wärme umgewandelten Anteil der geleisteten Arbeit angibt, siehe Taylor und Quinney (1937). Wie (3.54a) bzw. Arbeiten von Rosakis et al. (2000) zeigen, ist dieser Koeffizient nicht zwangsläufig konstant. Jedoch genügt es in den meisten Fällen, insbesondere für Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen (siehe Wright, 2002), diesen Quotienten üblicherweise mit  $\beta_{\text{r}} = 0.85 - 1.0$  als konstant anzunehmen.

### 3.3 Duktile Schädigung

Ein technischer Werkstoff weist mikroskopische Defekte auf, z. B. Poren, Einschlüsse von Fremdatomen, etc., die die makroskopische Festigkeit eines Bauteils beeinflussen. Durch

### 3. Lokale Modellformulierung

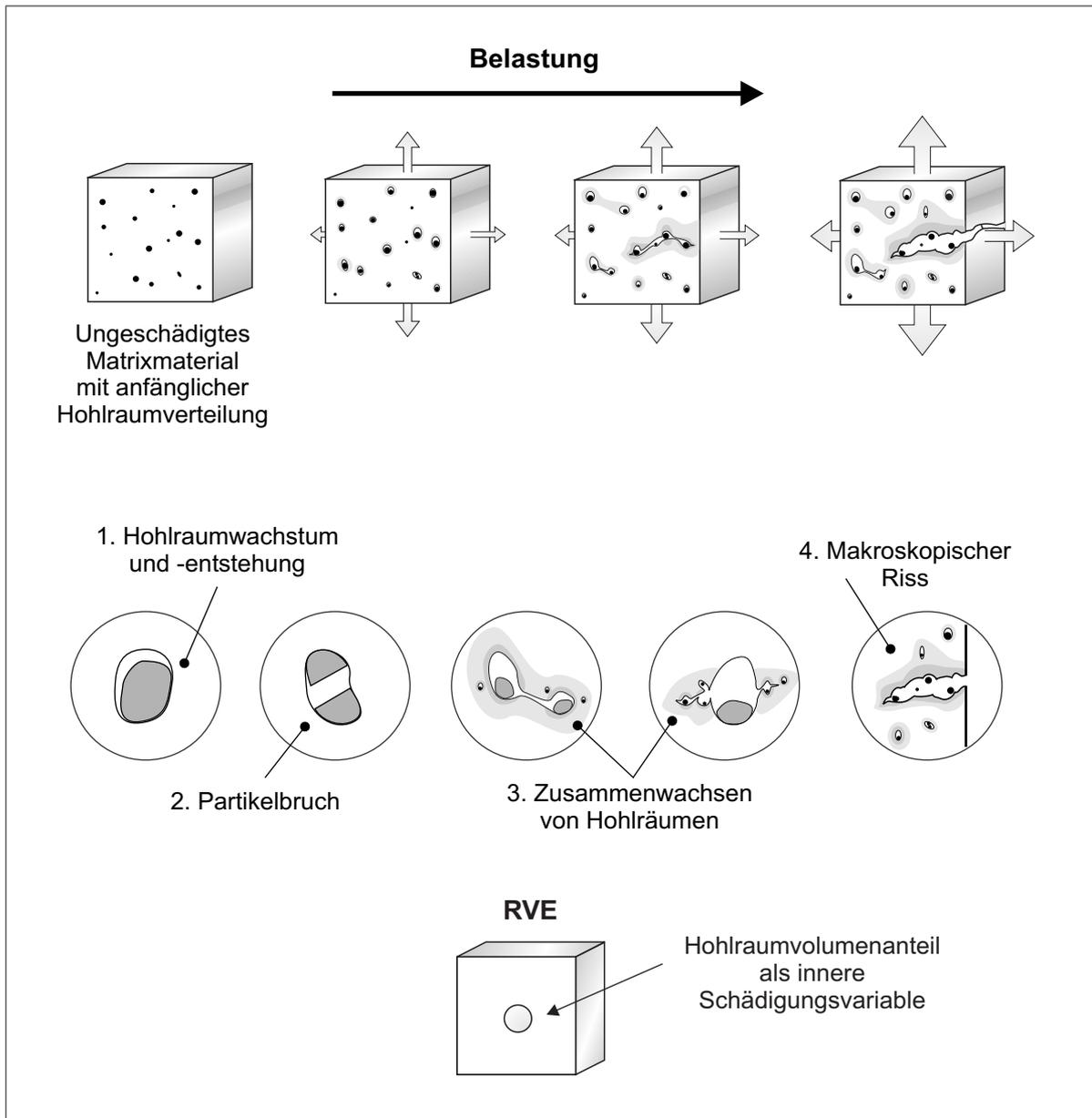


Bild 3.2: Phänomenologische Beschreibung duktiler Schädigung (nach Reusch, 2003).

Aufbringen einer äußeren Belastung an dem Bauteil vergrößern sich die existierenden Hohlräume bzw. neue Hohlräume entstehen. Desweiteren können einzelne Hohlräume zusammenwachsen, so dass Mikrorisse entstehen, die sich unter geeigneten Voraussetzungen gegebenenfalls zu einem makroskopischen Riss, d. h. eine am Bauteil zu beobachtende Materialtrennung, ausbilden. Bild 3.2 veranschaulicht die beschriebenen Phänomene des Entstehens und Zusammenwachsens von Hohlräumen.

Die Betrachtung eines repräsentativen Volumenelementes (RVE), in dem die mikrostrukturellen Effekte weitestgehend gleich verteilt sind, führt im Sinne der Homogenisierung auf die skalare, isotrope Schädigungsvariable

$$d = \frac{V_{\text{RVE, Hohlraum}}}{V_{\text{RVE, Gesamt}}}, \quad (3.55)$$

die das Verhältnis der Hohlraumvolumina zu dem gesamten Volumen des RVE beschreibt. Das Kräftegleichgewicht an dem RVE impliziert dann direkt mit

$$\mathbf{T}_{eff} = \frac{\mathbf{T}}{1 - d} \quad (3.56)$$

die Beziehung zwischen den effektiven Spannungen  $\mathbf{T}_{eff}$  im Matrixmaterial, d. h. an dem ungeschädigten Körper, und den Spannungen  $\mathbf{T}$  des homogenen Ersatzmediums, d. h. am gesamten Körper des RVE. Die Gleichung (3.56) ist als effektives Spannungskonzept bekannt, siehe u. a. Lemaitre und Desmorat (2005).

Die mathematische Beschreibung der Schädigungsentwicklung richtet sich dabei nach der jeweiligen Ursache oder Auswirkung des Hohlraumwachstums. Dabei wird zum einen zwischen Art der Belastung, z. B. Kriechschädigung oder Ermüdungsschädigung, oder den Eigenschaften der Auswirkungen, z. B. spröde oder duktile Schädigung, unterschieden.

Eine kontinuumsmechanische Beschreibung der duktilen Schädigung, die die Schädigungsgröße als innere Variable in der Modellformulierung berücksichtigt, wurden u. a. von Gurson (1977) oder Rousselier (1987) vorgestellt. Die Erweiterung des GURSON-Modells durch Tvergaard und Needleman (1984) berücksichtigt darüber hinaus das beschleunigte Zusammenwachsen der Poren ab einer bestimmten vorhandenen Hohlraumdichte.

Auch für metallische Werkstoffe unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen ist die duktile Schädigungsentwicklung, basierend auf der Entwicklung von Mikrodefekten, relevant, siehe z. B. Thomason (1990), Bai und Dodd (1992). Generell tritt bei Metallen eine zunehmende Versprödung, d. h. ein früheres Versagen, sowohl infolge zunehmender Dehnraten als auch infolge einer geringeren Temperatur ein. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich die durch diese beiden Effekte hervorgerufene erhöhte „Verspannung“ im Kristallgitter (*i.e.* die Behinderung der Versetzungsbewegung, einhergehend mit einer Festigkeitssteigerung, siehe Abschnitt 3.1) bei entsprechender Belastungssteigerung zunehmend schlagartig löst. Für Hochtemperaturwerkstoffe, wie die im Turbinenbau eingesetzten Nickel-Basis-Legierungen, ist jedoch der Einfluss des Temperaturzustandes auf die Duktilität vernachlässigbar. Hingegen bleibt eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Dehnraten erhalten. Bei mehrachsigen Spannungszuständen wirkt sich ferner die Spannungsmehrachsigkeit, die als Quotient von hydrostatischer und Vergleichsspannung

$$\bar{\sigma}_{trx} = \sigma_{hyd}(\mathbf{T})/\sigma_v(\mathbf{T}) \quad (3.57)$$

mit

$$\sigma_{hyd}(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}) \quad \text{und} \quad \sigma_v(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}(\mathbf{T}) : \text{dev}(\mathbf{T})}, \quad (3.58)$$

definiert ist, wesentlich auf den Versagenszeitpunkt aus. Die genannten Effekte werden beispielsweise in dem Versagensmodell von Johnson und Cook (1985) berücksichtigt. Darin wird eine äquivalente Versagensdehnung  $\varepsilon_f$  angegeben, die von der Mehrachsigkeit, der plastischen Dehnraten sowie der homologen Temperatur über

$$\varepsilon_f(\bar{\sigma}_{trx}, \dot{\varepsilon}_{vP}, \theta) = (D_1 + D_2 \exp(D_3 \bar{\sigma}_{trx})) (1 + D_4 \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{vP}/\dot{\varepsilon}_0)) (1 + D_5 T(\theta)) \quad (3.59)$$

abhängt. In *Bild 3.3* sind die einzelnen Terme dieses Zusammenhangs exemplarisch für den Werkstoff INCONEL 718 dargestellt. Infolge einer zunehmenden Zugmehrachsigkeit nimmt die

### 3. Lokale Modellformulierung

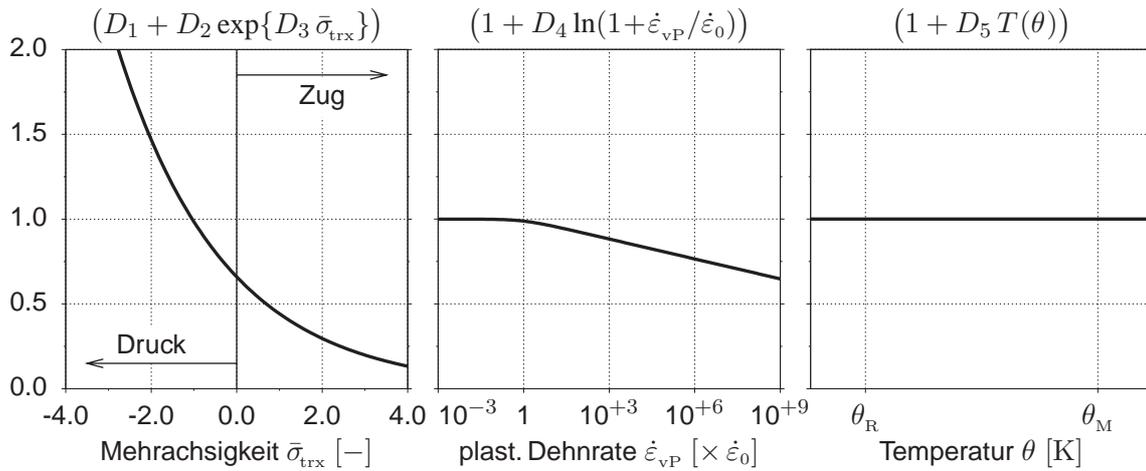


Bild 3.3: Einfluss der Mehrachsigkeit, plastischen Dehnrate und Temperatur auf die äquivalente Versagensdehnung nach JOHNSON & COOK, dargestellt für die Nickel-Basis Legierung INCONEL 718.

Versagensdehnung deutlich ab, während für zunehmende Druckmehrachsigkeiten drastisch erhöhte Werte der Versagensdehnung erzielt werden. Entsprechend wird durch plastische Dehnraten, die über der Referenzdehnrate  $\dot{\epsilon}_0$  liegen, die Versagensdehnung herabgesetzt. In Bild 3.3 ist zudem die für Superlegierungen wie INCONEL 718 typische Unabhängigkeit der Versagensdehnung von der Temperatur gezeigt. Da sich die Mehrachsigkeit, plastische Dehnrate und Temperatur in dem Verlauf der Entwicklungsgeschichte selbst ändern, schlagen die Autoren die Betrachtung einer Größe  $s$  gemäß

$$s = \int_{\tau=0}^t \frac{\dot{\epsilon}_{vP}}{\epsilon_f(\bar{\sigma}_{trx}, \dot{\epsilon}_{vP}, \theta)} d\tau \quad (3.60)$$

vor, die den Lebensdauerverbrauch eines Punktes im Kontinuum mit Werten zwischen null (Anfangszustand) und eins (Versagen) angibt. Um eine kontinuierliche Schädigungsentwicklung mittels des effektiven Spannungskonzeptes (3.56) zu beschreiben führen u. a. Sievert et al. (2003) die isotrope Schädigungsgröße gemäß

$$d = s^{D_w}, \quad \text{mit } D_w > 1 \quad (3.61)$$

ein. Im Sinne einer zusätzlichen Verbesserung wird in der Entwicklungsgleichung für den Lebensdauerverbrauch ein weiterer Parameter  $D_c$  eingeführt

$$\dot{s} = \frac{D_c}{\epsilon_f(\bar{\sigma}_{trx}, \dot{\epsilon}_{vP}, \theta)} \dot{\epsilon}_{vP}, \quad (3.62)$$

so dass die Versagensparameter dieses Modells durch  $D_1, \dots, D_5$  sowie  $D_w, D_c$  charakterisiert sind.

### 3.4 Das lokale Anfangs-Randwertproblem

Die in den vorangegangenen Abschnitten 3.2 und 3.3 beschriebenen Gleichungen bilden das grundlegende System von Differentialgleichungen, das zur Modellierung von Hochgeschwindigkeitsbelastungen benötigt wird. Für die vollständige Beschreibung einer physikalischen

Problemstellung werden darüber hinaus Rand- und Anfangsbedingungen benötigt. In diesem Fall des lokalen Anfangs-Randwertproblems (ARWP) bilden die Verschiebungen die *primären* Feldvariablen, so dass für dieses Feld mit

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad \text{für } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}_{ru} \text{ (DIRICHLET-Rand) und} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_r(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{X}, t), \quad \text{für } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}_{r\sigma} \text{ (NEUMANN-Rand)} \quad (3.64)$$

die Randbedingungen angegeben sind, die hier durch Größen in der Referenzkonfiguration ausgedrückt sind. Darin kennzeichnet  $\hat{\mathbf{n}}$  die nach außen gerichtete Normale des Randes. Ferner überschneiden sich die beiden Ränder nicht und bilden zusammen den gesamten Rand des Kontinuums, *i.e.*

$$\partial\mathcal{B}_{ru} \cap \partial\mathcal{B}_{r\sigma} = \emptyset \quad \text{und} \quad \partial\mathcal{B}_{ru} \cup \partial\mathcal{B}_{r\sigma} = \partial\mathcal{B}_r. \quad (3.65)$$

Zusammen mit den Anfangsbedingungen für das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \ddot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad (3.66)$$

sowie den *Sekundär*-Größen, bestehend aus der Temperatur  $\theta$ , der Lebensdauer- bzw. Schädigungsvariablen  $s$  bzw.  $d$  und der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_{vP}$ , *i.e.*

$$\theta(\mathbf{X}, t_0) = \theta_0(\mathbf{X}), \quad s(\mathbf{X}, t_0) = s_0(\mathbf{X}), \quad \varepsilon_{vP}(\mathbf{X}, t_0) = \varepsilon_{P0}(\mathbf{X}), \quad (3.67)$$

wird das ARWP komplettiert. In der *Tabelle 3.1* auf Seite 45 ist das vollständige ARWP des lokalen Modells zusammenfassend dargestellt.

Zudem ist für einachsige, homogene Problemstellungen mit einer als konstant angenommenen plastischen Dehnrates das resultierende Spannungs- plastische Dehnungsdiagramm zusammen mit der Temperatur- sowie Schädigungsentwicklung in *Bild 3.4* dargestellt. Es wird deutlich, dass die Spannungen infolge zunehmender Belastung einen Maximalwert erreichen und anschließend aufgrund des ansteigenden Temperaturzustandes und der Zunahme der Schädigung wieder abfallen. Desweiteren zeigt sich der Einfluss der plastischen Dehnrates auf den Spannungs-Dehnungsverlauf. Diese hier prinzipiell beschriebenen Effekte werden folgend näher untersucht.

### 3.5 Entfestigung und Lokalisierung

Infolge der Beschreibung des Schädigungsprozesses sowie der Temperaturentwicklung ist bei fortschreitender Belastung ein zunehmender Verlust der Materialsteifigkeit möglich, d. h. die Spannungen nehmen mit wachsenden Dehnungen nach Erreichen eines Maximalwertes wieder ab (vgl. auch *Bild 3.4*). Dieses Verhalten wird als „materielle Dehnungsentfestigung“ oder einfach als „Entfestigung“ bezeichnet.

Ein anfänglich homogener Verformungszustand geht, z. B. als Folge einer materiellen Inhomogenität und/oder geometrischen Imperfektionen, in einen inhomogenen Zustand über, so dass der Übergang von verfestigendem zu entfestigendem Materialverhalten dann lediglich in einem räumlich begrenzten Bereich auftritt. Nach Erreichen des Lastmaximums und weiterer, dehnungsgesteuerter Belastungssteigerung wird so die gesamte Belastung durch diesen Bereich mit entfestigendem Materialverhalten aufgenommen, währenddessen der übrige Teil

### 3. Lokale Modellformulierung

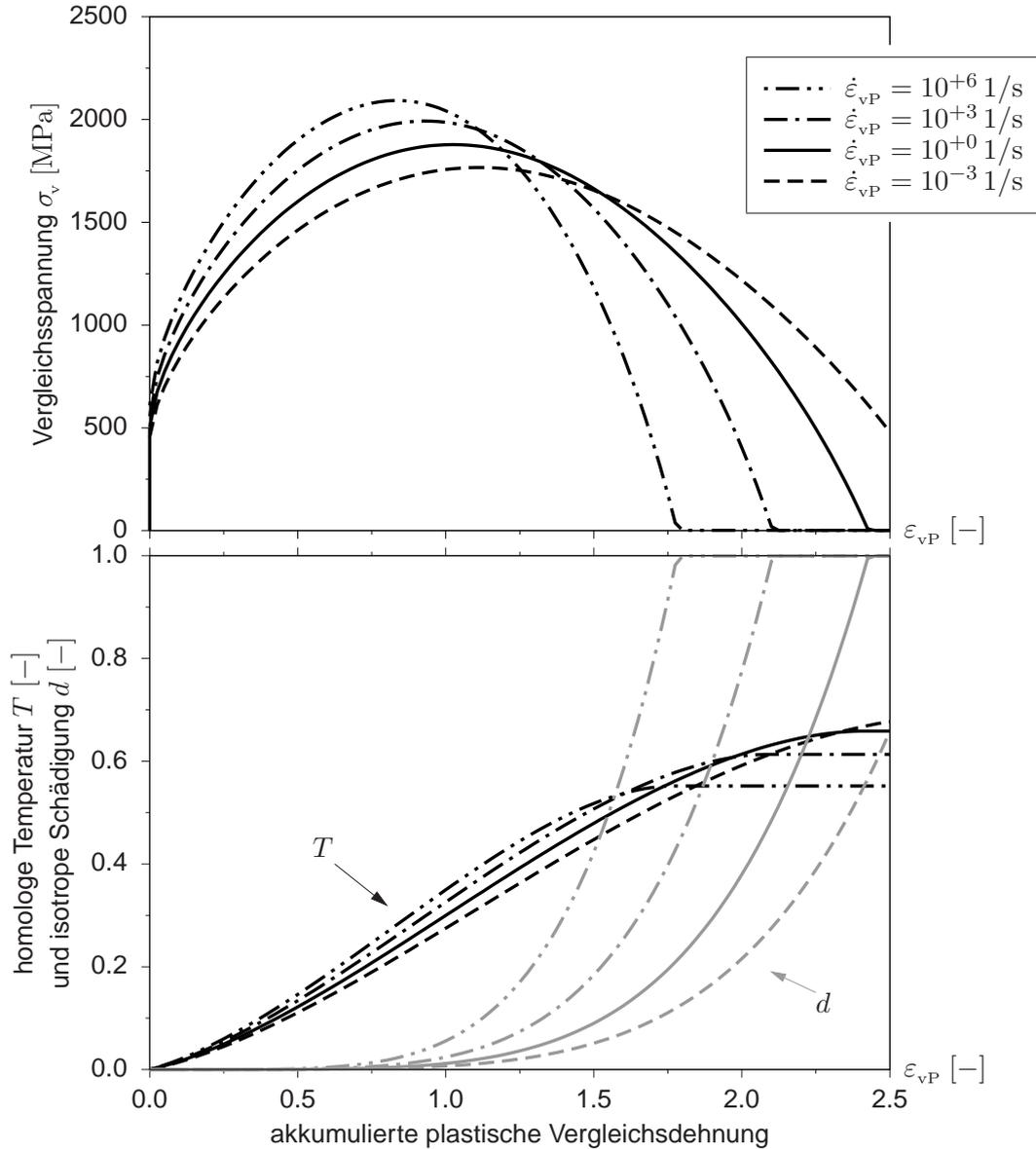


Bild 3.4: Spannungs- plastisches Dehnungs Verhalten sowie Entwicklung der Temperatur und Schädigung für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei unterschiedlichen, konstanten plastischen Dehnraten.

der Struktur elastisch entlastet. Als Folge dieser Beanspruchung nehmen die Verformungen, die plastischen Verzerrungen sowie Schädigung und Temperatur in einem kleinen Bereich der Struktur sehr stark zu. Der Effekt, dass die Zustandsgrößen nicht länger homogen verteilt sind, sondern in bestimmten Bereichen der Struktur stärker ausgeprägt sind und sich dort stärker entwickeln als in anderen Bereichen der Struktur, wird als „Lokalisierung“ bezeichnet. Die Ausbildung von adiabatischen Scherbändern unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen, wie z. B. in der Einleitung dieser Arbeit in *Bild 1.1* gezeigt, repräsentiert dabei eine typische Form der Lokalisierung. Hinsichtlich der Breite der Lokalisierungszone ist bei der Modellierung zu beachten, dass die Modellformulierung eine „innere Länge“ aufweist, die als Lokalisierungsbegrenzer fungiert. Diese Art der Begrenzung ist wichtig und notwendig, um Lokalisierungszone mit einem endlichen Volumen zu modellieren.

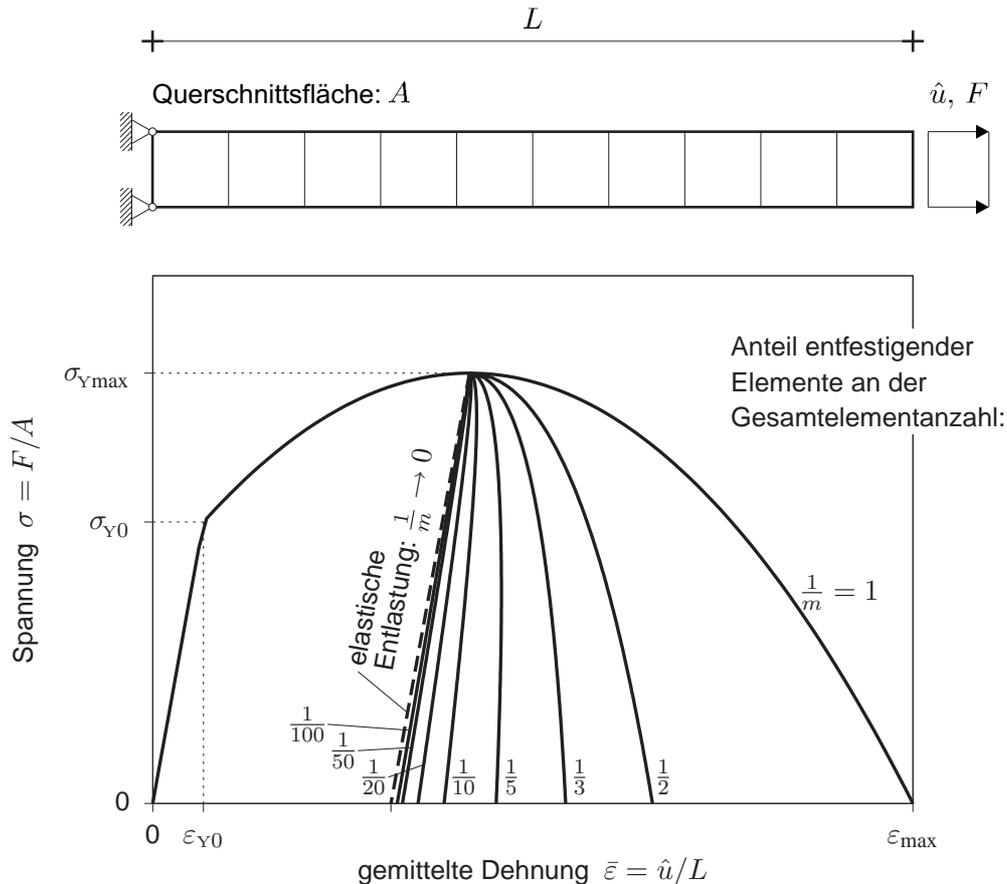


Bild 3.5: Verzweigungsproblem infolge unterschiedlicher Strukturdiskretisierung

Bei lokalen, *ratenunabhängigen* Modellen existiert eine solche innere Länge nicht. Darüber hinaus stellt der Übergang von verfestigendem zu entfestigendem Materialverhalten einen Eindeutigkeitsverlust der Lösung dar (Hill, 1958, 1962, Rudnicki und Rice, 1975, Rice, 1976), so dass das Anfangs-Randwertproblem (ARWP) nicht länger korrekt-gestellt ist, d.h. die mathematische Formulierung stellt keine adäquate Modellierung des betrachteten physikalischen Problems dar, weshalb jedes auf diesem Modell aufbauende Finite-Element Verfahren zu einer pathologischen Netzabhängigkeit der Ergebnisse führt. Phänomenologisch interpretiert entsteht das Problem, dass für einen auf dem äußeren Rand aufgetragenen Verschiebungszustand mindestens zwei mögliche Lösungen existieren können. In diesem Zusammenhang spricht man bei quasi-statischen Belastungen von einem Elliptizitätsverlust, sowie bei dynamischen Belastungen vom Hyperbolizitätsverlust des zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungssystems. Die Auswirkungen dieser pathologischen Netzabhängigkeit sind in *Bild 3.5* anhand eines einfachen, einachsigen belasteten Zugstabes veranschaulicht. Mit Erreichen des Lastmaximums tritt ein Verzweigungspunkt auf, was darauf zurückzuführen ist, dass infolge der unterschiedlichen Diskretisierung der Problemstellung bei einer zunehmenden Anzahl von Elementen  $m$  der Bereich entfestigender Elemente zunehmend kleiner wird. Dieses Verhalten führt in dem Grenzfall  $1/m \rightarrow 0$  auf eine elastische Entlastungskurve, da das Volumen des entfestigenden Bereichs dann unendlich klein wird. Auch bei komplexeren Problemstellungen und anderen Belastungsarten ist dieses Verhalten zu beobachten.

### 3. Lokale Modellformulierung

Hingegen bleibt bei *ratenabhängigen* Modellen die Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet, unabhängig davon, ob ver- oder entfestigendes Materialverhalten auftritt (Needleman, 1988, Sluys, 1992). Ferner existiert infolge der Ratenabhängigkeit des Modells eine innere Länge. Jedoch ist in diesem Zusammenhang genau zu untersuchen, inwiefern die Modellierung des Materialverhaltens zu konvergenten Lösungen bei der Lokalisierungsrechnung führt. Untersuchungen u. a. von Børvik et al. (2000, 2001), Singh und Klingbeil (2002), Singh et al. (2003) oder Allix (2007) haben gezeigt, dass selbst bei ratenabhängigen Modellformulierungen die Ergebnisse einer Finiten-Elemente Simulation starke Netzabhängigkeiten aufweisen, da die Zone der lokalisierten Deformationen stets durch die kleinste Diskretisierungsbreite charakterisiert ist. Auch bei den ratenabhängigen Formulierungen werden bei *stetiger* Netzverfeinerung *keine* konvergenten Lösungen erzielt, d. h. das Volumen der Lokalisierungszone strebt gegen null. Insofern zeigt sich, dass hier die durch die Ratenabhängigkeit der Formulierung enthaltene innere Länge des Modells *nicht* ausreicht, um die Lokalisierungszone zu begrenzen. Im Hinblick auf die Darstellung in *Bild 3.5* zeigt sich, dass das Verhältnis der Anzahl entfestigender Elemente zu der Gesamtelementanzahl  $1/m$  bei Netzverfeinerung *nicht* gegen einen konstanten Wert konvergiert.

Eine genaue Untersuchung dieser Eigenschaft ist ein wesentlicher Teil dieser Arbeit und wird daher separat in Kapitel 7 betrachtet. Die nicht-konvergente, pathologische Eigenschaft lokaler Modelle motiviert daher die Notwendigkeit, diese Modelle im Sinne einer nicht-lokalen Modellerweiterung zu verbessern.

Tabelle 3.1: Zusammenfassung des lokalen ARWPs

Materialparameter dieses Modells:

$$\varrho_r, \lambda_r, \mu_r, \alpha_{\theta r}, c_{\theta r}, \quad A, B, n, C, \dot{\varepsilon}_0, \theta_R, \theta_M, m, \quad \beta_r, \quad D_{1,\dots,5}, D_c, D_w \quad (\text{T 3.1-1})$$

Mechanische Impulsbilanzen:

$$\text{DIV}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{K}) = \varrho_r \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{T 3.1-2})$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \quad (\text{T 3.1-3})$$

Konstitutive Beziehung:

$$\mathbf{K} = (1 - d) \left[ \mathbf{C}_E : \ln \mathbf{V}_E - (3\lambda_r + 2\mu_r) \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_R) \mathbf{I} \right] \quad (\text{T 3.1-4})$$

mit der isotropen, elastischen Materialtangente  $\mathbf{C}_E = \lambda_r \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_r \mathbf{I}^s$  und den Evolutionsgleichungen gemäß

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{B}_E) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{G}}_P \cdot \mathbf{F}^T = -2 \text{sym} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{B}_E \right) \dot{\varepsilon}_{vP} \quad (\text{T 3.1-5})$$

$$\varrho_r c_{\theta r} \dot{\theta} = \sigma_v \dot{\varepsilon}_{vP} - \left( \frac{3}{2} \lambda_r + \mu_r \right) \alpha_{\theta r} \theta \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} \approx \beta_r \sigma_v \dot{\varepsilon}_{vP} \quad (\text{T 3.1-6})$$

$$\dot{s} = \frac{D_c}{\varepsilon_f(\bar{\sigma}_{\text{trix}}, \dot{\varepsilon}_{vP}, \theta)} \dot{\varepsilon}_{vP}, \quad \text{und } d = s^{D_w} \quad (\text{T 3.1-7})$$

mit  $\Psi_{,\mathbf{K}} = \sqrt{3/2} \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{K}))$  und  $\sigma_v = \sqrt{3/2} \|\text{dev}(\mathbf{K})\|$  sowie

$$\varepsilon_f(\bar{\sigma}_{\text{trix}}, \dot{\varepsilon}_{vP}, \theta) = (D_1 + D_2 \exp(D_3 \bar{\sigma}_{\text{trix}})) (1 + D_4 \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{vP}/\dot{\varepsilon}_0)) (1 + D_5 T(\theta)) \quad (\text{T 3.1-8})$$

und der plastischen Dehnrate infolge

$$\dot{\varepsilon}_{vP} = \dot{\varepsilon}_0 \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma_v}{(1-d)(A+B(\varepsilon_{vP})^n)(1-(T(\theta))^m)} - 1 \right) \right\} - 1 \right\rangle. \quad (\text{T 3.1-9})$$

und der homologen Temperatur  $T(\theta)$  gemäß (3.5).

Kinematische Beziehungen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{u} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_P \quad (\text{T 3.1-10})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (\text{T 3.1-11})$$

$$\ln \mathbf{V}_E = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{B}_E) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_E^T) \quad (\text{T 3.1-12})$$

Anfangs- und Randbedingungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}), \quad \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \ddot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \\ \theta(\mathbf{X}, t_0) = \theta_0(\mathbf{X}), \quad s(\mathbf{X}, t_0) = s_0(\mathbf{X}), \quad \varepsilon_{vP}(\mathbf{X}, t_0) = \varepsilon_{P0}(\mathbf{X}) \end{array} \right\} \quad (\text{T 3.1-13})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_{ru} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_r(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_{r\sigma} \quad (\text{T 3.1-14})$$

## 4 Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

Die beschriebenen Auswirkungen der pathologischen Netzabhängigkeit lokaler Modelle bei Lokalisierungsphänomenen motiviert die Erweiterung dieser Modelle durch die Berücksichtigung der mikrostrukturellen Effekte in der makroskopischen Modellformulierung. Nicht-lokale Modelle stellen eine derartige erweiterte Kontinuumsformulierung (enriched continuum models, ECM) dar. Nachfolgend werden zunächst unterschiedliche Möglichkeiten der nicht-lokalen Formulierung angesprochen sowie die Erweiterung des lokalen ARWPs aus Kapitel 3 mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie beschrieben.

### 4.1 Möglichkeiten einer nicht-lokalen Modellerweiterung

Modelle, die für die Beschreibung des Materialverhaltens eines Punktes des Kontinuums neben den üblichen Zustandsgrößen an diesem Punkt, wie z. B. Spannungen, Verzerrungen, Temperatur, Schädigung und weitere innere Größen, auch den Einfluss (zumindest einer) dieser Größen aus der Umgebung des betrachteten Punktes berücksichtigen, werden *nicht-lokale Modelle* genannt.

Um die Berücksichtigung des Einflusses von Größen aus der Umgebung eines Punktes zu gewährleisten, existieren zwei grundlegende Ansätze: Zum einen kann der über ein definiertes Einflussgebiet gewichtete Mittelwert einer Größe in den konstitutiven Gleichungen berücksichtigt werden. Diese Mittelung einer Größe erfolgt üblicherweise über die Auswertung eines Gebietsintegrals, weshalb diese Verfahren als *Integralansätze* bezeichnet werden. Zum anderen berücksichtigen *Gradientenmodelle* den Einfluss einer Größe aus der Umgebung mittels Differentialoperatoren. Diese Gruppe von Modellen lässt sich wiederum in verschiedene Unterkategorien einteilen, worauf nachfolgend in dem entsprechenden Abschnitt gesondert eingegangen wird.

#### 4.1.1 Integralansätze

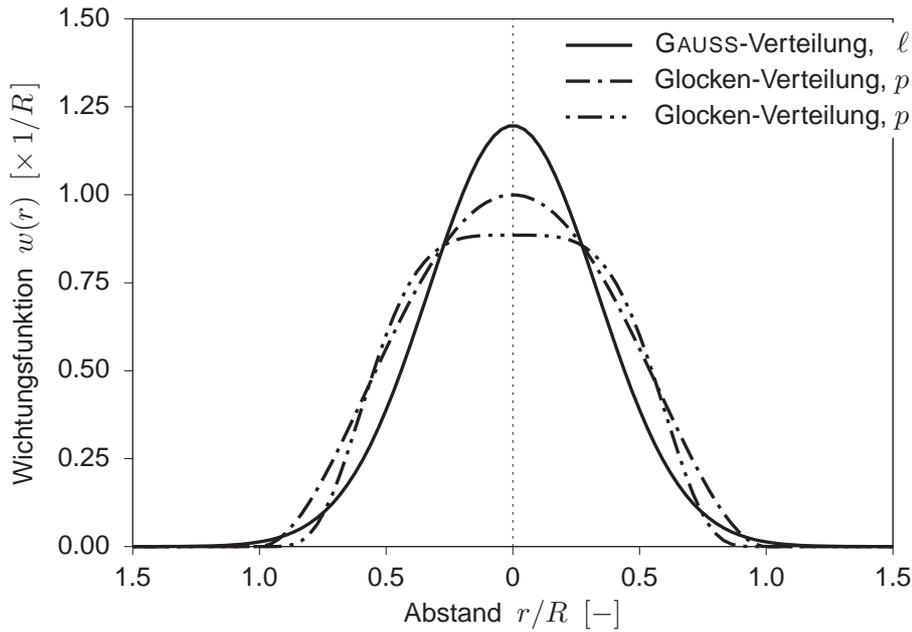
Basierend auf den wegweisenden Arbeiten von Rogula (1965) und Eringen (1966) wird bei dieser Klasse nicht-lokaler Modelle die über ein bestimmtes Gebiet des Kontinuums  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$  gewichtete Größe

$$\bar{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{V}} \alpha(\mathbf{y}, t) w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \quad (4.1)$$

in den konstitutiven Gleichungen berücksichtigt. Darin kennzeichnet  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  die lokale Zustandsgröße (z. B. Verzerrungen oder innere Größen), und entsprechend  $\bar{\alpha}(\mathbf{x}, t)$  die gewichtete, d. h. nicht-lokale Größe. Desweiteren bezeichnet  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  eine geeignete Wichtungsfunktion mit der Eigenschaft

$$W(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{V}} w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (4.2)$$

Typischerweise werden die Wichtungsfunktionen in Abhängigkeit des Abstandes  $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  von dem betrachteten Punkt des Kontinuums  $\mathbf{x}$  angegeben. Beispielsweise gilt für die


 Bild 4.1: Wichtungsfunktionen von Integralansätzen für  $n_{\text{dim}} = 1$ 

## GAUSS'sche Verteilungsfunktion

$$w_{\text{Gauss}}(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \ell)^{n_{\text{dim}}}} \exp\{-r^2/(2\ell^2)\}, \quad (4.3)$$

mit dem Parameter  $\ell$  und der Dimension der Problemstellung  $n_{\text{dim}}$ . Diese Wichtungsfunktion dehnt sich unbegrenzt im Raum aus, d. h. streng genommen wird der Zustand eines jeden einzelnen Punktes des Kontinuums in die Berechnung einbezogen. Praktisch sind jedoch bei einem Radius von etwa dem dreifachen Wert von  $\ell$  über 99% der Umgebungseinflüsse berücksichtigt, so dass eine künstliche Begrenzung  $R \approx 3\ell$  angemessen ist, um den Rechenaufwand zu begrenzen. Eine exakte Begrenzung der berücksichtigten Umgebung wird beispielsweise durch die Wichtungsfunktion in der Glockenform erreicht,

$$w_{\text{bell}}(r) = \frac{1}{W_{\text{bell}}} (1 - (r/R)^p)^q, \quad r \leq R, \quad (4.4)$$

hier in der allgemeinen Form mit den Parametern  $R$  und  $p, q > 0$ . Je nach Dimension der Problemstellung gilt für den Skalierungswert<sup>6</sup>

$$W_{\text{bell}} = \left\{ \begin{array}{ll} 2R/p \text{ Beta}[1/p, 1+q], & \text{für } n_{\text{dim}} = 1 \\ 2\pi R^2/p \text{ Beta}[2/p, 1+q], & \text{für } n_{\text{dim}} = 2 \\ 4\pi R^3/p \text{ Beta}[3/p, 1+q], & \text{für } n_{\text{dim}} = 3 \end{array} \right\}. \quad (4.5)$$

In *Bild 4.1* sind exemplarisch die Verteilungen (4.3) und (4.4) für den eindimensionalen Fall dargestellt. In der Literatur sind eine Vielzahl weiterer Wichtungsfunktionen angegeben. Insbesondere ist bei der Bestimmung der gewichteten Größen zu beachten, dass in der Nähe

<sup>6</sup>Mit  $\text{Beta}[a, b] = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$  ist die Beta-Funktion gekennzeichnet, die in verschiedenen mathematischen Standardwerken tabelliert ist, siehe z. B. Bronstein et al. (2005). Häufig werden die Parameter zu  $p = q = 2$  gewählt, so dass  $W_{\text{bell}} = \{16R/15, \pi R^2/3, 32\pi R^3/105\}$  für  $n_{\text{dim}} = \{1, 2, 3\}$  folgt.

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

des Randes der Struktur bzw. in der Nähe von möglicherweise existierenden Rissen die Wichtungsfunktionen entsprechend angepasst werden müssen. Für eine zusammenfassende Übersicht über die unterschiedlichen Ansätze von Integralverfahren ist z. B. auf Bažant und Jirásek (2002) verwiesen.

Bei dieser Klasse nicht-lokaler Modelle kann die Ermittlung der nicht-lokalen Größe für jeden betrachteten Punkt des Kontinuums einen erheblichen Anteil der Rechenzeit in Anspruch nehmen. Desweiteren ist dieses Vorgehen, obwohl anschaulich interpretierbar, nicht ohne weiteres bzw. nur mit zum Teil erheblichem Aufwand in ein standardmäßiges FE-Programm zu integrieren. Sobald die nicht-lokalen Größen bestimmt sind, kann die Fließbedingung jedoch analog zu dem Vorgehen bei lokalen Modellen entsprechend einfach ausgewertet werden.

##### 4.1.2 Gradientenmodelle

Eine weitere Möglichkeit, die zugrunde liegenden Effekte in der Mikrostruktur innerhalb einer Kontinuumstheorie zu berücksichtigen, ist durch die breite Klasse von Gradientenmodellen gegeben. Im Verlauf der Entwicklung dieser Modelle haben sich wiederum unterschiedliche Richtungen bei der Vorgehensweise herausgebildet, wobei nachfolgend die Grundlagen und die prinzipiellen Unterschiede anhand der entsprechenden Gleichungen veranschaulicht und kurz beschrieben werden.

##### Modelle mit Berücksichtigung von Verzerrungs-Gradienten

Basierend auf den wegweisenden Arbeiten von Toupin (1962) und Mindlin (1964) hinsichtlich der Einführung von zu Verzerrungsgradienten konjugierten Spannungsgrößen höherer Ordnung, haben in den 90er Jahren zunächst Fleck und Hutchinson (1993, 1997) die Berücksichtigung der Verzerrungsgradienten im Sinne einer Plastizitätstheorie entwickelt. Diese SG-Modelle (**'strain gradient plasticity'**, SG) sind durch Betrachtungen der statistisch verteilten Versetzungsdichte (*'statistically stored dislocations'*, SSD) sowie der geometrisch notwendigen Versetzungsdichte (*'geometrically necessary dislocations'*, GND) motiviert. Eine anschauliche Interpretation der SSD und GND ist in *Bild 4.2* für eine plastische Deformation des Kristallgitters dargestellt. Während sich die einzelnen Beiträge der SSD für ein homogenes Verzerrungsfeld aufheben (*Bild 4.2a-c*) resultieren die GND in einem inhomogenen Verzerrungszustand (*Bild 4.2d, e*), der durch den Gradienten der plastischen Verzerrung berücksichtigt ist. Die Erweiterung von Fleck und Hutchinson (1993) basiert darauf, bei der Formulierung der Fließfläche zusätzlich zu den üblichen Größen auch die Spannungen höherer Ordnung zu berücksichtigen, *i.e.* für den eindimensionalen Fall

$$\phi(\sigma, \bar{\sigma}, \varepsilon_p) \equiv \sqrt{\sigma^2 + (\bar{\sigma}/l_p)^2} - (\sigma_{y_0} + f(\varepsilon_p)) = 0. \quad (4.6)$$

Darin bezeichnet  $\sigma$  die „normalen“ (CAUCHY-)Spannungen und  $\bar{\sigma}$  die Spannungen höherer Ordnung. Darüber hinaus stellt der zweite Term in (4.6) die von lokalen Modellen bekannte Fließspannung dar; hier in Abhängigkeit einer anfänglichen Fließspannung  $\sigma_{y_0}$  und einer allgemeinen Ver- oder Entfestigungsfunktion  $f(\varepsilon_p)$ . Aufgrund der unterschiedlichen Einheiten dieser Spannungen ist ferner ein Skalierungsparameter  $l_p$  eingeführt. Die jeweiligen Spannungen sind dann gemäß

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad \text{und} \quad \bar{\sigma} = El_E(\nabla\varepsilon - \nabla\varepsilon_p) \quad (4.7)$$

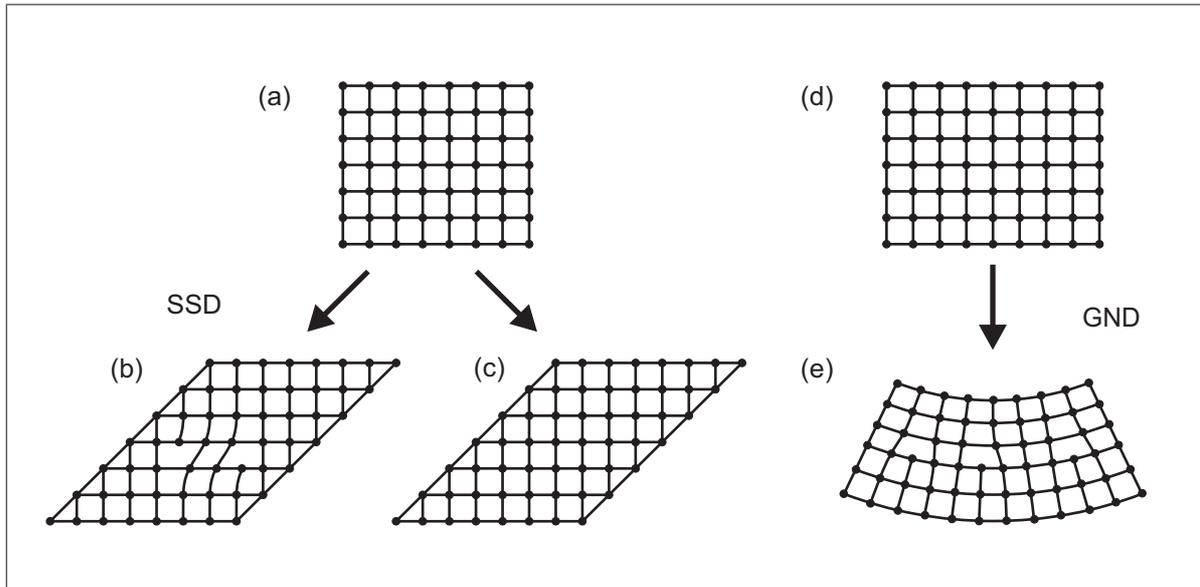


Bild 4.2: Statistisch verteilte und geometrisch notwendige Versetzungsdichten (SSD, GND) infolge plastischer Deformation (nach Jirásek und Bažant, 2001).

entsprechend mit den „üblichen“ Verzerrungen bzw. den Verzerrungsgradienten verknüpft. Hier bezeichnet  $l_E$  einen weiteren Skalierungsparameter. Auch wenn diese Formulierung durch die Betrachtung der SSD und GND motiviert ist, bleibt sie phänomenologischer Natur. Hingegen werden in der MSG-Theorie (**mechanism-based strain-gradient plasticity**, MSG, nach Nix und Gao, 1998, Gao et al., 1999, Huang et al., 2000) die mikromechanischen Effekte in der Fließspannung berücksichtigt. Im Sinne der Erweiterung von Qiu et al. (2003) auf eine inkrementelle Plastizitätstheorie ist die Fließfläche dann durch

$$\phi(\sigma, \varepsilon_p, \nabla \varepsilon_p) \equiv \sigma - \sqrt{(\sigma_{Y0} + f(\varepsilon_p))^2 + 18\alpha_{\text{Tay}}^2 \mu_r^2 b |\nabla \varepsilon_p|} = 0 \quad (4.8)$$

angegeben. Der mikromechanisch basierte Ansatz wird hier durch die Berücksichtigung des TAYLOR-Modells der Versetzungsmechanik beschrieben; worin  $\alpha_{\text{Tay}} = 0.1 - 0.5$  den TAYLOR-Koeffizienten des Modells,  $b$  die Länge des BURGERS-Vektors sowie  $|\nabla \varepsilon_p|$  eine Norm des plastischen Anteils des Verzerrungsgradienten kennzeichnen.

### Modelle mit Gradienten von inneren Variablen

Die Idee, den Einfluss von Gradienten höherer Ordnung von inneren Variablen in der Fließbedingung zu berücksichtigen, geht auf Arbeiten von Aifantis (1984, 1992) bzw. Zbib und Aifantis (1988) zurück

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + f_1(\alpha) + f_2(\nabla \alpha) + f_3(\nabla^2 \alpha) + \dots, \quad (4.9)$$

und ist hier allgemein für eine beliebige innere lokale Größe  $\alpha$  formuliert. In diesem Zusammenhang betrachtet Aifantis in seinen Arbeiten die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung bzw. Maugin (1990) die Schädigungsvariable. In der Beziehung (4.9) ist der Beitrag der Gradiententerme bei der Berechnung der Fließspannung durch die prinzipielle Angabe von jeweils unterschiedlichen Funktionen für jeden einzelnen Gradiententerm berücksichtigt. Eine alternative Form dieser Beziehung ist durch

$$\sigma_Y = \sigma_{Y0} + f(\alpha + l^2 \nabla^2 \alpha) \quad (4.10)$$

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

gegeben. Darin wird der unter Verwendung des LAPLACE-Operators gebildete zweite Gradient der inneren Größe,  $\nabla^2 \alpha = \alpha_{,ii}$ , direkt über einen Längenparameter  $l$  mit der inneren Größe selbst kombiniert und zusammen in der typischen Form der Fließbedingung

$$\phi(\sigma, \bar{\alpha}) \equiv \sigma - (\sigma_{Y_0} + f(\bar{\alpha})) = 0 \quad (4.11)$$

analog zu der Klasse lokaler Modelle berücksichtigt, mit

$$\bar{\alpha} = \alpha + l^2 \nabla^2 \alpha, \quad (\text{explizit}) . \quad (4.12)$$

Diese Darstellung zeigt den *expliziten* Charakter der Formulierung auf, da die nicht-lokale Größe  $\bar{\alpha}$  direkt aus der lokalen Zustandsgröße  $\alpha$  bestimmt wird. Die Abhängigkeit dieser Formulierung von dem Gradiententerm gewährleistet, dass die Spannungen an einem materiellen Punkt von dem Verhalten der benachbarten Punkte beeinflusst werden, jedoch kann der betrachtete Bereich der Umgebung beliebig klein sein. Hingegen wird durch die Konstruktion der nicht-lokalen Größe,  $\bar{\alpha}$ , z. B. als Lösung der HELMHOLTZ Differentialgleichung

$$\bar{\alpha} - l^2 \nabla^2 \bar{\alpha} = \alpha, \quad (\text{implizit}) , \quad (4.13)$$

direkt impliziert, dass aufgrund des „Quellterms“ auf der rechten Seite die gesamte Verteilung der Zustandsgröße  $\alpha$  in die Lösung von  $\bar{\alpha}$  eingeht. Dieses Vorgehen mit der *impliziten* Formulierung der inneren Größe ist zunächst von Peerlings et al. (1996) hinsichtlich der nicht-lokalen Beschreibung der Schädigung, bzw. von Geers et al. (1998) hinsichtlich der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung angewendet worden und daraufhin von einer Vielzahl von Autoren für eine entsprechende nicht-lokale Erweiterung ihrer Modelle aufgegriffen worden, u. a. zunächst von de Borst et al. (1999), Kuhl und Ramm (1999), Sluys und Estrin (2000), Reusch et al. (2003a,b) oder Engelen et al. (2003). Bei der Formulierung der *impliziten* Gradientenmodelle ist zu beachten, dass die nicht-lokale Größe  $\bar{\alpha}$  im Sinne der kontinuumsmechanischen Beschreibung anders als  $\alpha$  keine innere Größe, sondern eine zusätzliche Feldgröße darstellt, so dass zur vollständigen Formulierung der Problemstellung ebenso Randbedingungen für dieses Feld erforderlich sind.

#### 4.1.3 Anmerkungen zu Lokalisierung, Art der nicht-lokalen Formulierung und numerischen Aspekten

Die Unterschiede der genannten nicht-lokalen Erweiterungen sind u. a. in Rolshoven (2003) für ratenunabhängige Formulierungen hinsichtlich ihrer Lokalisierungseigenschaften unter quasi-statischen Bedingungen untersucht worden. Den Ergebnissen dieser Arbeit folgend, stellen sowohl Integral- als auch die hier vorgestellten Gradientenmodelle gültige Formulierungen für eine reguläre Beschreibung des anfänglichen Entfestigungsverhaltens dar. Mit Ausnahme des MSG-Modells, infolge dessen auch bei entfestigendem Verhalten keine lokalisierten Ergebnisse erhalten werden, ist bei dem Übergang vom homogenen zu lokalisierten Lösungen die Breite der plastischen Zone begrenzt.

Gemäß der in der Literatur üblichen Charakterisierung der Art der nicht-lokalen Formulierung werden Integralansätze als *stark nicht-lokale* Modelle bezeichnet, da durch die Auswertung eines Gebietsintegrals die Einflüsse der räumlichen Umgebung direkt berücksichtigt werden. Hingegen werden explizite Gradientenverfahren als *schwach nicht-lokale* Modelle bezeichnet, da der Umgebungseinfluss, der durch die direkte Auswertung der Gradienten der lokalen

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

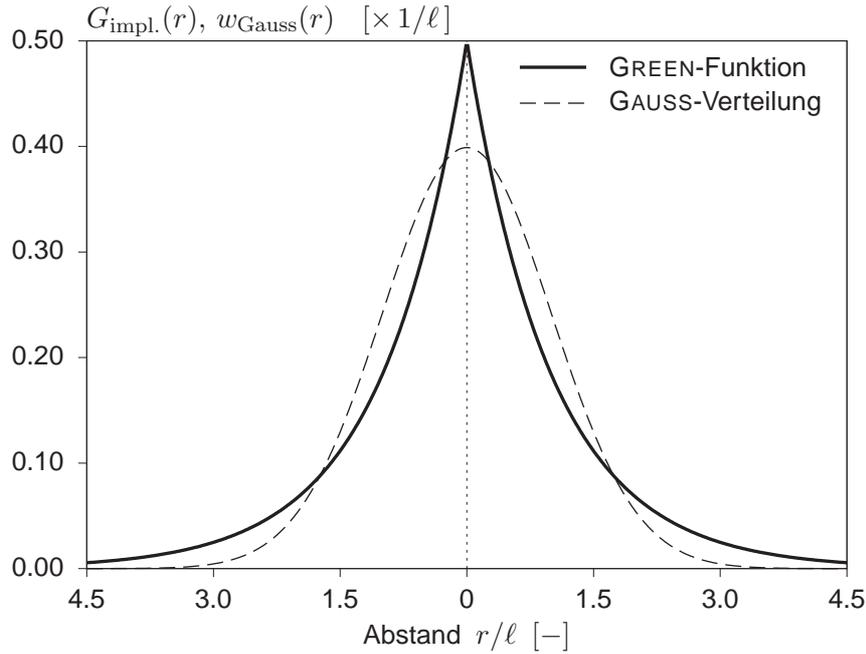


Bild 4.3: Die GREEN-Funktion der HELMHOLTZ-Gleichung für  $n_{\text{dim}} = 1$  und unbegrenzter Intervalllänge im Vergleich zu der GAUSS-Verteilung

Größe berücksichtigt wird, beliebig klein werden kann. In diesem Sinne stellen jedoch implizite Gradientenmodelle ebenfalls *stark nicht-lokale* Formulierungen dar. Beispielsweise folgt, wie u. a. von Peerlings et al. (2001) oder Engelen et al. (2003) gezeigt, die GREEN-Funktion für die HELMHOLTZ Differentialgleichung (4.13) für  $x \in \mathbb{R}^1$  zu

$$G(x, y) = \frac{1}{2l} \exp \left\{ -\frac{|x-y|}{l} \right\}, \quad (4.14)$$

d. h. die GREEN-Funktion beschreibt gemäß

$$\bar{\alpha}(x, t) = \int_{\mathcal{V}} \alpha(\xi, t) G(x, \xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^1 \quad (4.15)$$

eine Wichtungsfunktion analog zu den nicht-lokalen Integralverfahren. Die Analogie von Integralverfahren und impliziten Gradientenverfahren ist in *Bild 4.3* durch die jeweiligen Einflussbereiche graphisch dargestellt.

Ein weiterer Unterschied zeigt sich bei der numerischen Umsetzung der verschiedenen Modelle. Die Lösung von Modellen mit Verzerrungsgradienten erfordert mindestens eine  $C^1$ -Stetigkeit der Interpolationsfunktionen. Die Kontinuitätsbedingung der inneren Variablen führt bei expliziten Gradientenmodellen ebenfalls auf eine solche erhöhte Anforderung an die Stetigkeit der Interpolationsfunktionen. Hingegen genügt bei auf Integralverfahren basierenden Modellen sowie bei impliziten Gradientenmodellen eine  $C^0$ -stetige Diskretisierung. Der Mehraufwand dieser Modelle entsteht durch die Auswertung der Gebietsintegrale einerseits, bzw. durch die erforderliche Lösung des zusätzlichen Feldproblems andererseits. Welches dieser Verfahren für eine numerische Umsetzung besser geeignet ist, hängt von dem jeweiligen Rahmen des verwendeten Programmsystems ab, i.d.R. folgt die Lösung eines Mehrfeldproblems

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

eher dem gewöhnlichen Ablaufschema eines FE-Programms, wobei die Auswertung von Gebietsintegralen einen erhöhten Rechenaufwand zwischen den einzelnen Berechnungsschritten darstellt und nur mit zum Teil erheblichem Aufwand in ein standardmäßiges FE-Programm zu integrieren ist.

### 4.2 Entwicklung der nicht-lokalen Materialgleichungen

Die in dem vorangegangenen Abschnitt vorgestellten nicht-lokalen Modelle sind vielfach zur Berechnung von Lokalisierungsphänomenen quasi-statischer, ratenunabhängiger Problemstellungen angewendet worden. In diesem Abschnitt wird die nicht-lokale Erweiterung mittels impliziter Gradienten-Plastizitätstheorie auf das in Kapitel 3 vorgestellte lokale Modell zur Beschreibung von *Hochgeschwindigkeitsproblemstellungen* übertragen.

Im Hinblick auf die Evolutionsgleichungen des lokalen Modells (vgl. *Tabelle 3.1*) stellt die plastische Vergleichsdehnrate  $\dot{\epsilon}_{vP}$  eine zentrale Größe dieses Modells dar. Vor diesem Hintergrund wird in der nachfolgend beschriebenen Modellerweiterung die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung als zusätzliche Feldgröße  $\gamma$  neben den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  eingeführt. An dieser Stelle wird gesondert darauf hingewiesen, dass eine etwaige nicht-lokale Beschreibung der Schädigungsvariablen hier nicht sinnvoll ist, da die pathologischen Eigenschaften des lokalen Modells auch bei ausschließlicher Temperaturentfestigung, d. h. auch ohne die Berücksichtigung einer Schädigungsentwicklung, auftreten. In Anlehnung an die Bezeichnung „Freiheitsgrad“ (*Degree Of Freedom*) wird das derart erweiterte, nicht-lokale Modell auch als DOF-Modell bezeichnet.

#### 4.2.1 Thermodynamischer Kontext

Die Ansätze für die Größen in der Gesamtenergiebilanz (2.68b) aus Kapitel 3.2.1, i.e. Gleichungen (3.11a - c), werden nach Svendsen (1999) entsprechend der Berücksichtigung des inelastischen Verzerrungsfeldes  $\gamma$  erweitert, i.e.

$$e = u_\epsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \dot{\gamma} \cdot (\iota \dot{\gamma}), \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{h}_r = -\mathbf{q}_{\theta r} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{v} + \phi_{\gamma r} \dot{\gamma}, \quad (4.16b)$$

$$\zeta_e = \zeta_\theta + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \zeta_\gamma \dot{\gamma}. \quad (4.16c)$$

Darin kennzeichnet  $\iota$  den Mikro-Trägheitskoeffizienten,  $\phi_{\gamma r}$  die zu dem Fluss des inelastischen Feldes gehörige Materialgröße und entsprechend  $\zeta_\gamma$  die Quellratendichte des inelastischen Verzerrungsfeldes. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen in (2.68b) und Beachtung der notwendigen Bedingung zur Erfüllung der Unabhängigkeit der Gleichung infolge eines Beobachterwechsels, i.e. die Massenbilanz (2.51) sowie Impulsbilanz (2.55), folgt nun die innere Energiebilanz zu

$$\varrho_0 \dot{u}_\epsilon = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \varsigma \dot{\gamma} + \phi_{\gamma r} \cdot \nabla_r \dot{\gamma} - \text{DIV}(\mathbf{q}_{\theta r}) + \varrho_0 \zeta_\theta \quad (4.17)$$

wobei die skalare Größe  $\varsigma$  per Definition gemäß

$$\varsigma := \text{DIV}(\phi_{\gamma r}) + \varrho_0 \zeta_\gamma - \iota \varrho_0 \ddot{\gamma} \quad (4.18)$$

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

eingeführt wird. Desweiteren folgt die Dissipationsrate  $\delta_{er}$  analog zu dem Vorgehen für das lokale Modell in Abschnitt 3.2.1 durch Einsetzen von (4.17) in die Entropiegleichung (2.70b) sowie der Berücksichtigung der HELMHOLTZ'schen freien Energiedichte (2.72) und der CLAUDIUS-DUHEM Beziehungen (2.74) letztendlich zu

$$\delta_{er} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} - \varrho_0 \dot{\psi} - \varrho_0 \dot{\theta} \eta - \nabla_r \ln \theta \cdot \mathbf{q}_{\theta r} + \varsigma \dot{\gamma} + \boldsymbol{\phi}_{\gamma r} \cdot \nabla_r \dot{\gamma} \geq 0. \quad (4.19)$$

Im Vergleich zu der Dissipationsrate des lokalen Modells, (3.13) sind hier nun zwei weitere Summanden in der Ungleichung enthalten. Unter zusätzlicher Berücksichtigung des Gradienten des inelastischen Verzerrungsfeldes in der Form der freien Energiedichte

---


$$\psi = \psi(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{F}_P, \gamma, \nabla_r \gamma) \quad (4.20)$$


---

folgt durch zeitliche Differentiation von (4.20)

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} : \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_P} : \dot{\mathbf{F}}_P + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_r \gamma} \nabla_r \dot{\gamma} \quad (4.21)$$

und eingesetzt in (4.19) schließlich

$$\begin{aligned} \delta_{er} = & \left( \frac{1}{2} \mathbf{S} - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right) : \dot{\mathbf{C}} - \varrho_0 \left( \eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \left( \boldsymbol{\phi}_{\gamma r} - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_r \gamma} \right) \cdot \nabla_r \dot{\gamma} \\ & - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_P} : \dot{\mathbf{F}}_P - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \varsigma \dot{\gamma} - \mathbf{q}_{\theta r} \cdot \nabla_r \ln \theta. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Mit dem COLEMAN-NOLL Ansatz für die Felder  $\dot{\mathbf{C}}$ ,  $\dot{\theta}$  und  $\nabla_r \dot{\gamma}$ , i.e.

$$\mathbf{S} = 2\varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad (4.23a)$$

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (4.23b)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{\gamma r} = \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_r \gamma}, \quad (4.23c)$$

und Beachtung der Entwicklungsgleichung für den plastischen Anteil des Deformationsgradienten (2.88), i.e.  $\dot{\mathbf{F}}_P = \dot{\gamma} \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{M}_P$ , zusammen mit der Definition (3.17), i.e.

$$\boldsymbol{\Sigma} := -\varrho_0 \mathbf{F}_P^\Gamma \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_P}, \quad (4.24)$$

sowie Vernachlässigung der Mikro-Trägheitseffekte,  $\iota = 0$ , und Mikro-Quellratendichte,  $\zeta_\gamma = 0$ , folgt letztendlich die reduzierte Form der Dissipationsrate zu

$$\delta_{er} = \left( \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{M}_P - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \text{DIV} \left( \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_r \gamma} \right) \right) \dot{\gamma} - \mathbf{q}_{\theta r} \cdot \nabla_r \ln \theta. \quad (4.25)$$

Mit der Einführung des Ratenpotentials als Summe des Dissipationspotentials und der Rate des freien Energiepotentials, i.e.

---


$$\chi = \mathcal{D} + \dot{\mathcal{W}}, \quad \text{mit } \dot{\mathcal{W}} = \varrho_0 \dot{\psi} \quad (4.26)$$


---

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

motiviert (4.25) die verallgemeinerte GINZBURG-LANDAU Formulierung, *i.e.*

$$\frac{\partial \chi}{\partial \dot{\gamma}} - \text{DIV} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \nabla_{\mathbf{r}} \dot{\gamma}} \right) = 0, \quad (4.27)$$

für die Bilanzgleichung des inelastischen Verzerrungsfeldes  $\gamma$ . Darüber hinaus ist der Wärmefluss durch die Ableitung des Dissipationspotentials nach dem Temperaturgradienten gemäß

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \nabla_{\mathbf{r}} \ln \theta} = -\mathbf{q}_{\theta r} \quad (4.28)$$

bestimmt, und ferner folgt analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 3.2.1 die Temperaturbilanz des DOF-Modells letztendlich zu

$$\begin{aligned} \varrho_0 c_{\theta r} \dot{\theta} = & \frac{\theta}{2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} : \dot{\mathbf{C}} + \left( \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{M}_P - \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \text{DIV} \left( \varrho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_{\mathbf{r}} \gamma} \right) - \theta \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \theta} : \mathbf{M}_P + \varrho_0 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \gamma} \right) \dot{\gamma} \\ & + \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta \partial \nabla_{\mathbf{r}} \gamma} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \dot{\gamma} + \text{DIV}(-\mathbf{q}_{\theta r}) + \varrho_0 \zeta_{\theta}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Mit den Gleichungen dieses Abschnitts ist der Rahmen für die nicht-lokale Modellerweiterung gesteckt. In dem nun folgenden Abschnitt resultieren durch Konkretisierung der freien Energiedichte und des Dissipationspotentials die relevanten Beziehungen für die nicht-lokale Modellierung von Hochgeschwindigkeitsvorgängen.

#### 4.2.2 Thermohyperelasto-Gradiententhermoviskoplastizität

Die freie Energiedichte ist für das DOF-Modell durch

$$\psi^{\text{DOF}}(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{F}_P, \gamma, \nabla_{\mathbf{r}} \gamma) = \bar{\psi}_{\text{TE}}(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{G}_P) + \psi_{\text{TP}}(\theta, \gamma, \nabla_{\mathbf{r}} \gamma) \quad (4.30)$$

mit dem thermoelastischen Anteil gemäß (3.33) sowie einem zusätzlichen thermoplastischen Anteil in der Form

$$\varrho_0 \psi_{\text{TP}}(\theta, \gamma, \nabla_{\mathbf{r}} \gamma) = \frac{1}{2} a_{\mathcal{D}}(\theta, \gamma) l_{\mathcal{D}}^2(\theta, \gamma) |\nabla_{\mathbf{r}} \gamma|^2 \quad (4.31)$$

konkretisiert, wobei  $a_{\mathcal{D}}$  und  $l_{\mathcal{D}}$  eine charakteristische Energie- bzw. Längenskala in Abhängigkeit der Temperatur und plastischen Dehnung kennzeichnen. Mit diesem Ansatz für  $\bar{\psi}^{\text{DOF}}$  in (4.23a) folgen die Spannungen erneut zu

$$\mathbf{S} = 2\varrho_0 \frac{\partial \bar{\psi}^{\text{DOF}}}{\partial \mathbf{C}} = \left( \frac{1}{2} \lambda_{\mathbf{r}} \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})) - 3\kappa_{\mathbf{r}} \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_{\mathbf{R}}) \right) \mathbf{C}^{-1} + \mu_{\mathbf{r}} (\mathbf{G}_P - \mathbf{C}^{-1}), \quad (4.32)$$

d. h. die konstitutive Beziehung des nicht-lokalen Modells ist in ihrer Grundform identisch mit der des lokalen Modells. Der Unterschied zwischen beiden Modellen wird in den Entwicklungsgleichungen der relevanten Größen deutlich, *i.e.* der Inversen des rechten plastischen CAUCHY-GREEN-Deformationstensors  $\mathbf{G}_P$  sowie der Temperatur  $\theta$ . Mit (2.88) und  $\dot{\lambda} \equiv \dot{\gamma}$  gilt hier

$$\dot{\mathbf{G}}_P = -2\dot{\gamma} \text{sym}(\mathbf{M}_P \cdot \mathbf{G}_P) \quad (4.33)$$

bzw. für die objektive Entwicklungsgleichung des räumlichen linken elastischen CAUCHY-GREEN Deformationstensors

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{B}_E) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{G}}_P \cdot \mathbf{F}^T = -2\dot{\gamma} \text{sym} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{B}_E \right). \quad (4.34)$$

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

Für den Fall inkompressibler Metall-Plastizität,  $\det(\mathbf{F}_P) = 1$ , und konstanten charakteristischen Skalen  $a_D$  und  $l_D$  folgt aus (4.29) für die Temperaturbilanz zunächst

$$\varrho_0 c_{\theta R} \dot{\theta} = \text{DIV}(-\mathbf{q}_{\theta R}) + \varrho_0 \zeta_{\theta} + (\sigma_v + a_D l_D^2 \nabla^2 \gamma) \dot{\gamma} - \frac{3}{2} \theta \kappa_R \alpha_{\theta R} \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} . \quad (4.35)$$

Der konkrete Ansatz für das Dissipationspotential ist für das DOF-Modell in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\theta, \mathbf{C}, \mathbf{G}_P, \varepsilon_{vP}, \gamma, \dot{\gamma}, \nabla_r \dot{\gamma}) &= \sigma_v \dot{\gamma} + \frac{1}{2} b_D(\theta, \gamma) (\dot{\gamma} - \dot{\varepsilon}_{vP}(\sigma_v, \varepsilon_{vP}, \theta))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} c_D(\theta, \gamma) l_D^2(\theta, \gamma) |\nabla_r \dot{\gamma}|^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

mit der Vergleichsspannung  $\sigma_v(\mathbf{C}, \mathbf{G}_P) = \mu_r \sqrt{3 \mathbb{I}(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})}$  sowie mit der lokalen plastischen Dehnrates  $\dot{\varepsilon}_{vP}$  gemäß (3.49), den Dissipationsskalaren  $b_D$ ,  $c_D$  und der Längenskala  $l_D$  angegeben.

Die Berücksichtigung von (4.36) und (4.30) in (4.27) liefert so schließlich die Bilanzgleichung für das inelastische Verzerrungsfeld

$$\dot{\gamma} - \frac{c_D l_D^2}{b_D} \text{DIV}(\nabla_r \dot{\gamma}) - \frac{a_D l_D^2}{b_D} \text{DIV}(\nabla_r \gamma) = \dot{\varepsilon}_{vP}(\sigma_v, \varepsilon_{vP}, \theta) . \quad (4.37)$$

Insbesondere für den Fall  $a_D \rightarrow 0$ , siehe Reusch (2003), folgt die *Ratenform* der impliziten Gradienten-Plastizität

$$\dot{\gamma} - \bar{c}_r \text{DIV}(\nabla_r \dot{\gamma}) = \dot{\varepsilon}_{vP} \quad (4.38)$$

mit dem nicht-lokalen Parameter  $\bar{c}_r = c_D l_D^2 / b_D$ . Durch die fehlende Abhängigkeit des Dissipationspotentials (4.36) von dem Temperaturgradienten  $\nabla_r \theta$  wird zudem ein adiabatischer Prozess angenommen, so dass für diesen Fall aus (4.35) die Entwicklungsgleichung für die Temperatur

$$\varrho_0 c_{\theta R} \dot{\theta} = \sigma_v \dot{\gamma} - \frac{3}{2} \theta \kappa_R \alpha_{\theta R} \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} \quad (4.39a)$$

$$\approx \beta_r \sigma_v \dot{\gamma} . \quad (4.39b)$$

folgt. Die Verwendung des TAYLOR-QUINNEY-Koeffizienten  $\beta_r$  gilt hier analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 3.2.1 (vgl. Gl. 3.54a, b).

### 4.3 Das nicht-lokale Anfangs-Randwertproblem

#### 4.3.1 Randbedingungen

Zur vollständigen Formulierung der impliziten Gradiententheorie gemäß (4.13), *i.e.*

$$\bar{\alpha}(\mathbf{X}, t) - \bar{c}_r \text{DIV}(\nabla_r \bar{\alpha}(\mathbf{X}, t)) = \alpha(\mathbf{X}, t) , \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_r , \quad (4.40)$$

werden, wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, zusätzlich Randbedingungen benötigt. Die genaue Form dieser Bedingungen ist nicht unbedingt offensichtlich. Allerdings ist es physikalisch sinnvoll zu fordern, dass infolge einer homogenen Verteilung der lokalen Größe, *i.e.*  $\alpha(\mathbf{X}, t) = \alpha_h(t)$ , das nicht-lokale Feld ebenfalls homogenen verteilt ist, *i.e.*

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

$\bar{\alpha}(\mathbf{X}, t) = \alpha_h(t)$ , und zudem unabhängig von dem Wert  $\alpha_h(t)$  die Randbedingungen erfüllt. Eine direkte Vorgabe der nicht-lokalen Größe an dem DIRICHLET-Rand ist daher sicher nicht möglich. Jedoch erfüllt jedes homogene Feld die NEUMANN-Randbedingungen

$$\nabla_{\mathbf{r}} \bar{\alpha}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{X}) = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_{\mathbf{r}}. \quad (4.41)$$

Auch für inhomogene Verteilungen ist diese Art der Randbedingung insbesondere dann sinnvoll, wenn die Prozesszone, d. h. der Bereich in dem sich die lokale Größe entwickelt, nicht in der unmittelbaren Nähe des Randes liegt. Bei den impliziten Gradienten-Verfahren müssen die Randbedingungen an der physikalischen Berandung  $\partial \mathcal{B}_{\mathbf{r}}$  erfüllt werden. Dies stellt einen weiteren Vorteil gegenüber anderen Gradienten-Verfahren dar, bei denen Randbedingungen an einer veränderlichen Grenze zwischen dem elastischem und plastischem Bereich erfüllt werden müssen, siehe z. B. Peerlings (2007) für eine weiterführende Diskussion.

Für den vorliegenden Fall der betrachteten nicht-lokalen Größe in dieser Arbeit folgt damit die Randbedingung zu

$$\nabla_{\mathbf{r}} \dot{\gamma}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{r}}(\mathbf{X}) = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_{\mathbf{r}}. \quad (4.42)$$

Die Rand- und Anfangsbedingungen des Verschiebungsfeldes sind gegenüber dem lokalen GIV-Modell unverändert (siehe Gln. 3.63 und 3.64).

#### 4.3.2 Zusammenfassung des nicht-lokalen ARWPs

In *Tabelle 4.1* ist das in diesem Kapitel beschriebene, vollständig formulierte nicht-lokale Anfangs-Randwertproblem zusammengefasst. In Analogie zu der Formulierung des lokalen ARWPs (vgl. *Tabelle 3.1*) ist darin ebenfalls die isotrope Schädigung gemäß des effektiven Spannungskonzeptes berücksichtigt.

#### 4. Nicht-lokale Modellerweiterung mittels der Gradienten-Plastizitätstheorie

Tabelle 4.1: Zusammenfassung des nicht-lokalen ARWPs der Thermoelasto–GradientenThermoviskoplastizität

Materialparameter dieses Modells:	
$\varrho_r, \lambda_r, \mu_r, \alpha_{\theta r}, c_{\theta r}, A, B, n, C, \dot{\varepsilon}_0, \theta_R, \theta_M, m, \beta_r, D_{1,\dots,5}, D_c, D_w,$ sowie $\bar{c}_r$ (T 4.1-1)	
Bilanzgleichungen für das Verschiebungsfeld und das inelastische Verzerrungsfeld:	
$\text{DIV}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{K}) = \varrho_r \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ (T 4.1-2)	
$\dot{\gamma} - \bar{c}_r \text{DIV}(\nabla_r \dot{\gamma}) = \dot{\varepsilon}_{vP}$ (T 4.1-3)	
Konstitutive Beziehung (identisch mit der des lokalen Modells):	
$\mathbf{K} = (1 - d) \left[ \mathbf{C}_E : \ln \mathbf{V}_E - (3\lambda_r + 2\mu_r) \alpha_{\theta r} (\theta - \theta_R) \mathbf{I} \right]$ (T 4.1-4)	
mit der isotropen, elastischen Materialtangente $\mathbf{C}_E = \lambda_r \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu_r \mathbf{I}^S$ und den Evolutionsgleichungen, hier, gemäß	
$\mathcal{L}_v(\mathbf{B}_E) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{G}}_P \cdot \mathbf{F}^T = -2 \text{sym} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{B}_E \right) \dot{\gamma}$ (T 4.1-5)	
$\varrho_r c_{\theta r} \dot{\theta} = \sigma_v \dot{\gamma} - \left( \frac{3}{2} \lambda_r + \mu_r \right) \alpha_{\theta r} \theta \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{C}} \approx \beta_r \sigma_v \dot{\gamma}$ (T 4.1-6)	
$\dot{s} = \frac{D_c}{\varepsilon_f(\bar{\sigma}_{\text{trx}}, \dot{\gamma}, \theta)} \dot{\gamma}, \quad \text{und } d = s^{D_w}$ (T 4.1-7)	
mit $\Psi_{,\mathbf{K}} = \sqrt{3/2} \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{K}))$ und $\sigma_v = \sqrt{3/2} \ \text{dev}(\mathbf{K})\ $ sowie	
$\varepsilon_f(\bar{\sigma}_{\text{trx}}, \dot{\gamma}, \theta) = (D_1 + D_2 \exp(D_3 \bar{\sigma}_{\text{trx}})) (1 + D_4 \ln(1 + \dot{\gamma}/\dot{\varepsilon}_0)) (1 + D_5 T(\theta))$ (T 4.1-8)	
und der lokalen, plastischen Dehnrates als Eingangsgröße in (T 4.1-3) infolge	
$\dot{\varepsilon}_{vP} = \dot{\varepsilon}_0 \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma_v}{(1-d)(A + B(\varepsilon_{vP})^n)(1 - (T(\theta))^m)} - 1 \right) \right\} - 1 \right\rangle.$ (T 4.1-9)	
analog zu (T 3.1-9), mit der homologen Temperatur $T(\theta)$ gemäß (3.5).	
Kinematische Beziehungen:	
$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_r \mathbf{u} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_P$ (T 4.1-10)	
$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ (T 4.1-11)	
$\ln \mathbf{V}_E = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{B}_E) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_E^T)$ (T 4.1-12)	
Anfangs- und Randbedingungen:	
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}), \quad \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \ddot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \\ \gamma(\mathbf{X}, t_0) = \gamma_0(\mathbf{X}), \quad \dot{\gamma}(\mathbf{X}, t_0) = \dot{\gamma}_0(\mathbf{X}) \\ \theta(\mathbf{X}, t_0) = \theta_0(\mathbf{X}), \quad s(\mathbf{X}, t_0) = s_0(\mathbf{X}), \quad \varepsilon_{vP}(\mathbf{X}, t_0) = \varepsilon_{P0}(\mathbf{X}) \end{array} \right\}$ (T 4.1-13)	
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_{ru} \\ \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_r(\mathbf{X}) = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_{r\sigma} \end{array} \right\} \left  \begin{array}{l} - \\ \nabla_r \dot{\gamma}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_r(\mathbf{X}) = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_r \end{array} \right.$ (T 4.1-14)	

## 5 Zeitdiskretisierung

### 5.1 Numerische Zeitintegrationsverfahren

Die Verfahren der numerischen Zeitintegration basieren auf der Methode der finite Differenzenverfahren. Diesbezüglich wird die Zeitachse an diskreten Zeitpunkten  $t_n$ , für  $n \in \mathbb{N}$ , in finite Zeitinkremente  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  unterteilt, siehe *Bild 5.1*.

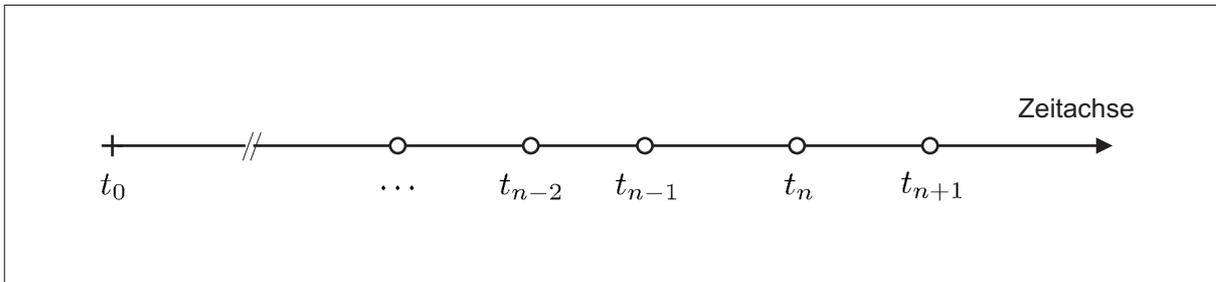


Bild 5.1: Einteilung der Zeitachse in finite Zeitinkremente

Die gesuchten Lösungsgrößen sind zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  durch die Angabe der Anfangsbedingungen an jedem Punkt des Kontinuums bestimmt; es verbleibt daher, die entsprechenden Lösungsgrößen zu einem Zeitpunkt  $t_{n+1}$  aus den Größen der vorangegangenen Zeitpunkte  $t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \dots$  zu bestimmen.

Die Wahl eines Zeitintegrationsverfahrens richtet sich dabei in erster Linie nach der Ordnung der auftretenden zeitlichen Ableitungen des Lösungsfeldes. In der Literatur ist diesbezüglich eine Vielzahl an möglichen Verfahren beschrieben. Für eine weit fassende Übersicht siehe z. B. Hughes (2000) oder Chopra (2001). Generell wird dabei zwischen expliziten und impliziten Verfahren unterschieden: Bei *expliziten* Integrationsverfahren wird das Lösungsfeld sowie dessen zeitliche Ableitungen zu einem Zeitpunkt  $t_{n+1}$  allein aus den entsprechenden Größen der vorangegangenen Zeitschritte bestimmt. Hingegen sind bei *impliziten* Zeitintegrationsverfahren die zeitlichen Änderungen des Lösungsfeldes zusätzlich von dem Lösungsfeld selbst zu dem Zeitpunkt  $t_{n+1}$  abhängig. Die Wahl eines bestimmten Integrationsverfahrens bestimmt ferner die zulässige Zeitschrittgröße  $\Delta t$ . In der Regel ist die Stabilität der Lösung für explizite Verfahren nur für einen eingeschränkten Bereich von Zeitschritten gewährleistet (bedingte Stabilität), währenddessen die Stabilität der Lösung für implizite Verfahren häufig unabhängig von der Größe des Zeitschritts ist (unbedingte Stabilität). Jedoch ist auch dann zu beachten, dass für eine sinnvolle Beschreibung und Auswertung des betrachteten physikalischen Problems die Wahl des Zeitschritts eingeschränkt ist.

### 5.2 Zeitdiskretisierung des Verschiebungsfeldes

Die partielle Differentialgleichung des Anfangs-Randwertproblems für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  enthält zeitliche Ableitungen bis zu zweiter Ordnung. Die Familie der NEWMARK-Verfahren repräsentiert ein typisches Einschritt-Integrationsverfahren für Systeme zweiter Ordnung, und ist durch

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 ((1 - 2\beta_N) \mathbf{a}_n + 2\beta_N \mathbf{a}_{n+1}) \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t ((1 - \gamma_N) \mathbf{a}_n + \gamma_N \mathbf{a}_{n+1}) \quad (5.1b)$$

charakterisiert, wobei die folgenden Bezeichnungen für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu einem Zeitpunkt verwendet werden

$$\mathbf{u}(t_n) \equiv \mathbf{u}_n, \quad \dot{\mathbf{u}}(t_n) \equiv \dot{\mathbf{u}}_n \approx \mathbf{v}_n, \quad \ddot{\mathbf{u}}(t_n) \equiv \ddot{\mathbf{u}}_n \approx \mathbf{a}_n. \quad (5.2)$$

Mit (5.1a) in (5.1b) eingesetzt folgt entsprechend auch

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{u}_{n+1} - \left[ \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{u}_n + \frac{1}{\beta_N \Delta t} \mathbf{v}_n + \left( \frac{1}{2\beta_N} - 1 \right) \mathbf{a}_n \right] \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \mathbf{u}_{n+1} - \left[ \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \mathbf{u}_n + \left( \frac{\gamma_N}{\beta_N} - 1 \right) \mathbf{v}_n + \Delta t \left( \frac{\gamma_N}{2\beta_N} - 1 \right) \mathbf{a}_n \right]. \quad (5.3b)$$

Die Parameter dieses Integrationsverfahrens sind durch  $\beta_N$  und  $\gamma_N$  gekennzeichnet. Einige Standardformen sind in *Tabelle 5.1* auf Seite 66 angegeben. Damit das NEWMARK-Integrationsverfahren unabhängig von dem gewählten Zeitschritt stabil ist, muss die Ungleichung

$$2\beta_N \geq \gamma_N \geq \frac{1}{2} \quad (5.4)$$

erfüllt sein. Infolge der numerischen Diskretisierung der Gleichungen treten u. a. hochfrequente Eigenformen auf, die nicht das Verhalten der zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichung repräsentieren. Die Dissipation dieser hochfrequenten Artefakte ist dabei generell wünschenswert und häufig für die Berechnung absolut notwendig. Die Maximierung der Hochfrequenz-Dissipation für das NEWMARK-Verfahren liefert nach Hughes (2000, S. 500) die Beziehung

$$\beta_N = \frac{1}{4} (\gamma_N + \frac{1}{2})^2, \quad \text{mit} \quad \gamma_N > \frac{1}{2} \quad (5.5)$$

zwischen den beiden Integrations-Parametern. Generell ist infolge von  $\gamma_N > \frac{1}{2}$  eine algorithmische Dämpfung in den Gleichungen enthalten, wobei dann allerdings nur eine Genauigkeit erster Ordnung erzielt wird,  $\mathcal{O}(\Delta t)$ . Die Genauigkeit zweiter Ordnung des NEWMARK-Verfahrens gilt lediglich für exakt  $\gamma_N = \frac{1}{2}$ .

### 5.3 Zeitdiskretisierung des inelastischen Verzerrungsfeldes

Die Gleichung des inelastischen Verzerrungsfeldes (4.38) ist in der Ratenform angegeben, d. h. es treten lediglich Ableitung erster Ordnung auf. Für die Integration von Systemen erster Ordnung dient beispielsweise das EULER-Verfahren

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \Delta t \left( (1 - \vartheta) \dot{\gamma}_n + \vartheta \dot{\gamma}_{n+1} \right). \quad (5.6)$$

Mit  $\vartheta = 0$  entspricht diese Beziehung dem expliziten Forward-EULER Verfahren; implizite Verfahren folgen entsprechend mit  $\vartheta > 0$ . Insbesondere ist mit  $\vartheta = 1$  das Backward-EULER Verfahren beschrieben, so dass dann auch

$$\dot{\gamma}_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\Delta t} \quad (5.7)$$

gilt. In diesen Gleichungen ist aus Gründen der Einfachheit auf die Einführung neuer Bezeichnungen für die Approximation der Rate des Verzerrungsfeldes (entsprechend der Darstellung in Gl. 5.2 für die Raten des Verschiebungsfeldes) verzichtet worden.

## 5.4 Integration der Stoffgleichungen

Um zu einem Zeitpunkt  $t_{n+1}$  die gesuchten Feldgrößen, das ist für das lokale GIV-Modell allein das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{n+1}$  bzw. für das nicht-lokale DOF-Modell sowohl das Verschiebungs- als auch das inelastische Verzerrungsfeld  $\{\mathbf{u}_{n+1}, \gamma_{n+1}\}$ , zu bestimmen, müssen allgemein zu einem Zeitpunkt  $t+\Delta t$  die zu den Feldgrößen korrespondierenden Spannungen und lokalen inelastischen Verzerrungen bestimmt werden:

$$\text{GIV: } {}^{t+\Delta t}\mathbf{K} = \mathbf{K}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}), \quad \text{bzw.} \quad \text{DOF: } \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K} = \mathbf{K}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, {}^{t+\Delta t}\gamma) \\ {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{\text{vP}} = \varepsilon_{\text{vP}}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, {}^{t+\Delta t}\gamma) \end{array} \right\}. \quad (5.8)$$

Durch die Verwendung des vorangestellten Index ' $t+\Delta t$ ' ist gesondert darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um eine allgemeine Berechnungsvorschrift handelt, wobei die Größen zu einem Zeitpunkt  $t \equiv t_n$  bekannt sind. Erfüllen die Feldgrößen  $\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, {}^{t+\Delta t}\gamma\}$  die zugrunde liegenden Gleichungen des ARWPs, entsprechen sie der gesuchten Lösung zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ . Somit bildet die Integration der Stoffgleichungen die Grundlage für eine spätere Lösung des jeweiligen Anfangs-Randwertproblems.

### 5.4.1 Spannungsalgorithmus

Für die Berechnung der Spannungen gilt für sowohl das lokale GIV- als auch das nicht-lokale DOF-Modell die gleiche Funktionsvorschrift in Abhängigkeit der linken logarithmischen elastischen Verzerrungen, der Temperatur sowie der Schädigung, *i.e.*

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K} &= \mathbf{K}({}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_{\text{E}}, {}^{t+\Delta t}\theta, {}^{t+\Delta t}d) \\ &= (1 - {}^{t+\Delta t}d) \left[ \mathbf{C}_{\text{E}} : {}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_{\text{E}} - (3\lambda_{\text{r}} + 2\mu_{\text{r}})\alpha_{\theta\text{r}} ({}^{t+\Delta t}\theta - \theta_{\text{R}}) \mathbf{I} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das hier verwendete Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Spannungen entspricht einem Prädiktor-Korrektor Verfahren für die zu ermittelnden elastischen logarithmischen Verzerrungen sowie der Temperatur und Schädigung:

Mit der Definition eines relativen Deformationsgradienten  ${}^{\text{rel}}\mathbf{F}$  als lineare Abbildung der Bewegung eines Punktes zwischen den Momentankonfigurationen zur Zeit  $t$  und  $t+\Delta t$ , *i.e.*

$${}^{\text{rel}}\mathbf{F} := {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F}^{-1}, \quad (5.10)$$

wird der elastische Anteil des Deformationsgradienten zu dem Zeitpunkt  $t+\Delta t$  gemäß

$${}^{\text{trl}}\mathbf{F}_{\text{E}} := {}^{\text{rel}}\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F}_{\text{E}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{F}_{\text{P}}^{-1} \quad (5.11)$$

vorgeschätzt. Damit folgen die vorgeschätzten linken elastischen logarithmischen Dehnungen zu

$${}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_{\text{E}} = \frac{1}{2}\ln({}^{\text{trl}}\mathbf{F}_{\text{E}} \cdot {}^{\text{trl}}\mathbf{F}_{\text{E}}^{\text{T}}) = \frac{1}{2}\ln({}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{G}_{\text{P}} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{\text{T}}). \quad (5.12)$$

Infolge der ausschließlich elastisch angenommenen Vorschätzung treten weder eine Temperaturerhöhung noch eine Schädigungsentwicklung auf, d. h. der vorgeschätzte Zustand der Temperatur sowie der Schädigung bzw. des Lebensdauerverbrauchs ist durch

$${}^{\text{trl}}\theta = {}^t\theta, \quad (5.13)$$

$${}^{\text{trl}}d = {}^t d, \quad \text{bzw.} \quad {}^{\text{trl}}s = {}^t s \quad (5.14)$$

gegeben. Mit den vorgeschätzten Größen (5.11 - 5.14), die in (5.9) eingesetzt werden, erhält man die elastisch vorgeschätzten Spannungen  ${}^{\text{trl}}\mathbf{K} = \mathbf{K}({}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E, {}^{\text{trl}}\theta, {}^{\text{trl}}d)$  und insbesondere daraus auch die vorgeschätzte, effektive Vergleichsspannung

$${}^{\text{trl}}\sigma_{\text{eff}} = 2\mu_T \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \text{dev}({}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E) \right\|. \quad (5.15)$$

Bis zu diesem Punkt der elastischen Vorschätzung ist das prinzipielle Vorgehen des Prädiktor-Korrektor Verfahrens für beide Modelle gleich. Der Unterschied ist nun dadurch gekennzeichnet, ob die plastischen Korrekturterme durch Verwendung des lokalen oder des nicht-lokalen plastischen Vergleichsdehnungsincrementes gebildet werden. Im Sinne einer für beide Modelle allgemeingültigen Schreibweise wird das lokale, bzw. nicht-lokale Vergleichsdehnungsincrement durch  $\Delta p$  angegeben, mit

$$\Delta p \equiv \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varepsilon_{\text{vP}} \quad , \quad \text{GIV} \\ {}^{t+\Delta t}\gamma - {}^t\gamma \quad , \quad \text{DOF} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \dot{p} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{\text{vP}} \quad , \quad \text{GIV} \\ \dot{\gamma} \quad , \quad \text{DOF} \end{array} \right\}. \quad (5.16)$$

Die gesuchten elastischen logarithmischen Verzerrungen werden dann gemäß

$${}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E = \frac{1}{2} \ln({}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{G}_P \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^T) \quad (5.17)$$

durch Integration der Entwicklungsgleichung für  $\mathbf{G}_P$  bestimmt. Basierend auf der Entwicklungsgleichung für den plastischen Anteil des Deformationsgradienten (2.88), i.e.  $\dot{\mathbf{F}}_P = \dot{p} \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{M}_P$  liefert die Integration über das Zeitintervall  $[t; t+\Delta t]$  dann

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_P = {}^t\mathbf{F}_P \cdot \exp\{\Delta p \mathbf{M}_P\} \quad (5.18)$$

für eine in diesem Zeitintervall näherungsweise konstant angenommene Richtung des plastischen Zuwachses  $\mathbf{M}_P$ , so dass schließlich für die Inverse des plastischen Anteils des CAUCHY-GREEN Deformationstensors

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{G}_P = \left( \exp\{\Delta p \mathbf{M}_P\} \right)^{-1} \cdot {}^t\mathbf{G}_P \cdot \left( \exp\{\Delta p \mathbf{M}_P\} \right)^{-T} \quad (5.19)$$

folgt. Mit (5.19) in (5.17) und Berücksichtigung von (5.12) sowie der für kleine plastische Zuwächse  $\|\Delta p \mathbf{M}_P\| \ll 1$  gültigen Näherung

$$\mathbf{F} \cdot \exp\{\Delta p \mathbf{M}_P\} \cdot \mathbf{F}^{-1} \approx \exp\{\Delta p \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_P \cdot \mathbf{F}^{-1}\} \quad (5.20)$$

folgt mit (3.44) schließlich die einfache Beziehung

$${}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E = {}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E - \Delta p \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} \quad (5.21)$$

für die linken elastischen logarithmischen Verzerrungen. Die Richtung des plastischen Zuwachses ist für eine assoziierte Fließregel durch

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{K}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{N}, \quad \text{mit } \mathbf{N} = \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{K})) = \text{sgn}(\text{dev}(\ln\mathbf{V}_E)) \quad (5.22)$$

gegeben, wobei im Sinne eines Radial-Return Verfahrens (Simo und Hughes, 1998, Klingbeil, 2006) für die plastische Fließrichtung als Normale zu der Fließfläche auch

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{N} \equiv {}^{\text{trl}}\mathbf{N} = \text{sgn}(\text{dev}({}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E)) \quad (5.23)$$

## 5. Zeitdiskretisierung

gilt. Durch (5.21 - 5.23) ist die erste Größe zur Bestimmung der Spannungen,  ${}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E$ , berechnet; es verbleibt die Temperatur  ${}^{t+\Delta t}\theta$  und Schädigung  ${}^{t+\Delta t}d$  zu bestimmen. Mit der Kenntnis von  ${}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E$  in (5.9) folgt die effektive Vergleichsspannung mit

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{v\text{eff}} = \text{trl}\sigma_{v\text{eff}} - 3\mu_r \Delta p \quad (5.24)$$

in Abhängigkeit des vorgeschätzten Wertes und eines Korrekturterms. Die Berechnung der Temperatur erfolgt durch Integration der entsprechenden Entwicklungsgleichung der Temperatur, (T 3.1-6) bzw. (T 4.1-6), mittels eines Backward-EULER Verfahrens. Es gilt dann unter Verwendung von (5.24)

$${}^{t+\Delta t}\theta = \text{trl}\theta + \frac{\beta_r}{\rho_r c_{\theta r}} (1 - \text{trl}d) (\text{trl}\sigma_{v\text{eff}} - 3\mu_r \Delta p) \Delta p. \quad (5.25)$$

Praktischerweise ist darin die nominelle Vergleichsspannung  ${}^{t+\Delta t}\sigma_v$  unter Verwendung des vorgeschätzten Wertes der Schädigung gebildet worden. Der effektive hydrostatische Anteil der Spannungen folgt dann mit (5.25) und (5.21) in (5.9) zu

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{hyd eff}} = \frac{1}{3} \text{tr}({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{\text{eff}}) = (3\lambda_r + 2\mu_r) \left( \frac{1}{3} \text{tr}(\text{trl}\ln\mathbf{V}_E) - \alpha_{\theta r} ({}^{t+\Delta t}\theta - \theta_r) \right), \quad (5.26)$$

so dass die äquivalente Versagensdehnung gemäß der Funktionsvorschrift (3.59)

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_f = \varepsilon_f \left( \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{hyd eff}}}{{}^{t+\Delta t}\sigma_{v\text{eff}}}, \frac{\Delta p}{\Delta t}, {}^{t+\Delta t}\theta \right) \quad (5.27)$$

in Abhängigkeit der Spannungsmehrachsigkeit, der plastischen Dehnrate und der Temperatur bestimmt ist. Durch Integration der Evolutionsgleichung des Lebensdauer verbrauchs, (T 3.1-7) bzw. (T 4.1-7), mittels Backward-EULER Verfahren folgt dann die gesuchte Schädigungsgröße zu

$${}^{t+\Delta t}d = ({}^{t+\Delta t}s)^{D_w}, \quad \text{mit} \quad {}^{t+\Delta t}s = s + \frac{D_c}{{}^{t+\Delta t}\varepsilon_f} \Delta p. \quad (5.28)$$

Damit sind sämtliche Größen in Abhängigkeit des plastischen Dehnungsincrements  $\Delta p$  bestimmt, die für die Berechnung der Spannungen gemäß (5.9) benötigt werden. Darüber hinaus ist mit der Kenntnis der linken elastischen logarithmischen Verzerrungen  ${}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E$  auch die Inverse des plastischen rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors mit

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{G}_P &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_P^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_P^{-T} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_E \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-T} \\ &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-1} \cdot \exp\{2 {}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E\} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (5.29)$$

bekannt. Eine Zusammenfassung des Vorgehens ist in *Tabelle 5.2* auf Seite 66 beschrieben. Für eine vollständige Berechnung verbleibt es also noch, das plastische Dehnungsincrement  $\Delta p$  zu bestimmen. Für das lokale GIV-Modell entspricht diese gesuchte Größe dem lokalen Inkrement der plastischen Vergleichsdehnung,  $\Delta p \equiv \Delta\varepsilon_{vP}$  (siehe auch Gl. 5.16), das über die Gleichung des JOHNSON & COOK-Modells bestimmt wird. Hingegen ist für das nicht-lokale DOF-Modell das gesuchte Dehnungsincrement durch die inelastische Feldgröße  $\gamma$  direkt bekannt,  $\Delta p \equiv {}^{t+\Delta t}\gamma - {}^t\gamma$  (siehe auch Gl. 5.16), so dass für dieses Modell die Spannungsberechnung abgeschlossen ist. Jedoch wird auch für das DOF-Modell das lokale Dehnungsincrement  $\Delta\varepsilon_{vP}$  in der Berechnung benötigt, siehe (5.8). Das entsprechende Vorgehen wird in dem folgenden Abschnitt erläutert.

### 5.4.2 Bestimmung des lokalen plastischen Dehnungsinkrements

Die Bestimmung des lokalen plastischen Dehnungsinkrements erfolgt auf Grundlage der Integration einer viskoplastischen Stoffgleichung, wie in (2.103) allgemein angegeben. Stellvertretend für diese Klasse von Modellen wird das in Kapitel 3 beschriebene JOHNSON & COOK-Deformationsmodell in der Form (T3.1-9) betrachtet, *i.e.*, der Einfachheit an dieser Stelle wiederholt

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\text{vP}} &= g(\sigma_{\text{v}}, d, \varepsilon_{\text{vP}}, \theta) \\ &= \dot{\varepsilon}_0 \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma_{\text{v}}}{(1-d)(A+B(\varepsilon_{\text{vP}})^n)(1-(T(\theta))^m)} - 1 \right) \right\} - 1 \right\rangle. \quad (5.30)\end{aligned}$$

Die Integration dieser Gleichung in dem Zeitintervall  $t \rightarrow t + \Delta t$  liefert mit Hilfe des EULER-Verfahrens zunächst allgemein unter Verwendung des Integrationsparameters  $\vartheta$  die Beziehung

$$\Delta \varepsilon_{\text{vP}} = {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{vP}} - {}^t \varepsilon_{\text{vP}} = \Delta t \left( (1 - \vartheta) {}^t g + \vartheta {}^{t+\Delta t} g \right), \quad (5.31)$$

mit

$${}^t g = g({}^t \sigma_{\text{v}}, {}^t d, {}^t \varepsilon_{\text{vP}}, {}^t \theta) \quad \text{und} \quad (5.32a)$$

$${}^{t+\Delta t} g = g({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{v}}, {}^{t+\Delta t} d, {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{vP}}, {}^{t+\Delta t} \theta). \quad (5.32b)$$

Wird das Verschiebungsfeld durch eine explizites Integrationsverfahren bestimmt, d. h. wird auf *globaler Ebene* ein explizites Verfahren verwendet, dann bietet es sich an, auch für die Integration des Dehnungsinkrements, d. h. auch auf *lokaler Ebene*, ein explizites Verfahren zu verwenden, da aus den genannten Stabilitätsgründen der verwendete Zeitschritt bereits sehr klein ist. Prinzipiell kann natürlich auch bei Verwendung eines global expliziten Verfahrens ein lokal implizites Verfahren verwendet werden. Andererseits ist es meist aus Gründen der Zeitschrittweite nicht sinnvoll, für ein global implizites Verfahren auf lokaler Ebene ein explizites Verfahren zu verwenden, so dass dann auch auf lokaler Ebene ein implizites Integrationsverfahren eingesetzt werden muss.

#### Explizite Zeitintegration

Unter Verwendung von  $\vartheta = 0$  in (5.31) und mit (5.32a) folgt

$$\Delta \varepsilon_{\text{vP}} = \Delta t \dot{\varepsilon}_0 \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{{}^t \sigma_{\text{v}}}{(1-{}^t d)(A+B({}^t \varepsilon_{\text{vP}})^n)(1-(T({}^t \theta))^m)} - 1 \right) \right\} - 1 \right\rangle, \quad (5.33)$$

wobei sämtliche Größen zum Zeitpunkt  $t$ , das sind Vergleichsspannung  ${}^t \sigma_{\text{v}}$ , Schädigung  ${}^t d$ , akkumulierte plastische Dehnung  ${}^t \varepsilon_{\text{vP}}$  und Temperatur  ${}^t \theta$ , bekannt sind. Daher kann das gesuchte Dehnungsinkrement  $\Delta \varepsilon_{\text{vP}}$  direkt, d. h. *explizit*, aus den bekannten Größen berechnet werden.

## 5. Zeitdiskretisierung

### Implizite Zeitintegration

Hingegen folgt unter Verwendung von  $\vartheta > 0$  in (5.31) ein implizites Verfahren. Das zu bestimmende Dehnungsinkrement entspricht daher für einen inelastischen Prozess der Lösung der Residuumsleichung

$$0 \stackrel{!}{=} r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) := \sigma_{\text{veff}}^{(i)} - \left( A + B(\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)})^n \right) \left( 1 + C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{\text{vP}}^{(i)}/\dot{\varepsilon}_0) \right) \left( 1 - (T^{(i)})^m \right), \quad (5.34)$$

wobei die effektive Vergleichsspannung, die lokale akkumulierte plastische Vergleichsdehnung, die lokale plastische Vergleichsdehnrate sowie die Temperatur und homologe Temperatur gemäß

$$\sigma_{\text{veff}}^{(i)} = \text{trl} \sigma_{\text{veff}} - 3\mu_{\text{R}} \Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)} \quad (5.35a)$$

$$\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)} = {}^t \varepsilon_{\text{vP}} + \Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)} \quad (5.35b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{vP}}^{(i)} = \Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)} / \Delta t \quad (5.35c)$$

$$\theta^{(i)} = \text{trl} \theta + \beta_{\text{R}} / (\varrho_{\text{R}} c_{\theta\text{R}}) (1 - \text{trl} d) \sigma_{\text{veff}}^{(i)} \Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)} \quad (5.35d)$$

$$T^{(i)} = \min(1.0; \max(0.0; (\theta^{(i)} - \theta_{\text{R}}) / (\theta_{\text{M}} - \theta_{\text{R}}))), \quad (5.35e)$$

jeweils von dem lokalen plastischen Dehnungsinkrement  $\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}$  abhängen, was in (5.35) für das implizite Backward-EULER Verfahren mit  $\vartheta = 1$  angegeben ist. Eine Unterscheidung, ob ein elastischer oder inelastischer Prozess vorliegt, lässt sich durch Auswertung der vorgeschätzten Überspannung  $\text{trl} \phi$  angeben. Aufgrund der Definition der Residuumsleichung (5.34) und der Überspannung gemäß (3.50) gilt

$$\text{trl} \phi_{\text{eff}} \equiv r(0), \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trl} \phi_{\text{eff}} \leq 0, \text{ elastisch: } \Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)} = 0 \\ \text{trl} \phi_{\text{eff}} > 0, \text{ inelastisch: als Lösung von } r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) = 0 \end{array} \right\}. \quad (5.36)$$

Für einen inelastischen Prozess wird die in  $\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}$  nichtlineare lokale Residuumsleichung (5.34) daher iterativ mit Hilfe eines NEWTON-Verfahrens gelöst. Dazu wird (5.34) im Sinne einer TAYLOR-Reihenentwicklung um den Wert  $\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}$  entwickelt

$$0 \stackrel{!}{=} r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i+1)}) = r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) + \left. \frac{\partial r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}})}{\partial \Delta\varepsilon_{\text{vP}}} \right|_{(i)} (\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i+1)} - \Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) + \mathcal{O}(2), \quad (5.37)$$

so dass mit Abbruch nach dem linearen Term das Iterations-Update mit

$$\Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i+1)} = \Delta\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)} - \left( \left. \frac{\partial r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}})}{\partial \Delta\varepsilon_{\text{vP}}} \right|_{(i)} \right)^{-1} r^{(i)} \quad (5.38)$$

folgt. Die lokale Iteration ist beendet, wenn der Betrag des Residuums einen tolerierbaren Grenzwert unterschreitet,  $|r^{(i)}| < \text{tol}$ . Es verbleibt, die benötigte Ableitung der Residuumsleichung zu bestimmen: Mit den einzelnen Faktoren des JOHNSON & COOK-Ansatzes

$$f_h(\varepsilon_{\text{vP}}) = A + B(\varepsilon_{\text{vP}})^n, \quad f_h'(\varepsilon_{\text{vP}}) = Bn(\varepsilon_{\text{vP}})^{n-1}, \quad (5.39a)$$

$$f_r(\dot{\varepsilon}_{\text{vP}}) = 1 + C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{\text{vP}}/\dot{\varepsilon}_0), \quad f_r'(\dot{\varepsilon}_{\text{vP}}) = C/(\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_{\text{vP}}), \quad (5.39b)$$

$$f_t(T) = 1 - T^m, \quad f_t'(T) = -mT^{m-1} \quad (5.39c)$$

sowie den Ableitungen der Beziehungen (5.35a - e) gemäß

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}} \sigma_{\text{vEff}}^{(i)}\right)\Big|_{(i)} = -3\mu_{\text{r}} \quad (5.39\text{d})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}} \varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}\right)\Big|_{(i)} = 1 \quad (5.39\text{e})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}} \dot{\varepsilon}_{\text{vP}}^{(i)}\right)\Big|_{(i)} = 1/\Delta t \quad (5.39\text{f})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}} \theta^{(i)}\right)\Big|_{(i)} = \beta_{\text{r}}/(\varrho_{\text{r}} c_{\theta\text{r}}) (1 - \text{tr}1 d) (\sigma_{\text{vEff}}^{(i)} - 3\mu_{\text{r}} \Delta \varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) \quad (5.39\text{g})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} T\right)\Big|_{(i)} = (\mathcal{H}_0(\theta_{\text{M}} - \theta^{(i)}) \mathcal{H}_1(\theta^{(i)} - \theta_{\text{R}}))/(\theta_{\text{M}} - \theta_{\text{R}}), \quad (5.39\text{h})$$

folgt schließlich die gesuchte Ableitung zu

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial r(\Delta \varepsilon_{\text{vP}})}{\partial \Delta \varepsilon_{\text{vP}}}\right|_{(i)} &= -3\mu_{\text{r}} - f'_h(\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) f_r(\dot{\varepsilon}_{\text{vP}}^{(i)}) f_t(T^{(i)}) \\ &\quad - f_h(\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) f'_r(\dot{\varepsilon}_{\text{vP}}^{(i)}) f_t(T^{(i)}) (1/\Delta t) \\ &\quad - f_h(\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}) f_r(\dot{\varepsilon}_{\text{vP}}^{(i)}) f'_t(T^{(i)}) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} T\right)\Big|_{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_{\text{vP}}^{(i)}} \theta^{(i)}\right)\Big|_{(i)}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

wobei in (5.39h) die HEAVISIDE-Funktion gemäß

$$\mathcal{H}_{\xi}(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \xi, & \text{für } x = 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

verwendet wird, um der Definition der homologen Temperatur gemäß (3.5) Rechnung zu tragen. In den meisten Fällen liegt die Temperatur *zwischen* der Umgebungs- und der Schmelztemperatur, so dass die HEAVISIDE-Funktion in der Ableitung (5.39h) in der Regel nicht ausgewertet werden muss,  $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} T\right) = 1/(\theta_{\text{M}} - \theta_{\text{R}})$ , für  $\theta_{\text{R}} \leq \theta < \theta_{\text{M}}$ .

Die Gleichungen zur Bestimmung des lokalen plastischen Dehnungsincrements sind in *Tabelle 5.3* zusammengefasst. Bei der Implementierung empfiehlt es sich, einen Schalter  $\zeta_{\text{d}}$  in der Formulierung der Schädigungsgröße zu berücksichtigen,

$$(1 - d) \equiv (1 - \zeta_{\text{d}} d), \quad \text{mit} \quad \left. \begin{cases} \zeta_{\text{d}} = 0, & \text{ohne Schädigung, oder} \\ & \text{inkl. Versagen mit } d < D_{\text{max}} \\ \zeta_{\text{d}} = 1, & \text{inkl. Versagen mit } d \geq D_{\text{max}}, \text{ oder} \\ & \text{inkl. Schädigung} \end{cases} \right\} (5.42)$$

so dass auf einfache Weise die unterschiedlichen Entfestigungsmechanismen, das sind entweder ausschließliche Temperaturentfestigung ohne Schädigung und Versagen, Versagensmodellierung bei Erreichen eines kritischen Schädigungswertes  $D_{\text{max}}$  oder unter Berücksichtigung der Schädigung gemäß des effektiven Spannungskonzeptes, modelliert werden können.

## 5. Zeitdiskretisierung

Tabelle 5.1: Standardformen des NEWMARK-Integrationsverfahrens

Methoden	Typ	$\beta_N$	$\gamma_N$	Stabilität
Trapezregel	implizit	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	unbedingt
Lineare Beschleunigung	implizit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	bedingt
Zentrales Differenzenverfahren	explizit	0	$\frac{1}{2}$	bedingt
max. Hochfrequenz-Dissipation (nach Hughes, 2000, S. 501)	implizit	0.49	0.9	unbedingt

Tabelle 5.2: Zusammenfassung des Spannungsalgorithmus

bekannte Größen: Materialparameter, $\Delta t$ , ${}^t\mathbf{F}$ , ${}^t\mathbf{G}_P$ , ${}^t\theta$ , ${}^t s$ , ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$	
(A.) elastische Vorschätzung:	
1.	${}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E = \frac{1}{2}\ln({}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \cdot {}^t\mathbf{G}_P \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{F})$ (T 5.2-1)
2.	${}^{\text{trl}}\theta = {}^t\theta$ (T 5.2-2)
3.	${}^{\text{trl}}s = {}^t s$ (T 5.2-3)
4.	${}^{\text{trl}}d = ({}^{\text{trl}}s)^{D_w}$ (T 5.2-4)
5.	${}^{\text{trl}}\sigma_{v\text{eff}} = 2\mu_r\sqrt{3/2}\ \text{dev}({}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E)\ $ (T 5.2-5)
6.	${}^{\text{trl}}\mathbf{N} = \text{sgn}(\text{dev}({}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E))$ (T 5.2-6)
(B.) Bestimmung des plastischen Korrektors $\Delta p$ (siehe Tabelle 5.3)	
(C.) Berechnung der Größen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ :	
1.	${}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E = {}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E - \Delta p\sqrt{3/2}{}^{\text{trl}}\mathbf{N}$ (T 5.2-7)
2.	${}^{t+\Delta t}\mathbf{G} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-1} \cdot \exp\{2{}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E\} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-T}$ (T 5.2-8)
3.	${}^{t+\Delta t}\sigma_{v\text{eff}} = {}^{\text{trl}}\sigma_{v\text{eff}} - 3\mu_r\Delta p$ (T 5.2-9)
4.	${}^{t+\Delta t}\theta = {}^{\text{trl}}\theta + \beta_r/(\rho_r c_{\theta r})(1 - {}^{\text{trl}}d){}^{t+\Delta t}\sigma_{v\text{eff}}\Delta p$ (T 5.2-10)
5.	${}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{hyd eff}} = (3\lambda_r + 2\mu_r)(\frac{1}{3}\text{tr}({}^{\text{trl}}\ln\mathbf{V}_E) - \alpha_{\theta r}({}^{t+\Delta t}\theta - \theta_R))$ (T 5.2-11)
6.	${}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{\text{trx}} = {}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{hyd eff}}/{}^{t+\Delta t}\sigma_{v\text{eff}}$ (T 5.2-12)
7.	${}^{t+\Delta t}\varepsilon_f = \varepsilon_f({}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{\text{trx}}, \Delta p/\Delta t, {}^{t+\Delta t}\theta)$ [gemäß Gl. 3.59] (T 5.2-13)
8.	${}^{t+\Delta t}s = {}^{\text{trl}}s + D_c/{}^{t+\Delta t}\varepsilon_f\Delta p$ (T 5.2-14)
9.	${}^{t+\Delta t}d = ({}^{t+\Delta t}s)^{D_w}$ (T 5.2-15)
10.	${}^{t+\Delta t}\mathbf{K} = \mathbf{K}({}^{t+\Delta t}\ln\mathbf{V}_E, {}^{t+\Delta t}\theta, {}^{t+\Delta t}d)$ [gemäß Gl. 5.9] (T 5.2-16)

Tabelle 5.3: Bestimmung des lokalen Dehnungsinkrements  $\Delta\varepsilon_{vP}$  und des plastischen Korrektors  $\Delta p$ 

bekannte Größen: Materialparameter, Art der Modellformulierung,	
$\Delta t, {}^t\mathbf{F}, {}^t\gamma, {}^t\mathbf{G}_P, {}^t\theta = \text{trl}\theta, {}^td = \text{trl}d, {}^t\sigma_v, \text{trl}\sigma_{v\text{eff}}, {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}, {}^{t+\Delta t}\gamma$	
<hr/>	
<b>(●) lokales Modell, explizites Verfahren:</b>	
1.	$\Delta\varepsilon_{vP} = \Delta t \dot{\varepsilon}_0 \left\langle \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{{}^t\sigma_v / (1 - {}^td)}{(A + B({}^t\varepsilon_{vP})^n) (1 - (T({}^t\theta))^m)} - 1 \right) \right\} - 1 \right\rangle$ (T5.3-1)
2.	$\Delta p = \Delta\varepsilon_{vP}$ (T5.3-2)
<hr/>	
<b>(○) lokales Modell, implizites Verfahren:</b>	
0.	Startwert der Iteration ( $i = 0$ ): $\Delta\varepsilon_{vP}^{(i)} = 0$ (T5.3-3)
1.	$\varepsilon_{vP}^{(i)} = {}^t\varepsilon_{vP} + \Delta\varepsilon_{vP}^{(i)}$ (T5.3-4)
2.	$\dot{\varepsilon}_{vP}^{(i)} = \Delta\varepsilon_{vP}^{(i)} / \Delta t$ (T5.3-5)
3.	$\sigma_{v\text{eff}}^{(i)} = \text{trl}\sigma_{v\text{eff}} - 3\mu_r \Delta\varepsilon_{vP}^{(i)}$ (T5.3-6)
4.	$\theta^{(i)} = \text{trl}\theta + \beta_r / (\rho_r c_{\theta r}) (1 - \text{trl}d) \sigma_{v\text{eff}}^{(i)} \Delta\varepsilon_{vP}^{(i)}$ (T5.3-7)
5.	$T^{(i)} = \min(1.0; \max(0.0; (\theta^{(i)} - \theta_R) / (\theta_M - \theta_R)))$ (T5.3-8)
6.	$r^{(i)} = \sigma_{v\text{eff}}^{(i)} - (A + B(\varepsilon_{vP}^{(i)})^n) (1 + C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{vP}^{(i)} / \dot{\varepsilon}_0)) (1 - (T^{(i)})^m)$ (T5.3-9)
7.	$ r^{(i)}  \leq \text{tol}$ oder $r^{(0)} < 0 \rightarrow \text{goto 11.}$ (T5.3-10)
8.	bestimme $(r, \Delta\varepsilon_{vP})^{(i)}$ gemäß (5.40) mit (5.39a-h) (T5.3-11)
9.	$\Delta\varepsilon_{vP}^{(i+1)} = \Delta\varepsilon_{vP}^{(i)} - r^{(i)} / (r, \Delta\varepsilon_{vP})^{(i)}$ (T5.3-12)
10.	$(i + 1) \rightarrow (i)$ goto 1. (T5.3-13)
11.	$\Delta\varepsilon_{vP} = \Delta\varepsilon_{vP}^{(i)}$ (T5.3-14)
12.	$\Delta p = \Delta\varepsilon_{vP}$ (T5.3-15)
<hr/>	
<b>(★) nicht-lokales Gradienten-Modell:</b>	
1.	$\Delta\varepsilon_{vP}$ nach (●) oder (○), jedoch mit ${}^t\varepsilon_{vP} \equiv {}^t\gamma$ (T5.3-16)
2.	$\Delta p = {}^{t+\Delta t}\gamma - {}^t\gamma$ (T5.3-17)

## 6 Finite-Element Approximation

### 6.1 Ortsdiskretisierung und allgemeines Vorgehen

Im Rahmen der Finiten-Elemente Methode (FEM) wird das zu bestimmende Lösungsfeld, bzw. bei Mehrfeldproblemen jedes einzelne Lösungsfeld, über die an diskreten Knotenpunkten definierten Kontinuumsfreiheitsgrade (DOFs) approximiert. Dazu wird die gesamte Struktur  $\mathcal{B}_r$  in eine endliche Anzahl von Elementen  $\Omega^e$  unterteilt,

$$\mathcal{B}_r \cong \Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{EL}}} \Omega^e, \quad (6.1)$$

wobei  $\Omega$  das die Approximation des gesamten Gebiets  $\mathcal{B}_r$  kennzeichnet, siehe auch *Bild 6.1*, und mit  $n_{\text{EL}}$  die Anzahl der einzelnen Elemente angegeben ist. Die Berandung des approximierten Gebietes wird zudem mit  $\partial\mathcal{B}_r \cong \Gamma$  bezeichnet. Das grundlegende Prinzip der FEM besteht darin, die Feldgleichungen des Randwertproblems in dem Mittel über das Elementvolumen, d. h. in einer schwachen Form, zu erfüllen. Daraus resultiert, dass lediglich die Kontinuumsfreiheitsgrade an den Elementknoten zu bestimmen sind, durch die die Lösungsfelder approximiert werden.

Die schwache, d. h. integrale Form der Feldgleichungen wird über die Anwendung von Variationsprinzipien, in der Regel des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (P. d. v. V.), hergeleitet. Im Rahmen des isoparametrischen Konzeptes erfolgt sowohl die Approximation des Ortes als auch die des Lösungsfeldes unter Verwendung der gleichen, elementweisen Interpolationsfunktionen. Dieses Vorgehen gewährleistet die geometrische Kompatibilität der Abbildung und der Verschiebungsinkremente. Die Berücksichtigung dieser Approximationen in der schwachen Formulierung führt so auf ein im Allgemeinen nichtlineares Gleichungssystem für die Kontinuumsfreiheitsgrade des Gesamtsystems, das sich aus den einzelnen Beiträgen der Elementformulierung zusammensetzt. Im Sinne eines standardisierten Vorgehens erfolgt dabei die Auswertung der relevanten Elementintegrale durch Transformation der Beziehungen auf ein Referenzelement mit gleichbleibenden Abmessungen und anschließend durch numerische Integration mit Hilfe geeigneter Integrationspunkte und Wichtungswerte.

Nachfolgend sind die genannten Schritte zur Aufstellung des Gleichungssystems für die nicht-lokale Formulierung aus Kapitel 4 beschrieben. Für diesen Fall stellen das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  und das inelastische Verzerrungsfeld  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}, t)$  die zu bestimmenden Lösungsfelder dar, die durch die Kontinuumsfreiheitsgrade (DOFs)  $\mathbf{d}_u$  und  $\mathbf{d}_\gamma$  approximiert werden. Desweiteren wird daran anschließend auf die Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems sowie auf Aspekte der Implementierung in ein bestehendes FE-Programm eingegangen.

### 6.2 Schwache Formulierung

Den Ausgangspunkt der schwachen Formulierung bildet die Einführung der Testfunktionen für das jeweilige Feld,  $\delta\mathbf{u}$  und  $\delta\boldsymbol{\gamma}$ . Im Allgemeinen sind diese Funktionen beliebig, jedoch wird gefordert, dass sie im gesamten Lösungsgebiet geometrisch kompatibel sind sowie an dem jeweiligen DIRICHLET-Rand verschwinden, *i.e.*

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_u \quad \text{und} \quad \delta\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_\gamma \equiv \emptyset. \quad (6.2)$$

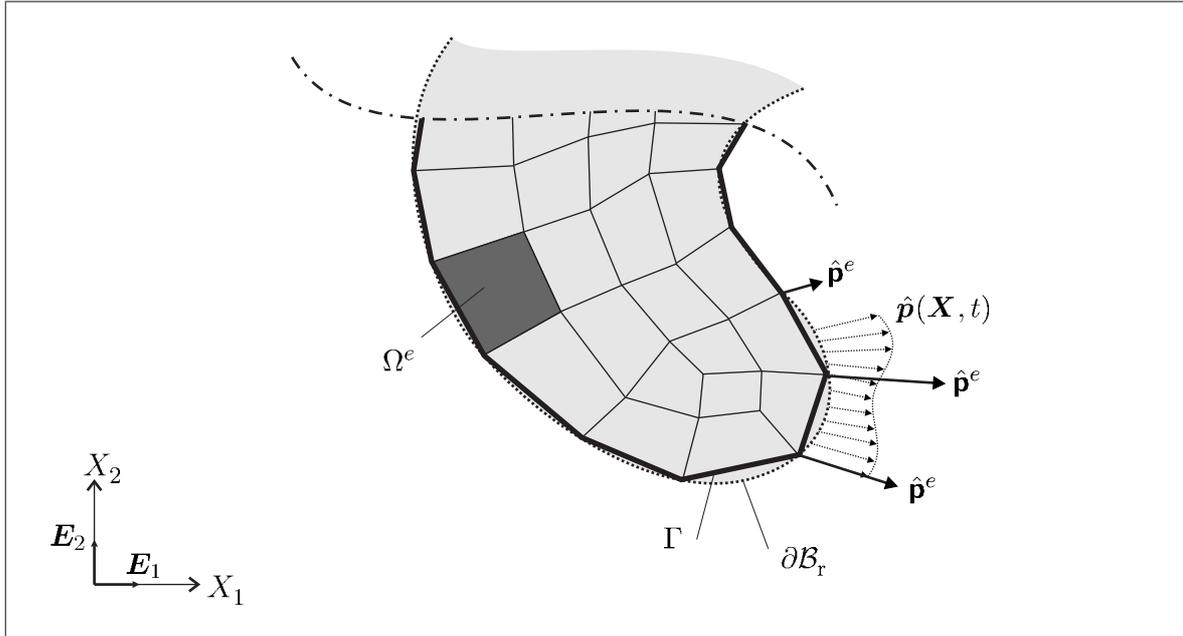


Bild 6.1: Ortsdiskretisierung der Struktur im Rahmen der FEM

Darin stellt aufgrund der Angabe der NEUMANN-Randbedingungen gemäß (T 4.1-14)<sub>2</sub>, i.e.

$$\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_r = \hat{\mathbf{p}} \quad , \forall \mathbf{X} \in \Gamma_\sigma \quad \text{und} \quad \nabla_r \dot{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{n}}_r = 0 \quad , \forall \mathbf{X} \in \Gamma_\varphi \equiv \Gamma \quad , \quad (6.3)$$

mit  $\Gamma_\varphi \equiv \Gamma$  der DIRICHLET-Rand des inelastischen Verzerrungsfeldes eine leere Menge dar,  $\Gamma_\gamma \equiv \emptyset$ . Zusammen mit der Bilanzgleichung des Verschiebungsfeldes (T 4.1-2) und der entsprechenden Gleichung des inelastischen Verzerrungsfeldes (T 4.1-3), i.e.

$$\text{DIV}(\mathbf{P}^T) = \varrho_r \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \dot{\gamma} - \bar{c}_r \text{DIV}(\nabla_r \dot{\gamma}) = \dot{\epsilon}_{vP} \quad , \quad (6.4)$$

mit  $\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ , liefert die Integration über das Gebiet  $\Omega$  dann unter Verwendung des GAUSS'schen Integralsatzes zur Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral, i.e.

$$\int_V \text{DIV}(\bullet) dV = \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}_r \cdot (\bullet) d\partial V \quad (6.5)$$

mit der nach aussen gerichteten Normalen  $\hat{\mathbf{n}}_r$ , schließlich die Gleichungen

$$\int_\Omega \delta \mathbf{u} \cdot \varrho_r \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_\Omega \nabla_r \delta \mathbf{u} : \mathbf{P} d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{p}} d\Gamma_\sigma \quad \text{und} \quad (6.6a)$$

$$\int_\Omega \delta \gamma \dot{\gamma} d\Omega + \int_\Omega \nabla_r \delta \gamma \cdot \bar{c}_r \nabla_r \dot{\gamma} d\Omega = \int_\Omega \delta \gamma \dot{\epsilon}_{vP} d\Omega \quad (6.6b)$$

für die beiden Lösungsfelder  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  und  $\gamma(\mathbf{X}, t)$ . Zudem entspricht gemäß der Identität  $\nabla_r \delta \mathbf{u} = \delta \nabla_r \mathbf{u} = \delta \mathbf{F}$  der Gradient der virtuellen Verschiebungen dem virtuellen Deformationsgradienten.

Im Rahmen einer numerischen Implementierung ist es vorteilhaft, die tensorielle Darstellung der Gleichungen durch geeignete Matrizenoperationen mit Hilfe der VOIGT'schen Schreibweise auszudrücken. Zur Unterscheidung beider Schreibweisen wird die VOIGT-Notation durch

## 6. Finite-Element Approximation

serifenlose, aufrechte Zeichen gekennzeichnet. Am Beispiel des Deformationsgradienten als Repräsentant eines unsymmetrischen Zweifeldtensors zeigt sich die Anordnung der einzelnen Komponenten zu

$$\mathbf{F} = F_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j = \begin{matrix} i \setminus j & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.7)$$

$$\xrightarrow{\text{VOIGT}} \mathbf{F} = (F_{11} \ F_{22} \ F_{33} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{23} \ F_{21} \ F_{31} \ F_{32})^T. \quad (6.8)$$

Weitere Größen in der VOIGT-Notation folgen entsprechend. Unter Verwendung dieser Darstellungsform folgt aus (6.6a, b) dann mit

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \varrho_T \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{F}^T \mathbf{P} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{p}} \, d\Gamma_{\sigma} \quad (6.9a)$$

$$\int_{\Omega} \delta \gamma \dot{\gamma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \nabla \gamma^T \bar{c}_T \nabla \dot{\gamma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \gamma \dot{\epsilon}_{\text{VP}} \, d\Omega. \quad (6.9b)$$

die schwache Form in Matrixschreibweise. Aufgrund der Ortsdiskretisierung (6.1) kann das Volumenintegral über das gesamte Lösungsgebiet  $\Omega$  aus den einzelnen Integralen über  $\Omega^e$  zusammengesetzt werden. Die Integration über den Spannungsrand  $\Gamma_{\sigma}$  setzt sich hingegen nur aus der Integration über diejenigen Elementränder zusammen, die die entsprechende Berandung des Gesamtgebietes bilden, siehe auch *Bild 6.1*.

### 6.3 Approximation der Elementgrößen

Die Lösungsfelder  $\mathbf{u}$  und  $\gamma$  werden elementweise über die Element-Knotenwerte  $\mathbf{d}_u^e$  und  $\mathbf{d}_{\gamma}^e$  mit Hilfe von Ansatzfunktionen interpoliert. Entsprechend werden die Raten sowie die virtuellen Größen und räumlichen Ableitungen der Lösungsfelder in der Form

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}_u \mathbf{d}_u^e, \quad \ddot{\mathbf{u}} \approx \mathbf{N}_u \ddot{\mathbf{d}}_u^e, \quad \delta \mathbf{u} \approx \mathbf{N}_u \delta \mathbf{d}_u^e, \quad \delta \mathbf{F} \approx \mathbf{B}_u \delta \mathbf{d}_u^e, \quad (6.10a)$$

$$\gamma \approx \mathbf{N}_{\gamma} \mathbf{d}_{\gamma}^e, \quad \dot{\gamma} \approx \mathbf{N}_{\gamma} \dot{\mathbf{d}}_{\gamma}^e, \quad \nabla \dot{\gamma} \approx \mathbf{B}_{\gamma} \dot{\mathbf{d}}_{\gamma}^e, \quad \delta \gamma \approx \mathbf{N}_{\gamma} \delta \mathbf{d}_{\gamma}^e, \quad \delta \nabla \gamma \approx \mathbf{B}_{\gamma} \delta \mathbf{d}_{\gamma}^e \quad (6.10b)$$

approximiert, wobei  $\mathbf{N}_{\bullet}$  die entsprechende Matrix der Ansatzfunktionen und  $\mathbf{B}_{\bullet}$  die entsprechende Matrix der räumlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen darstellt. Für ein zweidimensionales Problem mit einem vierknotigen Element und bilinearen Ansatzfunktionen für jedes Feld gilt beispielsweise für die Element-Knotenwerte der Kontinuumsfreiheitsgrade

$$\mathbf{d}_u^e = (u_1^{e1} \ u_2^{e1} \ | \ u_1^{e2} \ u_2^{e2} \ | \ u_1^{e3} \ u_2^{e3} \ | \ u_1^{e4} \ u_2^{e4})^T \text{ und} \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{d}_{\gamma}^e = (\gamma^{e1} \ | \ \gamma^{e2} \ | \ \gamma^{e3} \ | \ \gamma^{e4})^T \quad (6.11b)$$

sowie für die Matrizen der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}_u = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} N^1 & 0 & N^2 & 0 & N^3 & 0 & N^4 & 0 \\ 0 & N^1 & 0 & N^2 & 0 & N^3 & 0 & N^4 \end{array} \right], \quad \mathbf{N}_{\gamma} = [N^1 \ N^2 \ N^3 \ N^4]. \quad (6.12)$$

Bei der Formulierung der Matrix der Ableitungen der Ansatzfunktionen  $\mathbf{B}$  muss bei ebenen Problemstellungen zwischen dem ebenen Verzerrungszustand (EVZ), dem ebenen Spannungszustand (ESZ) und dem axialsymmetrischen Zustand (AXZ) unterschieden werden. Für den EVZ gilt beispielsweise

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} N_{,X_1}^1 & 0 & \dots & \dots & N_{,X_1}^4 & 0 \\ 0 & N_{,X_2}^1 & \dots & \dots & 0 & N_{,X_2}^4 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ N_{,X_2}^1 & 0 & \dots & \dots & N_{,X_2}^4 & 0 \\ 0 & N_{,X_1}^1 & \dots & \dots & 0 & N_{,X_1}^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\gamma = \begin{bmatrix} N_{,X_1}^1 & N_{,X_1}^2 & N_{,X_1}^3 & N_{,X_1}^4 \\ N_{,X_2}^1 & N_{,X_2}^2 & N_{,X_2}^3 & N_{,X_2}^4 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Bei der standardmäßigen Elementformulierung nimmt jede Interpolationsfunktion  $N^i$  an dem Elementknoten  $i$  den Wert eins an und verschwindet an den übrigen Elementknoten. Damit wird der berechnete Wert eines Freiheitsgrades direkt mit dem Wert des Lösungsfeldes an dieser Stelle assoziiert. Bei Mehrfeldproblemen muss nicht zwangsläufig jedes Feld über die selben Interpolationsfunktionen approximiert werden. In Pamin (1994) ist beispielsweise der Einfluss unterschiedlicher Polynomgrade der Ansatzfunktionen im Zusammenhang mit der Gradienten-Plastizitätstheorie bei kleinen Deformationen und unter quasi-statischen Bedingungen untersucht worden. Darin zeigt sich, dass sich eine Berechnung unter Verwendung von Elementformulierungen mit höherwertigeren Ansatzfunktionen für das inelastische Verzerrungsfeld, als für das Verschiebungsfeld robuster und im Sinne der Konvergenz der Lösung effizienter verhält als eine Berechnung unter Verwendung entsprechend kleinerer Elementabmessungen mit jeweils linearen Ansatzfunktionen für jedes Feld. Ähnliche Resultate wurden auch für andere Mehrfeldproblemstellungen (siehe z. B. Flatten, 2001) erhalten. In dem Rahmen dieser Arbeit wird jedoch der übliche Ansatz linearer Interpolationsfunktionen für beide Lösungsfelder verfolgt, um die Ziele dieser Arbeit zu erreichen.

Durch Verwendung der Approximationen (6.10a, b) und Berücksichtigung der Beliebigkeit der virtuellen Knotengrößen folgen aus der elementweisen Approximation der schwachen Form (6.9a, b) schließlich die elementweisen Beziehungen

$$\mathbf{f}_{u,\text{int}}^e = \mathbf{f}_{u,\text{ext}}^e \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_{\gamma,\text{int}}^e = \mathbf{f}_{\gamma,\text{ext}}^e \quad (6.14)$$

mit den inneren und äußeren Elementknotenkraftvektoren gemäß

$$\mathbf{f}_{u,\text{int}}^e := \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \varrho_{\Gamma} \mathbf{N}_u d\Omega^e \right) \ddot{\mathbf{d}}_u^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{P} d\Omega^e \quad (6.15)$$

$$\mathbf{f}_{\gamma,\text{int}}^e := \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\gamma^T \mathbf{N}_\gamma + \mathbf{B}_\gamma^T \bar{c}_{\Gamma} \mathbf{B}_\gamma d\Omega^e \right) \dot{\mathbf{d}}_\gamma^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\gamma^T \dot{\epsilon}_{\text{VP}} d\Omega^e \quad (6.16)$$

$$\mathbf{f}_{u,\text{ext}}^e := \int_{\Gamma_\sigma^e} \mathbf{N}_u^T \hat{\mathbf{p}} d\Gamma_\sigma^e \quad (6.17)$$

$$\mathbf{f}_{\gamma,\text{ext}}^e := \mathbf{0}. \quad (6.18)$$

Um das FE-Verfahren weiter zu standardisieren, werden die Gebietsintegrale  $\Omega^e$  auf ein Einheitsgebiet  $\Omega_{\square}$  transformiert und dort ausgewertet, siehe *Bild 6.2*. Dieses Verfahren ermöglicht die für jedes Element einheitliche Definition der Ansatzfunktionen  $N^i$  in den

## 6. Finite-Element Approximation

natürlichen Koordinaten  $\{\xi_1, \xi_2\}$ , so dass für vierknotige Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen dann

$$N^1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (6.19a)$$

$$N^2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (6.19b)$$

$$N^3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (6.19c)$$

$$N^4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \quad (6.19d)$$

gilt. Die Transformation zwischen den natürlichen Koordinaten  $\{\xi_1, \xi_2\}$  und den physikalischen Koordinaten  $\{X_1, X_2\}$  erfolgt unter Verwendung der JACOBI-Matrix, bzw. deren Inversen

$$\mathbf{J}_{\square} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{J}_{\square}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

wobei die Komponenten von  $\mathbf{J}_{\square}$  gemäß

$$\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial N^k}{\partial \xi_j} X_i^{ek} \quad (6.21)$$

aus den Ableitungen der Ansatzfunktionen nach der entsprechenden natürlichen Koordinate  $\xi_j$  sowie den physikalischen Elementknoten-Koordinaten  $X_i^{ek}$  berechnet werden. Dabei bezeichnet  $X_i^{ek}$  die  $i$ -te Komponente des Ortsvektors des  $k$ -ten Elementknoten. Die relevanten räumlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen in der  $\mathbf{B}$ -Matrix folgen für den ebenen Fall dann zu

$$N_{,X_j}^i = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial N^i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial X_j} = \frac{\partial N^i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial X_j} + \frac{\partial N^i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial X_j}, \quad (6.22)$$

wobei die Komponenten der Inversen der JACOBI-Matrix, siehe (6.20)<sub>2</sub>, verwendet werden. Die Auswertung des Gebietsintegrals einer beliebigen skalaren Funktion  $f$  ergibt dann unter Verwendung der Determinanten der JACOBI-Matrix  $|\mathbf{J}_{\square}|$  schließlich

$$\int_{\Omega^e} f(\xi_1(X_1, X_2), \xi_2(X_1, X_2)) d\Omega^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) |\mathbf{J}_{\square}| d\Omega_{\square}. \quad (6.23)$$

Die Integration über das konstante Gebiet von  $\xi \in [-1, +1]$  erfolgt darüber hinaus numerisch mit Hilfe der gewichteten Summation der an geeigneten Integrationsstützstellen  $\xi^{\text{GP}}$  ausgewerteten Funktion. Je nach Ordnung  $p$  des zu integrierenden Polynoms richtet sich die Anzahl der benötigten Integrationspunkte  $n_{\text{GP}}$ , wobei in der Regel die Beziehung  $p \leq (2n_{\text{GP}} - 1)$  gilt. In *Tabelle 6.1* sind die GAUSS'schen Integrationspunkte und zugehörigen Wichtungswerte angegeben. Generell gilt für ebene Problemstellungen dann

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi_1, \xi_2) |\mathbf{J}_{\square}| d\Omega_{\square} = \sum_{i=1}^{n_{\text{GP}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{GP}}} f(\xi^{\text{GP}_j}, \xi^{\text{GP}_i}) |\mathbf{J}_{\square}(\xi^{\text{GP}_j}, \xi^{\text{GP}_i})| w_j w_i, \quad (6.24)$$

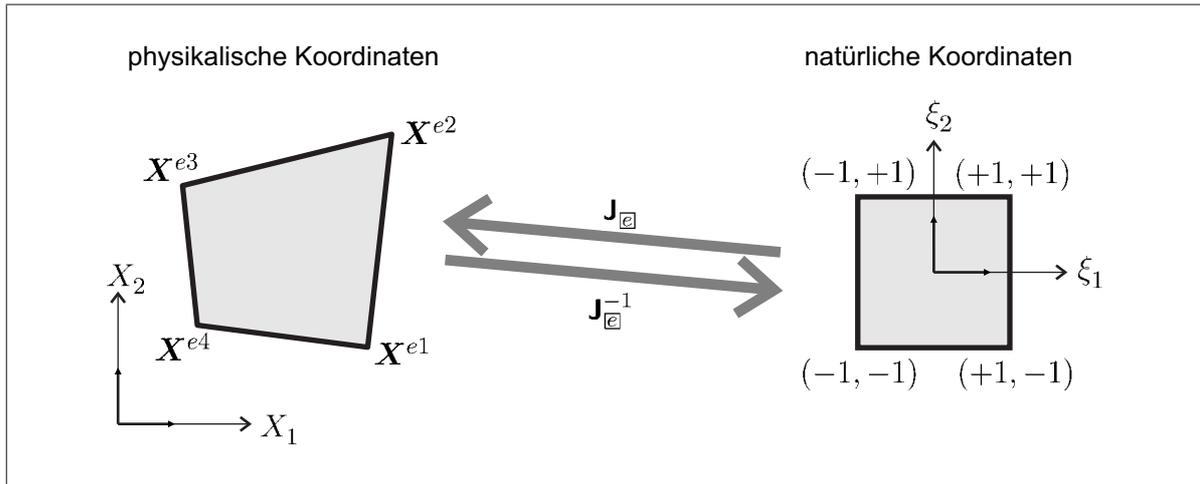


Bild 6.2: Vierknotiges Element in physikalischen und natürlichen Koordinaten

wobei  $n_{GP}$  die Anzahl der Integrationspunkte je Richtung angibt. Bei bilinearen Ansatzfunktionen gemäß (6.19) genügen für eine vollständige Integration zwei Integrationspunkte je Richtung. Werden weniger Integrationspunkte als angegeben verwendet, wovon insbesondere bei expliziten Verfahren Gebrauch gemacht wird, um die Rechenzeit zu minimieren, bedarf es einer zusätzlichen Elementstabilisierung, damit sogenannte „Hourglassing“-Effekte vermieden werden. Für eine umfassende Diskussion dieser Effekte ist beispielsweise auf Govindjee (2002) oder Zienkiewicz und Taylor (2005) verwiesen.

## 6.4 Assemblierung

### 6.4.1 Assemblierung zum Gesamtsystem

Das hinsichtlich der Kontinuumsfreiheitsgrade  $\mathbf{d}_u$  und  $\mathbf{d}_\gamma$  zu lösende Gleichungssystem setzt sich aus den einzelnen Anteilen der Elementknotenkraftvektoren (6.15) bis (6.18) zusammen. Die Assemblierung dieser Elementgrößen zum Gesamtsystem erfolgt analog zu (6.1), so dass dann mit

$$\mathbf{R}_u = \left( \mathbf{f}_{u,\text{ext}} - \mathbf{f}_{u,\text{int}} \right) = \bigcup_{e=1}^{n_{EL}} \left( \mathbf{f}_{u,\text{ext}}^e - \mathbf{f}_{u,\text{int}}^e \right) = \mathbf{0} \quad \text{sowie} \quad (6.25a)$$

$$\mathbf{R}_\gamma = \left( \mathbf{f}_{\gamma,\text{ext}} - \mathbf{f}_{\gamma,\text{int}} \right) = \bigcup_{e=1}^{n_{EL}} \left( \mathbf{f}_{\gamma,\text{ext}}^e - \mathbf{f}_{\gamma,\text{int}}^e \right) = \mathbf{0} \quad (6.25b)$$

die globalen Residuumsgleichungen für jedes Feld getrennt angegeben sind. Diese Gleichungen (6.25a, b) stellen ein gekoppeltes, nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für  $\mathbf{d}_u$  und  $\mathbf{d}_\gamma$  dar. Der gekoppelte und nichtlineare Charakter wird nachfolgend durch die explizite Angabe der Abhängigkeiten beider Gleichungssysteme deutlich: Der Residuumsvektor bezüglich des Verschiebungsfeldes hängt gemäß

$$\mathbf{R}_u(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\gamma}_{n+1}) = \mathbf{f}_{u,\text{ext}}(\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{u}_{n+1})) - \mathbf{f}_{u,\text{int}}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}, \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\gamma}_{n+1})) \quad (6.26)$$

von dem Beschleunigungsfeld  $\ddot{\mathbf{u}}$ , dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und dem inelastischen Verzerrungsfeld  $\boldsymbol{\gamma}$  ab. Darin ist zunächst allgemeingültig ein von der Deformation abhängiger Randspannungsvektor  $\hat{\mathbf{p}}$  berücksichtigt. Ferner folgen die Spannungen  $\mathbf{P}$  als nichtlineare Funktion

## 6. Finite-Element Approximation

Tabelle 6.1: Integrationsstützstellen und Wichtungswerte nach GAUSS

$n_{\text{GP}}$	$\xi^{\text{GP}_i}(n_{\text{GP}})$	$w_i(n_{\text{GP}})$
1	0.0000000000000000	2.0000000000000000
2	-0.577350269189626 0.577350269189626	1.0000000000000000 1.0000000000000000
3	-0.774596669241483 0.0000000000000000 0.774596669241483	0.5555555555555555 0.8888888888888889 0.5555555555555555
4	-0.861136311594053 -0.339981043584856 0.339981043584856 0.861136311594053	0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454
5	-0.906179845938664 -0.538469310105683 0.0000000000000000 0.538469310105683 0.906179845938664	0.236926885056189 0.478628670499366 0.5688888888888889 0.478628670499366 0.236926885056189

des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  indirekt aus dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$ . Der Residuumsvektor bezüglich des inelastischen Verzerrungsfeldes wird gemäß

$$\mathbf{R}_\gamma(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\gamma}_{n+1}) = \mathbf{0} - \mathbf{f}_{\gamma, \text{int}}(\dot{\gamma}_{n+1}, \dot{\epsilon}_{\text{vP}}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}))), \quad (6.27)$$

durch die Abhängigkeit von Verschiebungsfeld und der Rate des inelastischen Verzerrungsfeldes beschrieben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind in (6.26) und (6.27) lediglich die Abhängigkeiten der Residuen von den gesuchten Größen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  angegeben. Weitere Abhängigkeiten von bekannten Größen zum Zeitpunkt  $t_n$ , wie z. B.  $\mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ ,  $\gamma_n$  oder der inneren Größen  $\mathbf{G}_{\text{P},n}$ ,  $\theta_n$ ,  $s_n$ , u. s. w., sind darin nicht dargestellt. Darüber hinaus sind die Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{u}}$  und Verschiebungen  $\mathbf{u}$  über die Zeitdiskretisierungen (5.1a) bzw. (5.3a) miteinander verknüpft, i.e.  $\mathbf{u}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1})$  bzw.  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1})$ .

### 6.4.2 Assemblierung der Element-Freiheitsgrade

In dem vorangegangenen Abschnitt 6.4.1 sind die Residuumsgleichungen für jedes Feld getrennt aufgestellt worden. Im Rahmen der Implementierung in ein FE-Programm ist es notwendig beide Gleichungssysteme, d. h. beide Residuumsvektoren  $\mathbf{R}_u$  und  $\mathbf{R}_\gamma$ , zu einem einzigen Residuumsvektor  $\mathbf{R}$  zusammenzufügen. Diese Anforderung liegt darin begründet, dass in der Regel die Freiheitsgrade eines finites Elementes unabhängig von dem jeweiligen Feld fortlaufend für jeden Elementknoten angegeben werden. Der Element-Freiheitsgradvektor  $\mathbf{d}^e$  enthält die Element-Freiheitsgradvektoren der jeweiligen Felder  $\mathbf{d}_u^e$  und  $\mathbf{d}_\gamma^e$  in der Form

$$\mathbf{d}^e = \bigcup^{\text{DOF}} (\mathbf{d}_u^e, \mathbf{d}_\gamma^e) = (u_1^{e1} \ u_2^{e1} \ \gamma^{e1} \mid u_1^{e2} \ u_2^{e2} \ \gamma^{e2} \mid u_1^{e3} \ u_2^{e3} \ \gamma^{e3} \mid u_1^{e4} \ u_2^{e4} \ \gamma^{e4})^T, \quad (6.28)$$

was hier für ein vierknotiges Element (siehe auch Gln. 6.11a, b) ausgeschrieben ist. Insofern folgt der gesuchte Gesamtsystem-Residuumsvektor  $\mathbf{R}$  unter Beachtung von (6.25b, b) zu

$$\mathbf{R} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{EL}}} \left( \bigcup^{\text{DOF}} \left( (\mathbf{f}_{u,\text{ext}}^e - \mathbf{f}_{u,\text{int}}^e), (\mathbf{f}_{\gamma,\text{ext}}^e - \mathbf{f}_{\gamma,\text{int}}^e) \right) \right) \quad (6.29)$$

wobei nachfolgend auch die vereinfachte Schreibweise

$$\mathbf{R} \equiv \bigcup^{\text{DOF}} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_\gamma \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

verwendet wird. Analog gilt für die Assemblierung der Lösungsvektoren zum Vektor der System-Freiheitsgrade  $\mathbf{d}$  die Vorschrift

$$\mathbf{d} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{EL}}} \left( \bigcup^{\text{DOF}} (\mathbf{d}_u^e, \mathbf{d}_\gamma^e) \right) \equiv \bigcup^{\text{DOF}} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_u \\ \mathbf{d}_\gamma \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

## 6.5 Lösungsalgorithmus

Für die Lösung des globalen Gesamtgleichungssystems (6.30) mit den Anteilen für jedes Feld gemäß (6.26) und (6.27), *i.e.*

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}, \ddot{\mathbf{d}}) = \mathbf{0}, \quad (6.32)$$

nach den Kontinuumsfreiheitsgraden  $\mathbf{d}$  existieren unterschiedliche Herangehensweisen: Zum einen ist es möglich, entweder implizite (und daher iterative) oder auch explizite Verfahren anzuwenden. Zum anderen existieren prinzipiell zwei unterschiedliche Verfahren zur Lösung eines gekoppelten Mehrfeldproblems. Nachfolgend werden die einzelnen Verfahren näher beschrieben und diskutiert.

### 6.5.1 Iteratives NEWTON-RAPHSON Verfahren

Das nichtlineare Gleichungssystem (6.32) wird für ein implizites Verfahren mittels eines iterativen NEWTON-RAPHSON Verfahrens gelöst. Dazu wird der Residuumsvektor  $\mathbf{R}$  im Sinne einer TAYLOR-Reihenentwicklung um eine Stelle  $\mathbf{d}^{(k)}$  entwickelt

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{R}^{(k+1)} = \mathbf{R}^{(k)} + \left[ \mathbf{D}_{\mathbf{d}}(\mathbf{R}) \right] \Big|_{(k)} \Delta \mathbf{d}^{(k)} + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{d}^{(k)})^2 \quad (6.33)$$

bzw. in der für die einzelnen Felder getrennten Formulierung gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_\gamma \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_\gamma \end{pmatrix}^{(k)} + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_{\mathbf{d}_u}(\mathbf{R}_u) & \mathbf{D}_{\mathbf{d}_\gamma}(\mathbf{R}_u) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{d}_u}(\mathbf{R}_\gamma) & \mathbf{D}_{\mathbf{d}_\gamma}(\mathbf{R}_\gamma) \end{array} \right] \Big|_{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d}_u \\ \Delta \mathbf{d}_\gamma \end{pmatrix}^{(k)} + \mathcal{O}^2, \quad (6.34)$$

mit dem Inkrement des Lösungsvektors gemäß  $\Delta \mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k+1)} - \mathbf{d}^{(k)}$ . Mit dem NEWMARK-Zeitintegrationsverfahren für das Verschiebungsfeld gemäß (5.3a) gilt für die Linearisierung des Beschleunigungsfeldes  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$  bezogen auf das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{n+1}$  dann, zunächst in Tensor-Notation

$$\mathbf{D}_u(\ddot{\mathbf{u}}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{I} \cdot \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \Delta \mathbf{u}, \quad (6.35)$$

## 6. Finite-Element Approximation

bzw. in VOIGT-Notation entsprechend für die Knotenverschiebungen

$$\mathbf{D}_{\mathbf{d}_u}(\dot{\mathbf{d}}_u) \Delta \mathbf{d}_u = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \Delta \mathbf{d}_u . \quad (6.36)$$

Mit der Integration des inelastischen Verzerrungsfeldes mittels eines Backward-EULER Verfahrens gemäß (5.7) folgt für die relevante Linearisierung der Verzerrungsrate  $\dot{\gamma}_{n+1}$  nach dem Verzerrungsfeld  $\gamma_{n+1}$  zu

$$\mathbf{D}_\gamma(\dot{\gamma}) \Delta \gamma = \frac{1}{\Delta t} \Delta \gamma \quad \longrightarrow \quad \mathbf{D}_{\mathbf{d}_\gamma}(\dot{\mathbf{d}}_\gamma) \Delta \mathbf{d}_\gamma = \frac{1}{\Delta t} \Delta \mathbf{d}_\gamma . \quad (6.37)$$

Durch den Abbruch der TAYLOR-Reihenentwicklung (6.34) nach dem linearen Term und zusammen mit (6.36) und (6.37) folgt für einen Iterationsschritt ( $k$ ) schließlich die linearisierte Beziehung

$$\left[ \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\gamma} \\ \mathbf{K}_{\gamma u} & \mathbf{K}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \right]_{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{d}_u^{(k)} \\ \Delta \mathbf{d}_\gamma^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u^{(k)} \\ \mathbf{R}_\gamma^{(k)} \end{pmatrix} , \quad (6.38)$$

wobei die einzelnen Anteile der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  bzw. Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}$  aus den jeweiligen Elementgrößen

$$\mathbf{M}_{uu}^e := \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \varrho_{\text{r}} \mathbf{N}_u d\Omega^e , \quad [8 \times 8] \quad (6.39)$$

$$\mathbf{K}_{uu}^e := \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\mathbf{P})] \mathbf{B}_u d\Omega^e , \quad [8 \times 8] \quad (6.40)$$

$$\mathbf{K}_{u\gamma}^e := \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T [\mathbf{D}_\gamma(\mathbf{P})] \mathbf{N}_\gamma d\Omega^e , \quad [8 \times 4] \quad (6.41)$$

$$\mathbf{K}_{\gamma u}^e := -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\gamma^T [\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\Delta \varepsilon_{\text{vP}})] \mathbf{B}_u d\Omega^e , \quad [4 \times 8] \quad (6.42)$$

$$\mathbf{K}_{\gamma\gamma}^e := \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_\gamma^T \mathbf{N}_\gamma + \mathbf{B}_\gamma^T \bar{c}_{\text{r}} \mathbf{B}_\gamma) d\Omega^e , \quad [4 \times 4] \quad (6.43)$$

gemäß (6.1) assembliert werden. Ferner ist in (6.42) die lokale inelastische Verzerrungsrate gemäß (5.35c), i.e.  $\dot{\varepsilon}_{\text{vP}} = \Delta \varepsilon_{\text{vP}} / \Delta t$ , verwendet worden. Die in den eckigen Klammern von (6.39) bis (6.43) angegebenen Matrizengrößen beziehen sich dabei auf das zuvor beschriebene vierknotige Element mit bilinearen Ansatzfunktionen.

### 6.5.2 Bestimmung der Materialtangente

Um für das implizite NEWTON-RAPHSON Verfahren eine quadratische Konvergenz der Iteration, zumindest für Lösungsvektoren, die in der näheren Umgebung des zu bestimmenden Lösungsvektors liegen, zu erreichen, müssen die in (6.40) bis (6.42) angegebenen Materialtangente  $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\mathbf{P})$ ,  $\mathbf{D}_\gamma(\mathbf{P})$  sowie  $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\Delta \varepsilon_{\text{vP}})$  konsistent zu dem jeweiligen Berechnungsverfahren der Spannungen  $\mathbf{P}$ , siehe *Tabelle 5.2*, bzw. dem Verfahren zur Bestimmung des lokalen plastischen Inkrementes  $\Delta \varepsilon_{\text{vP}}$ , siehe *Tabelle 5.3*, ermittelt werden. Diese konsistenten, bzw. inkrementellen Tangente unterscheiden sich von den Kontinuumstangenten, da den jeweiligen Berechnungsverfahren zum einen diskrete Zeitschrittweiten  $\Delta t$  aber auch bestimmte

Annahmen wie beispielsweise die des Return-Mapping Algorithmus zugrunde liegen, siehe u. a. auch Klingbeil (2006).

Für *numerische Bestimmungsverfahren*, die mit relativer Einfachheit zu implementieren sind, ist auf die einschlägige Literatur, u. a. von Simo (1992), Miehe (1996) oder Arndt (2000), verwiesen. An dieser Stelle werden jedoch die relevanten Schritte für eine *analytische Bestimmung* der konsistenten Tangenten des in Kapitel 4 beschriebenen und in *Tabelle 4.1* zusammengefassten nicht-lokalen Modells aufgeführt. Die vollständige Angabe der einzelnen Ableitungen erfolgt darüber hinaus im Anhang B ab Seite 164.

### Linearisierung der Spannungen: $D_F(\mathbf{P})$ und $D_\gamma(\mathbf{P})$

Mit der Beziehung zwischen den PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen  $\mathbf{P}$  und den KIRCHHOFF-Spannungen  $\mathbf{K}$  gemäß (2.46) folgt unter Berücksichtigung der allgemeinen Umformung (B.1) dann für die Ableitung der Spannungen  $\mathbf{P}$  nach dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  sowie dem inelastischen Verzerrungsfeld  $\gamma$  schließlich

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-T} \Rightarrow D_F(\mathbf{P}) = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{F}^{-T}) : D_F(\mathbf{K}) - (\mathbf{P} \odot \mathbf{F}^{-T}), \quad \text{und} \quad (6.44)$$

$$\Rightarrow D_\gamma(\mathbf{P}) = (\mathbf{I} \oplus \mathbf{F}^{-T}) : D_\gamma(\mathbf{K}). \quad (6.45)$$

Die beiden Summanden in (6.44) sind dabei als einerseits materielle und andererseits geometrische Tangente interpretierbar. Desweiteren gilt zur Bestimmung der KIRCHHOFF-Spannungen  $\mathbf{K}$  die allgemeine Funktionsvorschrift gemäß (T 4.1-4) in Abhängigkeit der elastischen linken logarithmischen Verzerrungen  $\ln \mathbf{V}_E$ , der Temperatur  $\theta$  sowie der isotropen Schädigung  $d$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise wird das Potential  $\psi$  gemäß

$$\psi(\ln \mathbf{V}_E, \theta, d) = (1 - d) \left[ \mu_T \ln \mathbf{V}_E : \ln \mathbf{V}_E + \frac{1}{2} \lambda_T (\mathbf{I} : \ln \mathbf{V}_E)^2 - (3\lambda_T + 2\mu_T) \alpha_{\theta T} (\theta - \theta_T) \mathbf{I} : \ln \mathbf{V}_E + \varrho_T c_{\theta T} (\theta - \theta_T - \theta \ln(\theta/\theta_T)) \right] \quad (6.46)$$

eingeführt, so dass mit

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_E} = (1 - d) \left[ \mathbf{C}_E : \ln \mathbf{V}_E - (3\lambda_T + 2\mu_T) \alpha_{\theta T} (\theta - \theta_T) \mathbf{I} \right] \quad (6.47)$$

eben genau die Funktionsvorschrift (T 4.1-4) folgt. Damit folgen dann weiter die Ableitungen der KIRCHHOFF-Spannungen zu

$$\Rightarrow D_F(\mathbf{K}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_E^2} : D_F(\ln \mathbf{V}_E) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_E \partial \theta} \otimes D_F(\theta) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_E \partial d} \otimes D_F(d), \quad (6.48)$$

$$\Rightarrow D_\gamma(\mathbf{K}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_E^2} : D_\gamma(\ln \mathbf{V}_E) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_E \partial \theta} D_\gamma(\theta) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_E \partial d} D_\gamma(d) \quad (6.49)$$

mit den partiellen Ableitungen gemäß (B.2) bis (B.4). Bis zu diesem Punkt stimmen die algorithmischen Ableitungen mit den kontinuierlichen, d. h. infinitesimalen Ableitungen überein. Mit der Integration der Evolutionsgleichungen für die elastischen logarithmischen Verzerrungen  ${}^{t+\Delta t} \ln \mathbf{V}_E$ , die Temperatur  ${}^{t+\Delta t} \theta$  sowie die Schädigung  ${}^{t+\Delta t} d$  gemäß des in *Tabelle 5.2* angegebenen Algorithmus weichen die konsistenten Tangenten von den Kontinuumstangenten ab. Die Linearisierung dieser Größen bezüglich des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  führt gemäß der in dem Anhang B aufgeführten Ableitungen (B.5 bis B.18) auf

$$\Rightarrow D_F({}^{t+\Delta t} \ln \mathbf{V}_E) = \left( \mathbf{I}^s - \frac{3\mu_T \Delta \gamma}{\sigma_{v \text{ eff}}} \left( \mathbf{I}^s - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \text{trl} \mathbf{N} \otimes \text{trl} \mathbf{N} \right) \right) : D_F(\text{trl} \ln \mathbf{V}_E), \quad (6.50)$$

## 6. Finite-Element Approximation

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\theta) = \left( \frac{\beta_{\text{r}}}{\varrho_{\text{r}} c_{\theta\text{r}}} (1 - \text{tr}l d) \Delta\gamma \, 2\mu_{\text{r}} \sqrt{3/2} \text{tr}l \mathbf{N} \right) : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{tr}l \ln \mathbf{V}_{\text{E}}), \quad (6.51)$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}d) = -D_{\text{w}}({}^{t+\Delta t}S)^{D_{\text{w}}-1} \frac{\Delta\gamma D_{\text{c}}}{({}^{t+\Delta t}\varepsilon_{\text{f}})^2} \left( \frac{\partial\varepsilon_{\text{f}}}{\partial\bar{\sigma}_{\text{trx}}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{\text{trx}}) + \frac{\partial\varepsilon_{\text{f}}}{\partial\theta} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\theta) \right). \quad (6.52)$$

Die weiteren, in den Gleichungen (6.50 bis 6.52) auftretenden Ableitungen sind durch (B.5) für  $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{tr}l \ln \mathbf{V}_{\text{E}})$  sowie durch (B.15) und (B.17) für die partiellen Ableitungen der Versagensdehnung  $\varepsilon_{\text{f}}$  nach der Mehrachsigkeit bzw. der Temperatur und durch (B.13) für  $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{\text{trx}})$  bestimmt.

Darüber hinaus liefert die Linearisierung der linken elastischen logarithmischen Verzerrungen  ${}^{t+\Delta t} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}$ , der Temperatur  ${}^{t+\Delta t} \theta$  sowie der Schädigung  ${}^{t+\Delta t} d$  bezüglich des inelastischen Verzerrungsfeldes  $\gamma$  gemäß der Ableitungen (B.22 bis B.29) letztendlich mit

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}) = \text{tr}l \ln \mathbf{V}_{\text{E}} - \sqrt{3/2} \text{tr}l \mathbf{N} \quad (6.53)$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \theta) = \frac{\beta_{\text{r}}}{\varrho_{\text{r}} c_{\theta\text{r}}} (1 - \text{tr}l d) ({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}} - 3\mu_{\text{r}}) \quad (6.54)$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} d) = D_{\text{w}}({}^{t+\Delta t} S)^{D_{\text{w}}-1} \frac{D_{\text{c}}}{{}^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{f}}} \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{{}^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{f}}} \left( \frac{\partial\varepsilon_{\text{f}}}{\partial\bar{\sigma}_{\text{trx}}} \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}}) + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial\varepsilon_{\text{f}}}{\partial\dot{\gamma}} + \frac{\partial\varepsilon_{\text{f}}}{\partial\theta} \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \theta) \right) \right) \quad (6.55)$$

die für (6.49) benötigten Größen. Die weiteren, in (6.55) angegebenen Ableitungen sind durch (B.27) für  $\mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}})$  sowie durch (B.15 bis B.17) für  $\partial_{\bar{\sigma}_{\text{trx}}}(\varepsilon_{\text{f}})$ ,  $\partial_{\dot{\gamma}}(\varepsilon_{\text{f}})$  und  $\partial_{\theta}(\varepsilon_{\text{f}})$  ebenfalls bestimmt.

### Linearisierung des lokalen, plastischen Vergleichsdehnungsincrementes: $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\Delta\varepsilon_{\text{vP}})$

Für die Bildung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\gamma u}$  gemäß (6.42) ist die Linearisierung des lokalen inelastischen Vergleichsdehnungsincrementes  $\Delta\varepsilon_{\text{vP}}$  bezüglich des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  erforderlich. Für ein implizites Verfahren wird dieses Inkrement durch die iterative Lösung der skalaren, lokalen Residuumsleichung  $r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}}) = 0$  bestimmt, siehe *Tabelle 5.3*. Insofern führt die genannte Linearisierung auf

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\Delta\varepsilon_{\text{vP}}) = \left[ \frac{\partial r(\Delta\varepsilon_{\text{vP}})}{\partial \Delta\varepsilon_{\text{vP}}} \right]^{-1} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(r^{(i)}) \quad (6.56)$$

wobei die Ableitung  $r, \Delta\varepsilon_{\text{vP}}$  aus der lokalen Iteration bereits bekannt ist, siehe (T 5.3-11) bzw. Gleichung (5.40) mit (5.39a-h). Die algorithmische Ableitung der lokalen Residuumsleichung nach dem Deformationsgradienten liefert gemäß (B.19) mit (B.21) dann

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(r^{(i)}) = \left( \frac{\partial r^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}^{(i)}} + \frac{\partial r^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t} \theta^{(i)}} \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \theta^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}^{(i)}} \right) 2\mu_{\text{r}} \sqrt{3/2} \text{tr}l \mathbf{N} : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{tr}l \ln \mathbf{V}_{\text{E}}), \quad (6.57)$$

erneut mit  $\mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{tr}l \ln \mathbf{V}_{\text{E}})$  gemäß (B.5). Der Klammerausdruck in (6.57) ist darüber hinaus in (B.20) angegeben und liegt näherungsweise in der Größenordnung des Wertes eins.

### 6.5.3 Lösung des gekoppelten Mehrfeldproblems

Mit den in dem vorangegangenen Abschnitt 6.5.2 bestimmten Materialtangente sind nun sämtliche Größen bekannt, um das linearisierte Gleichungssystem in der Form (6.38) aufzustellen und hinsichtlich der Inkremente  $\Delta \mathbf{d}_u$  und  $\Delta \mathbf{d}_\gamma$  zu lösen. Dazu bieten sich generell zwei unterschiedliche Verfahren an: Zum einen werden, wie in (6.38) angegeben, beide Lösungsfelder während eines Iterationsschrittes gleichzeitig aktualisiert. Diese Vorgehensweise wird als *monolithisches* Verfahren bezeichnet, wobei an dieser Stelle gesondert auf die entsprechende Anordnung der Freiheitsgrade in der Form

$$\mathbf{S}^{(k)} \Delta \mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)} \quad (6.58)$$

mit

$$\mathbf{S} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{EL}}} \mathbf{S}^e = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{EL}}} \left( \bigcup^{\text{DOF}} \left[ \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\gamma}^e \\ \mathbf{K}_{\gamma u}^e & \mathbf{K}_{\gamma\gamma}^e \end{bmatrix} \right] \right) \quad (6.59)$$

sowie (6.31) für  $\Delta \mathbf{d}^{(k)}$  und (6.29) für  $\mathbf{R}^{(k)}$  eingegangen wird. Für ein vierknotiges Element mit bilinearen Ansatzfunktionen entspricht daher die assemblierte Elementmatrix  $\mathbf{S}^e$  einer  $[12 \times 12]$ -Matrix.

Andererseits werden bei einer als *gestaffeltes (staggered)* Verfahren bezeichneten Vorgehensweise abwechselnd jeweils die einzelnen Gleichungen für jedes Feld separat berechnet und aktualisiert. Bei diesem Verfahren werden zwar die Kopplungsmatrizen  $\mathbf{K}_{u\gamma}$  und  $\mathbf{K}_{\gamma u}$  nicht verwendet,

$$\left[ \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \mathbf{M}_{uu} + \mathbf{K}_{uu} \right]_{(k)} \Delta \mathbf{d}_u^{(k)} = \mathbf{R}_u^{(k)} \quad , \quad \text{für } \Delta \mathbf{d}_\gamma^{(k)} = \text{konst.} \quad (6.60)$$

$$\left[ \mathbf{K}_{\gamma\gamma} \right]_{(l)} \Delta \mathbf{d}_\gamma^{(l)} = \mathbf{R}_\gamma^{(l)} \quad , \quad \text{für } \Delta \mathbf{d}_u^{(l)} = \text{konst.}, \quad (6.61)$$

es entsteht jedoch dennoch ein rechnerischer Mehraufwand, da die jeweiligen Iterationen ( $k$ ) und ( $l$ ) solange abwechselnd durchgeführt werden müssen, bis beide Ergebnisse konvergiert sind. Ein monolithisches Verfahren ist aus diesem Grund für einen impliziten Algorithmus wesentlich effizienter und wird gegenüber einem gestaffelten Verfahren bevorzugt.

### 6.5.4 Explizites Lösungsverfahren

Für ein explizites Verfahren zur Lösung der Kontinuumsfreiheitsgrade  $\mathbf{d}_u$  und  $\mathbf{d}_\gamma$  müssen aufgrund der für jedes Feld unterschiedlichen Ordnung der auftretenden zeitlichen Ableitungen, d. h. zweiter Ordnung für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  sowie erster Ordnung für das Verzerrungsfeld  $\gamma$ , beide Lösungsfelder separat bestimmt werden. In diesem Zusammenhang ist an dieser Stelle gesondert darauf hingewiesen, dass nachfolgend ein explizites Integrationsverfahren für das als implizit bezeichnete Gradientenmodell beschrieben wird. Ein als explizit bezeichnetes Gradientenmodell (siehe zur Unterscheidung Gln. 4.12 und 4.13) wird aus den in Kapitel 4 beschriebenen Gründen generell nicht betrachtet.

Um explizite Integrationsverfahren, d. h. ein explizites NEWMARK-Verfahren für das Verschiebungsfeld mit  $\beta_N = 0$  sowie ein Forward-EULER Verfahren für das inelastische Verzerrungsfeld mit  $\vartheta = 0$ , anwenden zu können, werden die jeweiligen Residuumsleichungen  $\mathbf{R}_u$

## 6. Finite-Element Approximation

und  $\mathbf{R}_\gamma$  hinsichtlich der Raten höchster Ordnung der Lösungsfelder  $\ddot{\mathbf{d}}_u$  und  $\dot{\mathbf{d}}_\gamma$  linearisiert; damit folgt

$$- \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{D}_{\ddot{\mathbf{d}}_u}(\mathbf{R}_u) & \mathbf{D}_{\dot{\mathbf{d}}_\gamma}(\mathbf{R}_u) \\ \mathbf{D}_{\ddot{\mathbf{d}}_u}(\mathbf{R}_\gamma) & \mathbf{D}_{\dot{\mathbf{d}}_\gamma}(\mathbf{R}_\gamma) \end{array} \right] \Big|_{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_u \\ \Delta \dot{\mathbf{d}}_\gamma \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_\gamma \end{pmatrix}^{(k)}. \quad (6.62)$$

Mit den Integrationsalgorithmen (5.1a) und (5.6) folgt mit Einsetzen von

$$\mathbf{D}_{\ddot{\mathbf{d}}_u}(\mathbf{d}_u) \Delta \ddot{\mathbf{d}}_u = \beta_N \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{d}}_u \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{\dot{\mathbf{d}}_\gamma}(\mathbf{d}_\gamma) \Delta \dot{\mathbf{d}}_\gamma = \vartheta \Delta t \Delta \dot{\mathbf{d}}_\gamma \quad (6.63)$$

in (6.62) zunächst allgemein

$$\left[ \begin{array}{cc} (\mathbf{M}_{uu} + \beta_N \Delta t^2 \mathbf{K}_{uu}) & \vartheta \Delta t \mathbf{K}_{u\gamma} \\ \beta_N \Delta t^2 \mathbf{K}_{\gamma u} & \Delta t \mathbf{K}_{\gamma\gamma} \end{array} \right] \Big|_{(k)} \begin{pmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_u \\ \Delta \dot{\mathbf{d}}_\gamma \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_\gamma \end{pmatrix}^{(k)}, \quad (6.64)$$

wobei die identischen Massen- bzw. Steifigkeitsmatrizen, wie sie für das implizite Verfahren in (6.39 bis 6.43) definiert worden sind, verwendet werden. Insbesondere für ein explizites NEWMARK-Verfahren mit  $\beta_N = 0$  und ein Forward-EULER Verfahren  $\vartheta = 0$  sowie der Schreibweise  $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\gamma} \equiv \Delta t \mathbf{K}_{\gamma\gamma}$  folgen die getrennt voneinander zu lösenden Gleichungssysteme

$$\mathbf{M}_{uu} \Delta \ddot{\mathbf{d}}_u = \mathbf{R}_u^{(0)} \quad \text{und} \quad (6.65)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\gamma} \Delta \dot{\mathbf{d}}_\gamma = \mathbf{R}_\gamma^{(0)}. \quad (6.66)$$

Eine Iteration ist daher bei einer expliziten Vorgehensweise nicht erforderlich. Es genügt, den Residuumsvektor des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{R}_u$  entsprechend (6.26) durch

$$\mathbf{R}_u^{(0)} = \mathbf{R}_u(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(0)}, \mathbf{u}_{n+1}^{(0)}, \gamma_{n+1}^{(0)}) \quad (6.67)$$

sowie den des inelastischen Verzerrungsfeldes  $\mathbf{R}_\gamma$  entsprechend (6.27) durch

$$\mathbf{R}_\gamma^{(0)} = \mathbf{R}_\gamma(\mathbf{u}_{n+1}^{(0)}, \dot{\gamma}_{n+1}^{(0)}) \quad (6.68)$$

aufzustellen, mit den direkt aus den bekannten Größen des vorangegangenen Zeitschritts  $t_n$  zu bestimmenden Anfangswerten

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n+1}^{(0)} = \gamma_n + \Delta t \dot{\gamma}_n \\ \dot{\gamma}_{n+1}^{(0)} = \dot{\gamma}_n \end{array} \right\}. \quad (6.69)$$

Nach Bestimmung der Lösungsincremente  $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$  und  $\Delta \dot{\gamma}$  aus den Gleichungssystemen (6.65) und (6.66) folgen dann die gesuchten Feldgrößen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  zu

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{(0)} \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t ((1 - \gamma_N) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma_N \Delta \ddot{\mathbf{u}}) \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \Delta \ddot{\mathbf{u}} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}^{(0)} \\ \dot{\gamma}_{n+1} = \dot{\gamma}_{n+1}^{(0)} + \Delta \dot{\gamma} \end{array} \right\}. \quad (6.70)$$

Üblicherweise wird für die Bestimmung des Beschleunigungsincrementes  $\Delta \ddot{\mathbf{d}}_u$  die Massenmatrix  $\mathbf{M}_{uu}$  diagonalisiert (*lumped mass*), damit diese sehr einfach invertiert werden kann.

Für die Berechnung des inelastischen Verzerrungsrateninkrements  $\Delta \dot{\mathbf{d}}_\gamma$  kann eine solche Diagonalisierung der Matrix  $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\gamma}$  nicht ohne Weiteres erfolgen. Insbesondere nicht für von null verschiedene nicht-lokale Parameterwerte  $\bar{c}_T > 0$ , da ansonsten der Wirkung des Einflusses des Gradienten der Plastizität nur unzureichend Rechnung getragen wird. Es verbleibt daher, zumindest die nicht-diagonalisierte Matrix  $\mathbf{K}_{\gamma\gamma}$  invertieren zu müssen, wobei dadurch der ansonsten für grosse Matrizen existierende Rechenzeitvorteil eines expliziten Verfahrens gegenüber einem impliziten Verfahren verloren geht. Unter Ausnutzung der Eigenschaft, dass die Matrix  $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\gamma}$  konstant ist, braucht die Invertierung jedoch nur einmal durchgeführt zu werden. Es hängt jedoch von dem verwendeten FE-Programm ab, ob die Möglichkeit der Speicherung der invertierten Matrix unterstützt wird.

Zusammenfassend zeigt sich, dass ein explizites Integrationsverfahren für die Lösung der nicht-lokalen Problemstellung prinzipiell möglich ist. Jedoch wird der ansonsten für umfangreiche Berechnungsstrukturen existierende Vorteil expliziter Verfahren durch die Notwendigkeit der Invertierung der Steifigkeitsmatrix des inelastischen Verzerrungsfeldes deutlich geschmälert. Zusätzlich bedarf es einiger programminterner Eingriffe, um die für jedes Feld unterschiedlichen Zeitintegrationsverfahren korrekt zu berücksichtigen, wobei diese Möglichkeit bei einer Vielzahl von FE-Programmen nicht unterstützt wird.

### 6.5.5 Einhaltung der Nebenbedingung

Bei der Berechnung des inelastischen Verzerrungsfeldes  $\gamma(\mathbf{X}, t)$  ist zu beachten, dass nur solche Ergebnisse physikalisch sinnvoll interpretierbar sind, bei denen die inelastische Vergleichsdehnung nicht abnimmt, d. h. zu jedem Zeitpunkt  $t$  und jedem Ort  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_T$  des Kontinuums die Bedingung  $\dot{\gamma}(\mathbf{X}, t) \geq 0$  erfüllt ist. In *Bild 6.3* ist exemplarisch für eine angenommene Verteilung der lokalen plastischen Vergleichsdehnrate  $\dot{\epsilon}_{vP}$  das für unterschiedliche nicht-lokale Parameterwerte  $\bar{c}_T$  resultierende inelastische Verzerrungsratenfeld  $\dot{\gamma}$  dargestellt. Es zeigt sich, dass infolge eines starken Gradienten der lokalen plastischen Vergleichsdehnrate und sehr kleinen nicht-lokalen Parametern  $\bar{c}_T \approx 0$  auch negative Knotenwerte des inelastischen Verzerrungsratenfeldes  $\dot{\gamma}^e$  auftreten können. In dem in *Bild 6.3* dargestellten Fall tritt dieser Zustand z. B. an Elementknoten  $\mathbf{X}^{e3}$  auf. Mit zunehmender Entfernung von dem Ort, an dem die lokale Verzerrungsrate einen Sprung-ähnlichen Zustand aufweist, nimmt im weiteren räumlichen Verlauf die nicht-lokale Feldgröße oszillierend ab. In *Bild 6.3* ist dieses Verhalten für eine eindimensionale Struktur bestimmt; generell ist unter den genannten Bedingungen das beschriebene, oszillierende Verhalten auch bei mehrdimensionalen Problemstellungen zu beobachten. Hingegen tritt das Problem negativer Knotenwerte des nicht-lokalen inelastischen Verzerrungsratenfeldes  $\dot{\gamma}$  für Verläufe mit schwächeren Gradienten der lokalen Verzerrungsrate, wie in *Bild 6.3* in dem Bereich rechts des Maximalwertes dargestellt, nicht auf.

Ebenso wird die Nebenbedingung für die meisten praxisrelevanten Fälle mit  $\bar{c}_T > 0$  auch bei starken Gradienten des lokalen Feldes nicht verletzt, siehe *Bild 6.3*. Um jedoch auf prinzipielle Weise die Einhaltung der Nebenbedingung zu gewährleisten, sind z. B. Penalty-Verfahren, bei denen die Nebenbedingung im Rahmen einer Straffunktion in den Gleichungen mitberücksichtigt wird (siehe z. B. Belytschko et al., 2001), geeignet. Alternativ empfiehlt sich für kleine Werte des nicht-lokalen Parameters  $\bar{c}_T \approx 0$  auch die Verwendung eines „Active Set Search“ (ASS) Verfahrens. Hierbei wird zunächst ein Teilgebiet des Lösungsgebietes

## 6. Finite-Element Approximation

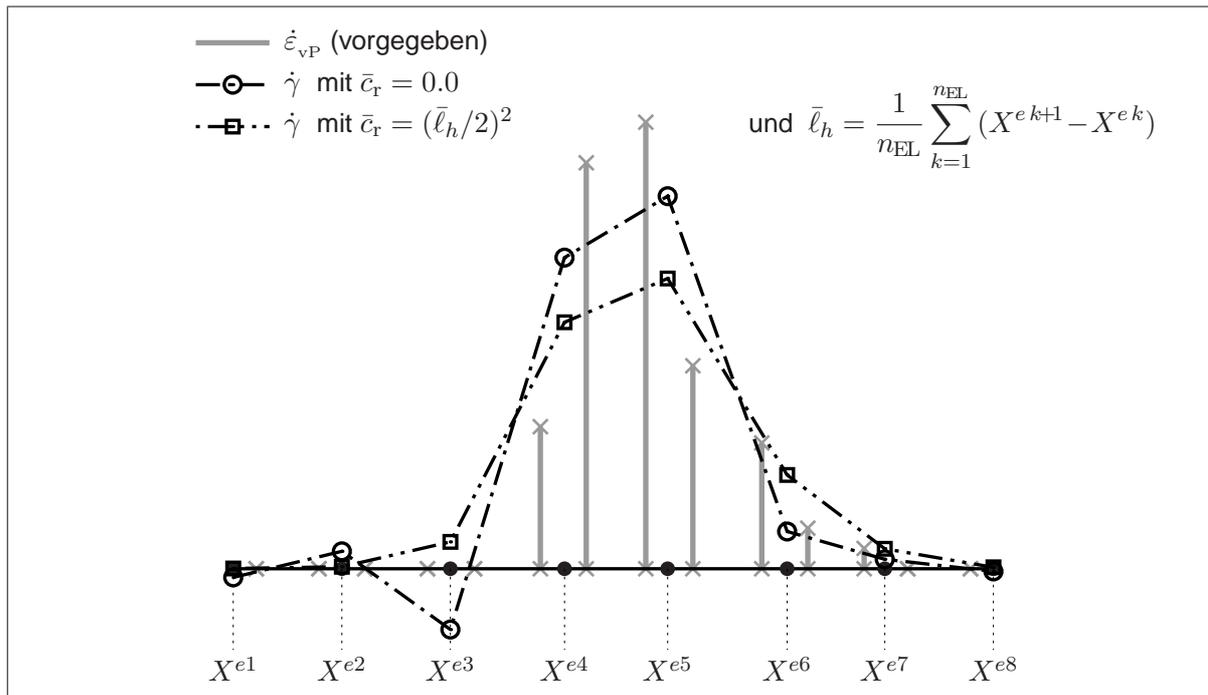


Bild 6.3: Das nicht-lokale Lösungsfeld für eindimensionale Problemstellungen mit starkem Gradienten des lokalen Feldes.

$\Omega_{ASS} \subset \Omega$  bestimmt, in der aufgrund von positiven Werten der Überspannungsfunktion plastische Zuwächse zu erwarten sind. Anschließend wird das nicht-lokale inelastische Feld lediglich in diesem aktiven Bereich ermittelt und die inelastischen Zuwächse außerhalb zu null gesetzt. Durch dieses Vorgehen werden zum einen die genannten Oszillationen außerhalb des aktiven Bereichs vermieden, zum anderen wird aufgrund der geringeren Anzahl der zu lösenden Gleichungen eine Effizienzsteigerung erzielt. Jedoch ist zu beachten, dass das ASS-Verfahren lediglich für kleine Werte des nicht-lokalen Parameters  $\bar{c}_r \approx 0$  gültige Lösungen erzielt, da ansonsten der Diffusionsprozess des inelastischen Feldes infolge der über das gesamte Gebiet  $\Omega$  definierten HELMHOLTZ-Gleichung (T 4.1-3) durch ein zu restriktives Lösungsgebiet  $\Omega_{ASS}$  unterbunden wird.

Ein in der Praxis übliches Vorgehen zur Überprüfung der Nebenbedingung  $\Delta\gamma \geq 0$  stellt der Ansatz dar, die Nebenbedingung lediglich in der schwachen Form, d. h. im Mittel über das Elementvolumen, zu erfüllen (Pamin, 1994, 2004). Insofern genügt es zu überprüfen, dass die Nebenbedingung an jedem einzelnen Integrationspunkt erfüllt ist. Darüber hinaus ist es bei impliziten Verfahren sinnvoll, diese Überprüfung erst bei Erreichen einer konvergenten Lösung durchzuführen, da sich ggf. eine Verletzung der Nebenbedingung im Verlauf der Iteration aufhebt.

### 6.6 Aspekte der Implementierung in FEAP

Das Programm *FEAP* ist ein maßgeblich von R.L. TAYLOR an der UC Berkeley, USA, entwickeltes FE-Programm (**F**inite **E**lement **A**nalysis **P**rogram), das über zahlreiche Benutzerschnittstellen verfügt, beispielsweise zur Einbindung eigener Element- und Materialroutinen sowie von Lösungsalgorithmen oder Steuerungsbefehlen (Taylor, 2005).

### Definierte Schnittstelle in der Eingabe-Datei zur Verwendung der eigenen Elementformulierung

Sowohl das in *Tabelle 3.1* zusammengefasste lokale als auch das in *Tabelle 4.1* zusammengefasste nicht-lokale Modell wurde auf Grundlage der in den Kapiteln 5 und 6 beschriebenen Verfahren in das Programm *FEAP* implementiert. Als Elementtyp ist für den ebenen Verzerrungszustand ein vierknotiges Element mit bilinearen Ansatzfunktionen für jedes Feld berücksichtigt. Zur Verwendung dieses Elementes in der Berechnung dient die in *Tabelle 6.2* beschriebene Schnittstelle. Darin erfolgt neben der Angabe elementspezifischer Größen wie Elementdicke und Anzahl der Integrationspunkte je Richtung auch die Angabe der Materialparameter des jeweiligen Modells sowie die Auswahl der konstitutiven Gleichungen. Die beiden viskoplastischen Modelle können dabei jeweils mit drei unterschiedlichen Entfestigungsmechanismen (vgl. Gl. 5.42) kombiniert werden. Die Methode zur Bestimmung des lokalen plastischen Vergleichsdehnungsincrementes  $\Delta\varepsilon_{vp}$  wird entsprechend durch die Auswahl des lokalen Integrationsparameters  $\vartheta_{locitr}$  bestimmt, wobei mit  $\vartheta_{locitr} = 0$  ein auf lokaler Ebene explizites Verfahren sowie mit  $0 < \vartheta_{locitr} \leq 1$  ein entsprechend implizites Verfahren ange-

Tabelle 6.2: Einbindung der eigenen Elementformulierung in die Berechnung

MATERIAL, <lfid-nr.>		⇐ Definition eines Elementtyps
USER 2		⇐ Aufruf des Benutzer-Elementes elmt02.f
PLANE STRAIN	<thickness>	
NUMINT GAUSS	$n_{GP}$	
LOCAL INTEGRAT	$\vartheta_{locitr}, n_{maxitr}, tol_{locitr}$	
ELASTIC ISOTROPIC	$E_r, \nu_r, \rho_r$	
JCOOK LOCAL	$A, B, n, m, \theta_M, \theta_R$	
JCOOK RATE	$C, \dot{\varepsilon}_0, 1.0$	
JCOOK HEAT	$\beta_r, c_{\theta r}, \alpha_{\theta r}$	
JCOOK GRADIENT	$\bar{c}_r$	
JCOOK FAILURE	$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_c, D_w, D_{max}$	
INITIAL TEMPERAT	$\theta_0$	
INITIAL DAMAGE	$d_0$	
USELECT FTYPE	<failuretype>	
USELECT MTYPE	<materialtype>	
USELECT ALGDERIV	<tangenttype(uu)>, <(uγ)>, <(γu)>, <(γγ)>	

Erläuterungen:

<failuretype> = 0: ausschließliche Temperaturentfestigung  
= 1: Versagen  
= 2: Schädigung gem. effektivem Spannungskonzept

<materialtype> = 1: hyperelastisch  
= 2: lokales JOHNSON & COOK-Modell, *Tabelle 3.1*  
= 5: nicht-lokales JOHNSON & COOK-Modell, *Tabelle 4.1*

<tangenttype> = 1: numerisch gebildete Tangente  
= 2: analytisch bestimmte konsistente Tangente  
(bzw. die Kombinationen 12 oder 21, wobei die letzte Ziffer die verwendete Art der Tangente definiert)

## 6. Finite-Element Approximation

wendet wird (vgl. *Tabelle 5.3*). Generell werden bei dem implementierten Elementtyp drei Freiheitsgrade pro Knoten betrachtet, wobei die ersten beiden dem Verschiebungsfeld zugeordnet sind und der letzte Freiheitsgrad mit dem inelastischen Verzerrungsfeld assoziiert wird. Für eine Berechnung unter Verwendung des lokalen Modells, bei der die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung ausschließlich als innere Größe modelliert wird, werden durch die entsprechende Angabe von Randbedingungen die Freiheitsgrade des inelastischen Feldes gesperrt, damit nicht mehr Gleichungen als nötig gelöst werden müssen.

### Der Lösungsalgorithmus MONO und PART

Dem Programmsystem wird durch den Befehl (*mesh-macro*) `PART` mitgeteilt, dass ein Mehrfeldelement betrachtet wird. In dem implementierten Fall muss daher nach Eingabe der Knotenkoordinaten und Elementkonnektivität der Befehl gemäß

```
PART
  1, 1, 2
```

aufgerufen werden. Diese Angabe assoziiert die ersten beiden Knotenfreiheitsgrade mit dem Feld 1 und den dritten Knotenfreiheitsgrad entsprechend mit dem Feld 2. Darüber hinaus existieren für die Berechnung programmseitig die Befehle (*solution-macros*) `MONO` sowie `PART`, die der Unterscheidung dienen, welche Feldgleichungen zur Aufstellung und Lösung des globalen Gesamtgleichungssystems berücksichtigt werden. Die Verwendung der beiden Lösungsalgorithmen ist in *Tabelle 6.3* angegeben. Dabei ist zu beachten, dass bei einem monolithischen Vorgehen ein unsymmetrischer Gleichungslöser verwendet werden muss, da die vollbesetzte, gekoppelte Elementmatrix in der Regel nicht symmetrisch ist, da i. Allg.  $\mathbf{K}_{u\gamma} \neq \mathbf{K}_{\gamma u}^T$  gilt. Hingegen reicht bei einer gestaffelten Vorgehensweise ein symmetrischer Gleichungslöser aus. Bei letztgenanntem Vorgehen ergibt sich jedoch die Problematik, dass

*Tabelle 6.3: Verwendung unterschiedlicher Lösungsalgorithmen*

<pre>MONolithic DT, , Δt LOOP, , nsteps   TIME, , t_max   LOOP, , n_glob.itr.     UTANG, , 1 ⇐ unsymm.                     Gl.-Löser   NEXT   : ⇐ Post-Processing, etc. NEXT</pre>	<pre>! DT, , Δt LOOP, , nsteps   TIME, , t_max   LOOP, , n_staggered     PARTition, , 1 ⇐ Verschiebungsfeld u     TRANSient, NEWMARK, β_N, γ_N     LOOP, , n_glob.itr1       TANG, , 1 ⇐ symm. Gl.-Löser     NEXT     PARTition, , 2 ⇐ inelast. Verzerrungsfeld γ     TRANSient, OFF     LOOP, , n_glob.itr2       TANG, , 1 ⇐ symm. Gl.-Löser     NEXT   NEXT   : ⇐ Post-Processing, etc. NEXT</pre>
--	---

für die Schleife zur abwechselnden Bestimmung der Lösungsinkremente (in *Tabelle 6.3* ist diese Schleife grau gekennzeichnet) ein konkrete Anzahl an Wiederholungen  $n_{\text{staggered}}$  angegeben werden muss. Diese Anzahl an Wiederholungen darf nicht zu klein sein, da ansonsten möglicherweise kein konvergierter Zustand *beider* Lösungsfelder vorliegt, andererseits resultiert eine hohe Anzahl an Wiederholungen in möglicherweise unnötig vielen Berechnungsschritten und entsprechend hohem und unnötigem Rechenaufwand. Hier ist ein programminternes Abbruchkriterium wünschenswert, wie es beispielsweise für die Schleife zur iterativen Lösung des Gleichungssystems existiert. Bei der iterativen Bestimmung der aktiven Lösungsinkremente wird die entsprechende Schleife von  $n_{\text{glob.itr}}$  Wiederholungen automatisch abgebrochen, wenn das globale Konvergenzkriterium erfüllt ist.

Es zeigt sich, dass das monolithische Verfahren trotz Verwendung eines unsymmetrischen Gleichungslösers sowie erhöhtem Aufwand zur Aufstellung des Gleichungssystems wesentlich effizienter ist als ein gestaffeltes Verfahren, selbst bei korrektem Abbruch der Schleife abwechselnder Lösungsfeld-Iterationen. Dieses Verhalten ist dadurch begründet, dass die Gesamtanzahl an benötigten Iterationen bei einem monolithischen Vorgehen deutlich geringer ausfällt als bei einem gestaffelten Vorgehen. Aus den genannten Gründen wird daher bevorzugt ein monolithisches Verfahren angewendet. In dem Zusammenhang der Formulierung eines globalen Konvergenzkriteriums sind dabei die folgenden Anmerkungen zu beachten.

### Programmierung eines globalen, für jedes Feld separaten Konvergenzkriteriums

Bei der iterativen Bestimmung der Lösung von Mehrfeldproblemen ist es zwingend erforderlich, die Konvergenz für jedes Feld getrennt zu untersuchen und zu beurteilen. Während bei einem gestaffelten Verfahren die Beurteilung der jeweiligen Konvergenz *eines* Lösungsfeldes automatisch getrennt erfolgt, da jeweils nur *ein* Feld iterativ ermittelt wird, muss bei monolithischen Verfahren, wo beide Felder gleichzeitig aktualisiert werden, explizit angegeben werden, dass die Konvergenz für jedes Feld getrennt beurteilt werden soll. Eine solche getrennte Konvergenzbeurteilung ist programmseitig in *FEAP* nicht vorgesehen und wurde daher zusätzlich in Form eines Benutzer-Befehls (*user-macro*) implementiert. Dazu ist es notwendig, die aktiven Freiheitsgrade nach der Lösung des Gesamtgleichungssystems zu unterscheiden und entsprechend zu trennen. Dies erfolgt auf Grundlage der *FEAP*-internen Nummerierung der aktiven Gleichungen zusammen mit der Zuordnung der Knoten-Freiheitsgrade zu dem jeweiligen Feld.

Für das Verschiebungsfeld gilt dann das standardmäßige Konvergenzkriterium, das als erfüllt angesehen wird, wenn eine der Bedingungen

$$\sqrt{\mathbf{R}_u \mathbf{R}_u^T} \leq \text{tol}_{\text{residu},u} \quad \text{oder} \quad \mathbf{R}_u \Delta \mathbf{u}^T \leq \text{tol}_{\text{energy},u} \quad (6.71)$$

erfüllt ist. Für das inelastische Verzerrungsfeld gilt hingegen das Konvergenzkriterium als erfüllt, wenn für jede einzelne Komponente  $i$  des Residuumsvektors  $\mathbf{R}_\gamma$  die Bedingung

$$\text{abs}(R_{i,\gamma}) \leq \text{tol}_{\text{residu},\gamma} \quad (6.72)$$

erfüllt ist. Diese Konvergenzkriterien werden anstatt des programmseitig implementierten Kriteriums verwendet, wenn eingangs des Lösungsalgorithmus die in *Tabelle 6.4* beschriebene Befehlsabfolge angegeben wird.

## 6. Finite-Element Approximation

Tabelle 6.4: Verwendung des für jedes Feld getrennten Konvergenzkriteriums

```
UCHK,SETTSK,1
UCHK,SETRNMAX, <field-no.>, tolresidu,•
UCHK,SETENZER, <field-no.>, tolenergy,•
MONolithic
⋮      ⇐ Vorgehen, wie in Tabelle 6.3 beschrieben
```

### Implementierungen zur Ausgabe der Ergebnisse mit externem Postprocessor

Um die Möglichkeiten der graphischen Ausgabe der Berechnungsergebnisse zu verbessern, werden ebenfalls auf Grundlage eines Benutzer-Befehls (*user-macro*) die relevanten Daten in einem entsprechend von einem externen Post-Processor zu lesenden Format in eine externe Datei geschrieben. Der implementierte Befehl hat die Bezeichnung `WOPP` (**W**rite **O**utput for **P**ost-**P**rocessor) und wird eingangs der Berechnungsroutinen einmal durch `WOPP, INIT` initialisiert. Damit ist es möglich, zu einem beliebigen, späteren Zeitpunkt der Berechnung die Ergebnisse in die externe Datei zu schreiben. Das ausgegebene Format sowie der verwendete Dateiname orientiert sich dabei an den Anforderungen des GiD-Postprocessors, siehe GiD (2007). In Sinne einer benutzerfreundlichen Ausgabesteuerung dient die Befehlsabfolge

```
WOPP,ALL, tmin, tmax, noutputs
```

wobei in gleichmäßigen Zeitintervallen zwischen  $t_{\min}$  und  $t_{\max}$  sämtliche bei der Initialisierung angegebenen Größen ausgegeben werden.

### Elementverifikation

Bei Berechnungen im Rahmen der FEM ist es unerlässlich, die verwendeten Elementroutinen zu verifizieren. Eine Möglichkeit der Verifikation bietet der sogenannte Patch-Test, der z. B. ausführlich Zienkiewicz und Taylor (2005) beschrieben ist. Wie in Hoffmann (2006) nachgewiesen wurde, erfüllt die hier beschriebene und implementierte Elementroutine die Anforderungen des Patch-Testes.

## 7 Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

### 7.1 Überblick

Ein Anfangs-Randwertproblem (ARWP) kann nur dann eine erfolgreiche Beschreibung der physikalischen Problemstellung sein, wenn dieses korrekt-gestellt (*engl.: well-posed*) ist. In diesem Sinne muss gewährleistet sein, dass für das ARWP

1. eine Lösung existiert (*Existence*),
2. die Lösung eindeutig ist (*Uniqueness*),
3. die Lösung stabil ist (*Stability*).

Wird eine dieser Forderungen verletzt, ist das ARWP inkorrekt-gestellt (*ill-posed*) und kann somit das zugrunde liegende physikalische Problem nicht mehr adäquat beschreiben, siehe u. a. Benallal und Tvergaard (1995) oder Felder (2002). Insbesondere ist die Anwendung numerischer Verfahren zur Lösung des ARWPs nur dann sinnvoll, wenn das Problem korrekt-gestellt ist.

Der Nachweis der **Existenz** einer Lösung wird im Weiteren nicht gesondert betrachtet, da der Nachweis der Eindeutigkeit einer gefundenen Lösung direkt impliziert, dass eine Lösung existiert. Ob die gefundene Lösung **eindeutig** ist, kann anhand der Identifizierung des Typs der zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichung (PDG) nachgewiesen werden. Ein Eindeutigkeitsverlust liegt genau dann vor, wenn sich der für den Anfangszustand klassifizierte Typ zu einem bestimmten Zeitpunkt ändert, siehe u. a. Belytschko et al. (2001). Für quasi-statische Problemstellungen der Festkörpermechanik wird die PDG im Anfangszustand (Elastostatik) als elliptisch, bzw. für dynamische Problemstellungen, d. h. unter Berücksichtigung von Trägheitskräften, als hyperbolisch klassifiziert. In diesem Zusammenhang wird der Eindeutigkeitsverlust infolge eines auftretenden Typ-Wechsels auch als Elliptizitäts- bzw. Hyperbolizitätsverlust bezeichnet. Der Übergang von einem Typ zu einem anderen Typ beinhaltet somit immer einen Eindeutigkeitsverlust, der dadurch gekennzeichnet ist, dass bei dem Übergang eine ganze Schar von Lösungen existiert. Durch den Ausschluss der Existenz zweier unterschiedlicher Lösungen wurde erstmals in Hill (1958, 1962) die Eindeutigkeit der Lösung für elasto-plastische Modelle unter quasi-statischen bzw. dynamischen Bedingungen untersucht, und später von Needleman (1988), Loret und Prevost (1990) auf ratenabhängige Modelle eindimensionaler Problemstellungen ausgeweitet. Darin wurde gezeigt, dass infolge der Ratenabhängigkeit die Lösung des ARWPs eindeutig ist, unabhängig davon, ob ver- oder entfestigendes Materialverhalten auftritt.

Der Nachweis der **Stabilität** basiert auf einer Perturbation des Lösungsfeldes aus einer gefundenen Gleichgewichtslage. Es wird untersucht, inwiefern eine geringfügige Störung die Lösung in zeitlichem und räumlichen Verlauf beeinflusst. Damit die Lösung als stabil angesehen wird, darf die aufgebrachte Störung nicht anwachsen, anderenfalls ist die hinreichende Bedingung für eine Instabilität im Sinne von LYAPUNOV erfüllt. Als Auslenkung des Lösungsfeldes aus der Gleichgewichtslage wird üblicherweise ein harmonischer Wellenansatz betrachtet. Der Begriff der „Welle“ ist dabei der Beschreibung nach Hadamard (1903) entlehnt,

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

wonach eine geometrische, nicht notwendigerweise ebene Fläche sich relativ zu dem Material bewegt und eine Diskontinuität, d. h. einen Sprung, bestimmter Feldvariablen beinhaltet. In Bai (1982) wird auf Grundlage einer solchen Perturbationsanalyse das Vorgehen zur Bestimmung des *zeitlichen* Stabilitätsverlustes bei eindimensionalen, ratenabhängigen Problemstellungen beschrieben. Dieser Stabilitätsverlust ist dadurch gekennzeichnet, dass eine geringfügige Störung der Gleichgewichtslösung im weiteren Verlauf der Lösung derart zunimmt, dass stark unterschiedliche Ergebnisse im Vergleich zu der ungestörten Ergebnisberechnung auftreten. Ein prinzipiell analoges Vorgehen wird in Sluys (1992) verwendet, um für ebenfalls eindimensionale Problemstellungen eine Analyse der Dispersionseigenschaften durchzuführen und daraus die innere Länge des ratenabhängigen Modells zu bestimmen. Diesbezüglich wird zu einem bestimmten Zeitpunkt die *räumliche* Änderung (Ausdehnung, bzw. Dämpfung) der aufgebrachten Störung für verschiedene Wellenfrequenzen untersucht, wobei die innere Länge durch die maximal mögliche Dämpfung einer Störung beschrieben wird. Die Existenz und der Wert dieser inneren Länge ist besonders für die Beurteilung von Lösungen bei Lokalisierungsphänomenen von großer Bedeutung, da diese Modelllänge als Lokalisierungsbegrenzung (localization limiter, u. a. in Lasry und Belytschko, 1988, Jirásek, 2004) aufgefasst wird.

### 7.2 Untersuchungen für 1D-Kontinua

Die genannten Nachweise zur Beurteilung, ob ein ARWP korrekt-gestellt ist, und inwiefern eine innere Modelllänge zur Lokalisierungsbegrenzung existiert, werden in diesem Abschnitt für eindimensionale Kontinua konkretisiert und für unterschiedliche Modellformulierungen und reale Werkstoffe angewendet.

#### 7.2.1 Allgemeines Vorgehen

Der Typ einer PDG lässt sich anhand der charakteristischen Richtungen bestimmen. Im allgemeinen existieren, zumindest für lineare, quasilineare und semilineare PDG (siehe u. a. Felder, 2002), drei verschiedene Klassifizierungen:

- hyperbolisch: die charakteristischen Richtungen sind reell und von null verschieden
- parabolisch: die charakteristischen Richtungen sind alle identisch null
- elliptisch: die charakteristischen Richtungen sind imaginär

Bei nichtlinearen PDG oder Systemen von PDG kann ggf. eine solche strikte Einteilung nicht mehr möglich sein, bzw. die Klassifizierung setzt sich aus verschiedenen Typen zusammen (PDG von gemischtem Typ). Für das ARWP eines Feldes  $z_i(X, t)$  wird eine eindeutige Lösung durch eine einzig mögliche Kurve im  $z_i-X-t$  Raum repräsentiert. Die charakteristischen Richtungen stellen Projektionen möglicher Lösungskurven der zugrunde liegenden Differentialgleichung des ARWPs in die  $X-t$  Ebene dar, und werden nur durch die Terme mit den Ableitungen höchster Ordnung der PDG bestimmt. Eine Lösung des ARWPs bleibt genau dann eindeutig, wenn sich im Verlauf der Lösungsentwicklung der Typ der PDG nicht ändert. Ein Wechsel des Typs stellt daher stets eine Uneindeutigkeit, d. h. Verzweigungsmöglichkeit, der Lösung dar. □

Zur Beurteilung der Stabilität der gefundenen Lösung des ARWPs wird untersucht, inwiefern sich eine an einem beliebigen Punkt des Kontinuums aufgebrachte Störung in Raum und Zeit ausbreitet. Diesbezüglich wird die zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t = t^\circ$  gefundene und zu untersuchende Lösung des ARWPs mit  $z^\circ = z(X, t^\circ)$  bezeichnet. An einem Punkt des Kontinuums  $X^\circ \in \mathcal{B}_r$  wird eine Störung dieses Lösungsfeldes in Form einer harmonischen Welle

$$\tilde{z}(X, X^\circ, t, t^\circ) = \operatorname{Re} \left( z_* \exp \{ i k |X - X^\circ| - i \omega (t - t^\circ) \} \right), \quad t \geq t^\circ \quad (7.1)$$

aufgebracht, wobei  $z_*$  die Störungsamplitude,  $k$  die Wellenzahl und  $\omega$  die Wellenwinkelgeschwindigkeit bezeichnen. Die imaginäre Einheit ist wie üblich mit  $i = \sqrt{-1}$  angegeben und  $\operatorname{Re}(\bullet)$  bezeichnet den Realteil einer komplexen Größe. Zunächst wird allgemein angenommen, dass sowohl die Wellenamplitude als auch Wellenzahl und Wellenfrequenz komplexe Größen darstellen, *i.e.*

$$z_* = z_{*Re} + i z_{*Im}, \quad z_{*Re} \in \mathbb{R}^n, \quad z_{*Im} \in \mathbb{R}^n \quad (7.2a)$$

$$k = k_{Re} + i k_{Im}, \quad k_{Re} \in \mathbb{R}^+, \quad k_{Im} \in \mathbb{R} \quad (7.2b)$$

$$\omega = \omega_{Re} + i \omega_{Im}, \quad \omega_{Re} \in \mathbb{R}, \quad \omega_{Im} \in \mathbb{R}. \quad (7.2c)$$

Insofern stellt der Wellenansatz in der Form (7.1) zusammen mit (7.2) eine verallgemeinerte Formulierung der ursprünglichen Ansätze von Bai (1982) bzw. Sluys (1992) dar. Diese sind entsprechend als Sonderfall für  $k_{Im} = 0$  bzw.  $\omega_{Im} = 0$  enthalten. Um festzustellen, auf welche Weise die verschiedenen Größen die Ausbreitung der Störung beeinflussen, wird (7.1) ausformuliert, *i.e.*

$$\tilde{z}(X, X^\circ, t, t^\circ) = e^{-k_{Im}|X-X^\circ|} e^{+\omega_{Im}(t-t^\circ)} \left( z_{*Re} \cos(k_{Re}|X-X^\circ| - \omega_{Re}(t-t^\circ)) - z_{*Im} \sin(k_{Re}|X-X^\circ| - \omega_{Re}(t-t^\circ)) \right). \quad (7.3)$$

Es ist offensichtlich, dass eine beliebige, nicht-triviale Störung  $z_* \neq \mathbf{0}$  nur dann zeitlich und räumlich begrenzt bleibt, solange die Bedingungen

$$k_{Im} \geq 0 \quad \text{und} \quad \omega_{Im} \leq 0 \quad (7.4)$$

erfüllt sind. In *Bild 7.1* sind diesbezüglich mögliche Ausbreitungen einer Störung für verschiedene Parameterwerte dargestellt. Eine zum Zeitpunkt  $t^\circ \geq 0$  an der Stelle  $X^\circ \in \mathcal{B}_r^{1D}$  aufgebrachte Störung breitet sich für reelle Werte der Wellenzahl  $k$  und Wellenwinkelgeschwindigkeit  $\omega$ , d. h. für  $k_{Im} = \omega_{Im} = 0$  ungedämpft in Raum- und Zeitrichtung aus. Insofern bleibt in diesem Fall die Störung stets begrenzt. Für einen positiven Wert des imaginären Anteils der Wellenzahl,  $k_{Im} > 0$ , ist die aufgebrachte Störung räumlich gedämpft und daher ebenfalls begrenzt. Hingegen nimmt die Störung für positive Werte des imaginären Anteils der Wellenwinkelgeschwindigkeit,  $\omega_{Im} > 0$ , im zeitlichen Verlauf für  $t > t^\circ$  unbegrenzt zu. Um die Werte der Wellenwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Wellenzahl  $k$  für konkrete Problemstellungen zu bestimmen, wird der beschriebene Wellenansatz (7.1) mit der zu untersuchenden Lösung  $z^\circ$  superponiert

$$z(X, X^\circ, t, t^\circ) = z^\circ(X, t^\circ) + \epsilon \tilde{z}(X, X^\circ, t, t^\circ), \quad \text{mit } \epsilon \ll 1. \quad (7.5)$$

Anschließend wird untersucht, unter welchen Bedingungen das aus der Gleichgewichtslage ausgelenkte Lösungsfeld  $z$  den zugrunde liegenden Gleichungen des ARWPs genügt. Dazu

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

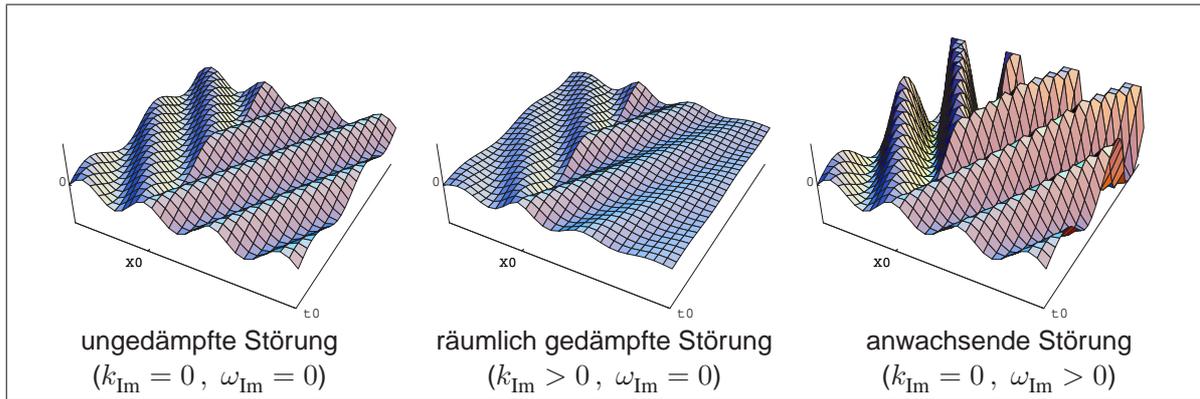


Bild 7.1: Ausbreitung einer zum Zeitpunkt  $t^\circ$  an der Stelle  $X^\circ$  eines eindimensionalen Kontinuums eingeleiteten Störung für verschiedene Parameterwerte

wird  $z$  in das entsprechende Differentialgleichungssystem eingesetzt und analysiert, für welche Werte der Wellenzahl  $k$  und Wellenwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  die Differentialgleichungen erfüllt werden.

Dieses Vorgehen der Stabilitätsanalyse wird im Folgenden getrennt für entweder reelle Wellenzahlen  $k \in \mathbb{R}^+$  oder reelle Wellenwinkelgeschwindigkeiten  $\omega \in \mathbb{R}$  durchgeführt. Infolge des erst genannten Verfahrens wird der Zeitpunkt einer möglicherweise auftretenden Instabilität bestimmt. Dazu bietet es sich an, die Substitution

$$\varpi := -i\omega = \omega_{\text{Im}} - i\omega_{\text{Re}} \quad \text{und} \quad k = k_{\text{Re}} \quad (7.6)$$

in (7.1) zu verwenden und zu analysieren. Gemäß (7.4) ist der Lösungszustand stabil, wenn der Realteil dieser Größe nicht-positiv ist, also  $\text{Re}(\varpi) \leq 0$ ; andererseits ist für  $\text{Re}(\varpi) > 0$  die hinreichende Bedingung für eine Instabilität erfüllt.

Hingegen eignet sich das zweite Verfahren dazu, die Dispersionseigenschaften einer sich ausbreitenden Welle zu untersuchen sowie eine möglicherweise existierende innere Länge des Modells zu bestimmen. Für  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{C}$  gemäß (7.2b) lassen sich sowohl der Realteil als auch Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit bestimmen, i.e.  $k_{\text{Re}}(\omega)$  und  $k_{\text{Im}}(\omega)$ , mit  $\omega \equiv \omega_{\text{Re}}$ . Über die Beziehung zwischen dem Realteil der Wellenzahl und der Winkelgeschwindigkeit lässt sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit sowohl einer einzelnen Welle, die als Phasengeschwindigkeit  $c_f$  bezeichnet wird, als auch der Einhüllenden mehrerer überlagerter Wellen bestimmen. Es gilt

$$c_f := \frac{\omega_{\text{Re}}}{k_{\text{Re}}}, \quad \text{und damit} \quad \frac{d\omega_{\text{Re}}}{dk_{\text{Re}}} = c_f + k_{\text{Re}} \frac{dc_f}{dk_{\text{Re}}}, \quad (7.7)$$

wobei der Quotient  $dc_f/dk_{\text{Re}}$ , also die Änderung der Phasengeschwindigkeit im Verhältnis zur Änderung der Wellenzahl, den dispersiven Charakter eines Wellenpakets angibt. Infolge der Dispersion ändert sich die Form des sich ausbreitenden Wellenpakets. Eine Belastungswelle, die als Zusammensetzung verschiedener einzelner Störungen mit ähnlichen Wellenzahlen aufgefasst werden kann, breitet sich dann mit der Gruppengeschwindigkeit  $c_g$  aus, mit

$$c_g := \lim_{dk_{\text{Re}} \rightarrow 0} \left( \frac{d\omega_{\text{Re}}}{dk_{\text{Re}}} \right) = \frac{d\omega_{\text{Re}}}{dk_{\text{Re}}}. \quad (7.8)$$

Physikalisch interpretiert bedeutet dies, dass die dispersive Eigenschaft eine Notwendigkeit darstellt, die Änderung der Form einer beliebigen Belastungswelle in eine stationäre Welle, die die Lokalisierungszone repräsentiert, zu gewährleisten. Liegt eine disperse Eigenschaft vor, lässt sich der Zusammenhang zwischen den Ausbreitungsgeschwindigkeiten und der Wellenzahl untersuchen. Tendiert für eine bestimmte positive Wellenzahl die Gruppengeschwindigkeit gegen null, so repräsentiert die Inverse dieser Wellenzahl eine innere Länge des Modells, *i.e.*

$$\ell_c := \left( \arg(c_g(k_{\text{Re}}) \rightarrow 0) \right)^{-1}. \quad (7.9)$$

Die Größe  $\lambda_c = 2\pi\ell_c$  kennzeichnet dabei die maximale Wellenlänge dieser stationären Welle, die daher einer Begrenzung der Lokalisierungszone entspricht.

Ferner beschreibt der Imaginärteil der Wellenzahl für positive Werte, *i.e.*  $k_{\text{Im}} > 0$ , die räumliche Dämpfung einer einzelnen Störung. Existiert für diesen Wert in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit eine positive obere Schranke, dann entspricht eine innere Länge des Modells der Inversen dieses Supremums, *i.e.*

$$\ell_r := \left( \sup_{\omega} k_{\text{Im}}(\omega) \right)^{-1}, \quad (7.10)$$

da diese Länge die maximal mögliche räumliche Dämpfung einer einzelnen harmonischen Welle charakterisiert. Das bedeutet, dass eine an einer Stelle  $X^\circ$  auftretende Störung nicht stärker im Raum abklingen kann, als durch den Verlauf der Exponential-Funktion  $\exp\{-|X - X^\circ|/\ell_r\}$  angegeben. Insbesondere für monoton wachsende, jedoch nach oben begrenzte Funktionen  $k_{\text{Im}}(\omega)$  entspricht das Supremum dem Grenzwert dieser Funktion für zunehmende Wellenfrequenzen, so dass dann im Speziellen

$$\ell_r := \left( \lim_{\omega \rightarrow \infty} k_{\text{Im}}(\omega) \right)^{-1}, \quad \text{für } k_{\text{Im}}(\omega) \text{ monoton wachsend,} \quad (7.11)$$

folgt, siehe Sluys (1992). Um ein adäquates Modell zur Beschreibung von Lokalisierungsproblemen zu formulieren, muss daher gewährleistet sein, dass eine innere Länge des Modells, die die Breite der Lokalisierungszone begrenzt, zu jedem Zeitpunkt der Berechnung existiert. Insbesondere können Modelle, bei denen eine solche innere Länge nicht existiert, oder bei denen im Verlauf der Berechnung die innere Länge gegen den Wert null strebt, keine physikalisch sinnvolle Beschreibung von Lokalisierungsphänomenen gewährleisten, so dass dann auch jedes darauf aufbauende FE-Verfahren keine netzunabhängigen Ergebnisse liefern kann.

Die beschriebenen Verfahren zur Beurteilung der Stabilität der Lösung stellen *lokale* Analysen dar, d. h. die Lösung wird hinsichtlich ihrer Stabilität an *jedem materiellen Punkt* des Kontinuums  $X^\circ \in \mathcal{B}_t$  und zu jedem Zeitpunkt  $t^\circ \in \mathbb{R}^+$  untersucht. In den folgenden Abschnitten werden die genannten Verfahren an konkreten Modellen angewendet.

## 7.2.2 Verallgemeinerte Modellformulierung

In diesem Abschnitt wird der Rahmen für eine möglichst allgemeine Modellformulierung eindimensionaler Kontinua gesetzt, aus der die zu untersuchenden, relevanten Modelle als Spezialfälle generiert werden. Ferner werden anhand dieser verallgemeinerten Formulierung einige prinzipielle Vorüberlegungen bezüglich der durchzuführenden Stabilitätsuntersuchungen

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

beschrieben, die für sämtliche nachfolgend untersuchten Modelle gleichermaßen benötigt werden.

Die mechanische Impulsbilanz

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} = \varrho_r \frac{\partial v}{\partial t} \quad (7.12a)$$

verknüpft die Spannung  $\sigma$  mit der Geschwindigkeit  $v$  eines Punktes. Wie in *Bild 7.2* dargestellt, repräsentiert  $\sigma$  je nach Belastungsart entweder eine Zug-/Druck- oder Schubspannung; entsprechend ist das eindimensionale Verschiebungs- und Geschwindigkeitsfeld entweder parallel oder senkrecht zur Raumachse  $X$  gerichtet. In der konstitutiven Beziehung

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_P}{\partial t} \right), \quad (7.12b)$$

die den Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung angibt, wird der für kleine Verformungen übliche Ansatz  $\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_P$  zur Aufteilung der Verzerrungen in einen elastischen und inelastischen Anteil verwendet. Je nach Belastungsart kennzeichnet hier  $E$  entweder den Elastizitätsmodul  $E_T$  bzw. den Schubmodul  $2\mu_T$ . Die Kinematik beschreibt die Beziehung zwischen Verzerrung und Verschiebung, *i.e.*

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial X}. \quad \text{Mit } v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.12c)$$

wird ferner die Geschwindigkeit als zeitliche Änderung der Verschiebung beschrieben. Der Zuwachs der inelastischen Verzerrungen ergibt sich aus der Gleichung gemäß (T 4.1-3), hier für den eindimensionalen Fall

$$\frac{\partial \varepsilon_P}{\partial t} = \bar{c}_r \frac{\partial^3 \varepsilon_P}{\partial^2 X \partial t} + \bar{g}(\dot{\sigma}, \sigma, \varepsilon_P, \theta, \mathbf{q}), \quad (7.12d)$$

wobei  $\bar{g}$  eine allgemeine Funktionsvorschrift für einen inelastischen Zuwachs darstellt, die hier in Abhängigkeit der Spannungsrate  $\dot{\sigma}$ , der Spannung  $\sigma$ , der akkumulierten plastischen Verzerrung  $\varepsilon_P$  sowie der Temperatur  $\theta$  und möglichen weiteren inneren Größen  $\mathbf{q}$  angegeben ist. Verschwindet der nicht-lokale Parameter  $\bar{c}_r$ , entspricht (7.12d) einer gewöhnlichen Entwicklungsgleichung für die plastische Verzerrung  $\varepsilon_P$ . Die Energiebilanz (vgl. Kapitel 2) ist durch

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\kappa_{\theta r}}{\varrho_r c_{\theta r}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma \frac{\partial \varepsilon_P}{\partial t} \quad (7.12e)$$

gegeben. Im Rahmen dieser Arbeit kann die Wärmeleitfähigkeit vernachlässigt werden ( $\kappa_{\theta r} \approx 0$ , siehe Kapitel 3), so dass sich (7.12e) zu einer reinen Entwicklungsgleichung für die Temperatur reduziert. Die separate Betrachtung der Entwicklung der Temperatur sowie der Entwicklung weiterer innerer Größen

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{f}(\sigma, \varepsilon_P, \dot{\varepsilon}_P, \theta) \quad (7.12f)$$

ist dennoch sinnvoll, um eine Abhängigkeit der Entwicklungsfunktion  $\mathbf{f}$  von dem Vektor der weiteren inneren Größen  $\mathbf{q}$  selbst zu vermeiden.

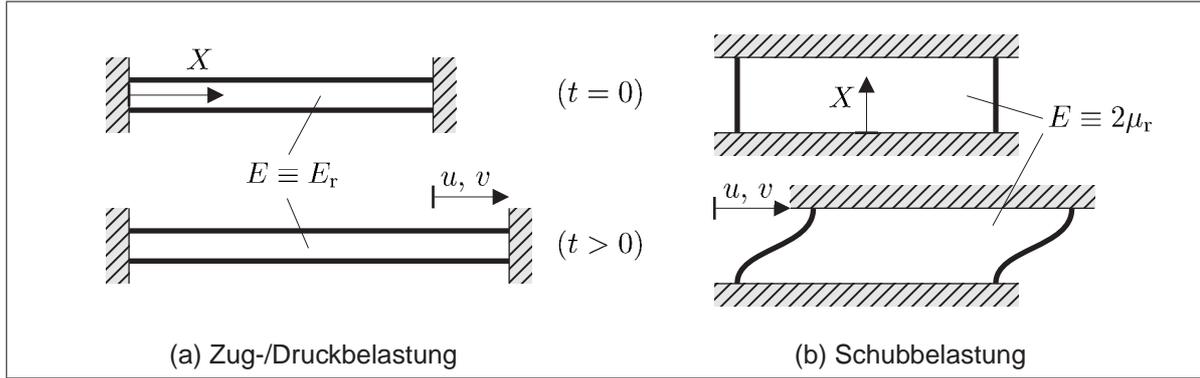


Bild 7.2: Eindimensionale Betrachtung verschiedener Belastungsarten

Die Gleichungen (7.12a-f) bilden die Grundlage für die weiteren Untersuchungen in diesem Kapitel 7.2. Der Nachweis der **Eindeutigkeit** einer Lösung wird erst in den nächsten Abschnitten für die aus dem System der PDGn (7.12) generierten Sonderfälle geführt. Für die Untersuchung der **Stabilität** werden an dieser Stelle jedoch zunächst einige prinzipielle Schritte erläutert: Diesbezüglich wird die homogene Lösung  $z^\circ = \{v^\circ, \sigma^\circ, \varepsilon_P^\circ, \theta^\circ, \mathbf{q}^\circ\}$  gemäß (7.5) ausgelenkt und in das System der partiellen Differentialgleichungen (7.12) eingesetzt. Vernachlässigt man Terme höherer Ordnung als  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , folgt schließlich mit

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial X} = \varrho \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}, \quad (7.13a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} = E \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_P}{\partial t} \right), \quad (7.13b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_P}{\partial t} = \bar{c}_r \frac{\partial^3 \tilde{\varepsilon}_P}{\partial^2 X \partial t} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma} \Big|^\circ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma} \Big|^\circ \tilde{\sigma} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon_P} \Big|^\circ \tilde{\varepsilon}_P + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta} \Big|^\circ \tilde{\theta} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \Big|^\circ \cdot \tilde{\mathbf{q}}, \quad (7.13c)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} = \frac{\kappa_{\theta r}}{\varrho_r c_{\theta r}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial X^2} + \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \left( \tilde{\sigma} \dot{\varepsilon}_P^\circ + \sigma^\circ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_P}{\partial t} \right), \quad (7.13d)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma} \Big|^\circ \tilde{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \Big|^\circ \tilde{\varepsilon}_P + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\varepsilon}_P} \Big|^\circ \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_P}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \Big|^\circ \tilde{\theta} \quad (7.13e)$$

das linearisierte PDG-System für  $\tilde{z}$ . Durch Einsetzen des Ansatzes (7.1) und Kondensierung der Gleichung (7.13e) aus diesem Gleichungssystem, *i.e.*

$$\mathbf{q}_* = \frac{\zeta}{\zeta_{,t}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma} \Big|^\circ \sigma_* + \left( \frac{\zeta}{\zeta_{,t}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \Big|^\circ + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\varepsilon}_P} \Big|^\circ \right) \varepsilon_{P*} + \frac{\zeta}{\zeta_{,t}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \Big|^\circ \theta_*, \quad (7.14)$$

wobei  $\zeta$  den Exponentialterm in dem Wellensatz (7.1) bezeichnet, ergibt sich für das kondensierte Lösungsfeld  $z = \{v, \sigma, \gamma, \theta\}$  schließlich die Beziehung

$$\text{Re} \left( \left[ \underbrace{\mathbf{A}^{xxt} \zeta_{,XXt} + \mathbf{A}^{xx} \zeta_{,XX} + \mathbf{A}^x \zeta_{,X} + \mathbf{A}^t \zeta_{,t} + \mathbf{A} \zeta + \mathbf{A}^{1/t} \zeta^2 / \zeta_{,t}}_{\mathbf{A}^{\text{tot}}} \right] \cdot \mathbf{z}_* \right) = \mathbf{0}. \quad (7.15)$$

Die entsprechenden Ableitungen in (7.15) folgen so mit

$$\zeta_{,XXt} = i\omega k^2 \zeta, \quad \zeta_{,XX} = -k^2 \zeta, \quad \zeta_{,X} = ik \zeta, \quad \zeta_{,t} = -i\omega \zeta, \quad \frac{\zeta^2}{\zeta_{,t}} = \frac{i}{\omega} \zeta, \quad (7.16)$$

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

und die entsprechenden Matrizen der Koeffizienten sind durch

$$\mathbf{A}^{xxt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -E & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma}^\circ & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma^\circ & -1 \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{A}^{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_{\theta r}}{\varrho_r c_{\theta r}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma}^\circ & \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon_P}^\circ + \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \right)^\circ \right) & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}^\circ \\ 0 & \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \dot{\varepsilon}_P^\circ & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{A}^x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{1/t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma} \right)^\circ & \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \right)^\circ & \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \right)^\circ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

bestimmt. Die Beziehung (7.15) ist insbesondere für beliebige, nicht-triviale reelle Amplituden  $z_* \in \mathbb{R}^n$  nur dann erfüllt, wenn die Determinante von  $\mathbf{A}^{\text{tot}}$  verschwindet, i.e.

$$\det(\mathbf{A}^{\text{tot}}) = 0. \quad (7.20)$$

Hieraus folgt unter der Annahme ausschließlich adiabatischer Prozesse, d. h.  $\kappa_{\theta r} \approx 0$ , ausformuliert letztendlich

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c_E^2} \left( \bar{c}_r k^2 + \left( 1 + E \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma}^\circ \right) \right) \omega^4 \\ & + \left( \frac{1}{c_E^2} \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon_P}^\circ + \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \right)^\circ + \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma^\circ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}^\circ - E \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma}^\circ \right) \right) (i\omega^3) \\ & - \left( \bar{c}_r k^4 + k^2 + \frac{1}{c_E^2} \left( E \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma} \right)^\circ + E \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \dot{\varepsilon}_P^\circ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}^\circ - \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \right)^\circ - \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma^\circ \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \right)^\circ \right) \right) (-\omega^2) \\ & + \left( \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon_P}^\circ + \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \right)^\circ + \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma^\circ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta}^\circ \right) k^2 - \left( \frac{E}{c_E^2} \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \dot{\varepsilon}_P^\circ \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \right)^\circ \right) \right) (-i\omega) \\ & + \left( \left( \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \right)^\circ + \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma^\circ \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \right)^\circ \right) k^2 \right) = 0, \quad (7.21) \end{aligned}$$

wobei ferner die elastische Wellengeschwindigkeit gemäß  $c_E := \sqrt{E/\varrho_r}$  eingeführt wurde. Diese skalare Gleichung wird für die nachfolgend beschriebenen Sonderfälle bezüglich der Wellenwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  bzw.  $\varpi$  und der Wellenzahl  $k$  analysiert und interpretiert.

### 7.2.3 Lokale Elasto-Plastizität

Für den Fall der lokalen Elasto-Plastizität wird zwischen einem ausschließlich elastischen Prozess,  $\dot{\varepsilon}_P = 0$ , und einem inelastischen Prozess,  $\dot{\varepsilon}_P > 0$ , unterschieden. Der inelastische Zuwachs folgt dabei aus einer allgemeinen funktionalen Beziehung in der Form

$$\sigma = f(\varepsilon_P) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial f(\varepsilon_P)}{\partial \varepsilon_P} \frac{\partial \varepsilon_P}{\partial t} = f' \frac{\partial \varepsilon_P}{\partial t}, \quad (7.22)$$

so dass die allgemeine Funktionsvorschrift  $\bar{g}$  eines inelastischen Zuwachses unter Berücksichtigung von  $\bar{c}_r = 0$  in (7.12d) für diesen Fall der Beziehung

$$\bar{g}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \sigma, \varepsilon_p, \theta, \mathbf{q}\right) = \frac{1}{f'} \frac{\partial\sigma}{\partial t}, \quad (7.23)$$

folgt. Das Vorzeichen der Ableitung  $f' = \partial f(\varepsilon_p)/\partial \varepsilon_p$  kennzeichnet darin allgemein entweder verfestigendes ( $f' > 0$ ) bzw. entfestigendes ( $f' < 0$ ) Materialverhalten. Die Ursachen, die zu einer Entfestigung führen, z. B. infolge einer Zunahme der Temperatur und/oder Schädigung, sind für die nachfolgenden Untersuchungen dieses Modells nicht relevant, so dass es genügt, hier allgemein zwischen Ver- bzw. Entfestigung zu unterscheiden.

**Eindeutigkeitsnachweis** Durch Kombination von (7.12b und 7.12d) und mit (7.23) folgt die bekannte inkrementelle konstitutive Beziehung

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = C_{EP} \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \quad \text{mit } C_{EP} = \begin{cases} E & , \text{ falls elastisch, bzw.} \\ E f' / (E + f') & , \text{ falls inelastisch} \end{cases} \quad (7.24)$$

und weiter mit (7.12a, c) die PDG für das Verschiebungsfeld zu

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_E^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t} = 0 \quad , \text{ elastisch} \\ \frac{E + f'}{c_E^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - f' \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t} = f'' F(D^2 u) \quad , \text{ inelastisch} \end{array} \right\}. \quad (7.25)$$

Darin kennzeichnet  $c_E = \sqrt{E/\rho_r}$  die elastische Wellengeschwindigkeit, ferner ist die rechte Seite von (7.25)<sub>2</sub> durch die nichtlineare Gleichung

$$F(D^2 u) = \left(1 + \frac{f'}{E + f'}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{1}{c_E^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t} \quad (7.26)$$

in Abhängigkeit der Ableitungen 2. Ordnung des Verschiebungsfeldes bestimmt. Insbesondere der in der Literatur häufig untersuchte Fall linearer Ver- bzw. Entfestigung ist als Sonderfall für  $f'' = 0$  in dieser Form enthalten und stellt eine quasi-lineare PDG für das Verschiebungsfeld  $u$  bzw. Geschwindigkeitsfeld  $v = \partial u / \partial t$  dar.

Die Lösungen der PDG stellen Kurven im  $u-X-t$  Raum dar. Die Projektionen dieser Kurven in die  $X-t$  Ebene sind in parametrisierter Form durch  $r \mapsto (t(r), X(r))$  bestimmt, so dass der Tangentialvektor der Kurven in dieser Ebene mit  $\mathbf{r} = (dt/dr, dX/dr)$  sowie eine differentielle Änderung dieses Tangentialvektors mit  $d\mathbf{r} = (dt, dX)$  folgt. Insbesondere die Differentiale der partiellen Ableitungen 2. Ordnung resultieren daher in

$$d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dt + \frac{\partial^3 u}{\partial X \partial t^2} dX, \quad (7.27a)$$

$$d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial X \partial t^2} dt + \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t} dX. \quad (7.27b)$$

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

Zusammen mit der PDG (7.25)<sub>2</sub> folgt damit das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{E + f'}{c_E^2} & 0 & -f' \\ dt & dX & 0 \\ 0 & dt & dX \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial X \partial t^2} \\ \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(D^2 u) \\ d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \\ d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t}\right) \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

das genau dann eindeutige Lösungen für die Ableitungen höchster Ordnung liefert, wenn die Determinante

$$D = \frac{E + f'}{c_E^2} (dX)^2 - f' (dt)^2 \quad (7.29)$$

nicht verschwindet; andererseits führt  $D = 0$  auf die charakteristischen Richtungen

$$\frac{dX}{dt} = \pm c_E \sqrt{\frac{f'}{E + f'}}, \quad (7.30)$$

d.h. die Lösung kann sich gewissermaßen unabhängig auf beiden Seiten der charakteristischen Richtung verhalten. Im elastischen Ausgangszustand existieren zwei reelle Richtungen  $dX/dt = \pm c_E$ , weshalb die PDG als hyperbolisch klassifiziert wird. Aus dem Ergebnis (7.30) folgt dann, dass die Hyperbolizität der PDG und damit die Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet bleibt, solange verfestigendes Materialverhalten ( $f' > 0$ ) vorliegt. Tritt lokal, d. h. an mindestens einem Punkt in der Struktur, eine Entfestigung ( $-E < f' < 0$ ) des Materials auf, so existieren an diesem Punkt nur imaginäre charakteristische Richtungen, und die Differentialgleichung wird in diesem Bereich elliptisch. Insofern ist der Zeitpunkt des Hyperbolizitäts-, d. h. Eindeutigkeitsverlustes durch das erste Auftreten von Entfestigung in der Struktur charakterisiert. Ein direktes Durchschlagen von verfestigendem Materialverhalten zu entfestigendem Verhalten in der Form  $f' < -E$  wird hier nicht näher untersucht.

**Stabilitätsuntersuchung** Durch die in (7.23) angegebene Konkretisierung des allgemeinen PDG-Systems (7.12) für den Fall lokaler Elasto-Plastizität reduziert sich die zu untersuchende Gleichung (7.21) zu

$$\frac{E + f'}{c_E^2} \omega^2 - f' k^2 = 0. \quad (7.31)$$

Unter Verwendung von (7.6), i.e.  $\varpi := -i\omega$ , folgt für die Lösung der Substitution

$$\varpi^2 = -\frac{k^2 c_E^2 f'}{E + f'}, \quad (7.32)$$

so dass sich der maximale Wert des Realteils dieser Größe zu

$$\varpi_D := \max(\operatorname{Re}(\varpi)) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } f' \geq 0 \\ k c_E \sqrt{\frac{-f'}{E + f'}} > 0 & , \text{ für } -E < f' < 0 \end{cases} \quad (7.33)$$

ergibt, wobei  $\varpi_D$  auch als dominante Wachstumsrate der Störung bezeichnet wird, siehe u. a. Batra und Chen (2001), Daridon et al. (2004). Der Stabilitätsverlust infolge von  $\text{Re}(\varpi) = \omega_{\text{Im}} > 0$ , vgl. (7.4), geht hier mit dem Verlust der Eindeutigkeit einher, und tritt genau dann auf, wenn eine Entfestigung des Materials eintritt. Der Übergang von verfestigendem zu entfestigendem Materialverhalten ( $f' = 0$ ) stellt hier infolge  $\varpi = \omega = 0$  eine stehende Welle dar, die je nach Ort des Auftretens eine Oberflächen- bzw. Grenzflächeninstabilität beschreibt. In diesem Zusammenhang werden auch die Begriffe „RAYLEIGH wave“ (Oberflächeninstabilität) und „STONELEY wave“ (Grenzflächeninstabilität) verwendet, siehe z. B. Benallal und Tvergaard (1995). Diese Instabilitäten werden allgemein als „wave trapping“ bezeichnet: Der Interpretation von Wu und Freund (1984) folgend, verliert eine beliebige Belastungswelle die Fähigkeit sich über die Zeit im Kontinuum auszubreiten, z. B. kann sich eine am Rand aufgebrachte Störung nicht ins Innere des Kontinuums fortpflanzen.

Es ist aus (7.31) außerdem leicht zu erkennen, dass für dieses Modell keine innere Länge existiert: Für  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{C}$  gemäß (7.2b) folgt aus (7.31) das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E + f'}{c_E^2} \omega^2 - f'(k_{\text{Re}}^2 - k_{\text{Im}}^2) = 0 \\ 2k_{\text{Re}}k_{\text{Im}} = 0 \end{array} \right\}, \quad (7.34)$$

das lediglich dann eine Lösung in der Form

$$k_{\text{Re}}(\omega) = \frac{|\omega|}{c_E} \sqrt{\frac{E + f'_h}{f'_h}}, \quad k_{\text{Im}}(\omega) = 0 \quad (7.35)$$

hat, solange  $f' > 0$  gilt, also verfestigendes Materialverhalten vorliegt. Diese Aussage deckt sich mit der des zuvor beschriebenen Verfahrens. Ferner wird deutlich, dass aufgrund der fehlenden dispersiven Eigenschaft, d. h.  $c_f(k_{\text{Re}}) = \text{konst.}$ , sowie aufgrund von  $k_{\text{Im}} = 0$  für dieses lokale, ratenunabhängige Modell weder eine innere Länge infolge der Definition (7.9) noch infolge (7.10) existiert.

## 7.2.4 Lokale Elasto-Thermoviskoplastizität

Für den lokalen, dehnratenabhängigen Fall entspricht der plastische Zuwachs einer Beziehung gemäß

$$\bar{g}(\dot{\sigma}, \sigma, \varepsilon_p, \theta, \mathbf{q}) = \langle g(\sigma, \varepsilon_p, \theta, \mathbf{q}) \rangle, \quad (7.36)$$

d. h. eine Abhängigkeit von der Spannungsrate  $\dot{\sigma}$ , wie zuvor in Abschnitt 7.2.3 für den dehnratenunabhängigen Fall beschrieben, liegt hier nicht vor. Ferner findet hier die MACAULAY-Klammer  $\langle \bullet \rangle = \frac{1}{2}(\bullet + |\bullet|)$  Verwendung, so dass nicht gesondert zwischen einem elastischen bzw. inelastischen Prozess unterschieden werden muss. Für den Fall ausschließlicher Temperaturentfestigung entfällt zudem die Abhängigkeit von dem Vektor weiterer innerer Größen, i. e.  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Hingegen ist der Fall zusätzlicher Entfestigung infolge isotroper Schädigung z. B. durch  $\mathbf{q} \equiv s$  in der Form (7.36) enthalten.

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

**Eindeutigkeitsnachweis** Durch Kombination von (7.12a bis d) und unter Berücksichtigung von (7.36) sowie  $\bar{c}_r = 0$  in (7.12d) folgt zunächst

$$\frac{1}{c_E^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t} = -\frac{\partial \langle g \rangle}{\partial \sigma} \left( \varrho_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial \varepsilon_P} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{1}{c_E^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X} . \quad (7.37)$$

Durch weitere Differentiation dieser Gleichung bezüglich der Zeit und Berücksichtigung der Entwicklungsgleichungen für die Temperatur (7.12e, mit  $\kappa_{\theta r} \approx 0$ ) und für den Vektor der inneren Größen (7.12f) wird deutlich, dass die rechte Seite von (7.37) keine weiteren Terme zu den Ableitungen höchster Ordnung beiträgt, also die PDG für das Verschiebungsfeld die Form

$$\frac{1}{c_E^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial X^2 \partial t^2} = F(D^3 u, D^2 u, \dots) \quad (7.38)$$

annimmt. Insofern folgen die charakteristischen Richtungen, analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 7.2.3, zu

$$\frac{dX}{dt} = \pm c_E , \quad (7.39)$$

d. h. die charakteristischen Richtungen entsprechen der elastischen Wellengeschwindigkeit und bleiben unabhängig davon, ob ver- oder entfestigens Materialverhalten vorliegt stets reell. Ein Verlust der Hyperbolizität der PDG, einhergehend mit einem Verlust der Eindeutigkeit, ist insofern für diese Art der ratenabhängigen Modellformulierung ausgeschlossen.

**Stabilitätsuntersuchung** Für Gleichung (7.21) folgt somit unter Berücksichtigung von  $\bar{c}_r = 0$  und der Abhängigkeiten in (7.36) sowie durch Einführung einiger geeigneter Substitutionen gemäß

$$\mathbf{1} := E \left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma} \right|^\circ \quad (7.40a)$$

$$\mathbf{2} := \left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon_P} \right|^\circ + \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma^\circ \left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta} \right|^\circ + \left. \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\varepsilon}_P} \right) \right|^\circ \quad (7.40b)$$

$$\mathbf{3} := E \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \dot{\varepsilon}_P^\circ \left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta} \right|^\circ + E \left. \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \sigma} \right) \right|^\circ \quad (7.40c)$$

$$\mathbf{4} := \left. \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon_P} \right) \right|^\circ + \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \sigma^\circ \left. \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \right) \right|^\circ \quad (7.40d)$$

$$\mathbf{5} := E \frac{\beta_r}{\varrho_r c_{\theta r}} \dot{\varepsilon}_P^\circ \left. \left( \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta} \right) \right|^\circ \quad (7.40e)$$

schließlich

$$\omega^4 - (\mathbf{2} - \mathbf{1})(i\omega^3) + (c_E^2 k^2 + \mathbf{3} - \mathbf{4})(-\omega^2) - (\mathbf{2} c_E^2 k^2 - \mathbf{5})(-i\omega) - (\mathbf{4} c_E^2 k^2) = 0 . \quad (7.41)$$

Diese Gleichung stellt für  $k \in \mathbb{R}^+$  eine algebraische Gleichung vierter Ordnung bezüglich der Wellenwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  bzw.  $\varpi$  dar. Insbesondere für Problemstellungen, die neben

der plastischen Vergleichsdehnung und Temperatur keine weiteren inneren Größen, wie z. B. isotrope Schädigung, berücksichtigen, i.e.  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , folgt die kubische Gleichung

$$\varpi^3 - (\mathbf{2} - \mathbf{1})\varpi^2 + (c_E^2 k^2 + \mathbf{3})\varpi - (\mathbf{2}c_E^2 k^2) = 0, \quad (7.42)$$

mit drei zum Teil komplexen Lösungen  $\varpi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Die hinreichende Bedingung für eine auftretende Instabilität ist immer dann erfüllt, wenn der Realteil von mindestens einer dieser Lösungen positiv ist, d. h. die Bedingung

$$\varpi_D := \max_i(\text{Re}(\varpi_i)) > 0 \quad (7.43)$$

für die dominante Wachstumsrate  $\varpi_D$  erfüllt ist. Aufgrund der höchsten Ordnung von (7.41) bzw. (7.42) ist eine analytische Untersuchung, unter welchen Bedingungen eine solche Instabilität auftritt, nur erschwert möglich und wird in Abschnitt 7.2.5 und 7.2.6 entsprechend numerisch untersucht.

Hingegen folgt hinsichtlich der Untersuchung der Dispersionseigenschaften dieses Modells aus (7.41) durch Aufspaltung der Wellenzahl  $k$  in einen Real- und Imaginärteil gemäß (7.2b) das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} c_E^2(\omega^2 + \mathbf{4})(k_{\text{Re}}^2 - k_{\text{Im}}^2) + \mathbf{2}c_E^2\omega(2k_{\text{Re}}k_{\text{Im}}) - (\omega^2 + \mathbf{4} - \mathbf{3})\omega^2 = 0 \\ -\mathbf{2}c_E^2\omega(k_{\text{Re}}^2 - k_{\text{Im}}^2) + c_E^2(\omega^2 + \mathbf{4})(2k_{\text{Re}}k_{\text{Im}}) + ((\mathbf{2} - \mathbf{1})\omega^2 + \mathbf{5})\omega = 0 \end{array} \right\}, \quad (7.44)$$

das für die Anteile der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenfrequenz,  $\{k_{\text{Re}}(\omega), k_{\text{Im}}(\omega)\}$ , gelöst wird. Als einzige mögliche Lösung mit (7.2b) folgt

$$k_{\text{Re}}(\omega) = \frac{1}{c_E} \sqrt{\frac{+S_1(\omega) + \sqrt{(S_1(\omega))^2 + (S_2(\omega))^2}}{2S_3(\omega)}}, \quad (7.45a)$$

$$k_{\text{Im}}(\omega) = \frac{1}{c_E} \sqrt{\frac{-S_1(\omega) + \sqrt{(S_1(\omega))^2 + (S_2(\omega))^2}}{2S_3(\omega)}}, \quad (7.45b)$$

mit den weiteren Funktionen

$$S_1(\omega) = \left( S_3(\omega) - (\mathbf{1}\mathbf{2} + \mathbf{3})\omega^2 + \mathbf{2}\mathbf{5} - \mathbf{4}\mathbf{3} \right) \omega^2, \quad (7.46a)$$

$$S_2(\omega) = \left( \mathbf{1}\omega^4 + (\mathbf{1}\mathbf{4} - \mathbf{2}\mathbf{3} - \mathbf{5})\omega^2 - \mathbf{4}\mathbf{5} \right) \omega, \quad (7.46b)$$

$$S_3(\omega) = (\omega^2 + \mathbf{4})^2 + (\mathbf{2}\omega)^2. \quad (7.46c)$$

Der graphische Verlauf dieser Lösungen wird ebenfalls für konkrete spezielle Formulierungen dieser Gruppe ratenabhängiger Modelle (z. B. für das lokale Modell nach JOHNSON & COOK, Abschnitt 7.2.5, bzw. für ein lokales, ratenabhängiges Modell mit linearer Dehnraten-Verfestigung, Abschnitt 7.2.6) dargestellt. Zunächst werden jedoch einige allgemeine Grenzfälle der Lösungen (7.45a, b) untersucht:

Für hohe Wellenfrequenzen  $\omega \rightarrow \infty$  strebt der imaginäre Anteil der Wellenzahl  $k_{\text{Im}}(\omega)$  gegen einen endlichen, von null verschiedenen Grenzwert, so dass unter der Annahme, dass die

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

Funktion  $k_{\text{Im}}(\omega)$  monoton wachsend ist, die innere Länge dieser Gruppe ratenabhängiger Modelle gemäß der Definition (7.11) zu

$$\ell_r^{\text{1D,lokal}} := \left( \lim_{\omega \rightarrow \infty} k_{\text{Im}}(\omega) \right)^{-1} = \frac{2c_E}{|\mathbf{1}|} = \frac{2c_E}{E \text{ abs}\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma}\right)^\circ} \quad (7.47)$$

folgt. Aus (7.45a) ist ferner ersichtlich, dass die Phasengeschwindigkeit von dem Realteil der Wellenzahl abhängt,  $c_f = c_f(k_{\text{Re}}(\omega))$ , also eine dispersive Eigenschaft vorliegt. Für hohe Frequenzen strebt hier der Realteil der Wellenzahl  $k_{\text{Re}}$  derart gegen Unendlich, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit sowohl einer einzelnen Welle  $c_f$  als auch eines Wellenpakets  $c_g$  gegen die elastische Wellengeschwindigkeit strebt, *i.e.*

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_f(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} c_g(\omega) = c_E. \quad (7.48)$$

### 7.2.5 Anwendung 1: Lokales JOHNSON & COOK-Modell

Für das lokale JOHNSON & COOK-Modell berechnen sich für einen inelastischen Prozess die Spannungen unter einachsiger Belastung aus der Beziehung

$$\sigma = \underbrace{(1 - s^{D_w})}_{f_d(s)} \underbrace{(A + B(\varepsilon_P)^n)}_{f_h(\varepsilon_P)} \underbrace{(1 + C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_P / \dot{\varepsilon}_0))}_{f_r(\dot{\varepsilon}_P)} \underbrace{(1 - ((\theta - \theta_R) / (\theta_M - \theta_R))^m)}_{f_t(\theta)}, \quad (7.49)$$

so dass die Bestimmungsfunktion der plastischen Dehnrates durch

$$g(\sigma, \varepsilon_P, \theta, s) = \dot{\varepsilon}_0 \left[ \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma}{f_d(s) f_h(\varepsilon_P) f_t(\theta)} - 1 \right) \right\} - 1 \right] \quad (7.50)$$

konkretisiert ist, siehe auch (T 3.1-9). Mit Hilfe der Identität

$$\frac{1}{f_r'(\dot{\varepsilon}_P)} = \frac{\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_P}{C} = \frac{\dot{\varepsilon}_0}{C} \exp \left\{ \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma}{f_d(s) f_h(\varepsilon_P) f_t(\theta)} - 1 \right) \right\} \quad (7.51)$$

folgen daraus die benötigten Ableitungen zu

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma} \Big|^\circ = \frac{1}{f_d(s^\circ) f_h(\varepsilon_P^\circ) f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_t(\theta^\circ)} = \frac{1}{\sigma^\circ} \frac{f_r(\dot{\varepsilon}_P^\circ)}{f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ)} \quad (7.52a)$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon_P} \Big|^\circ = \frac{-\sigma^\circ}{f_d(s^\circ) f_h(\varepsilon_P^\circ) f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_t(\theta^\circ)} \frac{f_h'(\varepsilon_P^\circ)}{f_h(\varepsilon_P^\circ)} = -\frac{f_r(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_h'(\varepsilon_P^\circ)}{f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_h(\varepsilon_P^\circ)} \quad (7.52b)$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta} \Big|^\circ = \frac{-\sigma^\circ}{f_d(s^\circ) f_h(\varepsilon_P^\circ) f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_t(\theta^\circ)} \frac{f_t'(\theta^\circ)}{f_t(\theta^\circ)} = -\frac{f_r(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_t'(\theta^\circ)}{f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_t(\theta^\circ)} \quad (7.52c)$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \Big|^\circ = \frac{-\sigma^\circ}{f_d(s^\circ) f_h(\varepsilon_P^\circ) f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_t(\theta^\circ)} \frac{f_d'(s^\circ)}{f_d(s^\circ)} = -\frac{f_r(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_d'(s^\circ)}{f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_d(s^\circ)} \quad (7.52d)$$

sowie mit der Gleichung für die Entwicklung des Lebensdauerverbrauchs  $s$  gemäß (T 3.1-7 und T 3.1-8) entsprechend auch die Ableitungen  $(\partial s / \partial \dot{\varepsilon}_P)^\circ$  und  $(\partial s / \partial \theta)^\circ$ . Insbesondere bei ausschließlicher Temperaturentfestigung, d. h. ohne eine Berücksichtigung der Schädigung, gilt  $f_d(s) = 1$  und  $f_d'(s) = 0$ .

In *Bild 7.3* ist das Spannungs- plastische Dehnungs-Verhalten eines eindimensionalen Kontinuums unter Zugbelastung für zwei unterschiedliche und konstant angenommene plastische Dehnraten dargestellt. Die an den Werkstoff INCONEL 718 angepassten Materialparameter dieses Modells sind dabei der *Tabelle 8.1* auf Seite 124 entnommen. Die numerische Auswertung von Gleichung (7.42) bezüglich der Wachstumsrate der Störung  $\varpi$  zeigt, dass für den untersuchten Fall eine unbegrenzte Störungszunahme, d. h. eine Instabilität der Lösung, genau dann auftritt, wenn das Spannungsmaximum zum Zeitpunkt  $t = \hat{t}$  erreicht wird. In *Bild 7.4* ist diesbezüglich die resultierende dominante Wachstumsrate der Störung zu unterschiedlichen Zeitpunkten nach Erreichen des Spannungsmaximums zur Zeit  $t = \hat{t}$  in Abhängigkeit der Wellenzahl dargestellt. Diese Wachstumsrate erreicht für zunehmende Wellenzahlen schnell einen gesättigten Bereich und bleibt für größere Wellenzahlen konstant. Ebenso wird deutlich, dass infolge der fortschreitenden, stärkeren Entfestigung die Größe dieser Wachstumsrate zunimmt. Insofern tritt für diese lokale, ratenabhängige Formulierung nach JOHNSON & COOK eine Instabilität der Lösung infolge von Entfestigung auf, auch wenn die Hyperbolizität der Gleichungen gewahrt bleibt.

Die Auswertung der Dispersionsanalyse mit den Ergebnissen nach (7.45a, b) für den Real- und Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenfrequenz ist in *Bild 7.5* und *Bild 7.6* zu den unterschiedlichen Zeitpunkten graphisch dargestellt. Der Realteil der Wellenzahl steigt im Bereich niedriger Wellenfrequenzen zunächst stark an und tendiert für höhere Frequenzen gegen eine Steigung, die der Inversen der elastischen Wellengeschwindigkeit entspricht. Durch dieses nichtlineare Verhalten ist direkt ersichtlich, dass eine dispersive Eigenschaft der Störung vorliegt. Diesbezüglich ist der Verlauf der nicht konstanten, von dem Realteil der Wellenzahl abhängigen Phasengeschwindigkeit, zusammen mit der Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets in *Bild 7.7* dargestellt. Für hohe Frequenzen tendieren die Ausbreitungsgeschwindigkeiten gegen die elastische Wellengeschwindigkeit. Für niedrige Frequenzen, und damit kleinen Wellenzahlen, nehmen die Ausbreitungsgeschwindigkeiten ab und tendieren für eine verschwindende Wellenzahl gegen null. Insofern wird deutlich, dass für dieses Modell keine obere Grenze für die Wellenlängen gemäß der Definition (7.9) existiert. Hingegen konvergiert, wie in *Bild 7.6* gezeigt, der imaginäre Anteil der Wellenzahl gegen einen Grenzwert, der der Inversen der inneren Länge des Modells entspricht.

Die innere Länge dieses JOHNSON & COOK-Modells folgt hier mit (7.52a) in (7.47) zu

$$\ell_r^{1D, \text{lokalJC}} = \frac{2c_E}{E} \left(1 - (s^\circ)^{D_w}\right) \left(A + B(\varepsilon_P^\circ)^n\right) \left(\frac{C}{\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_P^\circ}\right) \left(1 - \left(\frac{\theta^\circ - \theta_R}{\theta_M - \theta_R}\right)^m\right) \quad (7.53)$$

bzw. mit  $\sigma^\circ = f_d(s^\circ) f_h(\varepsilon_P^\circ) f_r(\dot{\varepsilon}_P^\circ) f_t(\theta^\circ)$  gilt auch

$$\ell_r^{1D, \text{lokalJC}} = \frac{2c_E \sigma^\circ}{E} \frac{f_r'(\dot{\varepsilon}_P^\circ)}{f_r(\dot{\varepsilon}_P^\circ)} = \frac{2c_E \sigma^\circ}{E} \frac{C/\dot{\varepsilon}_0}{(1 + \dot{\varepsilon}_P^\circ/\dot{\varepsilon}_0)(1 + C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_P^\circ/\dot{\varepsilon}_0))} \quad (7.54)$$

Der Verlauf dieser inneren Länge ist in *Bild 7.8* für die verschiedenen, untersuchten plastischen Dehnraten über der Zeit dargestellt. Infolge der als konstant angenommenen plastischen Dehnraten erreicht die innere Länge zum Zeitpunkt des Spannungsmaximums ebenfalls einen maximalen Wert und tendiert infolge der durch Entfestigung abnehmenden Spannung gegen null. Es zeigt sich zudem eine signifikante Abhängigkeit der inneren Länge von der plastischen Dehnraten. Hier wird ein umgekehrt proportionaler Zusammenhang zwischen der Potenz der inneren Länge und der Potenz der plastischen Dehnraten deutlich, so dass für zunehmende plastische Dehnraten der Wert der inneren Länge gegen null strebt.

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

In *Bild 7.9* ist dieser Zusammenhang ebenfalls veranschaulicht, zudem erlaubt die Angabe der inneren Länge in der Form (7.54) die Untersuchung des Einflusses der dehnratenabhängigen Materialparameter auf diese Abhängigkeit. Dazu ist die mit Hilfe des Terms  $(2c_E \sigma^\circ / E)$  skalierte innere Länge in Abhängigkeit der plastischen Dehnrate  $\dot{\epsilon}_P$  für verschiedene dehnratenabhängige Parameterwerte  $C$  und  $\dot{\epsilon}_0$  dargestellt. Es zeigt sich der umgekehrt proportionale Zusammenhang zwischen skaliertem innerer Länge und plastischer Dehnrate für  $\dot{\epsilon}_P > \dot{\epsilon}_0$ , wobei der Wert des Parameters  $C$  lediglich die Größenordnung des Wertes für  $\ell_r$ , nicht jedoch den Zusammenhang selbst beeinflusst.

Dieses Verhalten tritt auch bei anderen, nichtlinearen dehnratenabhängigen Faktoren in dem multiplikativen Zusammenhang (7.49) auf. Als Beispiel sei die in der Literatur häufig verwendete Potenzfunktion genannt, hier in der Form u. a. nach Camacho und Ortiz (1997) oder Børvik et al. (2001)

$$f_r(\dot{\epsilon}_P) = (1 + \dot{\epsilon}_P / \dot{\epsilon}_0)^C, \quad (7.55)$$

die aufgrund der zuvor beschriebenen Untersuchungen ebenfalls auf eine dehnraten- und spannungsabhängige innere Länge führt

$$\ell_r^{1D, \text{lokalPL}} = \frac{2c_E \sigma^\circ}{E} \frac{C / \dot{\epsilon}_0}{(1 + \dot{\epsilon}_P / \dot{\epsilon}_0)} \quad (7.56)$$

und insofern ebenfalls *keine* konstante Größe darstellt.

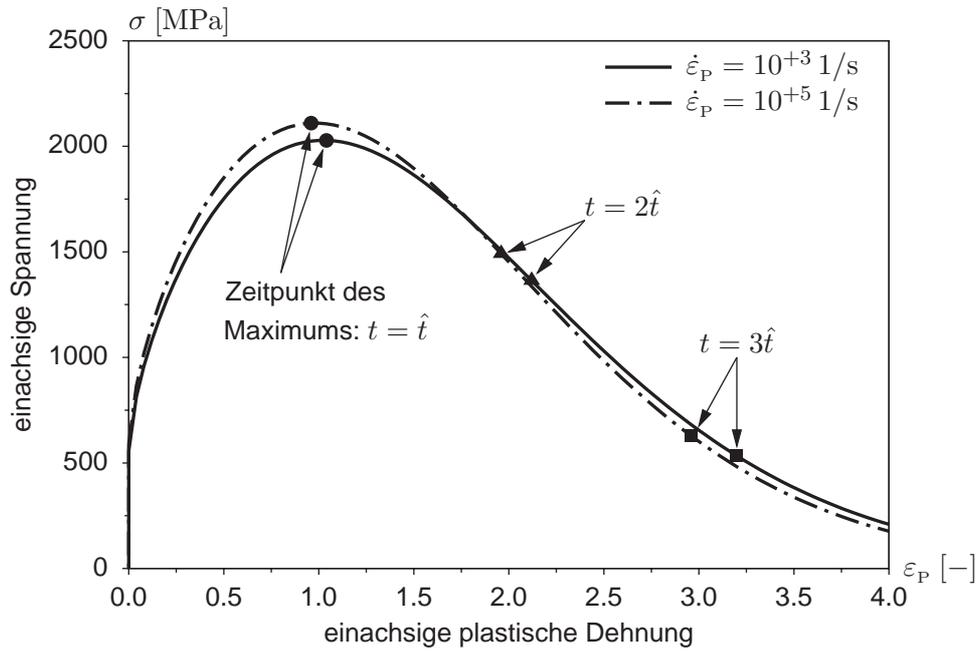


Bild 7.3: Spannungs-Dehnungs Verhalten des lokalen JOHNSON & COOK-Modells bei ausschließlicher Temperaturentfestigung und unterschiedlichen, konstanten plastischen Dehnraten.

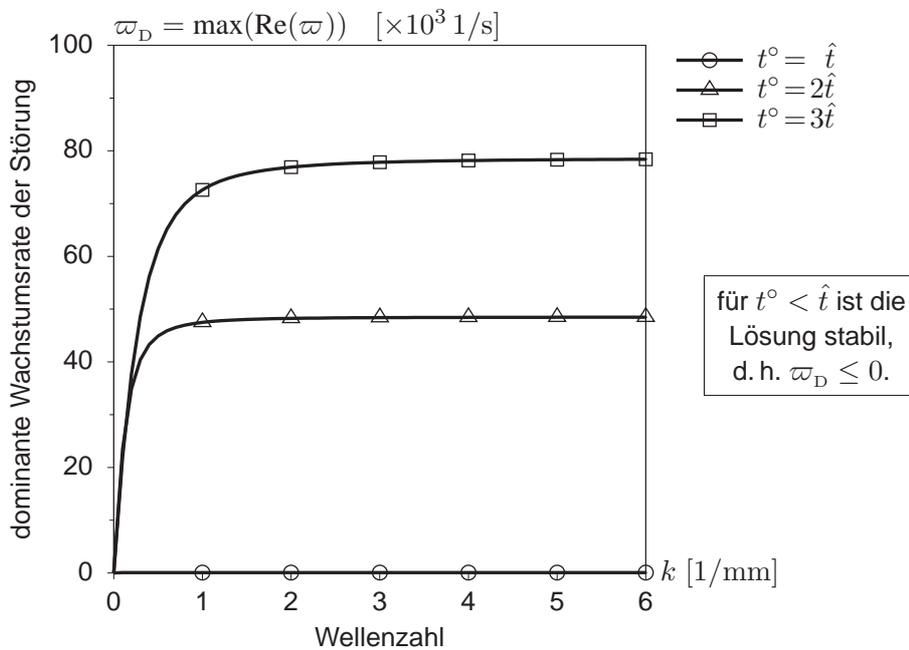


Bild 7.4: Die dominante Wachstumsrate der Störung in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei konstanter plastischer Dehnrade von  $\dot{\epsilon}_P = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

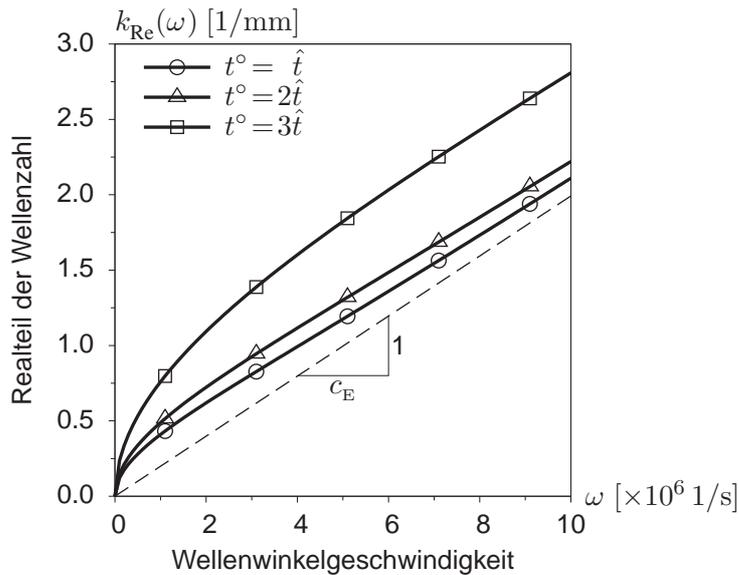


Bild 7.5: Der Realteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von  $\dot{\epsilon}_P = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

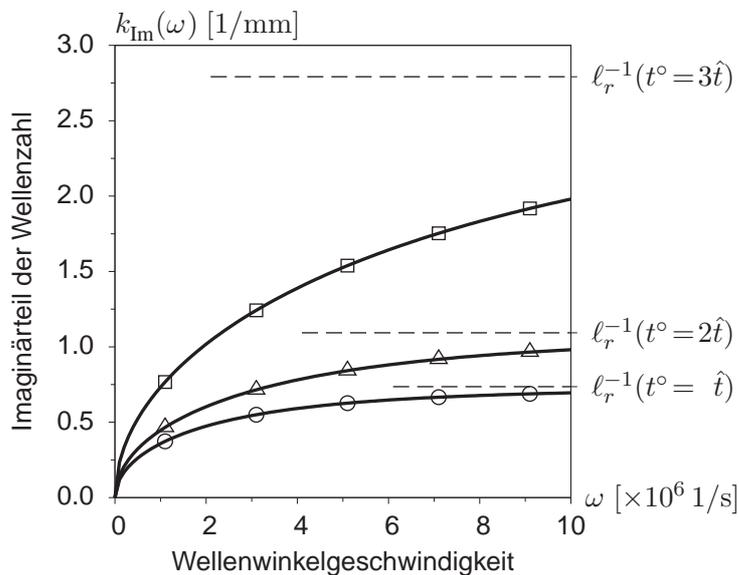


Bild 7.6: Der Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von  $\dot{\epsilon}_P = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

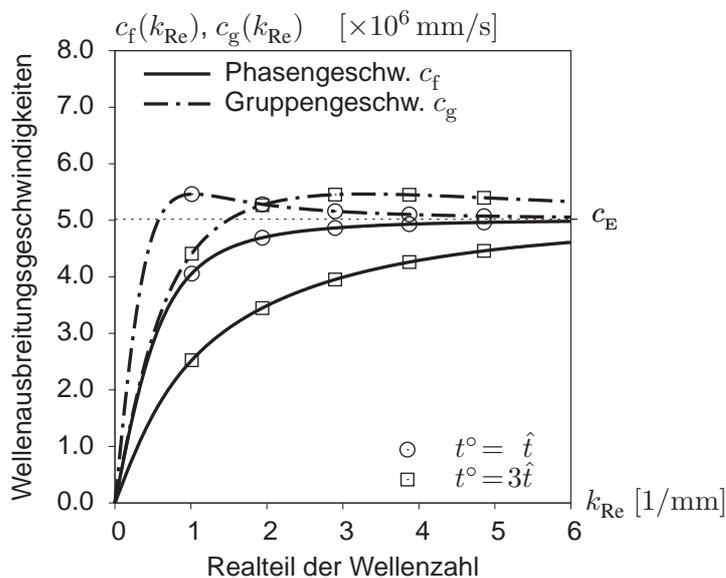


Bild 7.7: Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von  $\dot{\epsilon}_P = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

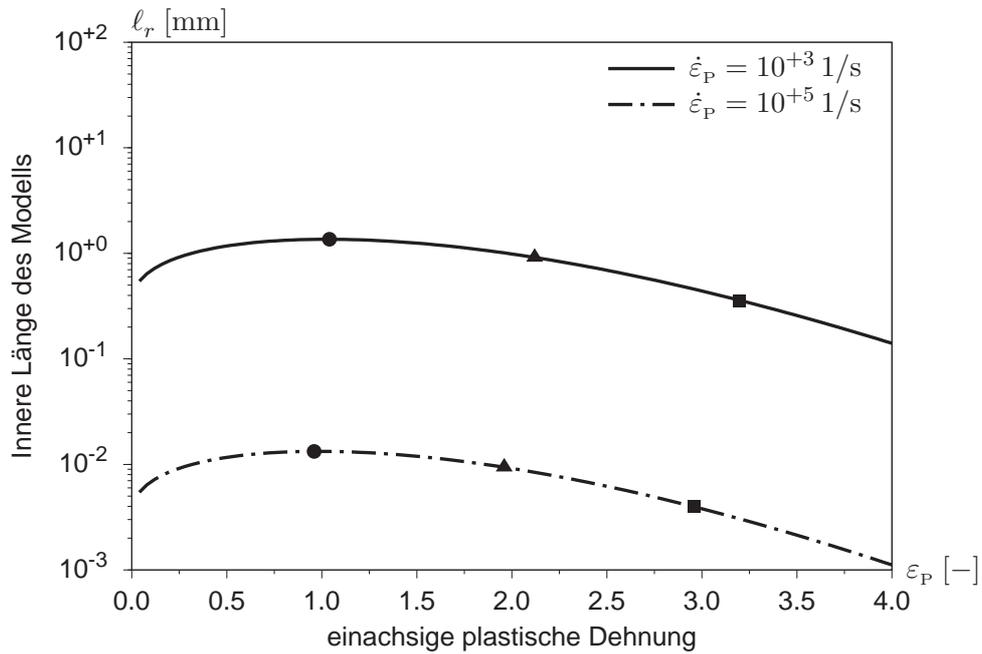


Bild 7.8: Die innere Länge des lokalen, ratenabhängigen JOHNSON & COOK-Modells für unterschiedliche plastische Dehnraten.

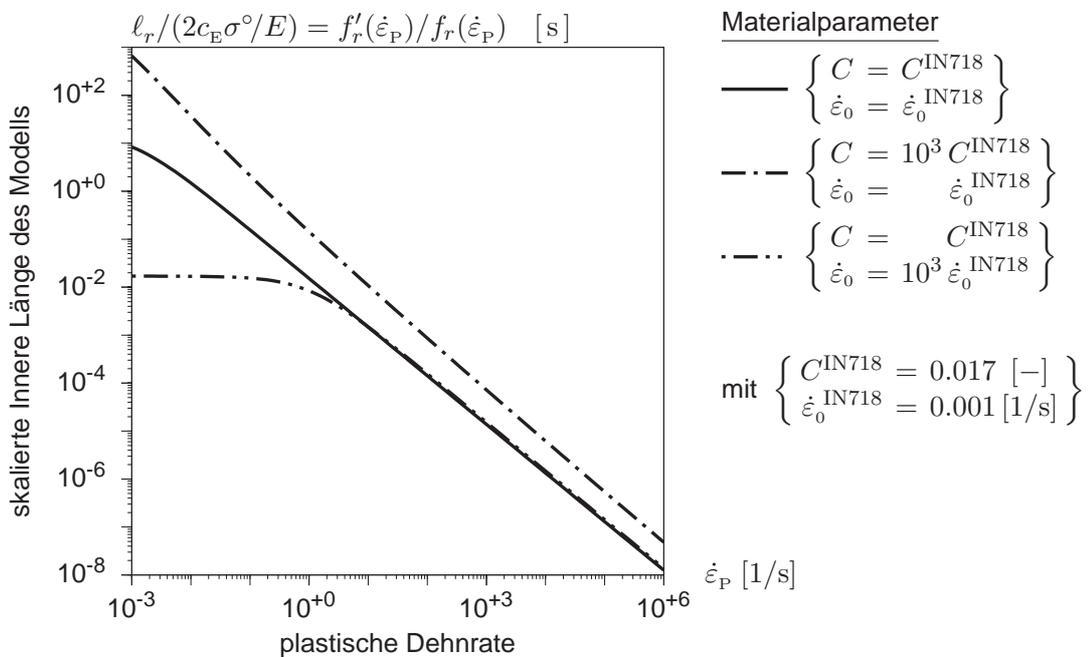


Bild 7.9: Einfluss der Dehnraten abhängigen Materialparameter auf die innere Länge des lokalen JOHNSON & COOK-Modells.

### 7.2.6 Anwendung 2: Lokales Modell mit linearer Dehnratenabhängigkeit

Um den Effekt eines grundsätzlich unterschiedlichen, lokalen und dehnratenabhängigen Modells im Vergleich zu dem vorangegangenen JOHNSON & COOK- bzw. Potenzgesetz-Modell zu zeigen, wird nachfolgend ein Modell mit allgemeiner Ver- bzw. Entfestigung und *linearer* Dehnraten-Verfestigung in der Form

$$\sigma = \underbrace{(\sigma_{Y0} + h \varepsilon_P)}_{f_h(\varepsilon_P)} + \underbrace{(m \dot{\varepsilon}_P)}_{f_r(\dot{\varepsilon}_P)}, \quad \text{bzw.} \quad \bar{g}(\dot{\sigma}, \sigma, \varepsilon_P, \theta, \mathbf{q}) = \frac{1}{m} (\sigma - f_h(\varepsilon_P)) \quad (7.57)$$

untersucht. Darin kennzeichnet  $m$  einen raten-sensitiven Materialparameter, desweiteren ist mit  $f_h(\varepsilon_P)$  eine allgemeine Ver- bzw. Entfestigungsfunktion angegeben, die in der Form von (7.57) durch eine anfängliche Fließspannung  $\sigma_{Y0}$  und einen konstanten Ver- bzw. Entfestigungsmodul  $h$  beschrieben wird. Bei dieser Formulierung der konstitutiven Beziehung (7.57) ist zu beachten, dass infolge der additiven Form sowie der linearen Dehnratenverfestigung lediglich ein eingeschränkter Bereich möglicher Dehnraten zu physikalisch sinnvollen Spannungs-Dehnung Kurven führt. Ein mehrere Dekaden umfassender Dehnratenbereich, der beispielsweise bei der Modellierung von Hochgeschwindigkeitsbelastungen metallischer Werkstoffe zu berücksichtigen ist (vgl. Kapitel 1), kann durch diese Formulierung nicht sinnvoll modelliert werden. Vielmehr dient diese Formulierung dazu, prinzipiell die verschiedenen Effekte bei entfestigendem Materialverhalten zu untersuchen.

Der Spannungs-Dehnungs Verlauf sowie der dehnratenabhängige Charakter der konstitutiven Gleichung ist in *Bild 7.10* für verschiedene, konstante Gesamtverzerrungsraten veranschaulicht. Desweiteren ist in *Bild 7.11* jeweils die diesen Spannungs-Dehnungsverläufen entsprechende Entwicklung der plastischen Dehnrate dargestellt. Die verwendeten Materialparameter sind dabei in Anlehnung an Arbeiten von Sluys (1992) bzw. Wang und Sluys (2000) zu  $E_T = 20000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\rho_T = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Mg/mm}^3$ ,  $\sigma_{Y0} = 0.002 E_T$  sowie  $h = -0.1 E_T$  und  $m = 0.2 \text{ N}\cdot\text{s/mm}^2$  gewählt.

Die für die Stabilitätsuntersuchungen relevanten Ableitungen folgen aus (7.57) allgemein zu

$$\left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial \sigma} \right|^\circ = \frac{1}{m}, \quad \left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial \varepsilon_P} \right|^\circ = \frac{-h}{m}, \quad \left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial \theta} \right|^\circ = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \right|^\circ = 0. \quad (7.58)$$

Hinsichtlich der Untersuchung einer möglichen zeitlichen Instabilität durch Auswertung von Gleichung (7.42) bezüglich der Wellenwinkelgeschwindigkeit  $\varpi$  zeigt sich, dass ebenfalls mit dem Übergang zu entfestigendem Materialverhalten eine positive dominante Wachstumsrate der Störung  $\varpi_D > 0$ , d. h. ein Instabilität der Lösung auftritt. In *Bild 7.12* ist der Verlauf der Wachstumsrate in Abhängigkeit von der Wellenzahl dargestellt. Verglichen mit den Ergebnissen von Modellen mit nichtlinearer Dehnratenverfestigung (z. B. JOHNSON & COOK- oder Potenzgesetz-Modelle) zeigt sich ein prinzipiell ähnliches Verhalten, im Unterschied ist hier jedoch weder ein Einfluss der plastischen Dehnung noch der Dehnrate auf das Verhalten der dominanten Wachstumsrate zu beobachten, vgl. mit *Bild 7.4*.

Die Ergebnisse der Dispersionsanalyse für dieses Modell sind in den *Bildern 7.13 bis 7.15* graphisch dargestellt. Der Realteil der Wellenzahl nimmt in Abhängigkeit von der Wellenfrequenz stetig zu und strebt für  $\omega \rightarrow \infty$  derart gegen Unendlich, dass die Phasengeschwindigkeit der Welle gegen die elastische Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c_E$  strebt, siehe auch

*Bild 7.15.* Hingegen erreicht der Imaginärteil der Wellenzahl für hohe Wellenfrequenzen ein Maximum, das eben der Inversen der inneren Länge des Modells entspricht. Wie in *Bild 7.14* dargestellt, wird deutlich, dass der funktionale Zusammenhang des Imaginärteils der Wellenzahl und der Wellenfrequenz keine Abhängigkeit von der Dehnrates oder dem Spannungszustand aufweist. Die innere Modelllänge stellt insofern im Gegensatz zu den Modellen mit nichtlinearer Dehnratesabhängigkeit hier eine konstante Größe dar. In *Bild 7.15* ist darüber hinaus der dispersive Charakter des Modells durch die Darstellung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl veranschaulicht. Wie bereits beschrieben wird darin deutlich, dass für hohe Wellenfrequenzen (einhergehend mit hohen Wellenzahlen) die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten gegen die elastische Wellengeschwindigkeit streben. Hingegen zeigt dieses Modell für kleine Wellenzahlen ein unphysikalisches Verhalten, da sich in diesem Fall die Wellen mit einer unendlichen Geschwindigkeit ausbreiten.

Die Bestimmung der inneren Länge erfolgt gemäß (7.47) und resultiert für dieses Modell zu

$$\ell_r^{\text{Lin,1D}} = \frac{2c_E m}{E} = \text{konst.} \quad (7.59)$$

Daher stellt die innere Modelllänge eine konstante Größe dar, die lediglich von den elastischen Materialparametern  $c_E$  und  $E$  sowie dem raten-sensitiven Parameter  $m$  abhängt. Für die in diesem Abschnitt abgegebenen Parameterwerte folgt aus (7.59) der Wert der inneren Länge zu  $\ell_r^{\text{Lin,1D}} = 20 \text{ mm}$ .

In diesem Zusammenhang ist darauf hingewiesen, dass bei Anwendung dieser ratenabhängigen Modellformulierung im Rahmen der Finiten-Element Methode eine pathologische Netzabhängigkeit der Ergebnisse *nicht* auftritt, siehe z. B. Sluys (1992) oder Wang und Sluys (2000). In der zuletzt genannten Arbeit wird zudem gesondert darauf hingewiesen, dass diese Netzunabhängigkeit der Ergebnisse allerdings nicht bei Verwendung von Potenzgesetz-Modellen erzielt wird. Die Auswirkungen unterschiedlicher Modellformulierungen auf die Ergebnisse von Finite-Element Berechnungen stellen einen wesentlichen Anteil dieser Arbeit dar und werden daher in Kapitel 8 getrennt von den hier beschriebenen Stabilitätsuntersuchungen eingehend untersucht.

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

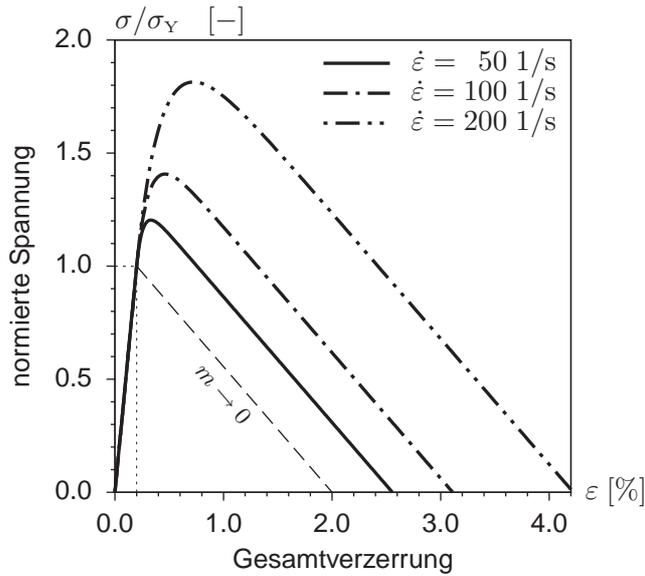


Bild 7.10: Spannungs-Dehnungs Verhalten des lokalen Riss-Modells mit linearer Dehnratenverfestigung bei unterschiedlichen, konstanten Raten der Gesamtverzerrung.

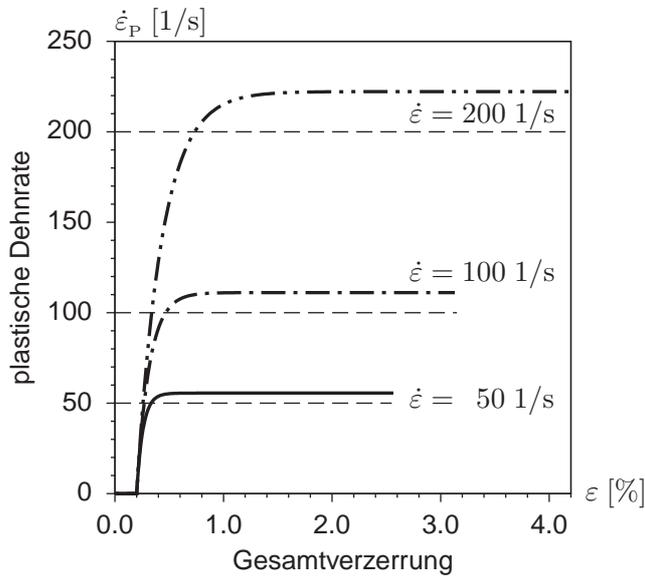


Bild 7.11: Entwicklung der plastischen Dehnrates für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratenverfestigung bei unterschiedlichen, konstanten Raten der Gesamtverzerrung.

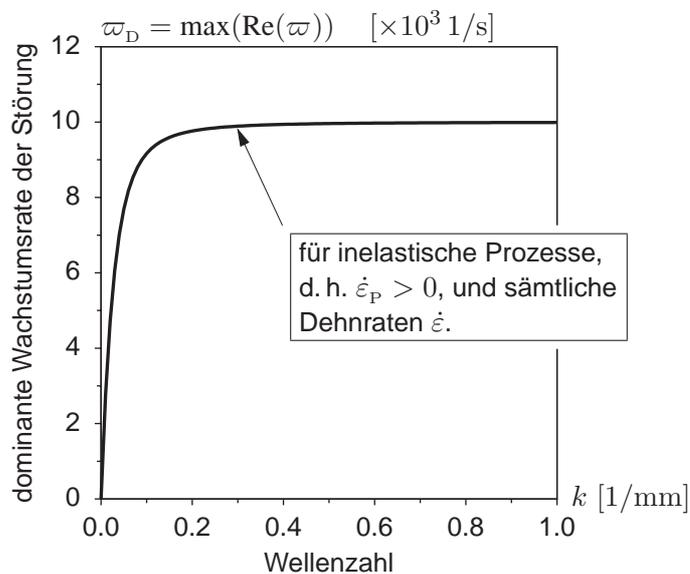


Bild 7.12: Die dominante Wachstumsrate der Störung in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratenverfestigung.

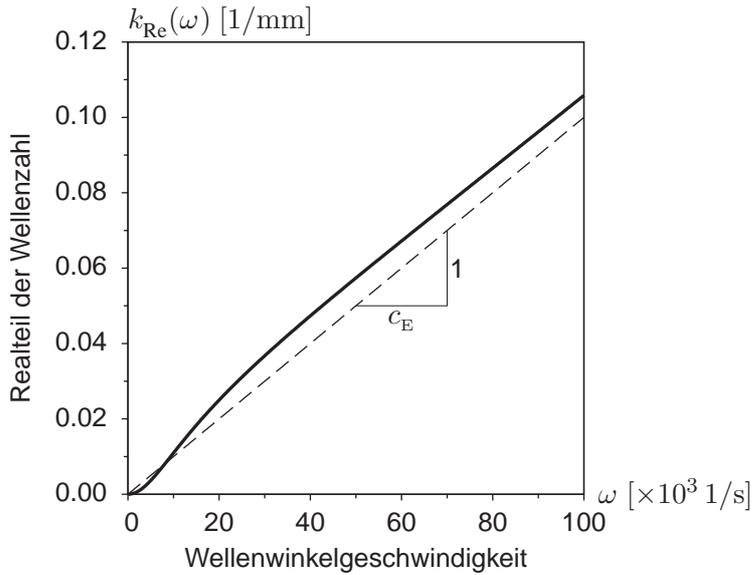


Bild 7.13: Der Realteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratenverfestigung.

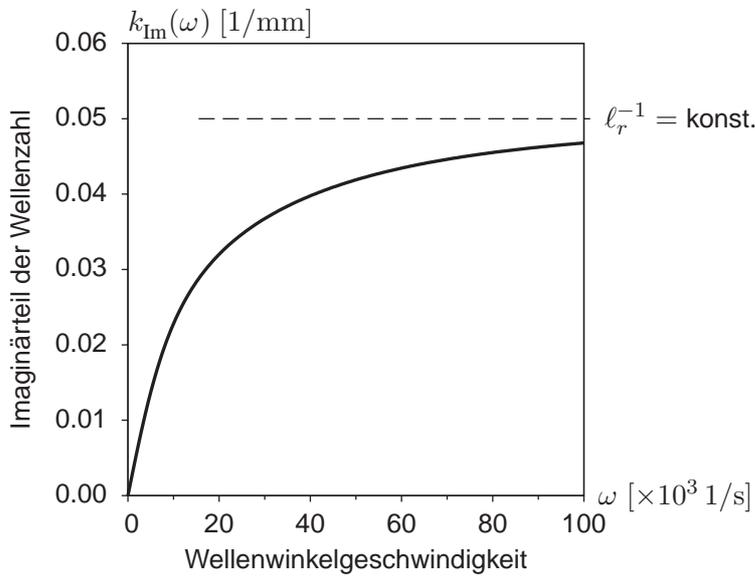


Bild 7.14: Der Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratenverfestigung.

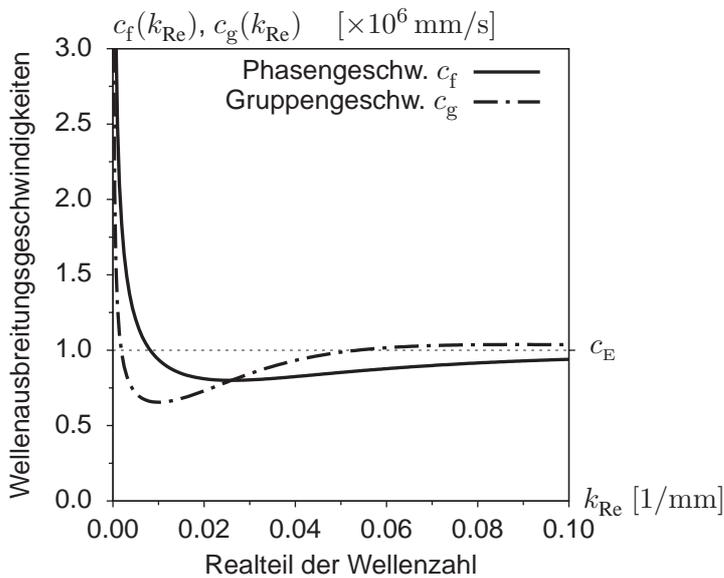


Bild 7.15: Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratenverfestigung.

### 7.2.7 Nicht-lokale Elasto-Plastizität

**Eindeutigkeitsnachweis** Im Gegensatz zu dem Modell der lokalen Elasto-Plastizität aus Abschnitt 7.2.3 wird in den nachfolgenden Untersuchungen der nicht-lokale Parameter mit  $\bar{c}_r > 0$  in (7.12d) berücksichtigt. Dieses Vorgehen resultiert für inelastische Prozesse in einem gekoppelten System von zwei PDGn sowohl für das Verschiebungsfeld  $u$  als auch das nicht-lokale inelastische Verzerrungsfeld  $\varepsilon_P$ , *i.e.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_E^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial X^2 \partial t} = - \frac{\partial^2 \varepsilon_P}{\partial X \partial t} \\ \frac{E}{c_E^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \bar{c}_r f' \frac{\partial^4 \varepsilon_P}{\partial X^3 \partial t} = f' \frac{\partial^2 \varepsilon_P}{\partial X \partial t} + f'' F(D^2 u) \end{array} \right\}, \quad (7.60)$$

wobei hier erneut die Beziehung (7.23) zur Bestimmung des lokalen plastischen Zuwachses betrachtet wird, *i.e.*  $\dot{\sigma} = f' \dot{\varepsilon}_P$ . Mit den entsprechenden Differentialen der partiellen Ableitungen beider Lösungsfelder folgt unter Auslassung weiterer Zwischenschritte analog zu dem in Abschnitt 7.2.3 beschriebenen Vorgehen für die Determinante des resultierenden Gleichungssystems schließlich

$$D = \bar{c}_r f' \left( \frac{1}{c_E^2} (dX)^2 - (dt)^2 \right) dX, \quad (7.61)$$

so dass die charakteristischen Richtungen für diesen Fall infolge von  $D = 0$  zu

$$\frac{dX}{dt} = \pm c_E, 0 \quad (7.62)$$

folgen. Daher stellt das gekoppelte partielle Differentialgleichungssystem (7.60) ein hyperbolisch-parabolisches System, d. h. ein PDG-System von gemischtem Typ, dar. Ferner wird deutlich, dass die charakteristischen Richtungen im Verlauf der Entwicklung der Lösung stets reell bleiben, wodurch die Eindeutigkeit der Lösung gewährleistet bleibt. Der Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf die „Korrekt-Gestelltheit“ der Lösung wird durch die nachfolgende Stabilitätsanalyse deutlich.

**Stabilitätsuntersuchung** Aus der zu untersuchenden Gleichung (7.21) folgt für den hier betrachteten Fall ratenunabhängiger Gradienten-Plastizität, d. h. für  $\bar{c}_r > 0$  und für eine Entwicklung der lokalen plastischen Dehnrates gemäß (7.23), die Gleichung

$$\left( \bar{c}_r k^2 + \frac{E + f'}{f'} \right) (-\omega^2) + c_E^2 k^2 (1 + \bar{c}_r k^2) = 0. \quad (7.63)$$

Aus dieser quadratischen Gleichung bezüglich der Wellenwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  bzw.  $\varpi$ , mit  $\varpi^2 = -\omega^2$ , ist die dominante Wachstumsrate der Störung durch

$$\varpi_D = \begin{cases} k c_E \sqrt{\frac{-f'(1 + \bar{c}_r k^2)}{E + f'(1 + \bar{c}_r k^2)}} > 0, & \text{für } -E < f' < 0 \text{ und } \bar{c}_r k^2 \leq \frac{E + f'}{-f'} \\ 0 & \text{für alle sonstigen Fälle} \end{cases} \quad (7.64)$$

bestimmt. Für  $\bar{c}_r = 0$  wird zudem exakt das Ergebnis des lokalen Falls erhalten, *cf.* Ergebnis (7.33). Andererseits existiert hier nun für bestimmte Wertepaare von nicht-lokalem Parameter  $\bar{c}_r > 0$  und Wellenzahl  $k$  auch infolge von Entfestigung ein Bereich stabiler Lösungen.

Dieser Wertebereich ist in *Bild 7.16* für verschiedene Grade der Entfestigung  $\xi := -f'/E$ , mit  $0 < \xi < 1$ , dargestellt. Die Grenze zwischen den Bereichen stabiler und instabiler Lösungen ist dann mit (7.64) durch den funktionalen Zusammenhang  $\bar{c}_r k^2 = (1 - \xi)/\xi$  bestimmt. Es wird deutlich, dass für große Wellenzahlen, d. h. für Störungen mit kleinen Wellenlängen, bereits ein geringer Wert des nicht-lokalen Parameters ausreicht, um eine stabile Lösung zu erhalten. Mit zunehmend kleineren Wellenzahlen ist die Lösung lediglich durch größere Werte des nicht-lokalen Parameters stabilisiert. Dieser Zusammenhang ist zudem stark von dem Grad der Entfestigung abhängig. Es zeigt sich, dass für einen bestimmten Wert des nicht-lokalen Parameters mit zunehmenden Grad der Entfestigung erst bei sehr viel kleineren Wellenzahlen, also bei Störungen mit sehr viel größeren Wellenlängen, der Übergang zu instabilen Lösungen auftritt. Insofern liegt für entfestigendes Materialverhalten die Grenze zwischen stabilen und instabilen Lösungen bei einer kritischen Wellenlänge von

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\xi \bar{c}_r}{1 - \xi}}, \quad \text{mit } 0 < \xi < 1. \quad (7.65)$$

Dieser Zusammenhang wird ferner auch infolge der Dispersionsanalyse deutlich. Mit  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{C}$  gemäß (7.2b) in (7.63) folgt als gültige Lösung des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_r c_E^2 \left[ (k_{\text{Re}}^2 - k_{\text{Im}}^2)^2 - (2k_{\text{Re}} k_{\text{Im}})^2 \right] - (\bar{c}_r \omega^2 - c_E^2) (k_{\text{Re}}^2 - k_{\text{Im}}^2) - (E + f')/f' \omega^2 = 0 \\ \bar{c}_r c_E^2 \left[ 4k_{\text{Re}} k_{\text{Im}} (k_{\text{Re}}^2 - k_{\text{Im}}^2) \right] - (\bar{c}_r \omega^2 - c_E^2) 2k_{\text{Re}} k_{\text{Im}} = 0 \end{array} \right\} \quad (7.66)$$

letztendlich

$$k_{\text{Re}}(\omega) = \frac{1}{c_E} \sqrt{\frac{1}{2\bar{c}_r} \left( (\bar{c}_r \omega^2 - c_E^2) \pm \sqrt{(\bar{c}_r \omega^2 - c_E^2)^2 + 4\bar{c}_r c_E^2 \omega^2 (E + f')/f'} \right)} \quad (7.67a)$$

$$k_{\text{Im}}(\omega) = 0 \quad (7.67b)$$

bzw. für (7.67a) invers formuliert, siehe auch (7.63) mit  $k_{\text{Im}} = 0$ ,

$$\omega(k_{\text{Re}}) = c_E k_{\text{Re}} \sqrt{\frac{f'(1 + \bar{c}_r k_{\text{Re}}^2)}{E + f'(1 + \bar{c}_r k_{\text{Re}}^2)}}. \quad (7.68)$$

Insofern existieren gültige Lösungen, wenn eine der Bedingungen

$$f' > 0, \quad \text{oder} \quad f' \leq -E, \quad \text{oder} \quad -E < f' < 0 \wedge \bar{c}_r k_{\text{Re}}^2 > -(E + f')/f' \quad (7.69)$$

erfüllt ist. Diese Aussage stimmt mit dem Ergebnis (7.64) überein.

Darüber hinaus werden auf Grundlage der Ergebnisse (7.67a, b) bzw. (7.68) die Dispersionsseigenschaften dieses Modells für entfestigendes Materialverhalten ( $0 > f' > -E$ , bzw.  $0 < \xi < 1$ ) untersucht. In *Bild 7.17* ist hierzu die Beziehung zwischen Wellenzahl und Wellenwinkelgeschwindigkeit für einen bestimmten Grad der Entfestigung sowie unterschiedliche Werte des nicht-lokalen Parameters dargestellt. Durch den jeweiligen Funktionsverlauf wird ebenfalls die Grenze zwischen stabilem und instabilem Bereich veranschaulicht; insbesondere für zunehmende Werte des nicht-lokalen-Parameters verschiebt sich diese Grenze derart, dass bereits Störungen mit kleineren Wellenzahlen stabilisiert werden, es gilt

$$k_{\text{Re, min}} = \sqrt{\frac{1 - \xi}{\xi \bar{c}_r}} = \frac{2\pi}{\lambda_c}. \quad (7.70)$$

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

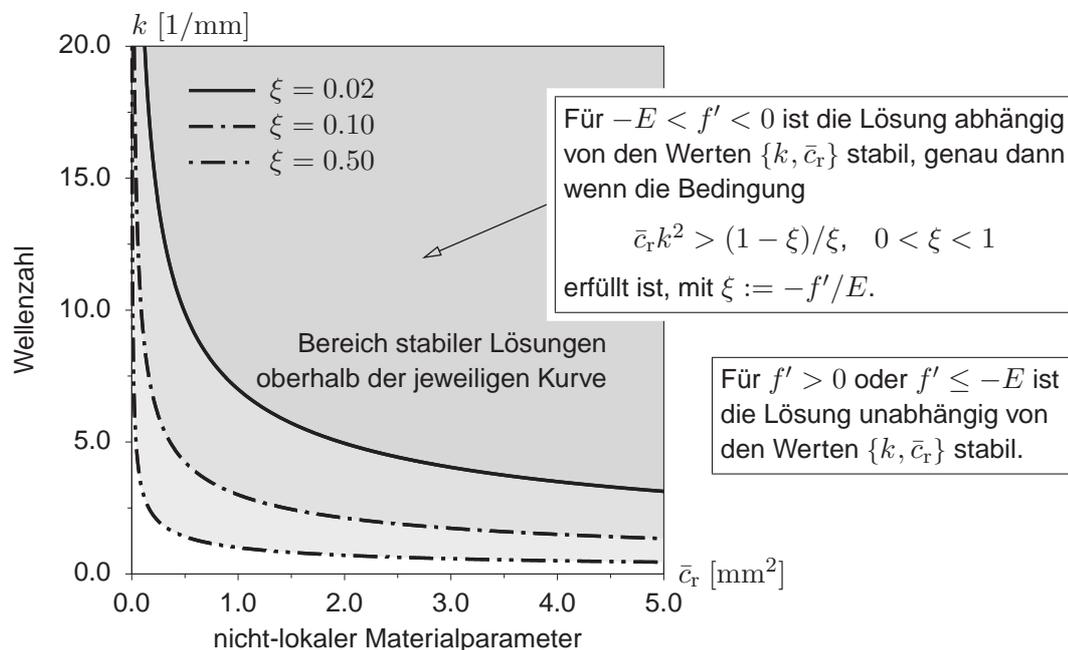
Darüber hinaus werden aus den Ergebnissen (7.67a) bzw. (7.68) die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten gemäß (7.7) und (7.8) bestimmt, die für unterschiedliche nicht-lokale Parameter in *Bild 7.18* dargestellt sind. Der dispersive Charakter wird direkt durch den nichtlinearen Verlauf der Phasengeschwindigkeit verdeutlicht. Ferner tendiert die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets für einen positiven Wert der Wellenzahl gegen null. Mit der Definition (7.9) sowie (7.8) folgt hier mit (7.68) schließlich die innere Länge bei entfestigendem Materialverhalten zu

$$\ell_c^{\text{1D,GP}} = \sqrt{\frac{\xi \bar{c}_r}{(1-\xi) + \sqrt{1-\xi}}}, \quad \text{mit } 0 < \xi < 1. \quad (7.71)$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass es durch Verwendung eines nicht-lokalen Modells möglich ist, die Lokalisierungszone zu begrenzen. Der Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf die innere Länge wird dabei für einen bestimmten Grad der Entfestigung  $\xi$  durch die proportionale Beziehung der inneren Länge zu der Quadratwurzel des nicht-lokalen Parameters, *i.e.*

$$\ell_c^{\text{1D,GP}} \propto \sqrt{\bar{c}_r}, \quad \text{für } \xi = \text{konst.}, \quad (7.72)$$

deutlich.



*Bild 7.16: Bereich stabiler Lösungen bei Entfestigung in Abhängigkeit der Wellenzahl und des nicht-lokalen Parameters für ein ratenunabhängiges Modell der Gradienten-Plastizität.*

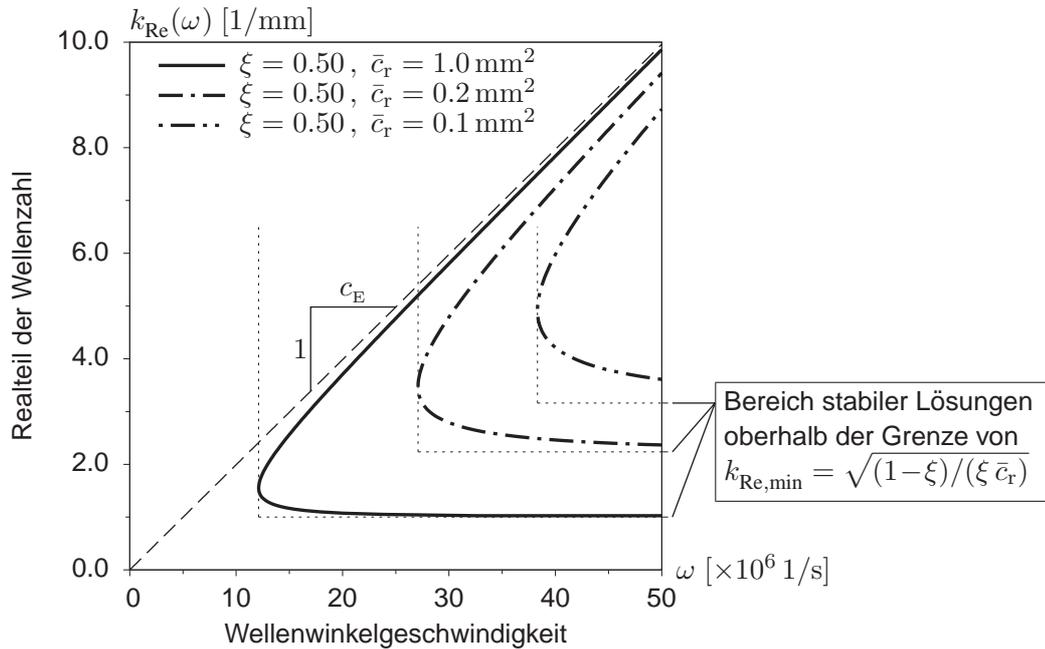


Bild 7.17: Die Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für ein ratenunabhängiges Modell der Gradienten-Plastizität.

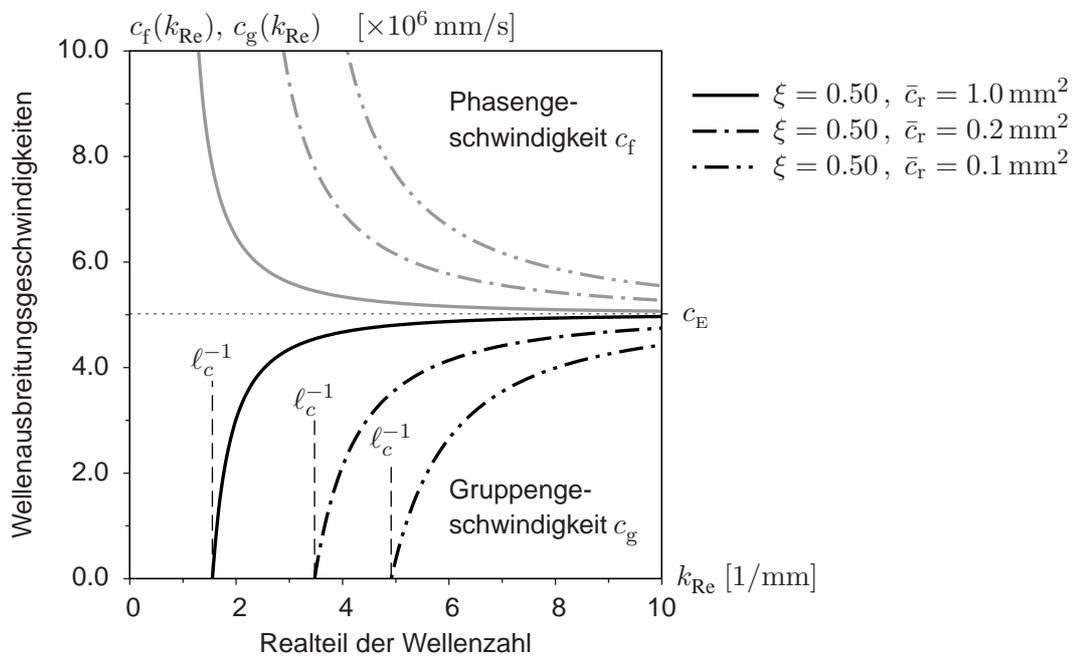


Bild 7.18: Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für ein ratenunabhängiges Modell der Gradienten-Plastizität.

### 7.2.8 Nicht-lokale Elasto-Thermoviskoplastizität

Diese Modellformulierung kombiniert die in Abschnitt 7.2.4 beschriebene Dehnratenabhängigkeit gemäß der Bestimmungsfunktion (7.36) für die (lokale) plastische Dehnrates mit der in dem vorangegangenen Abschnitt 7.2.7 beschriebenen nicht-lokalen Erweiterung, d. h. unter Berücksichtigung von  $\bar{c}_r > 0$  in (7.12d).

**Eindeutigkeitsnachweis** Analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 7.2.4 für den Nachweis der Eindeutigkeit folgt hier unter zusätzlicher Berücksichtigung von  $\bar{c}_r > 0$  das gekoppelte PDG-System in der Form

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_E^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial X^2 \partial t^2} = F_1(D^3 \varepsilon_P) \\ \bar{c}_r \frac{\partial^5 \varepsilon_P}{\partial X^3 \partial t^2} = F_2(D^3 \varepsilon_P, D^3 u, D^2 u, \dots) \end{array} \right\} \quad (7.73)$$

Entsprechend folgen die charakteristischen Richtungen für dieses Modell dann zu

$$\frac{dX}{dt} = \pm c_E, 0 \quad (7.74)$$

d. h. (7.73) stellt ebenfalls ein hyperbolisch-parabolisches PDG-System dar, wobei sich dieser klassifizierte Typ im Verlauf der Lösungsentwicklung, d. h. insbesondere auch bei entfestigendem Materialverhalten, nicht ändert. Die Eindeutigkeit der Lösung bleibt somit erhalten. Inwiefern sich der nicht-lokale Parameter für diese Modellformulierung auf die Stabilität der Lösung auswirkt, insbesondere hinsichtlich der Größe der inneren Modelllänge, wird mittels der folgenden Stabilitätsanalyse untersucht.

**Stabilitätsuntersuchung** Für die Untersuchung der Stabilitätsbedingungen sowie der Dispersionseigenschaften dieses Modells werden die identischen Substitutionen ❶ bis ❺ verwendet, die bereits in Abschnitt 7.2.4 gemäß (7.40a-e) definiert wurden. Damit folgt aus der zu untersuchenden Gleichung (7.21)

$$(1 + \bar{c}_r k^2) \omega^4 + (❶ - ❷)(i\omega^3) + (c_E^2 k^2 (1 + \bar{c}_r k^2) + ❸ - ❹)(-\omega^2) - (❷ c_E^2 k^2 - ❺)(-i\omega) - (❹ c_E^2 k^2) = 0, \quad (7.75)$$

bzw. für Modelle, die neben der Temperatur keine weiteren inneren Größen  $q$  berücksichtigen (z. B. Modelle mit ausschließlicher Temperaturentfestigung), gilt es die Gleichung

$$(1 + \bar{c}_r k^2) \varpi^3 + (❶ - ❷) \varpi^2 + (c_E^2 k^2 (1 + \bar{c}_r k^2) + ❸) \varpi - (❷ c_E^2 k^2) = 0 \quad (7.76)$$

bezüglich  $\varpi$  zu lösen. Die numerische Auswertung dieser Gleichung erfolgt in Abhängigkeit des nicht-lokalen Parameters für die Formulierung nach JOHNSON & COOK in Abschnitt 7.2.9.

Hinsichtlich der Untersuchung der Dispersionseigenschaften und Bestimmung der inneren Länge dieses Modells führt (7.75) mit  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{C}$  gemäß (7.2b) sowie mit

$$(\varrho_{\Re}) := \operatorname{Re}(k^2) = (k_{\Re}^2 - k_{\Im}^2) \quad \text{und} \quad (\varrho_{\Im}) := \operatorname{Im}(k^2) = 2k_{\Re} k_{\Im} \quad (7.77)$$

auf das bezüglich der Anteile der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit zu lösende Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} S_A(\omega) ((\varrho_{\Re})^2 - (\varrho_{\Im})^2) + S_B(\omega) (\varrho_{\Re}) + S_C(\omega) (\varrho_{\Im}) + S_D(\omega) = 0 \\ 2S_A(\omega) (\varrho_{\Re})(\varrho_{\Im}) - S_C(\omega) (\varrho_{\Re}) + S_B(\omega) (\varrho_{\Im}) + S_E(\omega) = 0 \end{array} \right\}. \quad (7.78)$$

Darin stellen die Größen  $S_A(\omega), \dots, S_E(\omega)$  Funktionen in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit dar, mit

$$S_A(\omega) := \bar{c}_r c_E^2 \omega^2 > 0 \quad (7.79a)$$

$$S_B(\omega) := -\bar{c}_r \omega^4 + c_E^2 (\omega^2 + \mathbf{4}) \quad (7.79b)$$

$$S_C(\omega) := \mathbf{2} c_E^2 \omega \quad (7.79c)$$

$$S_D(\omega) := (-\omega^2 + \mathbf{3} - \mathbf{4}) \omega^2 \quad (7.79d)$$

$$S_E(\omega) := ((\mathbf{2} - \mathbf{1}) \omega^2 + \mathbf{5}) \omega. \quad (7.79e)$$

Als Lösung des Gleichungssystems (7.78) folgt schließlich

$$k_{\Re}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( + (\varrho_{\Re}) + \sqrt{(\varrho_{\Re})^2 + (\varrho_{\Im})^2} \right)} \quad (7.80a)$$

$$k_{\Im}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( - (\varrho_{\Re}) + \sqrt{(\varrho_{\Re})^2 + (\varrho_{\Im})^2} \right)} \quad (7.80b)$$

mit

$$(\varrho_{\Re}) = \frac{-S_B}{2S_A} \oplus \frac{1}{2S_A} \left[ \frac{1}{2} \left( + (S_B^2 - S_C^2 - 4S_A S_D) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(S_B^2 - S_C^2 - 4S_A S_D)^2 + 4(S_B S_C + 2S_A S_E)^2} \right) \right]^{1/2} \quad (7.81a)$$

$$(\varrho_{\Im}) = \frac{S_C}{2S_A} \boxplus \frac{1}{2S_A} \left[ \frac{1}{2} \left( - (S_B^2 - S_C^2 - 4S_A S_D) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(S_B^2 - S_C^2 - 4S_A S_D)^2 + 4(S_B S_C + 2S_A S_E)^2} \right) \right]^{1/2} \quad (7.81b)$$

und den jeweils voneinander unabhängigen Vorzeichen  $\oplus$  und  $\boxplus$ . Welche der vier Vorzeichenkombinationen gültige Lösungspaare  $\{k_{\Re}(\omega), k_{\Im}(\omega)\}$  repräsentiert, wird an dieser Stelle nicht unter Berücksichtigung sämtlicher Fallunterscheidungen analysiert, sondern wird nachfolgend für das konkrete, durch die Gradienten-Plastizitätstheorie erweiterte JOHN-SON & COOK-Modell ausgewertet. Durch Betrachtung des Grenzwertes für hohe Frequenzen folgt aus (7.80b)

$$\ell_r^{1D, \text{nicht-lokal}} = \left( \lim_{\omega \rightarrow \infty} k_{\Im}(\omega) \right)^{-1} = \sqrt{\bar{c}_r}, \quad \text{für } \oplus \equiv - \text{ und } \boxplus \equiv \pm, \quad (7.82)$$

wobei eine vollständige Analyse zeigen wird, inwiefern diese berechnete Länge die maßgebende innere Länge des Modells darstellt.

### 7.2.9 Anwendung 3: Nicht-lokales JOHNSON & COOK-Modell

Die numerische Auswertung der Gleichung (7.76) zeigt, dass die Bedingung für einen möglichen Stabilitätsverlust mit Erreichen des Spannungsmaximums zum Zeitpunkt  $t^\circ = \hat{t}$  zusammenfällt. Ob die Lösung dann instabil wird, hängt von der jeweiligen zugrunde liegenden Wellenzahl sowie des Wertes des nicht-lokalen Parameters ab. *Bild 7.19* zeigt exemplarisch für eine Belastung mit einer angenommenen plastischen Dehnrate von  $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} 1/s$ , dass die dominante Wachstumsrate der Störung für kleine Wellenzahlen schnell bis zu einem Maximum zunimmt und für weiter zunehmende Wellenzahlen, je nach Wert des nicht-lokalen Parameters, auf null zurückgeht. Je größer der nicht-lokale Parameter ist, desto schneller fällt die dominante Wachstumsrate der Störung auf null zurück, d. h. es existiert ein Wertebereich  $\{k, \bar{c}_r\}$ , in dem auch bei Auftreten von Entfestigung die Lösung stabil bleibt. Es wird ferner deutlich, dass mit zunehmender Entfestigung, d. h. bei einem Zeitpunkt nach Erreichen des Spannungsmaximums,  $t^\circ > \hat{t}$ , auch der Wert der dominanten Wachstumsrate zunimmt. Das prinzipielle beschriebene Verhalten in Abhängigkeit des nicht-lokalen Parameters allerdings bleibt erhalten. Die Auswertung zeigt, dass ein Verlust der Stabilität mit Erreichen des Spannungsmaximums auftreten kann, wobei die Größenordnung der dominanten Wachstumsrate von dem Grad der Entfestigung und für höhere Wellenzahlen zusätzlich von dem Wert des nicht-lokalen Parameters abhängt. Hingegen wird der Verlust der Stabilität durch Verwendung eines je nach Wellenzahl entsprechend großen Wertes des nicht-lokalen Parameters vermieden.

Die Lokalisierungseigenschaften werden erneut mit Hilfe der Dispersionsanalyse untersucht. Die Lösung (7.80a, b) für die Anteile der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit ist für den nicht-lokalen Fall der JOHNSON & COOK-Formulierung in *Bild 7.20* und *Bild 7.21* dargestellt. Darin werden die Zusammenhänge exemplarisch für den Zeitpunkt des Spannungsmaximums,  $t^\circ = \hat{t}$ , sowie einer plastischen Dehnrate von  $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} 1/s$  gezeigt. Der Realteil der Wellenzahl zeigt lediglich für  $\oplus \equiv +$  in (7.80a) ein sinnvolles Verhalten in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit analog zu dem Fall des lokalen JOHNSON & COOK-Modells. Für niedrige Belastungsfrequenzen steigt der Realteil der Wellenzahl zunächst stark an und tendiert für höhere Belastungsfrequenzen gegen eine kontinuierliche Zunahme mit einer Steigung, die der Inversen der elastischen Wellengeschwindigkeit  $c_E$  entspricht. Wie in *Bild 7.22* gezeigt, strebt sowohl die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets als auch die Phasengeschwindigkeit einer einzelnen harmonischen Welle für hohe Wellenfrequenzen gegen die elastische Wellengeschwindigkeit. Die dispersive Eigenschaft wird erneut durch die nichtlineare Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl deutlich. Für kleine Wellenzahlen streben die Ausbreitungsgeschwindigkeiten gegen den Wert null.

Bezüglich des imaginären Anteils der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit (*Bild 7.21*) wird deutlich, dass im Gegensatz zu der lokalen Formulierung hier für gültige Parameterwerte  $\bar{c}_r > 0$  die Funktion  $k_{\text{Im}}(\omega)$  nicht monoton anwächst, sondern für eine bestimmte Wellenfrequenz ein absolutes Maximum erreicht. Die Inverse dieses Maximalwertes beschreibt daher die maximal mögliche räumliche Dämpfung einer Störung und entspricht gemäß der Definition (7.10) eben der inneren Länge des Modells. Es ist offensichtlich, dass der Wert dieser inneren Länge nicht allein durch die Größe des nicht-lokalen Parameters bestimmt wird: In *Bild 7.23* ist die innere Länge in Abhängigkeit des zeitlichen Verlaufs (auf-

getragen ist stellvertretend die akkumulierte plastische Dehnung  $\varepsilon_p$ ) sowie des nicht-lokalen Parameters  $\bar{c}_r$  für unterschiedliche plastische Dehnraten  $\dot{\varepsilon}_p$  dargestellt. Für  $\bar{c}_r \rightarrow 0$  ergibt sich exakt die Lösung des lokalen Modells mit dem funktionalen Zusammenhang gemäß (7.53) bzw. (7.54), vgl. auch *Bild 7.8*. Für kleine positive Parameterwerte  $\bar{c}_r > 0$  nimmt die innere Länge sehr schnell zu und geht bei weiterer Zunahme des nicht-lokalen Parameters in einen gesättigten Bereich über. Diese anfängliche Zunahme ist dabei für höhere Dehnraten stärker ausgeprägt, so dass bereits für kleine Werte des nicht-lokalen Parameters die Abhängigkeit der inneren Länge von der plastischen Dehnraten verglichen mit der entsprechenden Abhängigkeit des lokalen Modells deutlich reduziert wird: In diesem Zusammenhang wird festgestellt, dass bei großen plastischen Dehnraten selbst kleine, positive Werte des nicht-lokalen Parameters auf eine innere Länge des nicht-lokalen Modells führen, die um einige Größenordnungen über der entsprechenden inneren Länge des lokalen Modells liegt.

Es wird außerdem deutlich, dass im Gegensatz zu dem lokalen Modell die innere Länge des nicht-lokalen Modells nicht länger linear von dem vorherrschenden Spannungszustand abhängt. Zur Veranschaulichung ist in *Bild 7.24* für verschiedene Werte des nicht-lokalen Parameters das Verhältnis der inneren Länge zu deren Maximalwert in Abhängigkeit des Verhältnisses von Spannung zur Maximalspannung aufgetragen. Währenddessen für das lokale Modell,  $\bar{c}_r \rightarrow 0$ , die innere Länge infolge fortschreitender Entfestigung kontinuierlich und linear gegen null strebt, zeigt sich für positive Parameterwerte  $\bar{c}_r > 0$  eine starke, nichtlineare Abhängigkeit der inneren Länge des nicht-lokalen Modells von dem zugrunde liegenden Grad der Entfestigung. Hierbei fällt für zunehmende nicht-lokale Parameterwerte der Wert der inneren Länge zunächst in dem anfänglichen Bereich der Entfestigung schwächer von dem Maximalwert ab, verglichen mit dem Ergebnis des lokalen Modells. Erst kurz vor dem Zustand des völligen Verlustes der Beanspruchbarkeit,  $\sigma^\circ \rightarrow 0$ , nimmt der Wert der inneren Länge drastisch ab. Dieses Verhalten ist in *Bild 7.24* für eine konstante Dehnrates von  $\dot{\varepsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$  dargestellt. Für höhere Dehnraten ist das beschriebene Verhalten noch stärker ausgeprägt.

Die Abhängigkeit der inneren Länge von der plastischen Dehnrates ist hingegen in *Bild 7.25* dargestellt. Die verwendete Skalierung gemäß (7.54) ermöglicht dabei einen direkten Vergleich mit den Ergebnissen des lokalen Modells, siehe *Bild 7.9*. Auch für das nicht-lokale Modell zeigt sich hier ein wesentlicher Einfluss der plastischen Dehnrates auf die Größenordnung der inneren Länge. Allerdings nimmt dieser Einfluss für hohe Dehnrates, verglichen mit dem lokalen Modell, deutlich ab. Ferner wird die Tendenz deutlich, dass für zunehmende nicht-lokale Parameterwerte  $\bar{c}_r$  der Dehnrateseinfluss auf die Größenordnung der inneren Länge bereits bei niedrigeren Dehnrates abnimmt. Für die Interpretation dieser Ergebnisse ist zusätzlich zu beachten, dass hier homogene Zustände mit angenommenen, konstanten nicht-lokalen plastischen Dehnrates zugrundegelegt werden. Generell folgt die plastische Dehnrates eines einzelnen Punktes des Kontinuums aus der zugrunde liegenden Problemstellung mit als Randbedingung vorgegebenen (Gesamt-)Belastungsgeschwindigkeiten. Inwiefern die örtliche plastische Dehnrates infolge eines auftretenden Lokalisierungsprozesses zunimmt, hängt dabei maßgeblich von der Breite der Lokalisierungszone ab.

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

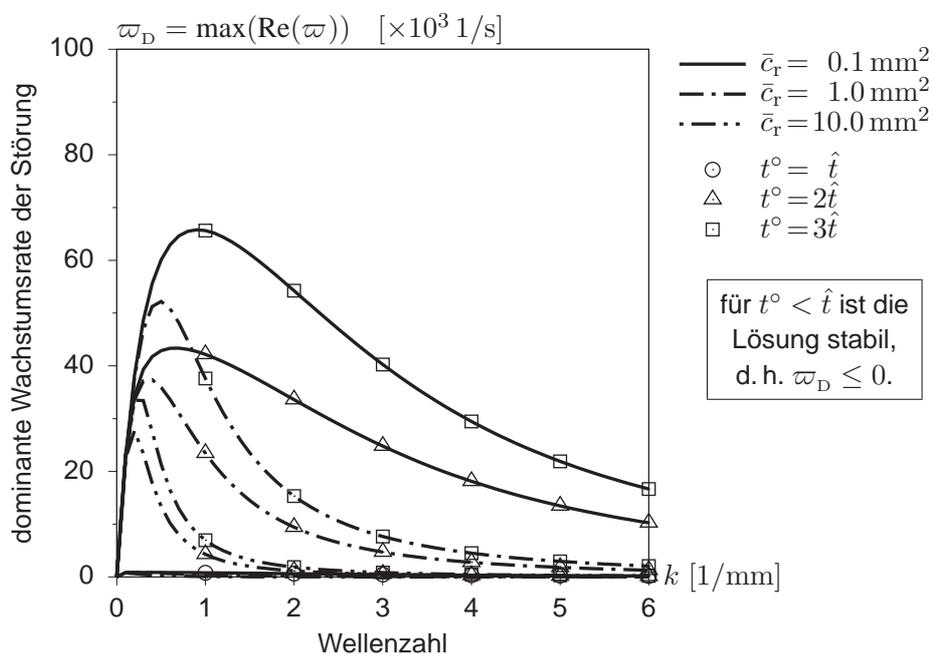


Bild 7.19: Die dominante Wachstumsrate der Störung in Abhängigkeit der Wellenzahl für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei konstanter plastischer Dehnrates von  $\dot{\epsilon}_P = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern.

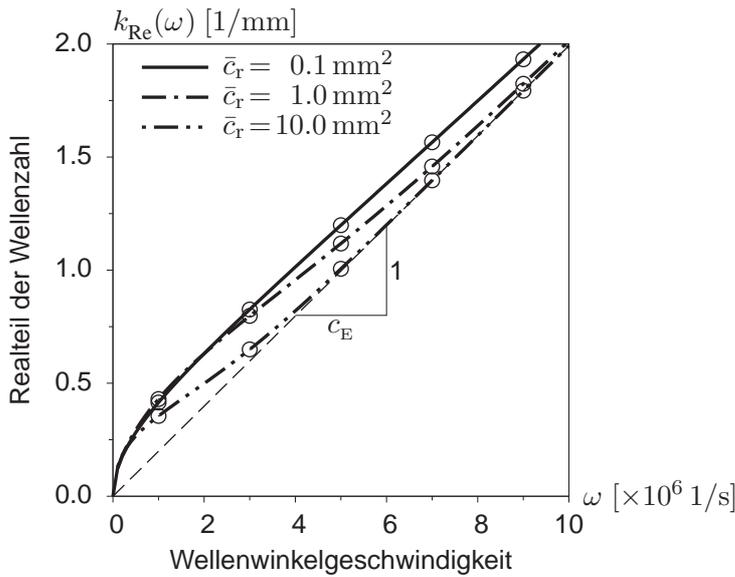


Bild 7.20: Der Realteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von  $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturerfestigung zum Zeitpunkt  $t^\circ = \hat{t}$  und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern.

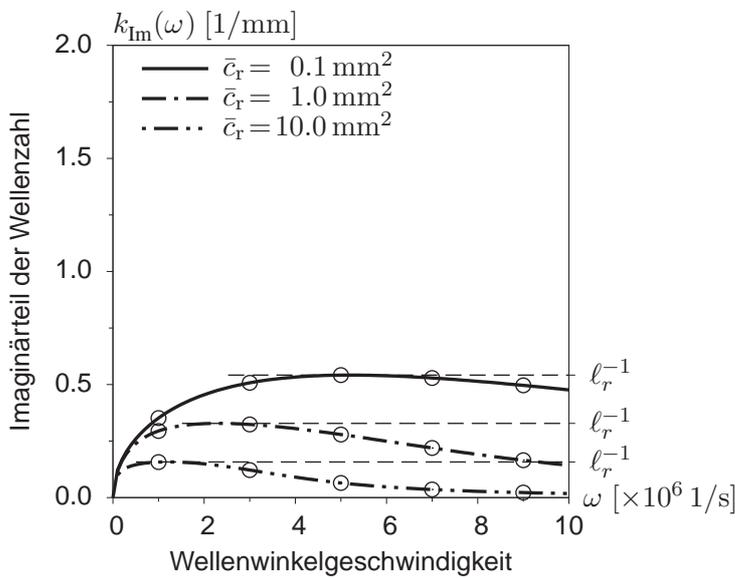


Bild 7.21: Der Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von  $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturerfestigung zum Zeitpunkt  $t^\circ = \hat{t}$  und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern.

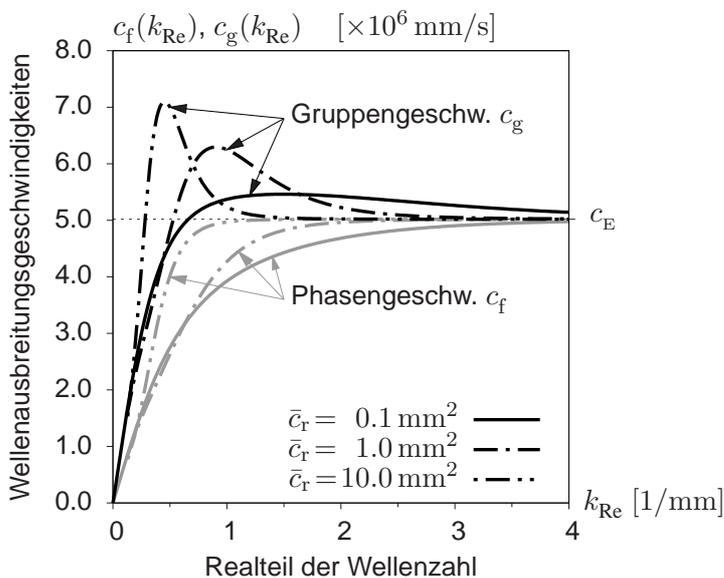


Bild 7.22: Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von  $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$  und ausschließlicher Temperaturerfestigung zum Zeitpunkt  $t^\circ = \hat{t}$  und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern.

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

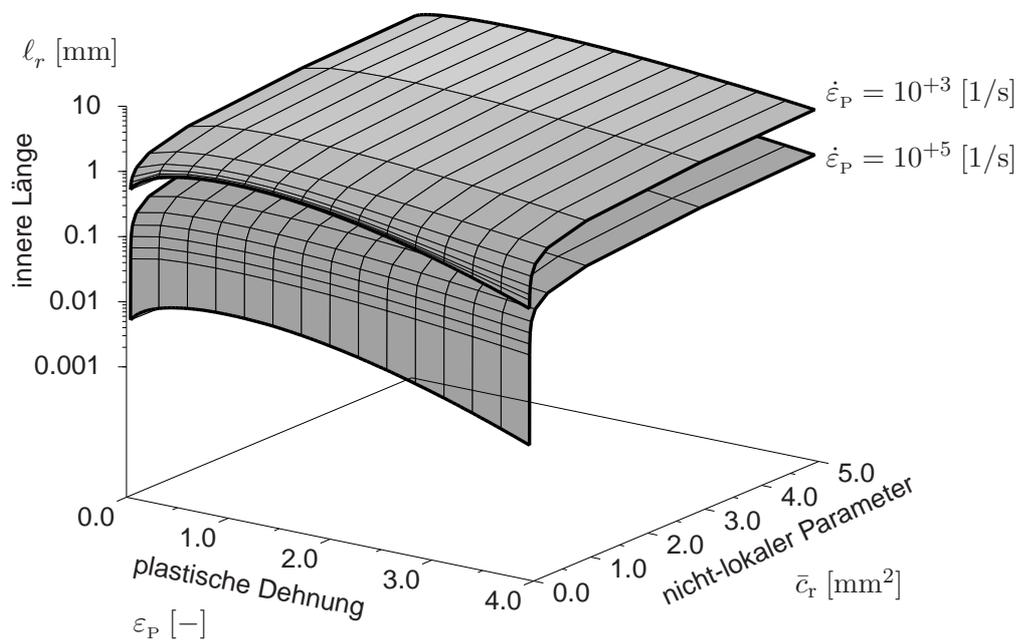


Bild 7.23: Die innere Länge des nicht-lokalen JOHNSON & COOK-Modells im zeitlichen Verlauf und in Abhängigkeit des nicht-lokalen Parameters für verschiedene, konstant angenommene plastische Dehnraten.

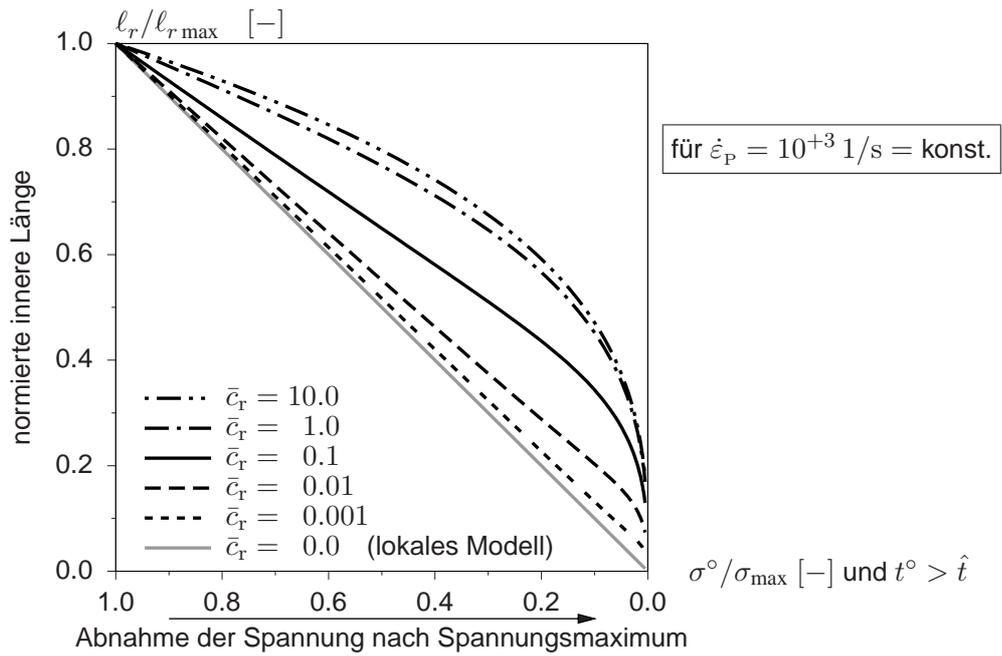


Bild 7.24: Das Verhältnis der inneren Länge zu dessen Maximum im zeitlichen Verlauf für verschiedene Werte des nicht-lokalen Parameters.

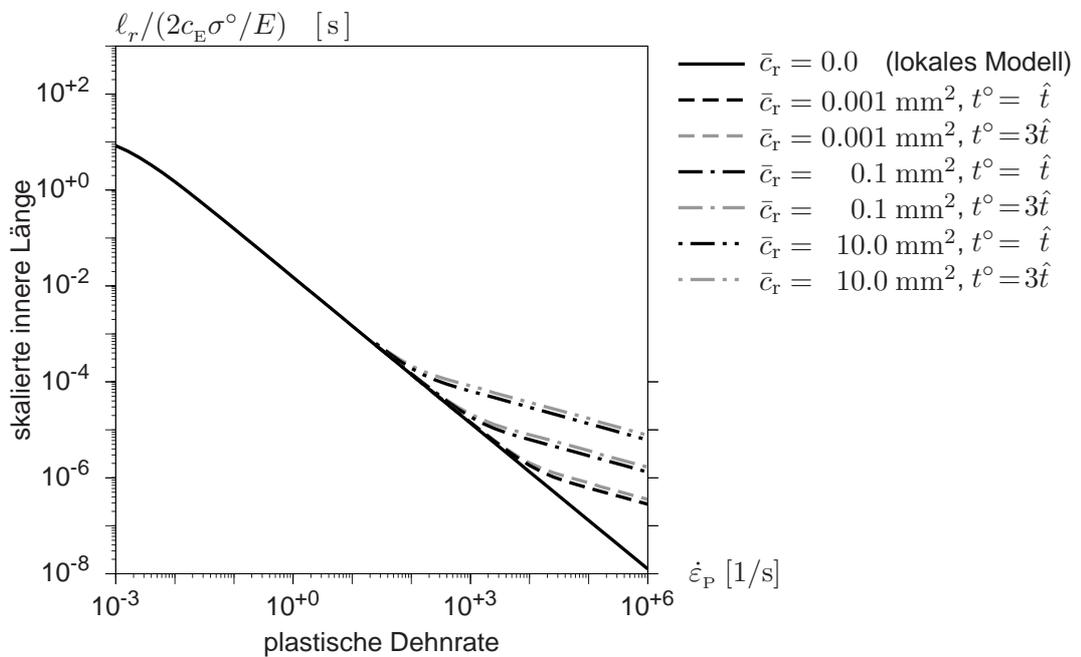


Bild 7.25: Dehnratenabhängigkeit der (skalierten) inneren Länge für verschiedene Werte des nicht-lokalen Parameters.

### 7.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel sind systematisch die Bedingungen der Eindeutigkeit und Stabilität von Lösungen verschiedener Modellformulierungen sowie deren Dispersionseigenschaften untersucht worden. In diesem Zusammenhang sind die Unterschiede sowohl einer lokalen ratenunabhängigen sowie ratenabhängigen, als auch einer auf der Theorie der Gradientenplastizität basierenden nicht-lokalen, ebenfalls ratenunabhängigen sowie ratenabhängigen Modellformulierung aufgezeigt.

Für *lokale und ratenunabhängige* Modelle fällt der Verlust der Eindeutigkeit der Lösung mit dem Verlust der Stabilität der Lösung zusammen und tritt zu dem Zeitpunkt auf, bei dem das Material von einem verfestigendem zu entfestigendem Verhalten übergeht. Darüber hinaus existiert für diese Gruppe von Modellen keine innere Länge, die als Begrenzung einer Lokalisierungszone aufgefasst werden kann. Hingegen bleibt für *lokale und ratenabhängige* Modellformulierungen die Eindeutigkeit der Lösung auch bei entfestigendem Materialverhalten erhalten, auch wenn gleichzeitig ein Verlust der Stabilität auftritt. Lokale, ratenabhängige Modelle weisen darüber hinaus eine innere Länge auf, die als Begrenzung der Lokalisierungszone dient. Für nichtlinear ratenabhängige Modelle, wie beispielsweise dem Modell nach JOHNSON & COOK oder Potenzgesetz-Modellen, strebt diese innere Länge für große plastische Dehnraten einerseits sowie für eine infolge von Entfestigung abnehmende Spannung andererseits sehr schnell nach Erreichen des Spannungsmaximums gegen den Wert null. *De facto* ist infolge dieses Verhaltens eine Begrenzung der Lokalisierungsbreite nicht gewährleistet. Andererseits weisen linear-ratenabhängige Modelle, bei denen die Ratenabhängigkeit additiv zu der quasi-statischen Spannungsberechnung eingeführt wird, eine konstante innere Länge auf. Jedoch ist diese Art der Modellformulierung für Hochgeschwindigkeitanwendungen metallischer Bauteile nicht praxisrelevant.

Die Eindeutigkeit der Lösung bleibt ebenfalls für *nicht-lokale* Modelle, die auf der Gradientenplastizitätstheorie basieren, gewährleistet. Dieses Verhalten gilt unabhängig davon, ob zusätzlich dehnratenabhängiges Materialverhalten modelliert wird oder nicht. Für diese Modelle ist im Gegensatz zu lokalen Modellen je nach Wert der vorherrschenden Wellenzahl und des nicht-lokalen Parameters die Lösung auch bei entfestigendem Materialverhalten stabil. Zusätzlich existiert für ein *ratenunabhängiges* Gradienten-Modell eine innere Länge, die proportional zu der Quadratwurzel des nicht-lokalen Parameters ist. Für ein *ratenabhängiges* Gradienten-Modell existiert ebenfalls eine innere Länge, die als Begrenzung der Lokalisierungsbreite aufgefasst wird. Im Vergleich des lokalen und nicht-lokalen JOHNSON & COOK-Modells zeigt sich, dass für große plastische Dehnraten bereits bei Verwendung kleiner nicht-lokaler Parameter die innere Länge des nicht-lokalen Modells um einige Größenordnungen über der des entsprechenden lokalen Modells liegt. Ein weiterer Unterschied beider Modelle ist durch die unterschiedliche Abhängigkeit der inneren Länge von dem vorherrschenden Spannungszustand gegeben. Während die innere Länge des lokalen JOHNSON & COOK-Modells linear von dem jeweiligen Spannungszustand abhängt, und damit die Größenordnung dieser Modelllänge sehr schnell infolge der mit Entfestigung einhergehenden Spannungsabnahme gegen null strebt, fällt die innere Länge des nicht-lokalen Modells infolge der Spannungsabnahme zunächst wesentlich schwächer ab. Erst kurz vor dem Zustand des völligen Verlustes der Beanspruchbarkeit tendiert auch die innere Länge des nicht-lokalen Modells gegen null. Damit bleibt zumindest zu Beginn der Lokalisierung die innere Länge

## 7. Eindeutigkeits- und Stabilitätsuntersuchungen

des nicht-lokalen Modells näherungsweise erhalten, wobei dieses Verhalten für zunehmende Dehnraten stärker ausgeprägt ist.

Die hier beschriebenen Ergebnisse sind unabhängig von etwaigen numerischen Verfahren, die für die Berechnung einer Lösung des ARWPs eingesetzt werden. Inwiefern sich die Ergebnisse infolge eines auf der entsprechenden Modellformulierung aufbauende Finite-Element Verfahrens verhalten, wird in dem nachfolgenden Kapitel anhand der beschriebenen FE-Implementierung des lokalen sowie nicht-lokalen Modells aus *Tabelle 3.1* bzw. *Tabelle 4.1* untersucht.

## 8 Berechnungsbeispiele

### 8.1 Untersucher Werkstoff: INCONEL 718

Der Werkstoff mit der Bezeichnung INCONEL 718 gehört zu der Gruppe der Nickel-Basis Superlegierungen, die sich durch eine im Vergleich zu herkömmlichen Stählen deutlich erhöhte Festigkeit im Bereich hoher Temperaturen auszeichnen. Aufgrund der hochtemperaturbeständigen Werkstoffeigenschaften werden diese Legierungen häufig im Turbinenbau, z. B. als Werkstoff der Scheiben, Schaufeln und des Gehäuses von stationären Gasturbinen oder Flugzeugturbinen, eingesetzt. Für diesen Werkstoff sind z. B. durch Arbeiten von Singh et al. (2003) die Materialparameter des JOHNSON & COOK-Modells an die ermittelten experimentellen Daten der Versuchsergebnisse angepasst worden. In *Tabelle 8.1* sind diesbezüglich die elastischen und thermischen Kennwerte sowie Modellparameter angegeben, die für die in diesem Kapitel durchgeführten Berechnungen verwendet werden.

*Tabelle 8.1: Materialkennwerte und Parameter des JOHNSON & COOK-Modells für INCONEL 718*

Elastische und thermische Kennwerte

$E_r$	$\nu_r$	$\rho_r$	$\alpha_{\theta r}$	$C_{\theta r}$	$\kappa_{\theta r}$
N/mm <sup>2</sup>	–	Mg/mm <sup>3</sup>	1/K	N·mm <sup>2</sup> /Mg·K	N/K·s
206400.	0.29	$8.19325 \cdot 10^{-9}$	$4.30 \cdot 10^{-6}$	$4.35 \cdot 10^{+8}$	11.1

Parameter des JOHNSON & COOK-Deformationsmodells

$A$	$B$	$n$	$C$	$\dot{\epsilon}_0$	$\theta_R$	$\theta_M$	$m$
N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	–	–	1/s	K	K	–
450.	1700.	0.65	0.017	0.001	300.	1570.	1.3

Parameter des JOHNSON & COOK-Versagensmodells

$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_c$	$D_w$	$D_{\max}$
–	–	–	–	–	–	–	–
0.	0.66	–0.4	–0.017	0.	1.	5.	0.999

### Überprüfung der Annahme adiabatischer Bedingungen

Bei der Formulierung der in *Tabelle 3.1* und *Tabelle 4.1* zusammengefassten Anfangs-Randwertprobleme werden adiabatische Bedingungen angenommen. Diese Annahme ist dann gültig, wenn die entsprechende Zeitspanne, in der ein relevanter Temperaturgradient vorliegt, unterhalb der spezifischen Wärmeleitzeit  $\bar{t}_\theta$  liegt, da dann aufgrund der vorhandenen Zeitdauer der thermische Diffusionsprozess nicht wirksam wird. Mit den in die Gleichung für die spezifische Wärmeleitzeit (2.109) eingesetzten Materialdaten aus *Tabelle 8.1* folgt

$$\bar{t}_\theta / \ell_{\text{char}}^2 = 0.3211 \text{ s/mm}^2, \quad (8.1)$$

wobei die charakteristische Länge  $\ell_{\text{char}}$  als diejenige Länge angesehen wird, über die der Temperaturgradient auftritt und daher typischerweise der halben Breite der Lokalisierungszone entspricht. Exemplarisch folgt aus (8.1) für eine charakteristische Länge von  $10 \mu\text{m}$  eine spezifische Wärmeleitzeit von etwa  $32 \mu\text{s}$  bzw. für eine Länge von  $100 \mu\text{m}$  eine Zeitspanne von ca.  $3.2 \text{ ms}$ . Für die nachfolgenden Beispiele ist der Zeitraum von Beginn der Lokalisierung mit dem Übergang von einem homogenen Temperaturzustand zu einem Zustand mit

starken Temperaturgradienten bis letztendlich zum Versagen stets wesentlich kleiner als die hier angegebene spezifische Wärmeleitzeit  $\bar{t}_\theta$ . In der Regel liegt sogar die gesamte Zeitdauer des simulierten Versuchs unterhalb der berechneten Wärmeleitzeit, so dass die Annahme adiabatischer Bedingungen gerechtfertigt ist.

## 8.2 Illustratives Beispiel für Lokalisierungsphänomene

Für die Untersuchung der Lokalisierungseigenschaften sowohl des lokalen als auch des nicht-lokalen JOHNSON & COOK-Modells wird zunächst das in *Bild 8.1* dargestellte Beispiel analysiert. Ein Stab der Länge  $L$  wird an dem rechten Ende durch eine verschiebungsgesteuerte Belastung gezogen, während das gegenüberliegende Ende des Stabes unverschieblich gelagert ist. Darüber hinaus ist in der Mitte des Stabes eine materielle Imperfektion eingebracht, um eine Verformungslokalisierung an dieser Stelle zu begünstigen. Dabei muss die Imperfektion nicht zwangsläufig exakt in der Mitte angeordnet sein, jedoch werden so mögliche Randeinflüsse auf das Lokalisierungsverhalten minimiert. Die materiel-

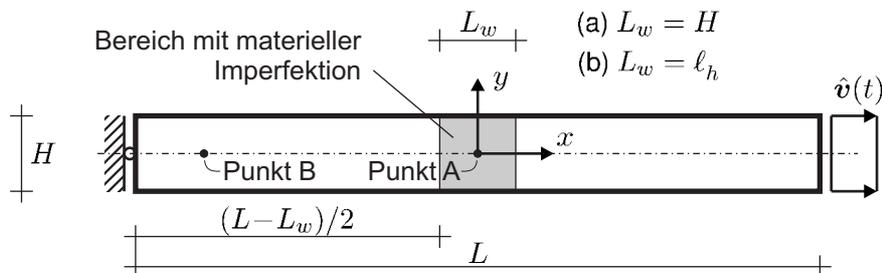


Bild 8.1: Skizze der Problemstellung

le Imperfektion wird dabei durch eine um 10% reduzierte anfängliche Fließspannung, d. h. durch einen gegenüber dem übrigen Werkstoff reduzierten Wert des JOHNSON & COOK-Parameters  $A_w = 0.9 A = 405 \text{ MPa}$ , modelliert. Darüber hinaus werden zwei unterschiedliche Varianten der Imperfektion betrachtet; zum einen erstreckt sich die Breite der Fehlstelle  $L_w$  unabhängig von der jeweiligen Diskretisierung der Struktur über eine konstante Breite  $H$ , zum anderen entspricht die Breite eben genau der Abmessung eines einzelnen Elementes der diskretisierten Struktur,  $L_w = \ell_h$ . Die Relevanz dieser beiden Varianten wird durch die nachfolgenden Untersuchungen deutlich. Als Abmessungen werden die Größen  $L = 9 \text{ mm}$  und  $H = 1 \text{ mm}$  betrachtet, ferner werden in Stablängsachse Diskretisierungen mit 3, 9, 19, 39, 79 und 159 Elementen pro mm untersucht. Die Belastungsgeschwindigkeit wird darüber hinaus mit  $\hat{v}(t) = 20 \text{ m/s}$  als konstant angenommen.

### 8.2.1 Entwicklung der Lokalisierungszone

Infolge der Berücksichtigung von Massenträgheitseffekten in der Modellformulierung breitet sich die am rechten Rand aufgebrachte Belastung in Form einer Welle in Richtung des linken Randes aus und wird dort aufgrund der unverschieblichen Lagerung dieses Randes reflektiert. Daraufhin überlagern sich die reflektierten und neu entstehenden Wellen derart, dass sich in der Folge ein nahezu homogener Spannungs- und Verzerrungszustand einstellt. In

## 8. Berechnungsbeispiele

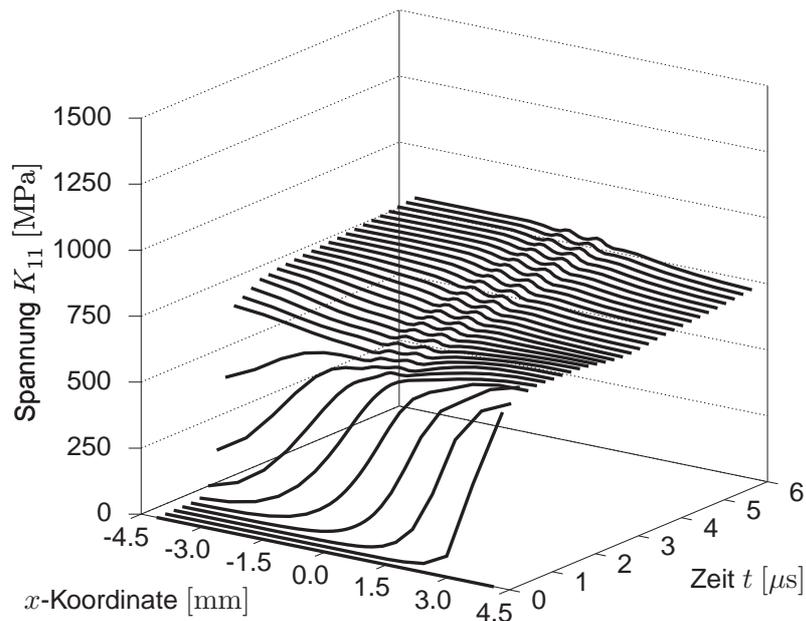


Bild 8.2: Entwicklung des Spannungsprofils für den Anfangs-Zeitbereich bis  $t = 6 \mu\text{s}$

Bild 8.2 ist dieses anfängliche Verhalten anhand der Entwicklung der Spannungsverteilung in dem Stab dargestellt.

Infolge der weiteren Belastungssteigerung nehmen die Spannung, die Verzerrungen sowie weitere Größen wie Temperatur und Schädigung bis zum Erreichen des Lastmaximums nahezu homogen verteilt zu. Bei weiterer, verschiebungsgesteuerter Belastungssteigerung gehen diese Größen in eine inhomogene Verteilung über. In Bild 8.3 ist diese Entwicklung anhand der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung dargestellt. Es zeigt sich, dass sich infolge des Übergangs zu einem inhomogenen Zustand die plastischen Verformungen lediglich in einem äußerst kleinen Bereich der Struktur lokalisieren, der unterhalb der Abmessung des Bereichs der Imperfektion liegt. Ein analoges Verhalten ist bei der Analyse der Temperatur und Schädigung zu beobachten. Die dargestellten Lokalisierungseffekte sind hier für ein lokales Modell und eine Diskretisierung mit neun Elementen pro mm erzielt worden. Die Auswirkung der Diskretisierung auf dieses Verhalten wird in dem folgenden Abschnitt untersucht.

### 8.2.2 Netzabhängigkeit des lokalen Modells

Das Lokalisierungsverhalten des lokalen JOHNSON & COOK-Modells wird nun anhand unterschiedlicher Diskretisierungen der beschriebenen Problemstellung mit konstanter Breite der Imperfektionszone untersucht. Es wird infolge der numerischen Analyse deutlich, dass nach Überschreiten des Lastmaximums die inhomogen verteilten Größen stets in dem kleinstmöglichen Bereich, der eben der Breite der Elementabmessung entspricht, lokalisieren. Dieses Verhalten ist in Bild 8.4 exemplarisch anhand der räumlichen Verteilung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung aufgezeigt. Dabei wurde die Elementabmessung sukzessive verringert, wobei die kleinste untersuchte Elementkantenlänge mit ca.  $6 \mu\text{m}$  bereits in der Größenordnung der Gefügestruktur des Werkstoffs liegt und damit bereits die Abmessung einer experimentell zu beobachtenden Lokalisierungszone unterschreitet.

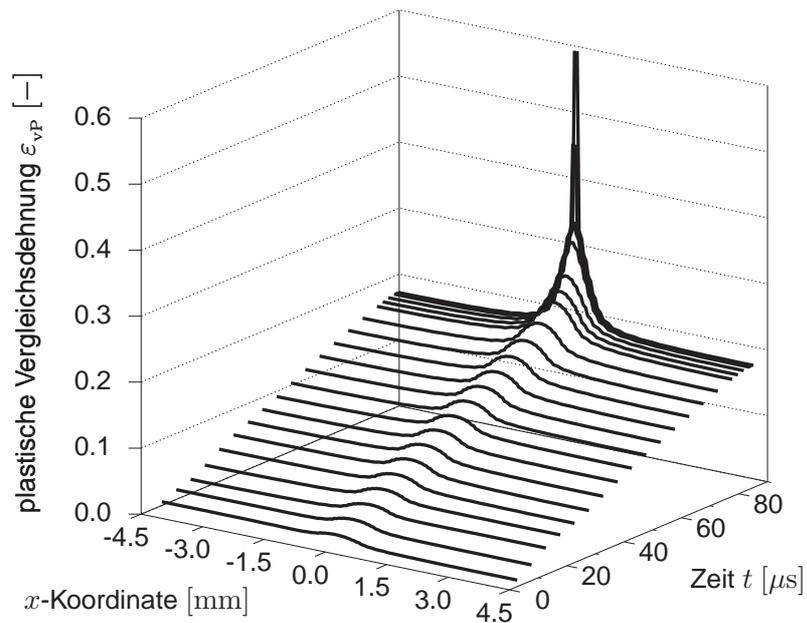


Bild 8.3: Entwicklung des räumlichen Verlaufs der lokalen, inelastischen Vergleichsdehnung für den gesamten Zeitbereich bis zum Versagen, für  $l_h = 111 \mu\text{m}$

Dieses diskretisierungsabhängige Verhalten steht in Analogie zu dem in Abschnitt 3.5 allgemein beschriebenen Lokalisierungsverhalten lokaler Modelle. In *Bild 8.5* ist diesbezüglich das Spannungs-Dehnungs-Verhalten zweier Punkte der Struktur dargestellt, die exemplarisch das Verhalten der Punkte des Elementes in der Lokalisierungszone (Punkt A) und der Punkte au-

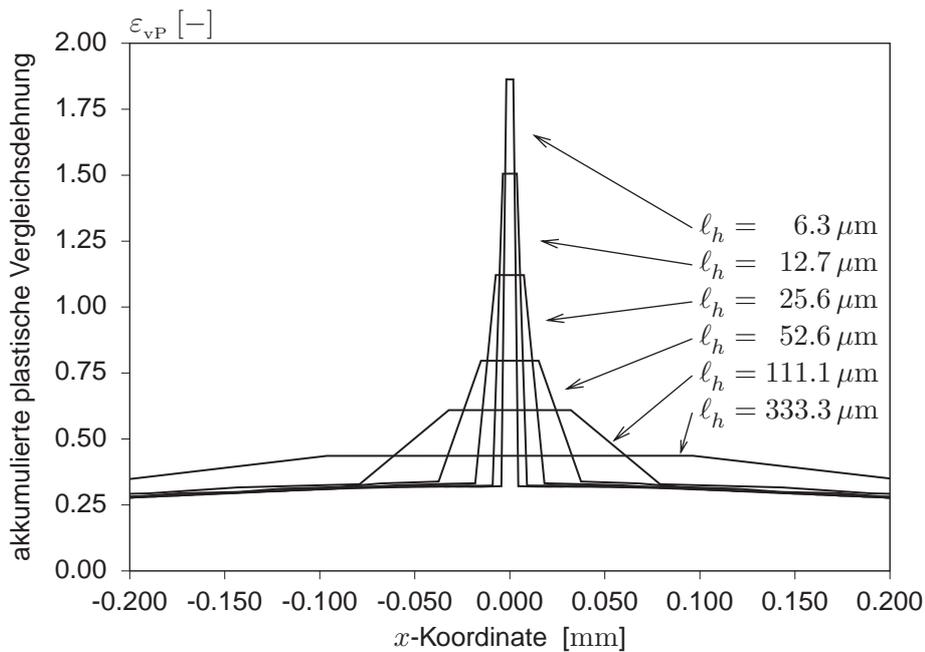


Bild 8.4: Abhängigkeit der plastischen Vergleichsdehnung des lokalen Modells von der Diskretisierung zum jeweiligen Versagenszeitpunkt

## 8. Berechnungsbeispiele

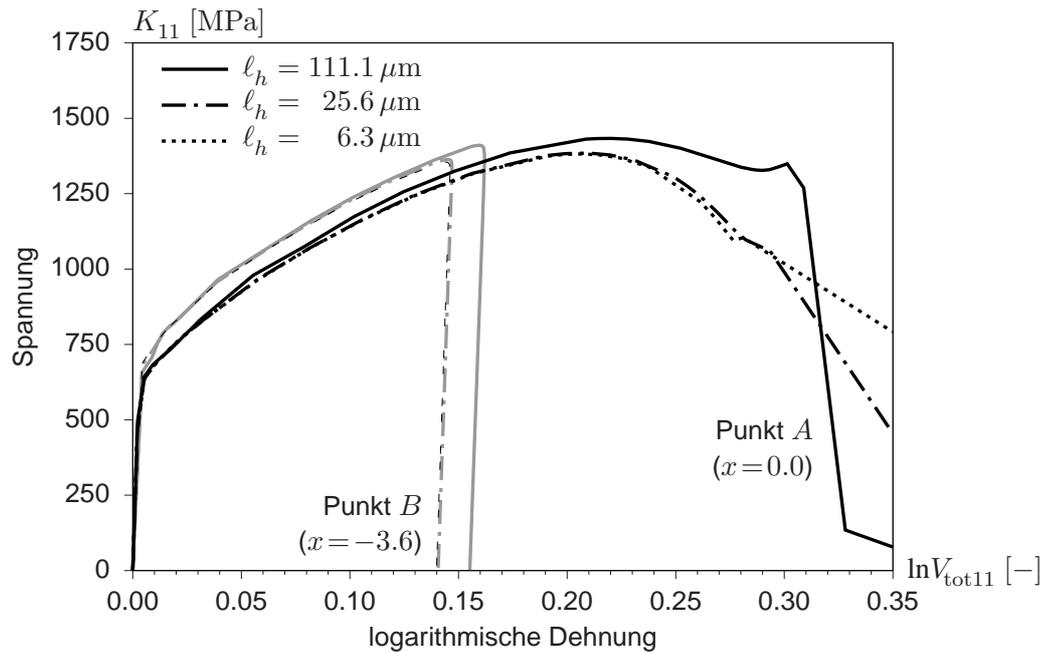


Bild 8.5: Spannungs- logarithmische Dehnungs Diagramme zweier unterschiedlicher Punkte des Kontinuums sowie für verschiedene Diskretisierungen

ßerhalb (Punkt B, siehe auch Bild 8.1) charakterisieren. Nach Erreichen eines Maximalwertes der Spannung entlasten die Punkte außerhalb der Lokalisierungszone elastisch, während die Punkte des Elementes, welches die Abmessung der Lokalisierungszone beschreibt, unter Aufnahme der gesamten, weiteren Verformungszunahme plastisch entfestigen. Daher nimmt, wie in Bild 8.5 zu erkennen ist, die plastische Verformung innerhalb der Lokalisierungszone für kleinere Elementabmessungen stärker zu. Daraus resultiert, dass in der Lokalisierungszone deutlich höhere plastische Dehnraten auftreten, je kleiner die Elementabmessung ist.

Um die Ursache dieser numerisch festgestellten Netzabhängigkeit zu ergründen, wird die in Kapitel 7 hergeleitete innere Länge (vgl. Gl. 7.54) für den konkreten Belastungsfall ausgewertet. In Bild 8.6 ist die innere Länge in der zeitlichen Entwicklung bis zum Beginn der Lokalisierung entlang des Stabes dargestellt. Als Diskretisierung wird dabei eine Elementabmessung von etwa  $111 \mu\text{m}$  betrachtet. Bereits bis zum Beginn der Lokalisierung, d. h. bereits vor Einsetzen des Lokalisierungsverhaltens, erreicht die innere Länge aufgrund der vorherrschenden plastischen Dehnrates und des Spannungszustandes Werte in der Größenordnung von lediglich wenigen  $\mu\text{m}$ . Eine Diskretisierung der Struktur, bei der die Elementkantenlänge die Größenordnung der inneren Länge bei Einsetzen der Lokalisierungseffekte erreicht, ist schon bei dieser einfachen Problemstellung kaum mehr berechenbar, da die in diesem Beispiel untersuchte kleinste Elementkantenlänge ca.  $6 \mu\text{m}$  entspricht. Darüber hinaus entspricht eine solche Diskretisierung nicht mehr einer kontinuumsmechanischen Modellierung der Problemstellung.

Zusätzlich ergibt sich im weiteren Verlauf der Rechnung das Problem, dass mit dem Einsetzen der Lokalisierung die innere Länge aufgrund der Abhängigkeit des Spannungszustandes einerseits und der plastischen Dehnrates andererseits weiter drastisch abnimmt. Durch die Verwendung kleiner Elementabmessungen nimmt dabei die plastische Dehnrates jedoch

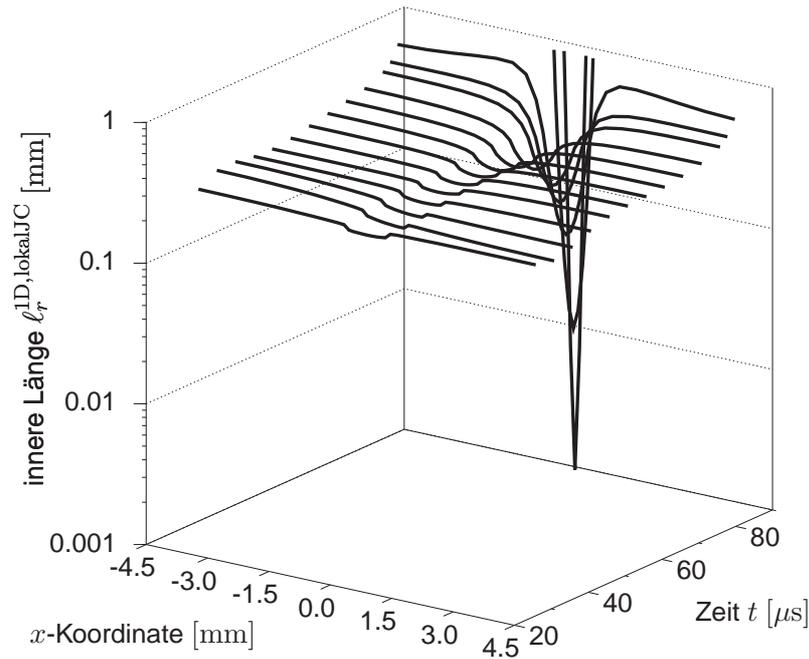


Bild 8.6: Entwicklung der inneren Länge des lokalen Modells für den Zeitbereich bis zum Beginn der Lokalisierung.

deutlich zu, wodurch der Wert der inneren Länge zusätzlich stärker abnimmt. Dieses Verhalten ist jedoch in *Bild 8.6* nicht mehr dargestellt. In dem Rahmen dieser Arbeit soll lediglich die Initiierung, d. h. die anfängliche Ausbildung der Lokalisierungszone unter Verwendung eines makroskopischen Modells, sinnvoll abgebildet werden. Das Ergebnis der beschriebenen Untersuchung zeigt dabei, dass dieses Ziel unter Verwendung des lokalen und ratenabhängigen Modells nicht erreicht wird.

### 8.2.3 Einfluss des nicht-lokalen Parameters

Die bislang für das lokale JOHNSON & COOK-Modell erzielten Berechnungsergebnisse beziehen sich auf die in *Bild 8.1(a)* dargestellte Problemstellung, d. h. unter Berücksichtigung einer Imperfektion mit gleich bleibender Abmessung für jede untersuchte Diskretisierung. Wenn für eine Modellformulierung eine innere Länge existiert, dann muss sich auch infolge einer Problemstellung, bei der eine Imperfektion mit einer beliebig kleinen Abmessung berücksichtigt wird, eine Breite der Lokalisierungszone einstellen, die unabhängig von der Abmessung der Imperfektion ist, sondern stattdessen allein in Abhängigkeit des Wertes dieser inneren Länge bestimmt ist. Daher wird für die folgenden Untersuchungen die durch *Bild 8.1(b)* charakterisierte Problemstellung betrachtet, bei der die materielle Imperfektion über eine kleinst-mögliche Abmessung, die genau der Elementkantenlänge eines Elementes entspricht, berücksichtigt wird.

Bevor auch anhand dieser Problemstellung Untersuchungen zur Netzabhängigkeit beider Modelle durchgeführt werden, wird zunächst der Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf die Berechnungsergebnisse eingehend untersucht. Dazu wird ein breites Spektrum an nicht-lokalen Parametern  $\bar{c}_r$  zwischen 0 und  $(200 \mu\text{m})^2$  betrachtet. In *Bild 8.7* ist das Ergebnis der resultierenden Verteilung des akkumulierten inelastischen Verzerrungsfeldes  $\gamma$  für ei-

## 8. Berechnungsbeispiele

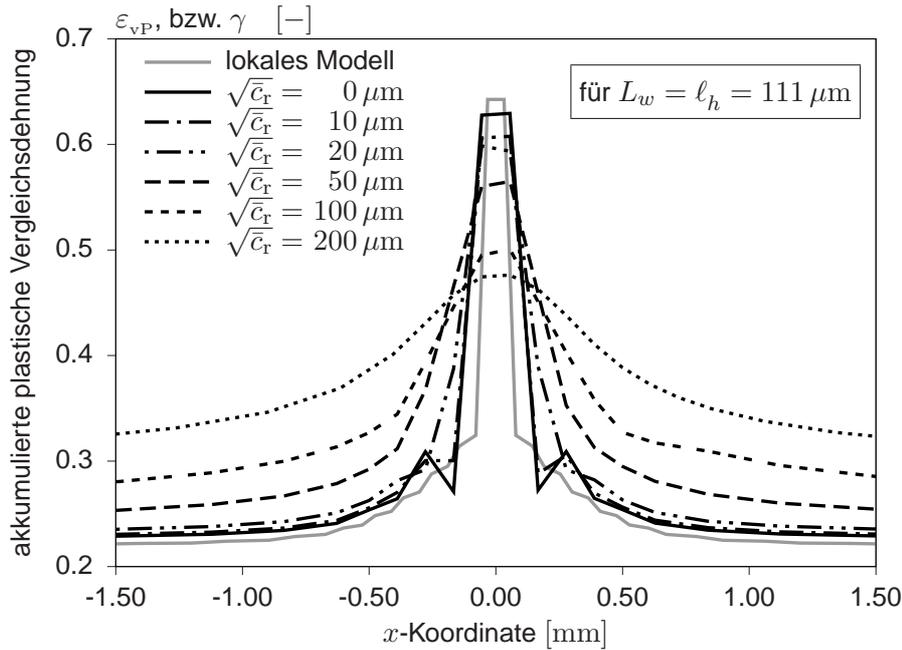
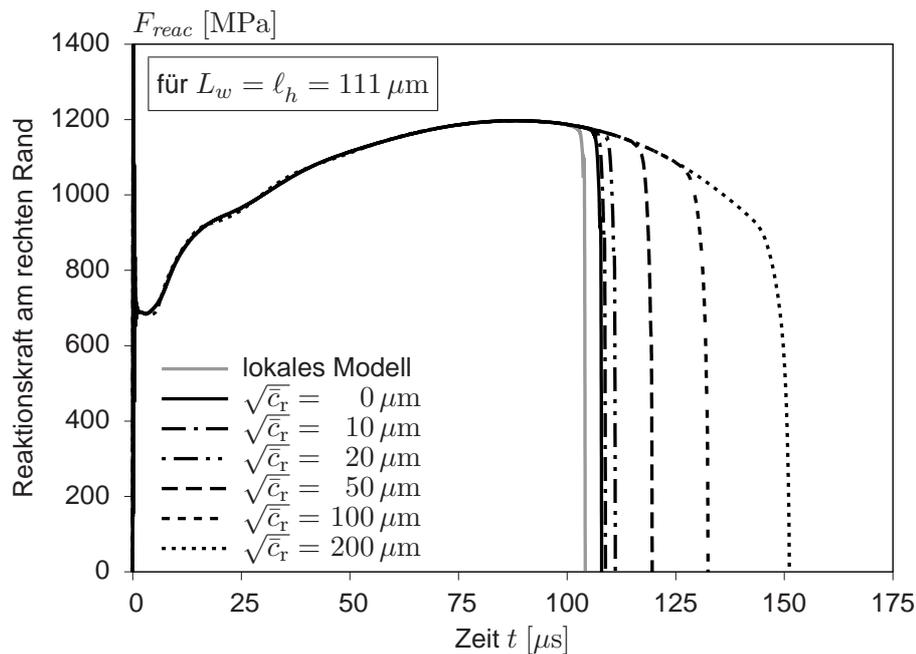


Bild 8.7: Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf die Verteilung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung bei einer Diskretisierung von  $\ell_h = 111 \mu\text{m}$

ne Diskretisierung mit einer Elementkantenlänge von  $111 \mu\text{m}$  dargestellt. Zum Vergleich ist auch die unter Verwendung des lokalen Modells resultierende Verteilung der lokalen plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_{vP}$  angegeben. Es wird deutlich, dass sich mit zunehmendem Wert des nicht-lokalen Parameters  $\bar{c}_r$  auch der Bereich der lokalisierten Verzerrungen vergrößert. Dabei nimmt der Maximalwert der plastischen Verzerrung, der in der Mitte der Lokalisierungszone auftritt, mit zunehmendem Wert des nicht-lokalen Parameters ab, während infolgedessen in dem übrigen Bereich der Struktur höhere plastische Verzerrungen erreicht werden. Diese Umverteilung der inelastischen Verzerrungen aufgrund der Diffusionsgleichung für das nicht-lokale Feld wird diesbezüglich auch als Delokalisierung der entsprechenden Größe bezeichnet. Darüber hinaus zeigt die Darstellung in *Bild 8.7* für  $\bar{c}_r = 0$  ein in unmittelbarer Umgebung der Imperfektion auftretendes, oszillierendes Verhalten der plastischen Vergleichsdehnung. Die sichtbaren Oszillationen liegen darin begründet, dass für  $\bar{c}_r = 0$  die nicht-lokale Feldgröße  $\dot{\gamma}$  lediglich einer verschmierten, über die Elementknotenwerte approximierte Verteilung der lokalen Größe  $\dot{\varepsilon}_{vP}$  entspricht. Infolge eines auftretenden starken Gradienten der lokalen Größe resultieren daher auch negative Knotenwerte, die oszillierend mit der Entfernung von dem Ort des auftretenden Gradienten abnehmen (vgl. auch *Bild 6.3* in Abschnitt 6.5.5). Jedoch wird ebenfalls deutlich, dass mit selbst geringfügig von null verschiedenen nicht-lokalen Parameter diese unerwünschten Oszillationen vermieden werden, so dass dann keine zusätzlichen Maßnahmen zur Einhaltung der Nebenbedingung  $\dot{\gamma} \geq 0$  erforderlich sind. Ferner zeigt sich, dass mit zunehmendem Wert des nicht-lokalen Parameters die Lokalisierungszone zunehmend unabhängig von der Breite der modellierten Imperfektion ist. Ein prinzipiell analoges Verhalten wird für die ebenfalls von der plastischen Dehnrate  $\dot{\gamma}$  beeinflussten Größen wie Temperatur und Schädigung erzielt, d. h. auch diese Größen werden durch die Berücksichtigung eines entsprechenden nicht-lokalen Parameters delokalisiert.

Infolge dieses Delokalisierungsprozesses wird auch das globale Last-Verformungsverhalten beeinflusst. In *Bild 8.8* ist gezeigt, dass mit zunehmenden Wert des nicht-lokalen Parameters der Zeitpunkt des Versagens hinausgezögert wird. Das Lastmaximum tritt dabei für sämtliche untersuchten Parameterwerte zu dem gleichen Zeitpunkt auf. Nach Überschreiten dieses Lastmaximums geht der anfänglich homogene Zustand der Lösungsgrößen in eine, sich in Abhängigkeit von dem nicht-lokalen Parameter einstellende, inhomogene Verteilung über. Infolge der für größere nicht-lokale Parameterwerte auftretenden stärkeren Delokalisierung erreichen die für die Entfestigung relevanten Größen wie Temperatur und/oder Schädigung erst bei weiterer Belastungssteigerung, und daher zu einem späteren Zeitpunkt, einen kritischen Wert, infolge dessen ein örtliches Versagen, d. h. Verlust der Beanspruchbarkeit, eintritt.



*Bild 8.8: Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf das Last-Verformungs Verhalten bei einer Diskretisierung von  $\ell_h = 111 \mu\text{m}$*

Die beschriebenen Auswirkungen des nicht-lokalen Parameters auf die Simulationsergebnisse sind bislang für eine einzelne Diskretisierung mit einer Elementkantenlänge von  $111 \mu\text{m}$  untersucht worden. Inwiefern die Diskretisierung das Lösungsverhalten des nicht-lokalen Modells unter Verwendung eines bestimmten nicht-lokalen Parameters beeinflusst, wird in dem folgenden Abschnitt analysiert.

### 8.2.4 Konvergenz der Lokalisierungsbreite

Da das lokale Modell bereits bei der Problemstellung unter Berücksichtigung einer Imperfektion mit konstanter Breite  $L_w = 1 \text{ mm}$  netzabhängige Ergebnisse liefert, ergeben sich für dieses Modell auch bei der modifizierten Problemstellung unter Berücksichtigung einer Imperfektion mit kleinst-möglicher Breite  $L_w = \ell_h$  ebenfalls netzabhängige Ergebnisse. Die Breite der Lokalisierungszone nimmt infolge sukzessiver Netzverfeinerung stetig ab und konvergiert nicht gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert.

## 8. Berechnungsbeispiele

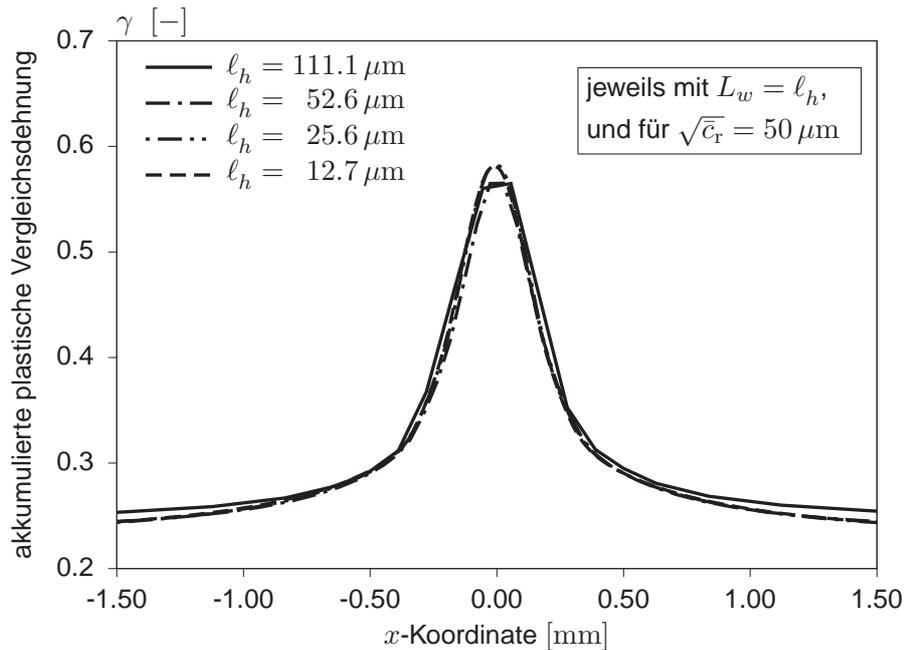


Bild 8.9: Verteilung des akkumulierten plastischen Vergleichsdehnungsfeldes  $\gamma$  zum Zeitpunkt des Versagens für verschiedene Diskretisierungen unter Verwendung des nicht-lokalen Parameters mit  $\sqrt{c_r} = 50 \mu\text{m}$

Diese Untersuchung zur Netzabhängigkeit der Ergebnisse wird nun auch für das nicht-lokale Modell durchgeführt. In *Bild 8.9* sind die räumlichen Verteilungen des inelastischen Verzerrungsfeldes  $\gamma$  für die verschiedenen Diskretisierungen und einem nicht-lokalen Parameter von  $\sqrt{c_r} = 50 \mu\text{m}$  dargestellt. Dabei ist praktisch keine Abhängigkeit des Ergebnisses von der Diskretisierung zu erkennen (vgl. mit *Bild 8.7* für das lokale Modell). In dem dargestellten Fall ist bereits mit der größten untersuchten Diskretisierung eine konvergente Lösung erreicht. Bei kleineren Werten des nicht-lokalen Parameters tritt erst bei weiterer Netzverfeinerung eine konvergente Lösung auf. Dieses Verhalten ist in *Bild 8.10* wiedergegeben. Darin ist die sich einstellende Lokalisierungsbreite über die Anzahl der diskretisierten Elemente aufgetragen. Die Bestimmung der Lokalisierungsbreite orientiert sich dabei an der in Batra und Chen (2001) beschriebenen Vorgehensweise. Dabei wird die Zunahme der betrachteten Größe, die in diesem Fall der Zunahme der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung entspricht, von Beginn der Lokalisierung bis zu dem betrachteten Zeitpunkt des Versagens für jeden Punkt entlang des Stabes ermittelt. Die gesuchte Lokalisierungsbreite entspricht dann der Breite eines Bereichs, in dem ca. 90% aller ermittelten Zuwächse der betrachteten Größe vorliegen.

In *Bild 8.10* wird das beschriebene Konvergenzverhalten der untersuchten Modelle deutlich. Für ein lokales Modell nimmt die Lokalisierungsbreite infolge sukzessiver Netzverfeinerung kontinuierlich ab. Auch für das nicht-lokale Modell mit  $\bar{c}_r = 0$  folgt dieses Verhalten. Aufgrund der über die Elementknotenwerte approximierten Verteilung des inelastischen Verzerrungsfeldes entspricht jedoch die ermittelte Lokalisierungsbreite des nicht-lokalen Modells für den Fall  $\bar{c}_r = 0$  nicht exakt der Breite des lokalen Modells. Dieser Unterschied zwischen der Berechnung mit dem lokalen Modell und dem nicht-lokalen Modell mit  $\bar{c}_r = 0$  nimmt mit zunehmender Netzverfeinerung leicht ab. Hingegen folgt für positive, nicht-lokale Parameterwerte

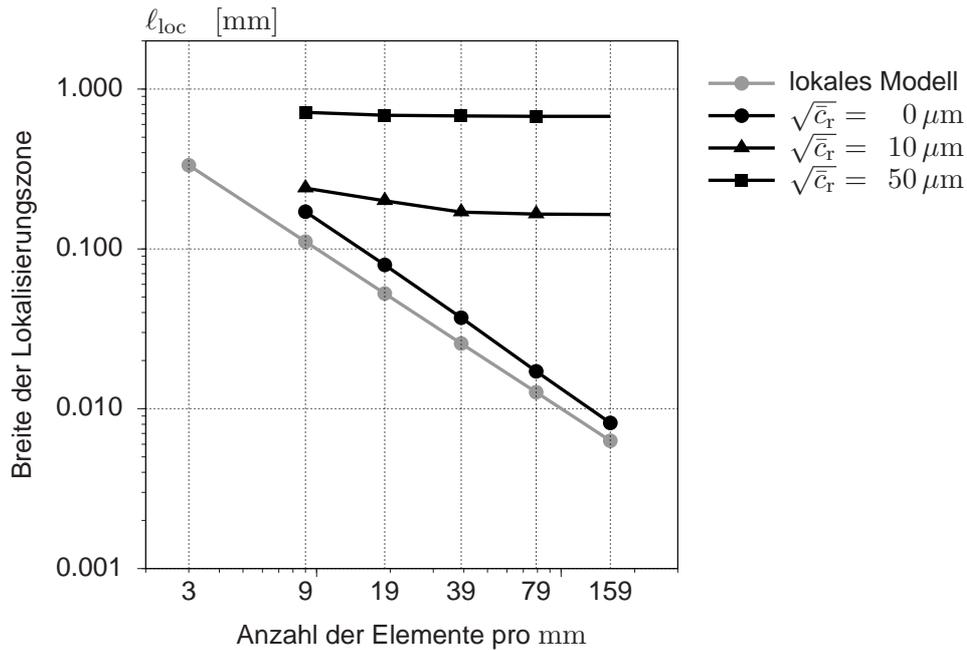


Bild 8.10: Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf die Lokalisierungsbreite

$\bar{c}_r > 0$  infolge der Netzverfeinerung schnell ein konvergente, endliche und von null verschiedene Lokalisierungsbreite. Anhand dieser Untersuchungen wird deutlich, dass durch die Anwendung eines nicht-lokalen Modells mit einem positiven nicht-lokalen Parameter diskretisierungsunabhängige Ergebnisse erzielt werden, bzw. zumindest infolge einer Netzverfeinerung die Lösung gegen einen physikalisch sinnvoll interpretierbaren Wert konvergiert.

Abschließend werden für den gegebenen Belastungsfall die inneren Längen beider Modelle auf Grundlage der in Kapitel 7 beschriebenen Vorgehensweise ausgewertet. Dazu ist in Bild 8.11 die für einen im Zentrum der Lokalisierungszone liegenden Punkt der Struktur berechnete innere Länge für verschiedene Diskretisierungen der beiden Modelle dargestellt. In dieser Darstellung wird auf der Abszisse das Verhältnis der Spannung zu der Maximalspannung, d. h. der Spannung zur Zeit  $\hat{t}$ , betrachtet. Bis zum Erreichen des Spannungsmaximums bleibt die innere Länge nahezu konstant, wobei auch in diesem Bereich die für das lokale Modell beschriebene Abhängigkeit der inneren Länge von dem vorherrschenden Spannungszustand zu erkennen ist. Nach Erreichen des Spannungsmaximums fällt der Wert der inneren Länge des lokalen Modells aufgrund der Zunahme der plastischen Dehnrates drastisch ab. Auch für das nicht-lokale Modell ändert sich der Wert der inneren Länge mit Überschreiten des Spannungsmaximums, jedoch fällt dieser bei weitem nicht so drastisch ab, wie es bei dem lokalen Modell der Fall ist. Erst mit weiterem Voranschreiten der Entfestigung nimmt dann auch die Länge des nicht-lokalen Modells stärker ab und strebt gegen den Wert null.

Damit wird gezeigt, dass unter Verwendung eines nicht-lokalen Modells zumindest zu Beginn des Lokalisierungsverhaltens eine in ihrer Größenordnung nahezu gleich bleibende Begrenzung der Lokalisierungszone vorliegt. Da die Herleitungen der Gleichungen für die jeweilige innere Länge auf der Theorie kleiner Deformationen beruhen sowie zu dem jeweiligen Zeitpunkt homogene Lösungszustände voraussetzen, kann infolge dieser Untersuchung nicht zwangsläufig eine direkte Korrelation mit den Ergebnissen der numerischen Simulation her-

## 8. Berechnungsbeispiele

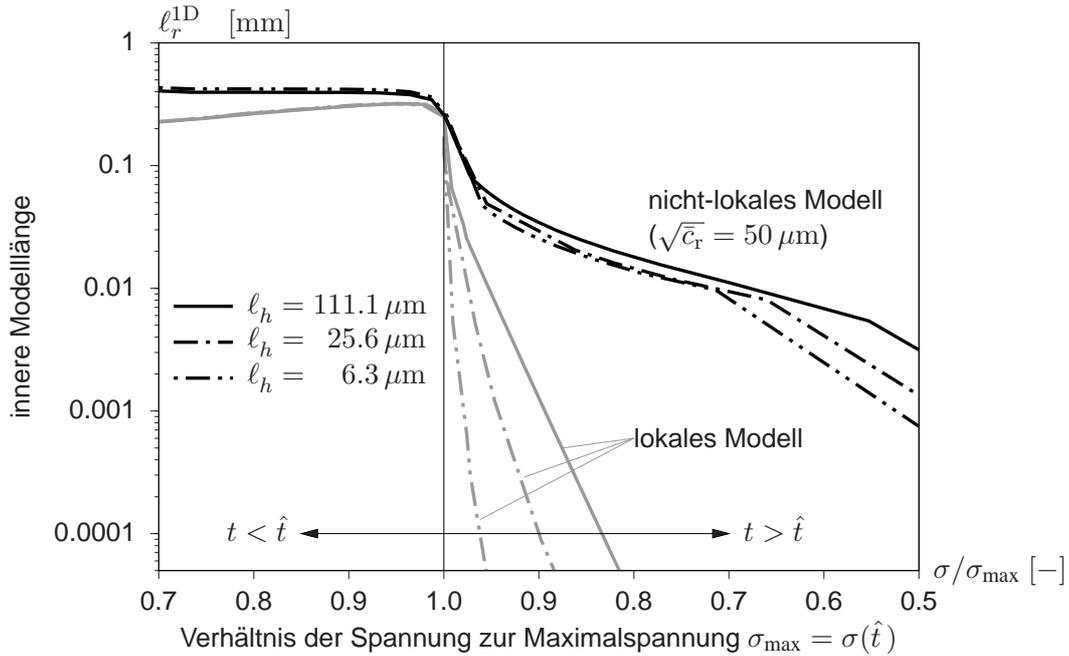


Bild 8.11: Auswertung des Verlaufs der inneren Längen des lokalen und nicht-lokalen, eindimensionalen JOHNSON & COOK-Modells

gestellt werden. Dennoch zeigt diese Auswertung eine deutliche, prinzipielle Tendenz, die den Unterschied beider Modelle hinsichtlich des Auftretens einer pathologischen Netzabhängigkeit bei der Berechnung des Lokalisierungsverhaltens hervorhebt.

### 8.3 Ausbildung adiabatischer Scherbänder unter Zugbelastung

#### 8.3.1 Zugscheibe ohne anfängliche Imperfektionen

Eine typische Form der Deformationslokalisierung bei Hochgeschwindigkeitsbelastungen stellt die Ausbildung adiabatischer Scherbänder dar. Für die Simulation dieses Lokalisierungsprozesses wird zunächst die in *Bild 8.12* skizzierte Problemstellung untersucht. Dabei handelt es sich in Anlehnung an Inal et al. (2002b) um eine ebene Problemstellung im EVZ mit dem Seitenverhältnis  $L/H = 3$ , die ohne eine anfängliche materielle oder geometrische

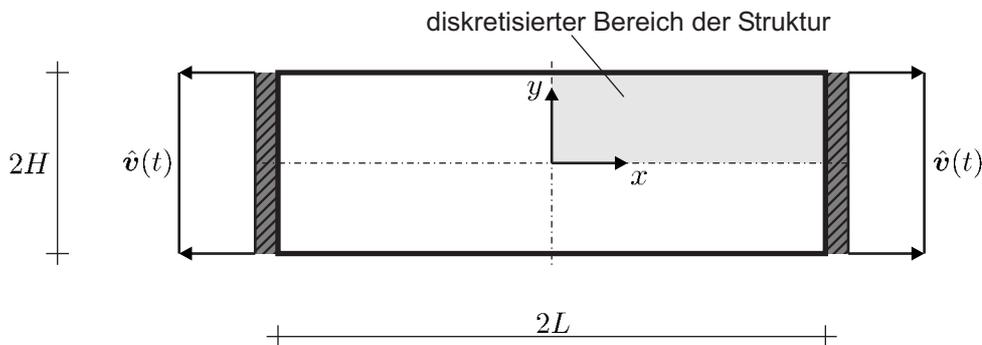
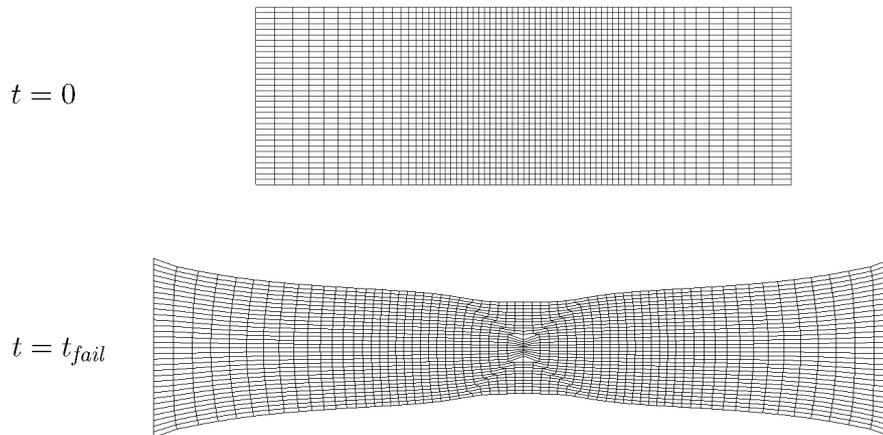


Bild 8.12: Skizze der Zugscheibe im EVZ ohne anfängliche Imperfektionen

Imperfektion modelliert wird. Infolge der an beiden Längsseiten aufgebracht, entgegengesetzt wirkenden Belastung schnürt sich die Struktur zunächst in der Mitte ein. In der Folge bilden sich dann, wie in *Bild 8.13* gezeigt, von der Mitte der Struktur ( $x = y = 0$ ) ausgehend, Scherbänder aus.



*Bild 8.13: Ausbildung von Scherbändern in der Zugscheibe als typische Form der Deformationslokalisierung*

Für die Untersuchung der Sensitivität der Simulationsergebnisse bezüglich der verwendeten Diskretisierung werden drei unterschiedlich fein diskretisierte FE-Netze betrachtet. Aus Symmetriegründen wird dabei lediglich ein Viertel der gesamten Struktur für die Simulation modelliert. Die verwendeten FE-Netze sind in *Bild C.1* im Anhang C abgebildet. Für den relevanten Bereich der Struktur, durch den das Scherband verläuft, werden dabei Diskretisierungen mit  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$  und  $64 \times 64$  Elementen verwendet. Zusammen mit den gewählten Abmessungen  $L = 3H = 2.4 \text{ mm}$  folgen daraus jeweils Elementkantenlängen von  $50.$ ,  $25.$  und  $12.5 \mu\text{m}$ . Die Belastung erfolgt zudem mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $\hat{v} = 10. \text{ m/s}$ .

Die Ergebnisse der Untersuchung der Netzabhängigkeit sind in *Bild 8.14* anhand der Schädigungsvariablen  $d$  dargestellt. Für das lokale Modell ist darin die Netzabhängigkeit der Schädigungsverteilung deutlich zu erkennen. Die Breite des geschädigten Bereichs der Struktur nimmt mit zunehmender Verfeinerung der Diskretisierung deutlich ab. Insbesondere erstreckt sich der letztendlich vollständig geschädigte Bereich ( $d \approx 1$ ) lediglich über eine einzige Elementreihe. Hingegen konvergiert der Bereich starker Schädigung unter Verwendung eines nicht-lokalen Modells mit  $\sqrt{c_r} = 5 \mu\text{m}$  gegen eine konstante Breite. Hierbei erstreckt sich bei der Verwendung der feinsten betrachteten Diskretisierung auch der vollständig geschädigte Bereich in dem Scherband über mehrere Elementreihen. Desweiteren bildet sich der geschädigte Bereich in dem Scherband unter Verwendung des nicht-lokalen Modells für sämtliche untersuchten Diskretisierungen stets von der Mitte der Struktur (*i.e.*, in den Abbildungen in *Bild 8.14* von der jeweiligen linken unteren Ecke) aus. Numerische Artefakte, wie sie z. B. bei der feinsten Diskretisierung des lokalen Modells zu erkennen sind, treten dabei infolge der nicht-lokalen Modellierung nicht auf.

Bei der Simulation dieser Problemstellung wird beobachtet, dass sich die Ausbildung des Scherbandes bei Anwendung des nicht-lokalen Modells sehr sensitiv gegenüber dem Wert des nicht-lokalen Parameters verhält. Für größere Parameterwerte als  $\sqrt{c_r} = 5 \mu\text{m}$

## 8. Berechnungsbeispiele

verläuft die Lokalisierungszone ausgehend von der Mitte der Struktur senkrecht zu den Seitenrändern, so dass sich in diesen Fällen kein Scherband ausgebildet. Dieses Verhalten ist dadurch zu erklären, dass sich mit zunehmendem nicht-lokalen Parameterwert der Effekt der Delokalisierung verstärkt und daraufhin die Initiierung des Versagensmechanismus mit Erreichen eines kritischen Schädigungswertes in Probenmitte erst etwas später eintritt. Aufgrund der Probengeometrie und Belastungsgeschwindigkeit liegt dann bereits eine stärkere Einschnürung der Probe in diesem Bereich vor, so dass sich die Lokalisierungszone von dem Ursprung in der Probenmitte auf dem direkten Weg zu den eingeschnürten Seitenrändern ausbreitet.

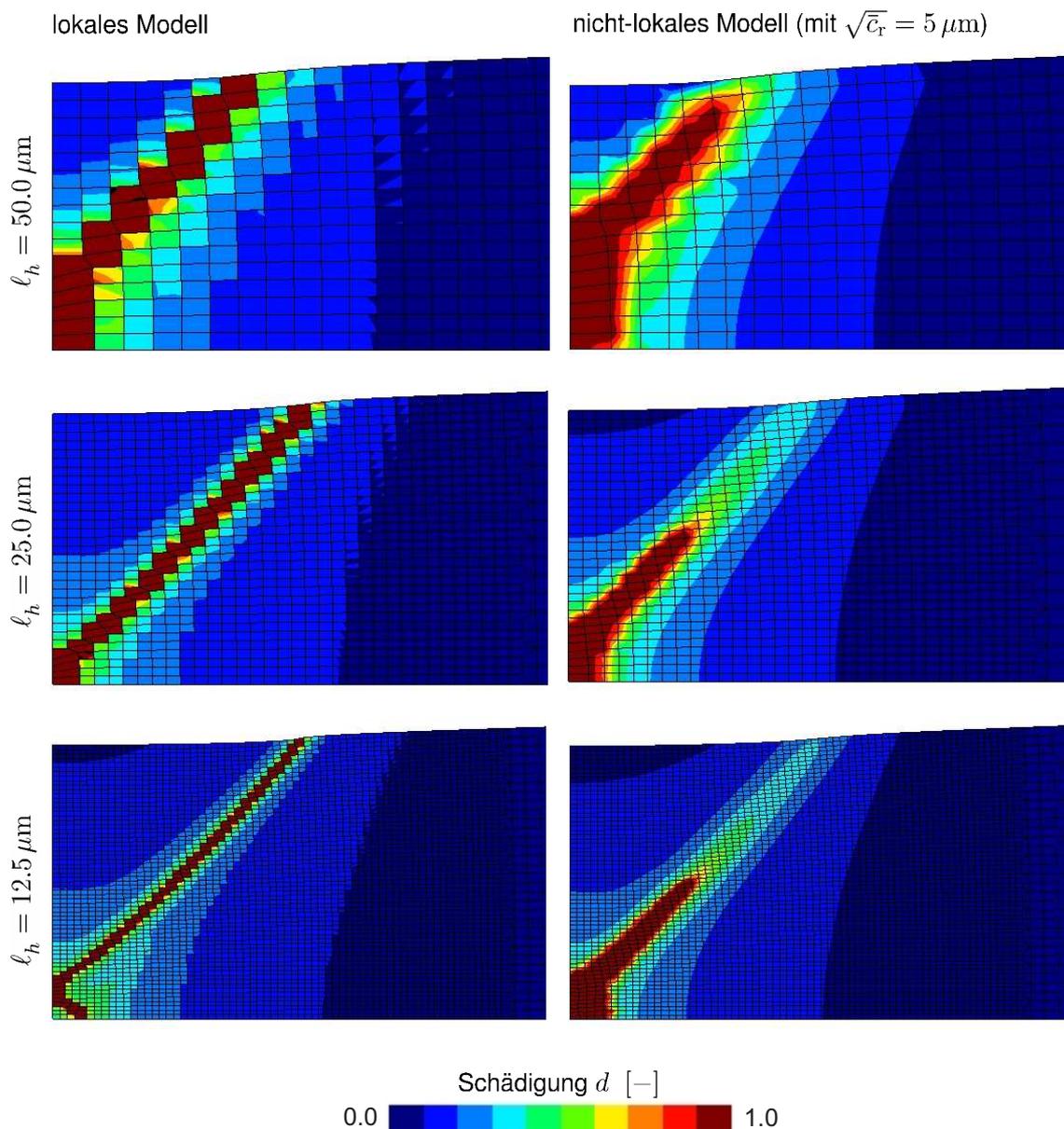
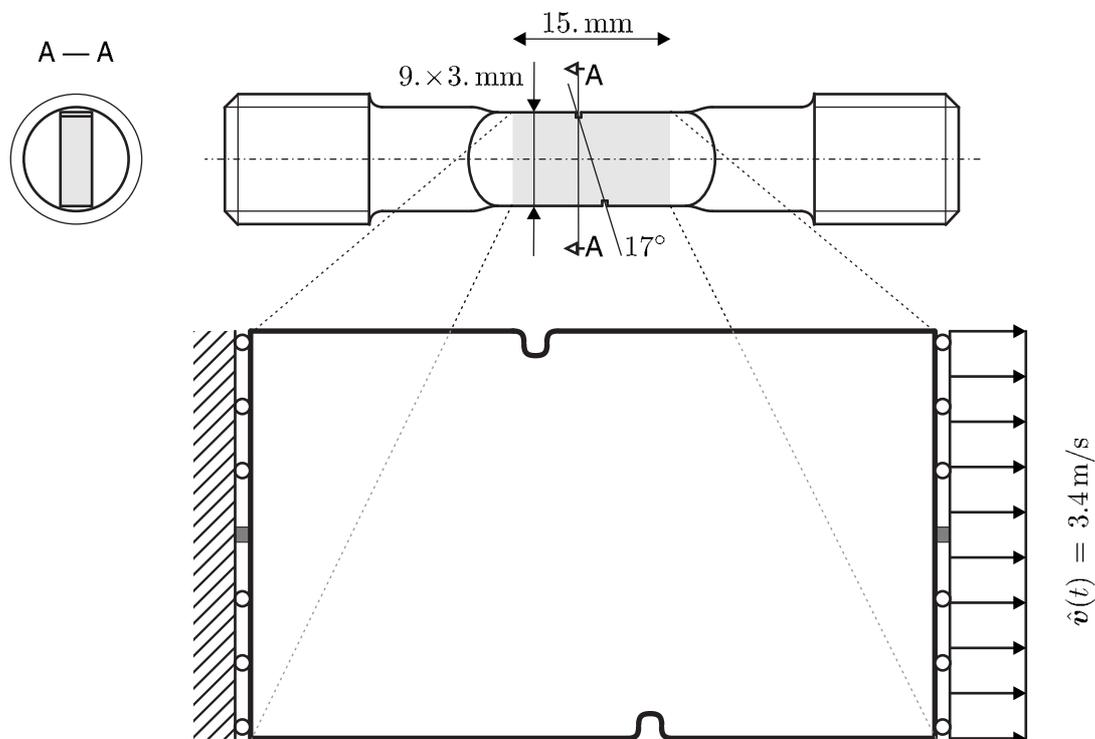


Bild 8.14: Schädigungsverteilung in der Mitte der Zugscheibe für das lokale und nicht-lokale Modell infolge unterschiedlicher Diskretisierungen

Für die weiteren, folgenden Untersuchungen werden daher Beispiele betrachtet, bei denen die Ausbildung eines Scherbandes durch zusätzliche Zwangsbedingungen, beispielsweise durch kleine Imperfektionen, initiiert werden.

### 8.3.2 Zugscheibe mit seitlich versetzten Kerben

Um die Ausbildung eines Scherbandes bei ebenen Problemstellungen unter Zugbelastung zu begünstigen, werden an den quer zu der Belastungsrichtung der Scheibe liegenden Rändern seitlich versetzt Kerben eingebracht. In diesem Zusammenhang sind für den Werkstoff INCONEL 718 u. a. in Sievert et al. (2003) unterschiedliche Probengeometrien und Belastungsgeschwindigkeiten untersucht worden. Darin wurde gezeigt, dass sich beispielsweise bei einer Belastungsgeschwindigkeit von etwa  $\dot{\vartheta} = 3.4 \text{ m/s}$  ein Scherband zwischen den beiden Kerben ausbildet, wenn diese im Anfangszustand um etwa  $17^\circ$  seitlich versetzt angeordnet sind. Die untersuchte Probengeometrie ist in *Bild 8.15* skizziert. Für die nachfolgenden



*Bild 8.15: Skizze der Zugscheibe mit seitlich versetzten Kerben*

Untersuchungen werden die Kerben näherungsweise durch eine jeweils  $0.4 \times 0.4 \text{ mm}$  große Aussparung modelliert. Desweiteren wird für die Berechnung der Problemstellung ein ebener Verzerrungszustand angenommen. Die Maschinensteifigkeit der Prüfvorrichtung bleibt dabei in der Modellierung unberücksichtigt, so dass der linke, maschinenseitig fest eingespannte Rand der Probe als in Längsrichtung unverschieblich gelagert angenommen wird.

### **Einfluss der Entfestigungsmodellierung auf die Scherbandbildung**

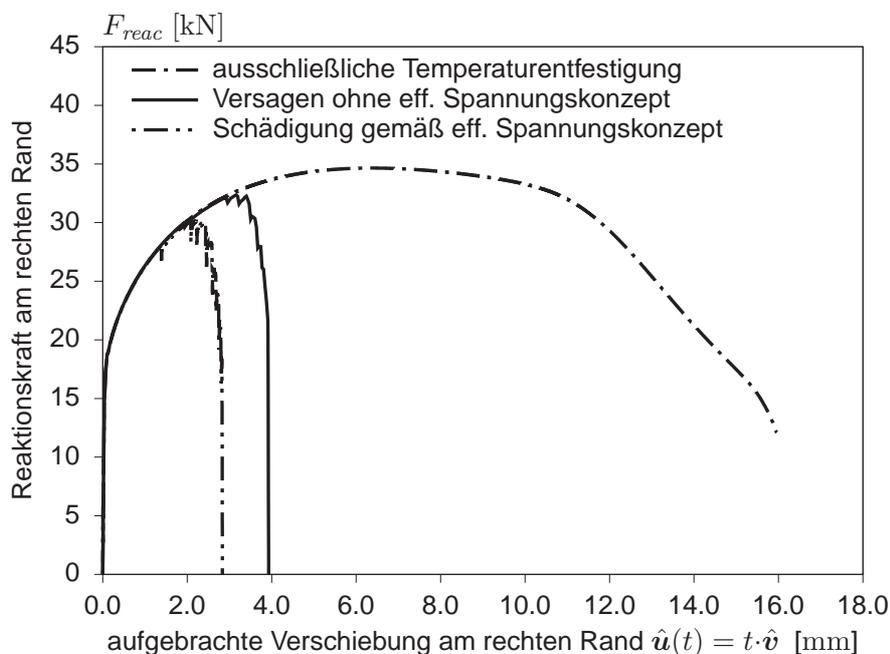
Im Folgenden werden die Auswirkungen der unterschiedlichen Entfestigungsmechanismen, i.e. eine ausschließlich thermische Entfestigung, Versagen bei Erreichen der kritischen Versa-

## 8. Berechnungsbeispiele

gensdehnung sowie Entfestigung unter Berücksichtigung der Schädigung gemäß des effektiven Spannungskonzeptes, auf die Ausbildung des Scherbandes zwischen den beiden Kerben untersucht. Diese drei genannten Entfestigungsmechanismen sind bei der Implementierung der Modellformulierungen gemäß der durch (5.42) beschriebenen Vorgehensweise berücksichtigt. Die resultierenden Unterschiede sind in *Bild 8.16* anhand der Last-Verschiebungs-Diagramme sowie in *Bild 8.17* anhand der Temperaturverteilungen in der Probe zusammen mit dem jeweiligen Verschiebungszustand für lokale Formulierungen herausgestellt.

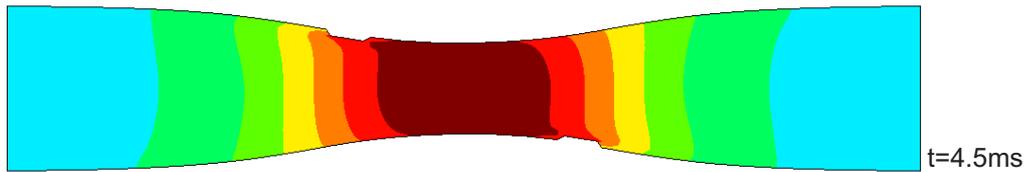
Infolge einer Modellierung mit ausschließlicher Temperaturentfestigung wird ein Last-Verformungsverhalten simuliert, bei dem der Lastabfall infolge von entfestigendem Materialverhalten deutlich später als bei den anderen beiden Entfestigungsmechanismen erfolgt (siehe *Bild 8.16*). Bei der Simulation schnürt sich die Probe in der Mitte stark ein, wobei die Kerben das Deformationsverhalten nur unwesentlich beeinflussen. Ein sich zwischen den Kerben ausbildendes Scherband wird durch diese Modellierung nicht abgebildet (siehe *Bild 8.17a*). Der Einfluss der geometrischen Imperfektionen auf das Werkstoffverhalten bleibt in dieser Modellformulierung unberücksichtigt.

Eine in dieser Hinsicht verbesserte Beschreibung des Materialverhaltens wird durch die Berücksichtigung der Spannungsmehrachsigkeit in der Modellformulierung erzielt. Die Verteilung dieser Größe ist in *Bild 8.18* zu einem Zeitpunkt kurz vor Lastabfall dargestellt. Darin ist eine deutlich erhöhte Zugspannungsmehrachsigkeit in dem Bereich der Kerben zu erkennen. Durch die Berücksichtigung der Mehrachsigkeit in der Modellformulierung, wie es bei der genannten Versagens- oder Schädigungsmodellierung auf Grundlage der äquivalenten Versagensdehnung (vgl. Gl. 3.59) der Fall ist, ist es möglich eine Scherbandbildung in der Simulation abzubilden, siehe *Bild 8.17b und c*. Bei der Modellierung gemäß des effektiven Spannungskonzeptes (*Bild 8.17c*) tritt infolge der kontinuierlichen Reduzierung der Belastbarkeit

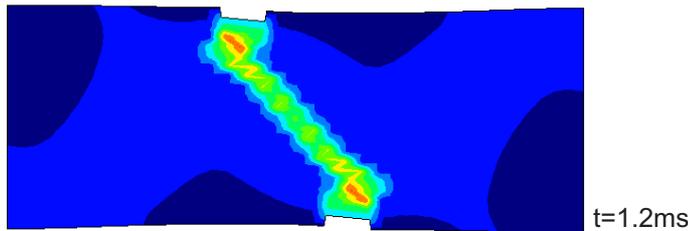


*Bild 8.16: Last-Verschiebungs-Diagramm für unterschiedliche Entfestigungsmodellierungen des lokalen Modells*

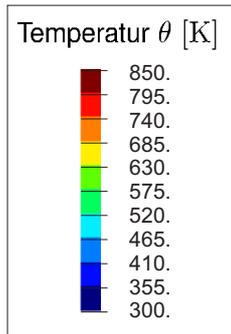
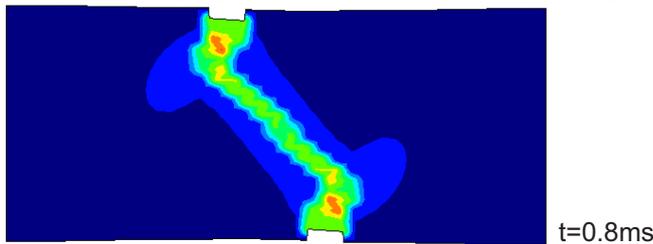
(a) infolge ausschließlich thermischer Entfestigung:



(b) infolge Versagen bei Erreichen einer kritischen Versagensdehnung:



(c) infolge Schädigung gemäß des effektiven Spannungskonzeptes:



Verschiebungsskalierung: 1.0

Bild 8.17: Die berechnete Temperaturverteilung in der Probe infolge unterschiedlicher Entfestigungsmechanismen

der simulierte Versagenszeitpunkt etwas früher auf als bei Verwendung der Versagensmodellierung (Bild 8.17b), bei der die Belastbarkeit bei Erreichen der kritischen Versagensdehnung schlagartig verloren geht (siehe auch Bild 8.16). Beide Entfestigungsmodellierungen resultieren jedoch gleichermaßen in einer qualitativ guten Beschreibung des Lokalisierungs- und Versagensverhaltens, so dass lediglich die geringfügig unterschiedlichen Möglichkeiten zur genauen Anpassung der Simulationsergebnisse an das beobachtete Bauteilverhalten die Auswahl beeinflussen.

Mehrachsigkeit  $\bar{\sigma}_{\text{trx}}$  [-]

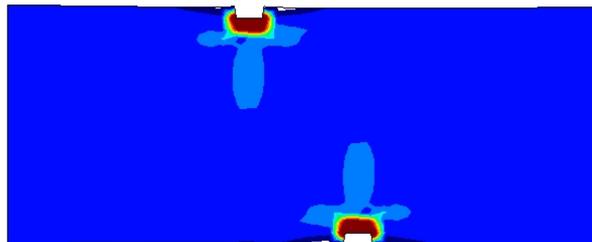
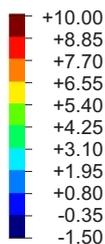


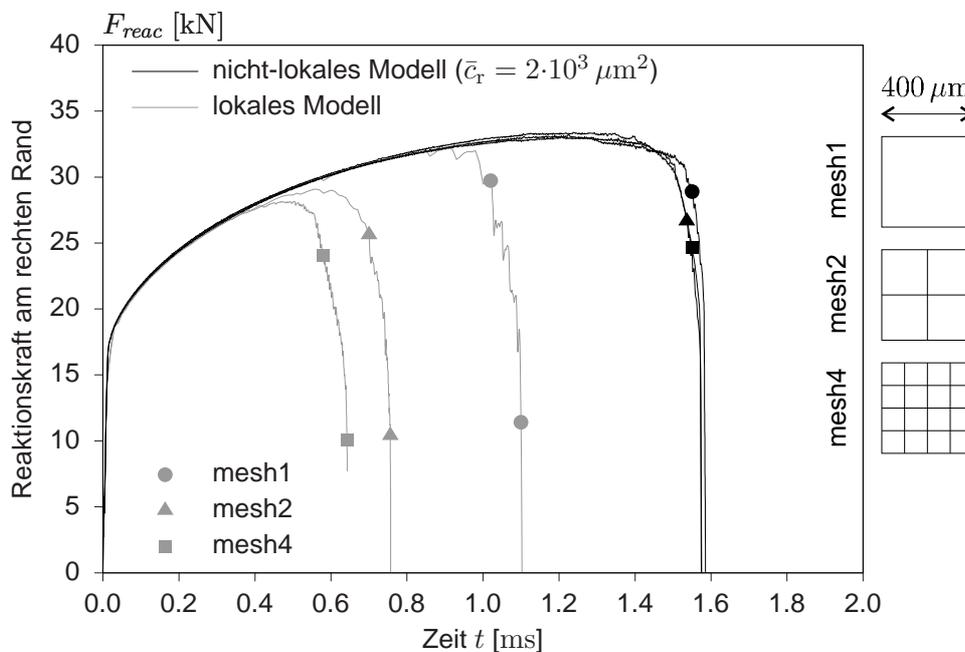
Bild 8.18: Verteilung der Spannungsmehrachsigkeit in der Probe kurz vor Lastabfall

## 8. Berechnungsbeispiele

Diese Untersuchungen zeigen die Relevanz der Berücksichtigung der Mehrachsigkeit in der Modellformulierung. Für das betrachtete Beispiel mit vorhandenen geometrischen Imperfektionen reicht die Entfestigung ausschließlich infolge der Temperaturerhöhung nicht aus, um eine Scherbandbildung zu simulieren. Daher wird für die nachfolgenden, weiteren Untersuchungen dieses Beispiels die thermische Entfestigung stets in der Kombination mit dem Versagensmodell berücksichtigt.

### Untersuchung der Netzabhängigkeit

Für die Untersuchung der Netzabhängigkeit des sowohl lokalen als auch nicht-lokalen Modells werden die im Anhang C in *Bild C.2* abgebildeten Diskretisierungen betrachtet. Dabei ist der Bereich zwischen den Kerben unterschiedlich fein vernetzt, wobei die Elementkantenlängen jeweils etwa 400. (mesh1), 200. (mesh2) bzw. 100.  $\mu\text{m}$  (mesh4) betragen. Als ein Ergebnis dieser Untersuchung sind in *Bild 8.19* die jeweiligen Verläufe der Reaktionskraft am rechten Rand über der Zeit wiedergegeben. Bei Verwendung des lokalen Modells tritt dabei der Versagenszeitpunkt umso früher auf, je feiner die Struktur diskretisiert ist. Die Ursache für dieses Verhaltens stellt die mit zunehmender Netzverfeinerung einhergehende, stärkere Lokalisierung der Ergebnisse dar. In *Bild 8.20a-c* sind exemplarisch die Verteilungen der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_{vP}$  des lokalen Modells für die verschiedenen Diskretisierungen zum jeweiligen Versagenszeitpunkt dargestellt. Anhand dieser Darstellung ist zu erkennen, dass die Breite der Deformationslokalisierung stets lediglich durch die Abmessung eines einzelnen Elements charakterisiert ist. Infolge der Abnahme der Lokalisierungsbreite nimmt die plastische Dehnrage entsprechend zu, so dass auch der kritische Wert der Versagensdehnung entsprechend früher erreicht wird.



*Bild 8.19: Reaktionskraft-Zeit Verläufe für das lokale und nicht-lokale Modell bei verschiedenen Diskretisierungen*

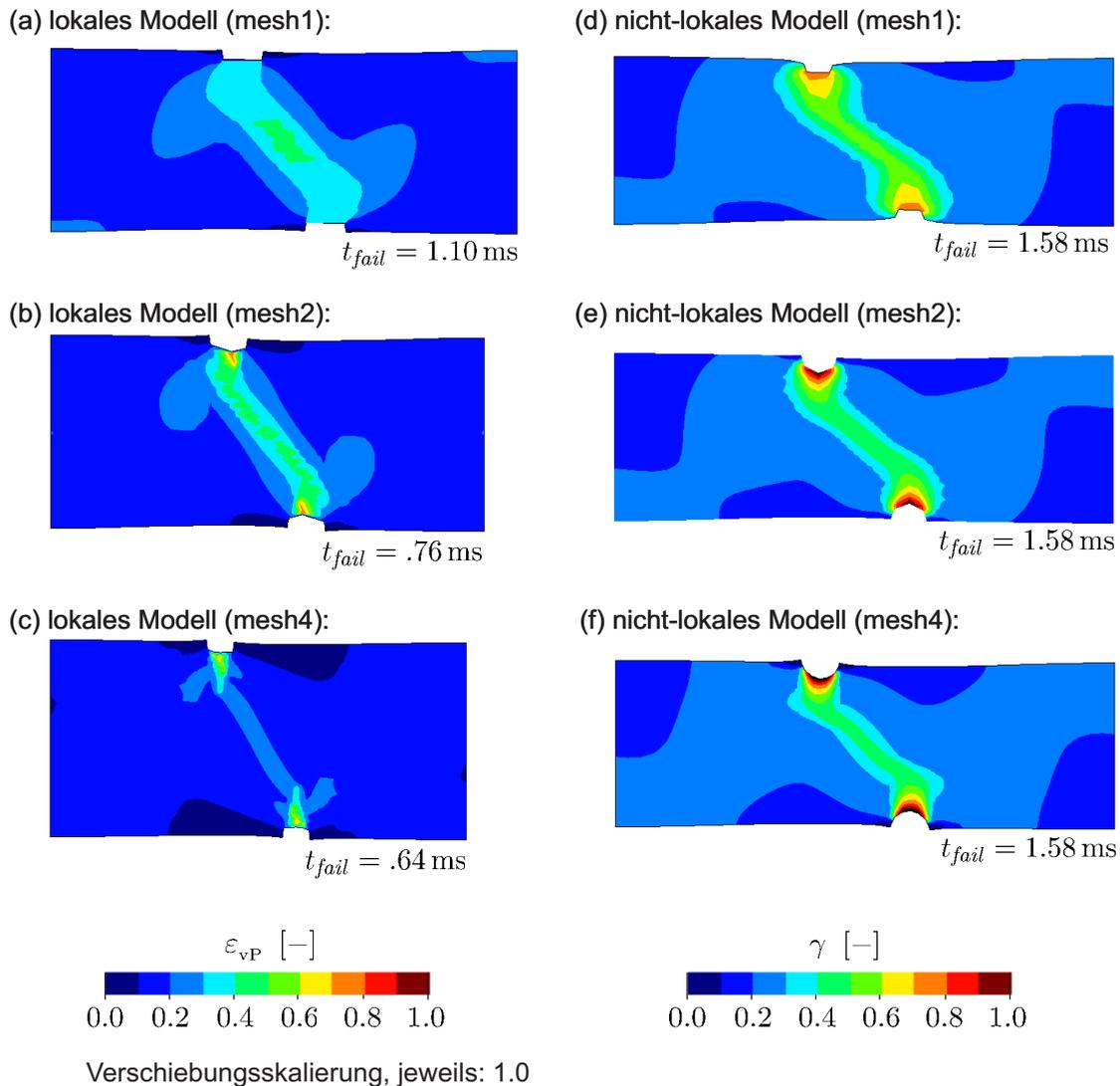


Bild 8.20: Vergleich der Netzabhängigkeit anhand der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung für das lokale und nicht-lokale Modell

Hingegen wird unter Verwendung des nicht-lokalen Modells für die untersuchten unterschiedlichen Diskretisierungen ein nahezu gleicher Zeitpunkt des Versagens berechnet (vgl. Bild 8.19). Dieses Verhalten resultiert aus einer für die unterschiedlichen Netze nahezu gleich bleibenden Verteilung der lokalisierten Größen, d. h. einer einheitlichen Breite des Scherbandes. Diesbezüglich sind in Bild 8.20d-f die Verteilungen des inelastischen Verzerrungsfeldes  $\gamma$  des nicht-lokalen Modells für die unterschiedlichen Diskretisierungen abgebildet. Darin ist die im Vergleich zu den Ergebnissen des lokalen Modells nahezu gleich bleibende Breite der Lokalisierungszone gut zu erkennen.

Die an diesem Beispiel durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass die Initiierung und Ausbildung eines adiabatischen Scherbandes zwischen den geometrischen Imperfektionen an den Seitenrändern der Probe gut simuliert werden kann, wenn der Einfluss der unterschiedlichen Mehrachsigsigntverteilung in der Modellierung des Werkstoffverhaltens berücksichtigt wird. Unter Verwendung des lokalen, ratenabhängigen Modells wird selbst infolge stetig ver-

## 8. Berechnungsbeispiele

feinerer Diskretisierungen keine konvergente Lösung erzielt. Die Breite der Lokalisierungszone nimmt dabei stetig ab, so dass infolge dessen auch der Versagenszeitpunkt stetig früher eintritt. Im Gegensatz dazu werden bei Verwendung des nicht-lokalen Modells auch bei aus ingenieurtechnischer Sicht sinnvollen Elementabmessungen konvergente Lösungen erzielt. Gegebenenfalls ist es bei der Verwendung des nicht-lokalen Modells erforderlich, die von dem lokalen Modell übertragenen Versagensparameter neu an den experimentell ermittelten Versagenszeitpunkt anzupassen.

### 8.4 Ausbildung adiabatischer Scherbänder unter Druckbelastung

Die Ausbildung adiabatischer Scherbänder tritt bei einer Vielzahl praxisrelevanter Anwendungen infolge einer Druckbeanspruchung des Bauteils auf. Beispiele hierfür finden sich in dem breiten Spektrum verschiedener Aufprallprobleme oder auch bei Stanzprozessen in der Umformtechnik. In dieser Hinsicht wird im Folgenden die in *Bild 8.21* skizzierte Problemstellung betrachtet. Eine ebene Struktur mit anfänglich etwa doppelt so großer Höhe wie Breite wird verschiebungsgesteuert in Längsrichtung belastet. Der untere Rand kann sich dabei auf dem Untergrund ohne Behinderung ausdehnen und ist nur an einer Stelle fest gehalten. Die Breite der Scheibe variiert zudem über die Höhe und nimmt vom unteren bis zum oberen Rand linear um ein Zwanzigstel der Breite zu. Für die durchgeführte Berechnung wird der Problemstellung ein ebener Verzerrungszustand zugrunde gelegt. Darüberhinaus wird die Abmessung  $L = 1 \text{ mm}$  sowie eine konstante Belastungsgeschwindigkeit von  $\hat{v} = 25 \text{ m/s}$  vorgegeben.

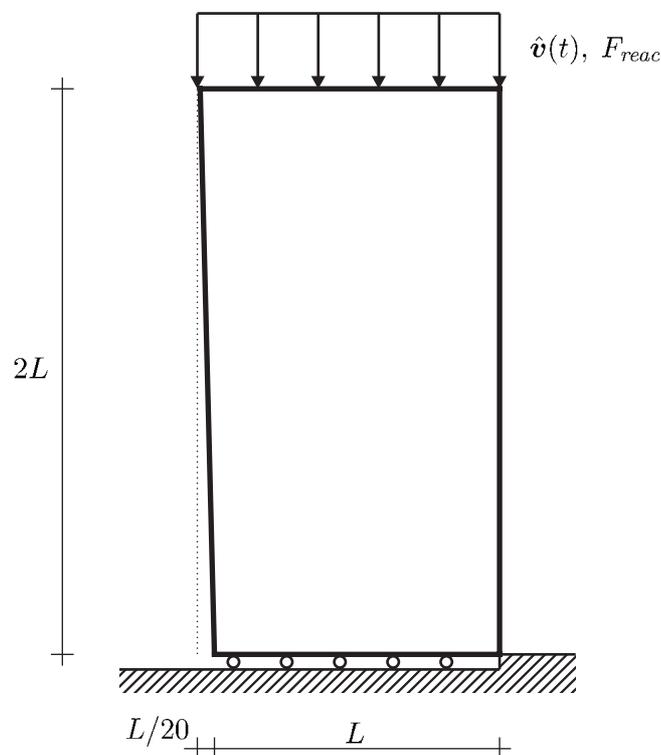
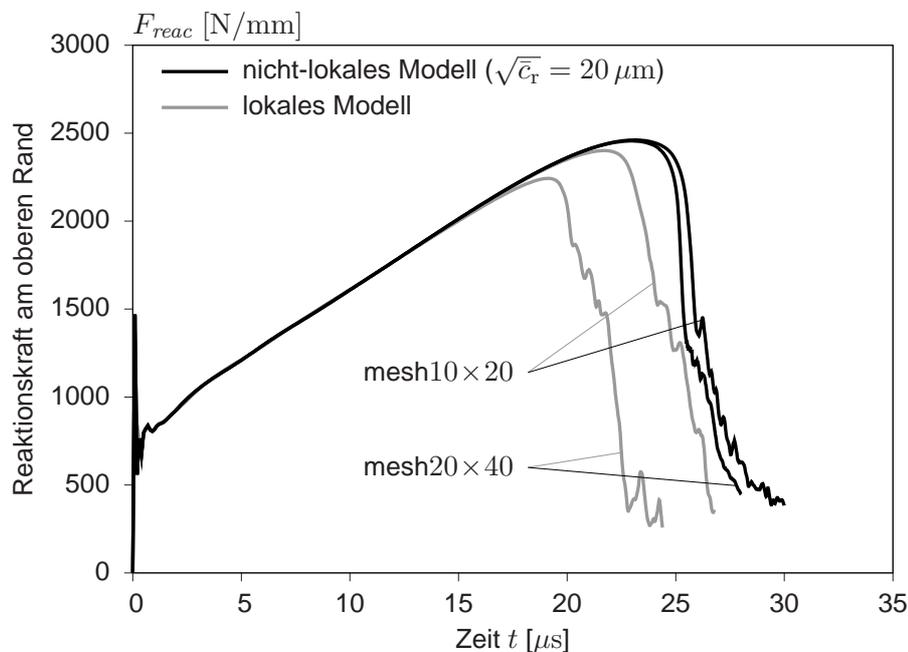


Bild 8.21: Skizze der untersuchten Problemstellung unter Druckbelastung

Im Rahmen dieses Beispiels wird untersucht, welchen Einfluss eine lokale und eine nicht-lokale Formulierung jeweils auf die Ergebnisse der Simulation eines unter Druck initiierten Scherbandes haben. Diesbezüglich werden zwei unterschiedliche Diskretisierungen der Struktur für die Berechnung berücksichtigt. Wie im Anhang C in *Bild C.3* abgebildet, werden zum einen  $10 \times 20$  und zum anderen  $20 \times 40$  Elemente für die Diskretisierung der Struktur verwendet.

Generell zeigt sich infolge der durchgeführten Simulationen, dass sich das Scherband erst bei einem Zustand auszubilden beginnt, wenn die Struktur bereits auf etwa knapp die Hälfte der Anfangshöhe zusammengepresst worden ist. In diesem Zusammenhang wird die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Theorie großer Deformationen in den Modellformulierungen erneut unterstrichen.

Darüberhinaus weisen die erzielten Simulationsergebnisse die gleichen Unterschiede zwischen den Modellformulierungen auf, die bereits in den vorangegangenen Beispielen herausgestellt worden sind. Anhand der in *Bild 8.22* dargestellten Reaktionskraft-Zeit-Verläufe wird bereits die Abhängigkeit der durch die Anwendung des lokalen Modells erzielten Ergebnisse von der jeweiligen Strukturdiskretisierung deutlich. Dabei tritt der Zeitpunkt des Versagens für das feiner diskretisierte Netz deutlich früher auf. Hingegen ist bei Verwendung des nicht-lokalen Modells eine wesentlich reduzierte Abhängigkeit von der jeweils berücksichtigten Elementabmessung zu erkennen. Dieses Verhalten resultiert aus dem unterschiedlichen Lokalisierungsverhalten beider Modelle. Infolge des lokalen Modells erstreckt sich die Breite des Scherbandes stets lediglich über einen Bereich, der durch die Abmessung eines einzelnen, diskretisierten Elementes charakterisiert ist. Hingegen wird bei Verwendung des nicht-lokalen Modells eine Scherbandbreite berechnet, die sich auch bei Netzverfeinerung über einen nahezu konstanten Bereich, und damit auch über mehrere Elemente der Diskretisie-



*Bild 8.22: Reaktionskraft-Zeit Verläufe für das lokale und nicht-lokale Modell bei verschiedenen Diskretisierungen*

## 8. Berechnungsbeispiele

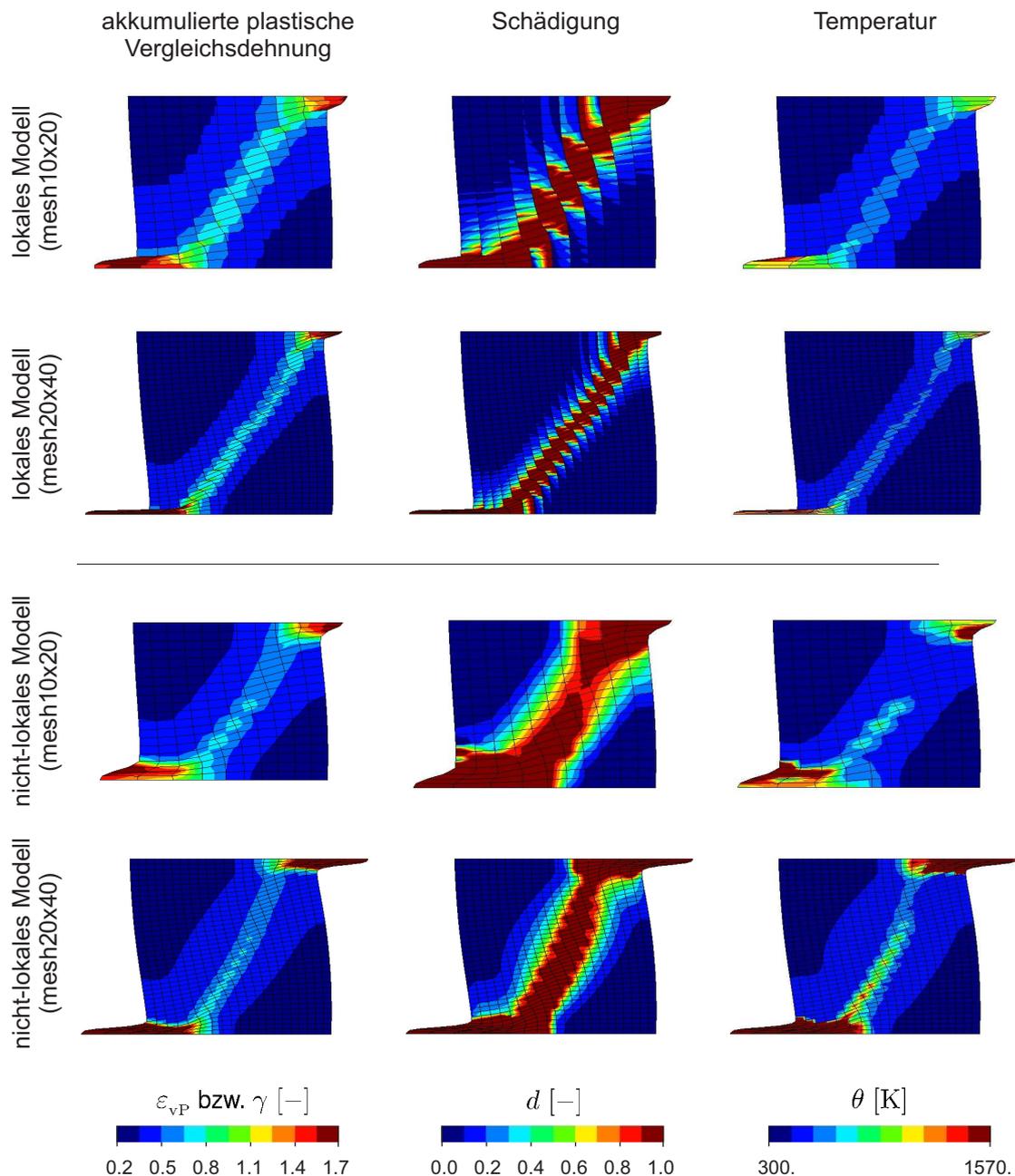


Bild 8.23: Vergleich der Netzabhängigkeit der Ergebnisse anhand der Verteilung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung, der Schädigung sowie der Temperatur für das lokale und nicht-lokale Modell

rung, erstreckt. Dabei bewirkt die nicht-lokale Formulierung auf Basis der im Rahmen der Gradienten-Plastizität berücksichtigten plastischen Dehnrates  $\dot{\gamma}$  eine Delokalisierung dieser Größe.

In diesem Zusammenhang sind in *Bild 8.23* die jeweiligen Verteilungen der von der plastischen Dehnrates abhängigen Größen, wie die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung, die Schädigung und die Temperatur, für die untersuchten Diskretisierungen und Modellformulierungen

rungen dargestellt. In dieser Darstellung wird deutlich, dass infolge der Delokalisierung der plastischen Dehnrates ebenfalls sowohl die unmittelbar von dieser Größe abhängige akkumulierte plastische Vergleichsdehnung als auch die hinsichtlich der Entfestigungsmodellierung relevanten Größen, *i.e.* Schädigung  $d$  und Temperatur  $\theta$ , delokalisiert werden. Damit wird neben der Bestimmung einer physikalisch sinnvoll interpretierbaren Scherbandbreite auch die Berechnung eines einheitlichen Versagenszeitpunktes gewährleistet.

### 8.5 Fazit der Untersuchungen

Mit der numerischen Umsetzung des beschriebenen nicht-lokalen Modells der Gradienten-Plastizität im Rahmen der Methode der Finiten-Elemente wird ein Berechnungswerkzeug bereitgestellt, das es ermöglicht, eine breite Klasse von Lokalisierungsphänomenen metallischer Bauteile unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen nahezu netzunabhängig zu simulieren. Im Gegensatz zu der lokalen Modellierung von Lokalisierungseffekten unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen, bei der die erzielten Simulationsergebnisse jeweils nur in Abhängigkeit der jeweils verwendeten Elementkantenlängen interpretiert werden können, werden infolge der nicht-lokalen Modellierung Ergebnisse erzielt, die im Sinne eines konvergierenden Lösungsverhaltens sinnvoll interpretiert werden können. Dies stellt einen entscheidenden Beitrag zur Verbesserung der Beurteilung und Interpretation der Simulationsergebnisse im Rahmen der genannten Anwendungsbereiche dar.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

### Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag für eine verbesserte Beschreibung und Simulation von Lokalisierungseffekten metallischer Bauteile unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen, die in weiten Teilen der ingenieurtechnischen Praxis relevant sind. Diesbezüglich werden zwei unterschiedliche, makroskopische und im Rahmen der Thermodynamik hergeleitete Modellformulierungen ausführlich beschrieben sowie hinsichtlich ihrer lokalisierungsbegrenzenden inneren Länge einerseits und den auf Grundlage dieser Modelle erzielten numerischen Simulationsergebnissen andererseits verglichen.

Basierend auf den in Kapitel 2 beschriebenen kontinuumsmechanischen Grundlagen wird in Kapitel 3 unter Berücksichtigung der Theorie großer Deformationen ein thermoelasto-thermoviskoplastisches Modell beschrieben, das es auf Grundlage der Modellformulierung nach Johnson und Cook (1983) ermöglicht, die grundlegenden Werkstoffeigenschaften metallischer Bauteile unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen abzubilden. Dazu zählt neben der Modellierung von sowohl allgemein isotroper als auch dehnratenabhängiger Verfestigung ebenso die Beschreibung der adiabatischen Temperaturerhöhung infolge plastischer Dissipation und der damit einhergehenden thermischen Entfestigung als auch die Berücksichtigung der isotropen Schädigungsentwicklung auf das Werkstoffverhalten.

Darüber hinaus wird diese lokale Modellformulierung in Kapitel 4 auf eine nicht-lokale Formulierung erweitert. Neben einer allgemeinen Übersicht verschiedener Möglichkeiten der nicht-lokalen Modellformulierung, basiert die betrachtete Erweiterung auf der Berücksichtigung der Rate der inelastischen Vergleichsdehnung im Rahmen einer impliziten Gradiententheorie. Die für die numerische Umsetzung des Modells mittels der Methode der Finiten-Elemente notwendigen algorithmischen Verfahrensschritte wurden in Kapitel 5 und 6 angegeben und diskutiert. Dabei wird neben der Beschreibung unterschiedlicher Integrationsalgorithmen auch auf unterschiedliche Verfahren zur Lösung des gekoppelten Mehrfeldproblems eingegangen.

Das prinzipielle Verhalten unterschiedlicher Modellformulierungen hinsichtlich der Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung sowie der Dispersionseigenschaften bei entfestigendem Materialverhalten wird in Kapitel 7 systematisch untersucht. Die diesbezüglich untersuchten Modelle gliedern sich in sowohl lokale als auch nicht-lokale sowie sowohl ratenunabhängige als auch ratenabhängige Formulierungen. Die dabei erzielten Ergebnisse werden anschließend für konkrete Modellformulierungen ausgewertet und diskutiert.

In Kapitel 8 werden schließlich die implementierten Modelle für die Simulation von Lokalisierungsphänomenen anhand unterschiedlicher Beispiele eingesetzt, wobei die beobachteten Unterschiede ebenfalls herausgestellt und diskutiert werden.

### Bewertung der Ergebnisse

Hinsichtlich des Lokalisierungsverhaltens der betrachteten lokalen Modellformulierung konnten die folgenden Ergebnisse erzielt werden:

- Bei einer lokalen und nichtlinear ratenabhängigen Formulierung, wie beispielsweise dem Modell nach JOHNSON & COOK oder Potenzgesetz-Modellen, existiert einerseits

ein linearer Zusammenhang zwischen der inneren Länge des Modells und dem vorherrschenden Spannungszustand sowie andererseits ein invers proportionaler Zusammenhang zwischen der inneren Länge und der plastischen Dehnrates.

- Bei für Hochgeschwindigkeitsanwendungen typischen Beanspruchungsbedingungen liegt die innere Länge des lokalen Modells bereits zu Beginn des Lokalisierungsprozesses unterhalb bzw. zumindest in der Größenordnung der Abmessung der Gefügestruktur.
- Eine Diskretisierung mit Elementabmessung in dieser Größenordnung stellt keine makroskopische Modellierung der Problemstellung mehr dar. Zudem nimmt die innere Länge des lokalen Modells mit Einsetzen des Lokalisierungsprozesses weiter ab und strebt aufgrund der zuvor genannten Abhängigkeit von der plastischen Dehnrates und von dem Spannungszustand sehr schnell gegen null. Durch dieses Verhalten geht die lokalisierungsbegrenzende Wirkung der inneren Länge des ratenabhängigen Modells vollständig verloren.
- Die bei der numerischen Simulation beobachtete Netzabhängigkeit des lokalen Modells zeichnet sich einerseits dadurch aus, dass relevante Modellgrößen, wie die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung, die plastische Dehnrates sowie Temperatur und Schädigung, stets über der kleinst-möglichen Elementabmessung lokalisieren. Lediglich durch diesen Bereich der Struktur wird die gesamte Belastung aufgenommen, während der übrige Teil der Struktur elastisch entlastet.
- Infolge stetiger Netzverfeinerung tritt die Deformationslokalisierung in einem verschwindenden Volumen auf.

Diese, für die lokale Modellformulierung erzielten Ergebnisse erlauben die Schlussfolgerung, dass die bei der numerischen Simulation beobachtete Netzabhängigkeit nicht in der Anwendung des numerischen Berechnungsverfahrens begründet liegt, sondern auf den Eigenschaften der zugrunde liegenden Gleichungen basiert. Darüber hinaus ist es aufgrund der auftretenden Längenskalen physikalisch sinnvoll, die in der Mikroskala auftretenden und relevanten Effekte durch die Anwendung nicht-lokaler Materialmodelle auf makroskopischer Ebene zu berücksichtigen. Unter Verwendung des beschriebenen nicht-lokalen Modells werden hinsichtlich des Lokalisierungsverhaltens die folgenden Ergebnisse erzielt:

- Für die nicht-lokale Erweiterung des ratenabhängigen Modells ist die Abhängigkeit der inneren Länge von dem vorherrschenden Spannungszustand sowie der plastischen Dehnrates deutlich reduziert, vielmehr wird die Größenordnung dieser Länge durch den Wert des nicht-lokalen Parameters bestimmt.
- Für große plastische Dehnrates genügt bereits ein geringer, positiver Wert des nicht-lokalen Parameters, damit die innere Länge des nicht-lokalen Modells um einige Größenordnungen über der des lokalen Modells liegt.
- Erst mit Erreichen eines Zustandes kurz vor dem vollständigen Verlust der Belastbarkeit, tendiert auch die innere Länge des nicht-lokalen Modells gegen null.

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

- Bei der numerischen Simulation von Lokalisierungsphänomenen beeinflusst der nicht-lokale Parameter die Breite der berechneten Lokalisierungszone. Zudem ändert sich mit zunehmendem Wert des nicht-lokalen Parameters das globale Last-Verformungsverhalten derart, dass der berechnete Versagenszeitpunkt später auftritt. Eine Anpassung der Versagensparameter ist dadurch ggf. erforderlich.
- Das durch die numerische Simulation berechnete Lokalisierungsvolumen konvergiert für das nicht-lokale Modell bei stetiger Netzverfeinerung gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert.

Durch die Anwendung des nicht-lokalen Modells der Gradienten-Plastizität ist es im Gegensatz zur Verwendung des lokalen Modells möglich, bei der numerischen Simulation von Lokalisierungsphänomenen unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen konvergente Lösungen, d. h. endliche Scherbanddicken, zu erzielen und im Rahmen der Kontinuumsmechanik sinnvolle Lösungen des zugrunde liegenden, physikalischen Problems zu gewährleisten. Dadurch wird eine wesentliche Verbesserung für die Beurteilung der Sicherheit und Zuverlässigkeit von Bauteilen unter Hochgeschwindigkeitsbelastungen erzielt.

### **Ausblick**

Die in dieser Arbeit hinsichtlich der Stabilitäts- und Dispersionsanalyse erzielten Ergebnisse erlauben sowohl ein verbessertes Verständnis als auch eine verbesserte Beurteilung des Lokalisierungsverhaltens metallischer Werkstoffe unter Hochgeschwindigkeitsbeanspruchungen. Um eine direkte Korrelation zwischen der simulierten Lokalisierungsbreite und der inneren Modelllänge zu bestimmen ist es notwendig, die für die Bestimmung der inneren Länge eines Modells durchgeführte Dispersionsanalyse auf mehrdimensionale Problemstellungen und unter Berücksichtigung finiter Deformationen zu erweitern. Damit wird zudem ermöglicht, den nicht-lokalen Parameter an experimentelle Daten verschiedener Versuchsergebnisse anzupassen und zu interpretieren.

Durch die Ausbildung von Scherbändern treten in dem Bauteil große Verschiebungsgradienten auf, die zu einem fortgeschrittenen Zeitpunkt der Simulation in zum Teil extremen Elementverzerrungen resultieren. Daher ist es für weiterführende Berechnungen wünschenswert, die Vorteile des implementierten nicht-lokalen Modells mit automatischen Netzverfeinerungsalgorithmen zu kombinieren. Die Auswertung der inneren Modelllänge könnte dabei als mögliches Kriterium zur Netzverfeinerung herangezogen werden.

Darüber hinaus wäre es interessant zu vergleichen, inwiefern sich die unterschiedlichen beschriebenen Integrationsalgorithmen zur Lösung des gekoppelten Modells der ratenabhängigen Gradienten-Plastizität auf die benötigte Rechenzeit bei der Simulation großer Strukturen, wie z. B. dem Aufprall einer Turbinenschaufel auf das umgebende Gehäuse, auswirken.

## A Tensorrechnung

Die nachfolgend beschriebenen Ausführungen zur Tensorrechnung basieren auf einem orthogonal kartesischen Koordinatensystem im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum. Die Basen dieses Koordinatensystem sind mit  $e_i$  für  $i = \{1, 2, 3\}$  bezeichnet und besitzen die Eigenschaften, dass sie die Länge eins haben,  $\|e_i\| = 1$ , und paarweise senkrecht aufeinander stehen,  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ . Dabei kennzeichnet  $\delta_{ij}$  das KRONECKER-Symbol, das gemäß

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

definiert ist. Sofern nicht anders angegeben, wird die EINSTEIN'sche Summenkonvention verwendet. Damit lassen sich die Tensoren unterschiedlicher Stufe in der Form

$$\begin{aligned} \text{Tensor 0. Stufe (Skalar):} & \quad \alpha \\ \text{Tensor 1. Stufe (Vektor):} & \quad \mathbf{a} = a_i e_i \\ \text{Tensor 2. Stufe (Matrix):} & \quad \mathbf{B} = B_{ij} e_i \otimes e_j \\ \text{Tensor 4. Stufe:} & \quad \mathbf{C} = C_{ijkl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \end{aligned}$$

angeben. Tensoren werden stets durch die Komponenten zusammen mit den dazugehörigen Basen angegeben. Dabei stellen Tensoren 2. Stufe eine lineare Abbildung eines Vektors auf einen Vektor, bzw. Tensoren 4. Stufe eine lineare Abbildung eines Tensors 2. Stufe auf einen Tensor 2. Stufe dar.

### A.1 Produkte von Tensoren

#### A.1.1 Skalarprodukte

In dieser Arbeit wird zwischen Einfach-, Doppel- und ggf. Mehrfach-Skalarprodukten unterschieden. Dies kennzeichnet die Anzahl der „überschobenen“ Basen und ist für alle Tensoren unterschiedlicher Stufe gleich definiert. Auf die kommutativen, distributiven und assoziativen Eigenschaften dieser Produkte wird hier nicht näher eingegangen.

**Einfachskalarprodukt** Bei dieser Art des Produktes werden die jeweils „nächsten“ Basen zweier Tensoren skalar multipliziert. Dies ergibt für zwei Tensoren 1. Stufe

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i e_i) \cdot (b_j e_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i \quad (\text{A.2})$$

ein skalares Ergebnis, für zwei Tensoren 2. Stufe

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_{ij} e_i \otimes e_j) \cdot (B_{kl} e_k \otimes e_l) = A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} e_i \otimes e_l = A_{ik} B_{kj} e_i \otimes e_j \quad (\text{A.3})$$

einen Tensor 2. Stufe, u. s. w. Gemäß dieses Vorgehens lassen sich diese Skalarprodukte zwischen den unterschiedlichen Tensoren berechnen.

## A. Tensorrechnung

**Doppelskalarprodukt** Bei diesem Produkt werden die „letzten“ beiden Basen des ersten Tensors mit den „ersten“ beiden Basen des zweiten Tensors verknüpft. Die beiden Kombinationsmöglichkeiten werden durch die Bezeichnungen äußeres bzw. inneres Doppelskalarprodukt unterschieden. Dies ergibt für zwei Tensoren 2. Stufe

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \underbrace{(A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) : (B_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)} = A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = A_{ij} B_{ij} \quad (\text{A.4})$$

bzw.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \underbrace{(A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (B_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)} = A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} = A_{ij} B_{ji} \quad (\text{A.5})$$

ein skalares Ergebnis. Entsprechend berechnen sich die Doppelskalarprodukte von höherstufigeren Tensoren.

**Mehrfachskalarprodukte** Es lassen sich auch Skalarprodukte mit Verknüpfungen von mehr als jeweils zwei Basen definieren. In Kapitel 7 wird z. B. eine dreifache „Überschiebung“ benötigt. Diese ist gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdots \mathbf{D} &= \underbrace{(C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdots (D_{mnpq} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q)} \\ &= C_{ijkl} D_{mnpq} \delta_{lm} \delta_{kn} \delta_{jp} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_q \\ &= C_{iklm} D_{mlkj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

definiert und ist selbstverständlich nur als Produkt von zwei Tensoren jeweils mindestens 3. Stufe anwendbar.

### A.1.2 Dyadische Produkte

Im Rahmen dieser Arbeit werden drei unterschiedliche dyadische Produkte verwendet. Das gebräuchlichste dieser drei wird mit dem Symbol '⊗' gekennzeichnet und beschreibt die fortlaufende „Aneinanderreihung“ der Basen zweier Tensoren. Dieses dyadische Produkt zweier Tensoren 1. Stufe

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \underbrace{(a_i \mathbf{e}_i)}_{\hat{1}} \otimes \underbrace{(b_j \mathbf{e}_j)}_{\hat{2}} = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.7})$$

ergibt einen Tensor 2. Stufe, sowie das zweier Tensoren 2. Stufe

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \underbrace{(A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)}_{\hat{1} \hat{2}} \otimes \underbrace{(B_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)}_{\hat{3} \hat{4}} = A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (\text{A.8})$$

einen Tensor 4. Stufe, sowie entsprechend für Tensoren höherer Stufe. Die genannten anderen dyadischen Produkte, die durch die Symbole '⊕' und '⊙' gekennzeichnet sind, reihen die Basen zweier Tensoren 2. Stufe in unterschiedlicher Folge aneinander

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} &= \underbrace{(A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)}_{\hat{1} \hat{3}} \oplus \underbrace{(B_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)}_{\hat{4} \hat{2}} = A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \\ &= A_{ik} B_{lj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \odot \mathbf{B} &= \underbrace{(A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)}_{\hat{1} \hat{4}} \odot \underbrace{(B_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)}_{\hat{3} \hat{2}} = A_{ij} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j \\ &= A_{il} B_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Die Ergebnisse stellen auch hier jeweils einen Tensor 4. Stufe dar.

**Einheitstensoren** Der Einheitstensor 2. Stufe ist gemäß

$$\mathbf{I} := \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.11})$$

definiert. Die verschiedenen Einheitstensoren 4. Stufe ergeben sich dann aus den unterschiedlichen dyadischen Produkten von (A.11), *i.e.*

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{II} := \mathbf{I} \oplus \mathbf{I} = \delta_{ik} \delta_{lj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{II}^t := \mathbf{I} \odot \mathbf{I} = \delta_{il} \delta_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{II}^s := \frac{1}{2}(\mathbf{I} \oplus \mathbf{I} + \mathbf{I} \odot \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{kj}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (\text{A.15})$$

Der Tensor  $\mathbf{II}^t$ , bzw.  $\mathbf{II}^s$  wird dabei häufig auch als Transponierer, bzw. Symmetrisierer bezeichnet (Bertram, 2005).

## A.2 Verwendete Tensoroperationen

### A.2.1 Invarianten eines Tensors 2. Stufe

Die drei Invarianten eines Tensors 2. Stufe  $\mathbf{A}$  werden mit  $I_{\mathbf{A}}$ ,  $II_{\mathbf{A}}$ ,  $III_{\mathbf{A}}$  bezeichnet und sind gemäß

$$I_{\mathbf{A}} := \text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{I} : \mathbf{A} = A_{ii} \quad (\text{A.16})$$

$$II_{\mathbf{A}} := \frac{1}{2}[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{I} : \mathbf{A})^2] = \frac{1}{2}[A_{ij}A_{ji} - A_{ii}A_{jj}] \quad (\text{A.17})$$

$$III_{\mathbf{A}} := \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr} \quad (\text{A.18})$$

definiert<sup>7</sup>. Darin bezeichnet  $\text{tr}(\mathbf{A})$  die Spur, *engl.: trace*, und  $\det(\mathbf{A})$  die Determinante des Tensors. In der Indexdarstellung von (A.18) wird ferner das gemäß

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} +1, & \text{wenn } \{i, j, k\} \text{ die Folge } \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\} \text{ oder } \{3, 1, 2\} \text{ annimmt} \\ -1, & \text{wenn } \{i, j, k\} \text{ die Folge } \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\} \text{ oder } \{3, 2, 1\} \text{ annimmt} \\ 0, & \text{für alle sonstigen Folgen} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

definierte Permutations-Symbol verwendet. Diese skalaren Größen (A.16-A.18) heißen Invarianten, weil ihre Werte unabhängig, d. h. invariant, von dem gewählten Koordinatensystem sind. Ausgeschrieben ergibt sich

$$I_{\mathbf{A}} = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \quad (\text{A.20})$$

$$II_{\mathbf{A}} = A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{23}A_{32} - A_{11}A_{22} - A_{11}A_{33} - A_{22}A_{33}, \quad (\text{A.21})$$

$$III_{\mathbf{A}} = +A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{13}A_{22}A_{31}, \quad (\text{A.22})$$

weshalb diese auch gelegentlich als lineare, quadratische bzw. kubische Invariante eines Tensors bezeichnet werden (Malvern, 1969: S.90).

<sup>7</sup>In der Literatur ist (A.17) zum Teil als  $-II_{\mathbf{A}}$  definiert.

### A.2.2 Norm eines Tensors

Die Norm eines Tensors ist als Quadratwurzel des Tensorquadrats gemäß

$$\|\alpha\| := \sqrt{\alpha^2}, \quad \|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad \|\mathbf{A}\| := \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad (\text{A.23})$$

definiert. Für eine skalare Größe entspricht die Norm dem Betrag (Absolutwert) dieser Größe, entsprechend stellt die Norm eines Vektors die Länge dieses Vektors dar.

### A.2.3 Transponierte und Inverse eines Tensors 2. Stufe

Die Transponierte, Inverse und Invers-Transponierte eines Tensors 2. Stufe  $\mathbf{A}$  wird durch die entsprechenden Indizes 'T', '-1' und '-T' gekennzeichnet und wird in der Form

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{A}^T = A_{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{A}^{-1} = A_{ij}^{-1} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{A}^{-T} = A_{ij}^{-1} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.27})$$

angegeben. Infolge einer Transponierung bzw. Invertierung werden die Basen vertauscht. Die Inverse, bzw. Invers-Transponierte eines Tensors  $\mathbf{A}$  existiert nur dann, wenn die Determinante dieses Tensors ungleich null ist, *i.e.*  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Dann berechnet sich die Invers-Transponierte gemäß

$$\mathbf{A}^{-T} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}, \quad (\text{A.28})$$

wobei hier die Adjunkte des Tensors, *i.e.*  $\text{adj}(\mathbf{A})$ , nach Chadwick (1976) in der folgenden Anordnung der Kofaktoren<sup>8</sup> verwendet wird

$$\text{adj}(\mathbf{A}) := (\text{cof} \mathbf{A})_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.29})$$

In der Literatur wird zum Teil auch die zu (A.29) transponierte Anordnung der Kofaktoren als Adjunkte definiert. Dann ist durch (A.28) die Inverse und nicht die Invers-Transponierte eines Tensors definiert. Ferner gelten die Beziehungen  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$  und  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ , sowie  $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$ .

### A.2.4 Spektraldarstellung eines Tensors 2. Stufe

Die Eigenwerte eines Tensors  $\mathbf{A}$  werden mit  $\lambda$  bezeichnet und berechnen sich aus der Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.30})$$

Für nicht-triviale Eigenvektoren  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  kann diese Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn die Determinante des Klammer-Ausdrucks verschwindet. Diese Forderung führt auf die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte, *i.e.*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^3 - I_A \lambda^2 - II_A \lambda - III_A = 0, \quad (\text{A.31})$$

<sup>8</sup>Der Kofaktor  $(\text{cof} \mathbf{A})_{ij}$  ergibt sich als Produkt des Faktors  $(-1)^{i+j}$  und der Unterdeterminanten von  $\mathbf{A}$ , die durch Streichen der  $i$ -ten "Zeile" und  $j$ -ten "Spalte" entsteht.

dargestellt in Abhängigkeit der Invarianten des Tensors  $\mathbf{A}$ . Für symmetrische Tensoren  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  existieren stets drei reellwertige Eigenwerte in der Form

$$\lambda_{\text{I}} \geq \lambda_{\text{II}} \geq \lambda_{\text{III}} \text{ , mit } \lambda_{\text{I}}, \lambda_{\text{II}}, \lambda_{\text{III}} \in \mathbb{R} . \quad (\text{A.32})$$

Mit Hilfe dieser Eigenwerte und zusammen mit den entsprechenden Eigenvektoren lässt sich ein Tensor in der Spektraldarstellung

$$\mathbf{A} = \sum_{i=\text{I}}^{\text{III}} \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (\text{A.33})$$

formulieren. Dabei stellt  $\mathbf{n}_i$ , für  $i = \text{I}, \text{II}, \text{III}$ , das in die Hauptachsen des Tensors gedrehte Koordinatensystem  $e_i$ , für  $i = 1, 2, 3$ , dar. Diese Darstellung wird häufig auch als Spektralzerlegung (*engl.: spectral decomposition*) bezeichnet.

### A.2.5 Weitere Zerlegungen eines Tensors 2. Stufe

Ein Tensor 2. Stufe kann stets in einen symmetrischen und antimetrischen Anteil gemäß

$$\mathbf{A} = \text{sym}(\mathbf{A}) + \text{skw}(\mathbf{A}) \quad (\text{A.34})$$

mit

$$\text{sym}(\mathbf{A}) := \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad \text{und} \quad \text{skw}(\mathbf{A}) := \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) \quad (\text{A.35})$$

aufgeteilt werden. Desweiteren ist eine Zerlegung in einen deviatorischen und sphärischen Anteil

$$\mathbf{A} = \text{dev}(\mathbf{A}) + \text{sph}(\mathbf{A}) \quad (\text{A.36})$$

mit

$$\text{sph}(\mathbf{A}) := \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \text{dev}(\mathbf{A}) := \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I} \quad (\text{A.37})$$

möglich.

### A.2.6 Zusammenfassung verschiedener Identitäten

In *Tabelle A.1* sind einige Identitätsbeziehungen mit Tensoren 2. Stufe zusammengefasst. Darüber hinaus sind in *Tabelle A.2* einige Umformungen unter Verwendung von Einheitstensoren dargestellt.

Tabelle A.1: Einige Identitätsbeziehungen unter Verwendung von Tensoren 2. Stufe.

Unter Verwendung des Einfachskalarprodukts zwischen einem Tensor 4. Stufe und 2. Stufe:

$$(A \otimes B) \cdot C = A \otimes (B \cdot C) \quad (\text{TA.1-1})$$

$$(A \oplus B) \cdot C = A \oplus (C^T \cdot B) \quad (\text{TA.1-2})$$

$$(A \odot B) \cdot C = (A \cdot C) \odot B \quad (\text{TA.1-3})$$

$$C \cdot (A \otimes B) = (C \cdot A) \otimes B \quad (\text{TA.1-4})$$

$$C \cdot (A \oplus B) = (C \cdot A) \oplus B \quad (\text{TA.1-5})$$

$$C \cdot (A \odot B) = (C \cdot A) \odot B \quad (\text{TA.1-6})$$

Unter Verwendung des Doppelskalarprodukts zwischen einem Tensor 4. Stufe und 2. Stufe:

$$(A \otimes B) : C = (B : C) A \quad (\text{TA.1-7})$$

$$(A \oplus B) : C = A \cdot C \cdot B \quad (\text{TA.1-8})$$

$$(A \odot B) : C = A \cdot C^T \cdot B \quad (\text{TA.1-9})$$

$$C : (A \otimes B) = (C : A) B \quad (\text{TA.1-10})$$

$$C : (A \oplus B) = A^T \cdot C \cdot B^T \quad (\text{TA.1-11})$$

$$C : (A \odot B) = B \cdot C^T \cdot A \quad (\text{TA.1-12})$$

Unter Verwendung des Doppelskalarprodukts zwischen zwei Tensoren 4. Stufe:

$$(A \otimes B) : (C \otimes D) = (B : C) A \otimes D \quad (\text{TA.1-13})$$

$$(A \otimes B) : (C \oplus D) = A \otimes (C^T \cdot B \cdot D^T) \quad (\text{TA.1-14})$$

$$(A \otimes B) : (C \odot D) = A \otimes (C \cdot B^T \cdot D) \quad (\text{TA.1-15})$$

$$(A \oplus B) : (C \otimes D) = (A \cdot C \cdot B) \otimes D \quad (\text{TA.1-16})$$

$$(A \oplus B) : (C \oplus D) = (A \cdot C) \oplus (D \cdot B) \quad (\text{TA.1-17})$$

$$(A \oplus B) : (C \odot D) = (A \cdot C) \odot (D \cdot B) \quad (\text{TA.1-18})$$

$$(A \odot B) : (C \otimes D) = (A \cdot C^T \cdot B) \otimes D \quad (\text{TA.1-19})$$

$$(A \odot B) : (C \oplus D) = (A \cdot D^T) \odot (C^T \cdot B) \quad (\text{TA.1-20})$$

$$(A \odot B) : (C \odot D) = (A \cdot D^T) \oplus (C^T \cdot B) \quad (\text{TA.1-21})$$

Tabelle A.2: Umformungen unter Verwendung von Einheitstensoren

Unter Verwendung des Einheitstensors 2. Stufe, gilt	
$I \cdot A = A \cdot I = A$	(T A.2-1)
$I : A = A : I = \text{tr}(A)$	(T A.2-2)
und insbesondere $\text{tr}(\text{dev}(A)) = 0$ und $\text{tr}(I) = 3$ .	
Mit den Definitionen der Einheitstensoren 4. Stufe nach (A.12 bis A.15) ergibt sich infolge der Identitäten aus <i>Tabelle A.1</i> insbesondere auch	
$(I \otimes I) : A = A : (I \otimes I) = \text{tr}(A) I$	(T A.2-3)
$\mathbf{I} : A = A : \mathbf{I} = A$	(T A.2-4)
$\mathbf{I}^t : A = A : \mathbf{I}^t = A^T$	(T A.2-5)
$\mathbf{I}^s : A = A : \mathbf{I}^s = \text{sym}(A)$	(T A.2-6)

### A.3 Differentialanalysis

#### A.3.1 Ableitungen und Differentiale

**Ableitung, Partielle Ableitung** Gegeben ist eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sowie eine Stelle  $x \in \mathbb{R}^m$  für  $m, n \in \mathbb{N}$ . Dann bezeichnet  $Df(x)$  die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x$  und ist gemäß

$$f(x + h) - f(x) = Df(x)[h] + O(h), \text{ für } (h \in \mathbb{R}^m, h \rightarrow 0) \quad (\text{A.38})$$

als lineare Abbildung definiert, sofern  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar ist. Dies ist der Fall wenn die partiellen Ableitungen  $D_k f_i(x)$ , für  $1 \leq k \leq m$  und  $1 \leq i \leq n$  existieren<sup>9</sup>. In dieser Schreibweise bezeichnet der Index  $k$  die  $k$ -te Komponente von  $x$ . In der Regel wird für die partielle Ableitung eher die Schreibweise

$$D_k f_i(x) \equiv \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)}{\partial x_k} = \partial_{x_k}(f_i(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)) \quad (\text{A.39})$$

verwendet, wobei im Sinne der Äquivalenz gewährleistet sein muss, dass die Komponente  $x_k$  tatsächlich an der  $k$ -ten Stelle von  $x$  angeordnet ist. Die Anordnung aller partiellen Ableitungen in der Form

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_m f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_m f_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

wird Funktionalmatrix bzw. JACOBI-Matrix genannt.

<sup>9</sup>Für die Existenz von  $Df(x)$  wird streng genommen neben der Existenz aller partiellen Ableitungen auch die Stetigkeit aller partiellen Ableitungen gefordert, siehe Wüst (2002: §17).

## A. Tensorrechnung

**Richtungsableitung** Die zuvor beschriebene Ableitung stellt eine Ableitung in Richtung aller Koordinatenachsen dar. Nun ist durch  $\Delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  eine beliebige Richtung angegeben. Dann wird mit

$$D_{\Delta \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + h\Delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{h} \quad (\text{A.41})$$

die Richtungsableitung von  $\mathbf{f}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  in Richtung  $\Delta \mathbf{x}$  definiert.

**Differential** Der differentielle Zuwachs einer Größe  $\mathcal{F}$  wird durch  $d\mathcal{F}$  gekennzeichnet. Mit den beispielhaften Abhängigkeiten  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y, f(x, t))$  folgt dann z. B.

$$d\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} df \quad \left| \text{ und } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right. \quad (\text{A.42a})$$

$$= \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (\text{A.42b})$$

$$= \frac{d\mathcal{F}}{dx} dx + \frac{d\mathcal{F}}{dy} dy + \frac{d\mathcal{F}}{dt} dt \quad (\text{A.42c})$$

In der letzten Umformung ist ferner die weitere Ableitung  $\frac{d\mathcal{F}}{dx}$  verwendet worden. Diese Ableitung beschreibt die „vollständige“ Ableitung von  $\mathcal{F}$  nach  $x$ , d. h. alles was von  $\mathcal{F}$  nach  $x$  abzuleiten geht wird danach abgeleitet.

In Abhängigkeit der skalaren Größe  $\alpha$ , der vektorwertigen Größe  $\mathbf{a}$  sowie der tensoriellen Größe 2. Stufe  $\mathbf{A}$  definieren  $f(\cdot)$ ,  $\mathbf{f}(\cdot)$  bzw.  $\mathbf{F}(\cdot)$  entsprechend jeweils (skalar-/ vektor-/ tensor-)wertige (Skalar-/ Vektor-/ Tensor-)Funktionen, so dass die einzelnen Differentiale ferner durch die Verknüpfungen

$$\left. \begin{aligned} df(\alpha) &= \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha, & df(\mathbf{a}) &= \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a}, & df(\mathbf{A}) &= \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} : d\mathbf{A}, \\ d\mathbf{f}(\alpha) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha, & d\mathbf{f}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a}, & d\mathbf{f}(\mathbf{A}) &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} : d\mathbf{A}, \\ d\mathbf{F}(\alpha) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha, & d\mathbf{F}(\mathbf{a}) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \cdot d\mathbf{a}, & d\mathbf{F}(\mathbf{A}) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} : d\mathbf{A}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.43})$$

bestimmt sind.

**Algorithmische Ableitung** Die algorithmische Ableitung beschreibt nichts anderes als die „vollständige“ Ableitung einer inkrementell, d. h. algorithmisch formulierten Funktionsvorschrift, und wird mit

$$\frac{D\mathcal{F}(\cdot)}{D\bullet} \equiv D_{\bullet}(\mathcal{F}(\cdot)) \quad (\text{A.44})$$

gekennzeichnet. Beispielsweise treten algorithmische Ableitungen bei der Linearisierung von inkrementell formulierten Stoffgleichungen (siehe Kapitel 6) auf.

### A.3.2 Differentialoperatoren

**Nabla-Operator** Der Nabla-Operator wird durch ein fett gestelltes Nabla-Symbol,  $\nabla$ , gekennzeichnet und ist gemäß

$$\nabla_{\mathbf{r}} := \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{E}_i \quad \text{bzw.} \quad \nabla_{\mathbf{c}} := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (\text{A.45})$$

definiert. Zur Unterscheidung der jeweiligen Ableitung bezogen entweder auf die Referenzkonfiguration mit dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  oder auf die Momentankonfiguration mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  sind die entsprechenden Indizes 'r' bzw. 'c' eingeführt.

**Gradient** Der Gradient einer beliebigen Größe  $(\bullet)$  wird durch

$$\text{GRAD}(\bullet) \equiv \nabla_{\mathbf{r}} \bullet := (\bullet) \otimes \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{r}} \quad \text{bzw.} \quad \text{grad}(\bullet) \equiv \nabla_{\mathbf{c}} \bullet := (\bullet) \otimes \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{c}} \quad (\text{A.46})$$

angegeben und ist als dyadisches Produkt mit dem Nabla-Operator definiert. Der nach links gerichtete Pfeil über dem Nabla-Operator weist darauf hin, dass die Ableitung auf die links des dyadischen Produktes stehende Größe angewendet wird. Auch bei der Definition des Gradienten wird durch die entsprechende Schreibweise in (A.46) auf den jeweiligen Bezug entweder auf die Referenz- oder Momentankonfiguration verwiesen.

**Divergenz** Die Divergenz einer Größe  $(\bullet)$  von mindestens 1. Stufe wird durch

$$\text{DIV}(\bullet) := \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot (\bullet) \quad \text{bzw.} \quad \text{div}(\bullet) := \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{c}} \cdot (\bullet) \quad (\text{A.47})$$

angegeben und ist als Einfach-Skalarprodukt Produkt mit dem Nabla-Operator definiert. Der nach rechts gerichtete Pfeil über dem Nabla-Operator weist darauf hin, dass die Ableitung auf die rechts des Skalarproduktes stehende Größe angewendet wird. Auch bei der Definition des Divergenz-Operators wird durch die entsprechende Schreibweise in (A.47) auf den jeweiligen Bezug entweder auf die Referenz- oder Momentankonfiguration verwiesen.

### A.3.3 Häufig verwendete Ableitungen und Ableitungsregeln

**Ableitung der Transponierten, Inversen, Invers-Transponierten** Die Ableitung eines Tensors 2. Stufe nach einem weiteren Tensor 2. Stufe ergibt stets einen Tensor 4. Stufe. Speziell für die Ableitung eines Tensors  $\mathbf{A}$  sowie der Transponierten  $\mathbf{A}^T$  und des symmetrischen Anteils  $\text{sym}(\mathbf{A})$  nach  $\mathbf{A}$  gilt

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I} , \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I}^t , \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial \text{sym}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I}^s . \quad (\text{A.50})$$

## A. Tensorrechnung

Desweiteren folgt für die Ableitung der Inversen  $\mathbf{A}^{-1}$  und Invers-Transponierten  $\mathbf{A}^{-T}$  nach  $\mathbf{A}$  unter Verwendung der dyadischen Produkte (A.9) und (A.10) dann

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} = -\mathbf{A}^{-1} \oplus \mathbf{A}^{-1}, \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-T}}{\partial \mathbf{A}} = -\mathbf{A}^{-T} \odot \mathbf{A}^{-T}. \quad (\text{A.52})$$

**Ableitung der Invarianten** Für die gemäß (A.16) bis (A.18) definierten Invarianten eines Tensors 2. Stufe  $\mathbf{A}$  gelten für die Ableitungen nach diesem Tensor dann

$$\frac{\partial I_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I}, \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial II_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}^T - \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I}, \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial III_{\mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}. \quad (\text{A.55})$$

**Ableitung der Norm, Deviator, Norm eines Deviators** Die Ableitung der Norm eines Tensors 2. Stufe gemäß der Definition (A.23) liefert

$$\frac{\partial \|\mathbf{A}\|}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^T}{\|\mathbf{A}\|} \quad (\text{A.56})$$

und insbesondere für symmetrische Tensoren  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  gilt dann

$$\frac{\partial \|\mathbf{A}\|}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|} = \text{sgn}(\mathbf{A}). \quad (\text{A.57})$$

Desweiteren gilt für die Ableitung des Deviators sowie der Norm des Deviators eines symmetrischen Tensors  $\mathbf{A}$  dann auch

$$\frac{\partial \text{dev}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I}^s - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{A.58})$$

sowie

$$\frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{A})\|}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\text{dev}(\mathbf{A})}{\|\text{dev}(\mathbf{A})\|} : \left( \mathbf{I}^s - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) = \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{A})) \quad (\text{A.59})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{A}))}{\partial \mathbf{A}} &= \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{A})\|} \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\text{dev}(\mathbf{A})}{\|\text{dev}(\mathbf{A})\|^2} \otimes \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{A})\|}{\partial \mathbf{A}} \\ &= \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{A})\|} \left( \mathbf{I}^s - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{A})) \otimes \text{sgn}(\text{dev}(\mathbf{A})) \right). \quad (\text{A.60}) \end{aligned}$$

**Ableitungen des Logarithmus eines Tensors 2. Stufe** Nach Šilhavý (1997: S.16ff) gilt mit Hilfe der Funktionalanalysis für die Ableitung des Logarithmus eines Tensors  $\mathbf{A}$ , der gemäß der Spektralzerlegung

$$\mathbf{A} = \sum_{a=1}^{\text{III}} \lambda_a \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{l}_a \quad (\text{A.61})$$

durch die Eigenwerte  $\lambda_a$  und Eigenvektoren  $\mathbf{l}_a$  angegeben wird, dann

$$\frac{\partial \ln \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \sum_{a=1}^{\text{III}} \sum_{b=1}^{\text{III}} H(\lambda_a, \lambda_b) \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{l}_b \otimes \mathbf{l}_a \otimes \mathbf{l}_b \quad (\text{A.62})$$

mit

$$H(\lambda_a, \lambda_b) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln(\lambda_a) - \ln(\lambda_b)}{\lambda_a - \lambda_b}, \text{ für } \lambda_a \neq \lambda_b \\ \frac{1}{\lambda_a}, \text{ für } \lambda_a = \lambda_b \end{array} \right\}. \quad (\text{A.63})$$

**Einige Ableitungsregeln bei Verwendung von Tensoren 2. Stufe** Unter Verwendung des dyadischen Produktes (A.9) gilt beispielsweise

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I} \oplus \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{I}. \quad (\text{A.64})$$

Viele weitere Ableitungen folgen unter Verwendung der Kettenregel und durch Kombination der zuvor genannten Ableitungen. Beispielsweise folgt die Rate der Inversen Größe  $\mathbf{A}^{-1}$  durch zeitliche Differentiation und Berücksichtigung von (A.51) und den Beziehungen aus *Tabelle A.1* dann

$$\frac{\dot{\mathbf{A}}^{-1}}{\mathbf{A}^{-1}} \equiv \frac{d\mathbf{A}^{-1}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{A}} : \frac{d\mathbf{A}}{dt} = (-\mathbf{A}^{-1} \oplus \mathbf{A}^{-1}) : \dot{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A.65})$$

Ebenso erfolgt beispielsweise die Herleitung der Beziehung (3.32) aus Kapitel 3 infolge der Anwendung der Kettenregel sowie der zuvor beschriebenen Ableitungen zu

$$\begin{aligned} \Sigma &= -\mathbf{F}_P^T \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{G}_P} : \frac{\partial(\mathbf{F}_P^{-1} \cdot \mathbf{F}_P^{-T})}{\partial \mathbf{F}_P} \\ &= -\mathbf{F}_P^T \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{G}_P} : [(\mathbf{I} \oplus \mathbf{F}_P^{-T}) : (-\mathbf{F}_P^{-1} \oplus \mathbf{F}_P^{-1}) + (\mathbf{F}_P^{-1} \oplus \mathbf{I}) : (-\mathbf{F}_P^{-T} \odot \mathbf{F}_P^{-T})] \\ &= \mathbf{F}_P^T \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{G}_P} : [\mathbf{F}_P^{-1} \oplus \mathbf{G}_P + \mathbf{G}_P \odot \mathbf{F}_P^{-T}] \\ &= \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{G}_P} \cdot \mathbf{G}_P^T + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{G}_P^T} \cdot \mathbf{G}_P \\ &= 2 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \mathbf{G}_P} \cdot \mathbf{G}_P. \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Als weitere Anwendung der Ableitungsregeln sind die für die Bestimmung der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen  $\mathbf{S}$  in (3.34) bzw. der Spannung  $\Sigma$  in (3.39) benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C}))}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})} \left( \det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C}) (\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})^{-T} \right) : (\mathbf{G}_P \oplus \mathbf{I}) \\ &= \mathbf{G}_P^T \cdot (\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})^{-T} \cdot \mathbf{I}^T = \mathbf{C}^{-T} = \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

## A. Tensorrechnung

und

$$\frac{\partial \ln(\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C}))}{\partial \mathbf{G}_P} = \frac{\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})^{-T}}{\det(\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})} : (\mathbf{I} \oplus \mathbf{C}) = \mathbf{I}^T \cdot (\mathbf{G}_P \cdot \mathbf{C})^{-T} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{G}^{-T} \quad (\text{A.68})$$

genannt.

### A.3.4 Materielle Zeitableitung

Die materielle Zeitableitung beschreibt die zeitliche Änderung einer Größe bezüglich konstanter materieller Koordinaten. Für eine beliebige Größe  $(\bullet)$  in Abhängigkeit von entweder materiellen oder räumlichen Koordinaten sowie der Zeit gilt dann

$$(\dot{\bullet}) \equiv \frac{d(\bullet)}{dt} := \left( \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}=\text{konst.}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} \quad , \text{ für } (\bullet) = \bullet(\mathbf{X}, t) \\ \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \text{grad}(\bullet) \cdot \mathbf{v} \quad , \text{ für } (\bullet) = \bullet(\mathbf{x}, t) \end{array} \right\}, \quad (\text{A.69})$$

wobei  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit an diesem Punkt bezeichnet. Für eine materielle Größe entspricht die materielle Zeitableitung der partiellen Ableitung dieser Größe nach der Zeit. Für eine räumliche Größe muss bei der materiellen Zeitableitung die zeitliche Änderung der räumlichen Koordinaten mitberücksichtigt werden.

Beispielsweise ergibt sich für die Beschleunigung als Rate der Geschwindigkeit für die LAGRANGE'sche Darstellungsform mit materiellen Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{v}}_r(\mathbf{X}, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_r(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_r(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.70a})$$

bzw. für die EULER'sche Darstellungsform mittels räumlicher Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_c(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}_c(\mathbf{x}, t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{v}_c(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (\text{A.70b})$$

wobei natürlich die Beschleunigung als physikalische Größe in beiden Darstellungsformen äquivalent ist, *i.e.*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r(\mathbf{X}, t) = \mathbf{a}_c(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.70c})$$

### A.3.5 Materielle Zeitableitung zeitlich veränderlicher Gebietsintegrale

Ein zeitlich veränderliches Gebietsintegral  $\mathcal{F}$  über eine zeitlich veränderliche Feldfunktion  $f$  ist in der Form

$$\mathcal{F}(t) = \int_{V(t)} f_c(\mathbf{x}, t) dV \quad (\text{A.71})$$

angegeben, wobei alle Punkte des geschlossenen Volumens  $V = V(t)$  einer ein-eindeutigen Bewegung gemäß (2.1) genügen, i.e.  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ . Insofern kann die Feldfunktion in sowohl materiellen als auch räumlichen Koordinaten  $f = f_r(\mathbf{X}, t) = f_c(\mathbf{x}, t)$  dargestellt werden. Die materielle Zeitableitung dieses Integrals ergibt sich unter Verwendung der folgenden Umformungen zu

$$\dot{\mathcal{F}} = \frac{d}{dt} \left[ \int_{V(t)} f_c(\mathbf{x}, t) dV \right] = \frac{d}{dt} \left[ \int_{V_0} f_r(\mathbf{X}, t) J dV_0 \right] \quad (\text{A.72a})$$

$$= \int_{V_0} \left\{ \frac{df_r(\mathbf{X}, t)}{dt} J + f_r(\mathbf{X}, t) \frac{dJ}{dt} \right\} dV_0 \quad (\text{A.72b})$$

$$= \int_{V_0} \left\{ \frac{df_r(\mathbf{X}, t)}{dt} + f_r(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} \right\} J dV_0 \quad (\text{A.72c})$$

$$= \int_{V(t)} \left\{ \frac{df_c(\mathbf{x}, t)}{dt} + f_c(\mathbf{x}, t) \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}}) \right\} dV \quad (\text{A.72d})$$

$$= \int_{V(t)} \left\{ \dot{f} + f \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}}) \right\} dV . \quad (\text{A.72e})$$

#### A.4 Objektivität

Man betrachtet zwei Beobachter, i.e. zwei kartesische Koordinatensysteme, und die Deformation eines Körpers für jeden Beobachter:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^* = \boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{X}, t) . \quad (\text{A.73})$$

Beide Koordinatensysteme sind durch eine allgemeine Translation und Rotation gemäß

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x} \quad (\text{A.74})$$

miteinander verknüpft, mit der orthogonalen Eigenschaft des Rotationstensors,  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ , sowie  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ . Größen sind dann objektiv, wenn sie die Bedingung

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A}^* = \mathbf{A} & , \text{ für einen materiellen Tensor 2ter Stufe } \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} & , \text{ für einen Zweifeld-Tensor } \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T & , \text{ für einen räumlichen Tensor 2ter Stufe } \mathbf{A} \\ \mathbf{a}^* = \mathbf{a} & , \text{ für einen materiellen Vektor (Tensor 1ster Stufe) } \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} & , \text{ für einen räumlichen Vektor (Tensor 1ster Stufe) } \mathbf{a} \\ \alpha^* = \alpha & , \text{ für ein skalares Feld } \alpha \end{array} \right. \quad (\text{A.75})$$

erfüllen. Nachfolgend sind die Eigenschaften einiger verschiedener Größen angegeben.

**Deformations- und Verzerrungsgrößen** Der Deformationsgradient ist gemäß

$$\mathbf{F}^* = \operatorname{GRAD}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{Q} \cdot \operatorname{GRAD}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.76})$$

objektiv. Daraus folgen weitere objektive Beziehungen, z. B. für den rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensor

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{F}^{*T} \cdot \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (\text{A.77})$$

## A. Tensorrechnung

oder den linken CAUCHY-GREEN-Deformationstensor

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}^{*\top} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^\top \quad (\text{A.78})$$

sowie den GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^{(\text{G})^*} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^* - \mathbf{I}^*) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}^{(\text{G})} \quad (\text{A.79})$$

oder den ALMANZI-EULER-Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}^{(\text{A})^*} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^* - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^\top)^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^\top) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}^{(\text{A})} \cdot \mathbf{Q}^\top . \quad (\text{A.80})$$

Auch die elastischen und inelastischen Anteile dieser Größen, resultierend aus der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (2.18), mit

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_\text{E}^* \cdot \mathbf{F}_\text{P}^* , \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_\text{E}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_\text{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_\text{P}^* = \mathbf{F}_\text{P} \quad (\text{A.81})$$

sind objektiv.

**Deformations- und Verzerrungsraten** Für die Rate des Deformationsgradienten folgt durch zeitliche Differentiation von (A.76) die Beziehung

$$\dot{\mathbf{F}}^* = \frac{d}{dt}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F} . \quad (\text{A.82})$$

Damit folgt weiter aufgrund von

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}^* &= \dot{\mathbf{F}}^{*\top} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot \dot{\mathbf{F}}^* = (\dot{\mathbf{F}}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top + \mathbf{F}^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}^\top) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}}) \\ &= \dot{\mathbf{F}}^\top \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F}^\top \cdot (\dot{\mathbf{Q}}^\top \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \mathbf{F} \\ &= \dot{\mathbf{C}} , \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

die objektive Eigenschaft des rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors, wobei die Identität  $\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{Q}}^\top \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}} = 0$  bei der Herleitung verwendet wurde. Ebenso sind die elastischen sowie plastischen Anteile,  $\dot{\mathbf{C}}_\text{E}^* = \dot{\mathbf{C}}_\text{E}$  und  $\dot{\mathbf{C}}_\text{P}^* = \dot{\mathbf{C}}_\text{P}$  objektiv. Außerdem gilt auch

$$\dot{\mathbf{E}}^{(\text{G})^*} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}^* = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{E}}^{(\text{G})} . \quad (\text{A.84})$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient erfüllt aufgrund von

$$\mathbf{L}^* = \dot{\mathbf{F}}^* \cdot \mathbf{F}^{-1*} = (\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^\top) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top \quad (\text{A.85})$$

ebenso wenig die Objektivitätsbedingung wie der antimetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{W}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^* - \mathbf{L}^{*\top}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^\top + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top . \quad (\text{A.86})$$

Hingegen ist der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten, *i.e.* der Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^* + \mathbf{L}^{*\top}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^\top , \quad (\text{A.87})$$

objektiv.

**Spannungen und Spannungsraten** Sämtliche Spannungsgrößen sind objektiv,

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{P}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{S}^* = \mathbf{S}, \quad (\text{A.88})$$

allerdings nicht alle Spannungsraten. Die materielle Zeitableitung der CAUCHY-Spannungen stellt beispielsweise gemäß

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \frac{d}{dt}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T \quad (\text{A.89})$$

keine objektive Größe dar. Es lässt sich leicht zeigen, dass jedoch die gemäß

$$\mathbf{T}^{\nabla J} := \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^T \quad (\text{JAUMANN-Rate}) \quad (\text{A.90a})$$

$$\mathbf{T}^{\nabla T} := J^{-1} \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^T \quad (\text{TRUESELL-Rate}) \quad (\text{A.90b})$$

$$\mathbf{T}^{\nabla G} := \dot{\mathbf{T}} - (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T) \quad (\text{GREEN-NAGHDI-Rate}) \quad (\text{A.90c})$$

definierten Größen objektive Spannungsraten darstellen, mit dem Drehgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{W}$ , dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  und dem Rotationstensor der polaren Zerlegung  $\mathbf{R}$ , sowie mit  $J^{-1} \dot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{T}} + \text{div}(\mathbf{v})\mathbf{T}$ . Auch die Rate der zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung,

$$\dot{\mathbf{S}}^* = \frac{d}{dt}(\mathbf{S}^*) = \frac{d}{dt}(\mathbf{S}) = \dot{\mathbf{S}} \quad (\text{A.91})$$

sowie die Rate der auf die Zwischenkonfiguration bezogenen zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung,

$$\dot{\hat{\mathbf{S}}}^* = \frac{d}{dt}(\mathbf{F}_P^* \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{F}_P^{*\top}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{F}_P \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}_P^\top) = \dot{\hat{\mathbf{S}}} \quad (\text{A.92})$$

sind objektive Spannungsraten.

## B Relevante Ableitungen zur Bildung der Materialtangente

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}} &\Rightarrow \mathbf{D}_{\bullet}(\mathbf{P}) = \frac{\partial(\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}})}{\partial \mathbf{K}} : \mathbf{D}_{\bullet}(\mathbf{K}) + \frac{\partial(\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}})}{\partial \mathbf{F}^{-\text{T}}} : \frac{\partial \mathbf{F}^{-\text{T}}}{\partial \mathbf{F}} : \mathbf{D}_{\bullet}(\mathbf{F}) \\
 &= (\mathbf{I} \oplus \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \mathbf{D}_{\bullet}(\mathbf{K}) + (\mathbf{K} \oplus \mathbf{I}) : (-\mathbf{F}^{-\text{T}} \odot \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \mathbf{D}_{\bullet}(\mathbf{F}) \\
 &= (\mathbf{I} \oplus \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \mathbf{D}_{\bullet}(\mathbf{K}) - (\mathbf{P} \odot \mathbf{F}^{-\text{T}}) : \mathbf{D}_{\bullet}(\mathbf{F}) . \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

Der erste Summand in (B.1) wird nicht weiter umgeformt, da es sich im Rahmen der Überführung in die VOIGT-Schreibweise anbietet, ihn in dieser Form zu belassen.

Mit (6.46) und (2.78) folgt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_{\text{E}}^2} = (1-d) \mathbf{C}_{\text{E}} , \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_{\text{E}} \partial \theta} = -(1-d) 3\kappa_{\text{r}} \alpha_{\theta \text{r}} \mathbf{I} , \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \ln \mathbf{V}_{\text{E}} \partial d} = -\mathbf{K} / (1-d) = -\mathbf{K}_{\text{eff}} . \quad (\text{B.4})$$

### Algorithmische Ableitungen nach $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}
 (\text{T5.2-1}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}) &= \frac{\partial \frac{1}{2} \ln(\text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}} \cdot \text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}})}{\partial (\text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}} \cdot \text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}})} : \frac{\partial (\text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}} \cdot \text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}})}{\partial \mathbf{F}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \ln(\text{trl} \mathbf{B}_{\text{E}})}{\partial \text{trl} \mathbf{B}_{\text{E}}} \right] : \left[ \left( (\mathbf{I} \oplus \mathbf{F}^{\text{T}}) + (\mathbf{F} \odot \mathbf{I}) \right) \cdot \text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}} \right] \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

mit  $\text{trl} \mathbf{B}_{\text{E}} = \text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}} \cdot \text{}^t \mathbf{G}_{\text{P}}$  und mit der Ableitung des Logarithmus gemäß (A.62).

$$\begin{aligned}
 (\text{T5.2-5}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}}(\text{trl} \sigma_{\text{veff}}) &= 2\mu_{\text{r}} \sqrt{3/2} \frac{\partial \|\text{dev}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}})\|}{\partial \text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}} \\
 &= 2\mu_{\text{r}} \sqrt{3/2} \text{sgn}(\text{dev}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}})) = 2\mu_{\text{r}} \sqrt{3/2} \text{trl} \mathbf{N} \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{T5.2-6}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}}(\text{trl} \mathbf{N}) &= \frac{\partial \text{sgn}(\text{dev}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}))}{\partial \text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}} \\
 &= \frac{1}{\|\text{dev}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}})\|} \left( \mathbf{I}^{\text{s}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \text{trl} \mathbf{N} \otimes \text{trl} \mathbf{N} \right) \quad (\text{B.7})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{T5.2-7}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}}(\text{}^t \ln \mathbf{V}_{\text{E}}) &= \frac{\partial \text{}^t \ln \mathbf{V}_{\text{E}}}{\partial \text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}} - \Delta \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial \text{}^t \ln \mathbf{V}_{\text{E}}}{\partial \text{trl} \mathbf{N}} : \mathbf{D}_{\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}}}(\text{trl} \mathbf{N}) \\
 &= \mathbf{I}^{\text{s}} - \Delta \gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\left( \mathbf{I}^{\text{s}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \text{trl} \mathbf{N} \otimes \text{trl} \mathbf{N} \right)}{\|\text{dev}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\text{E}})\|} \\
 &= \mathbf{I}^{\text{s}} - \frac{3\mu_{\text{r}} \Delta \gamma}{\text{trl} \sigma_{\text{veff}}} \left( \mathbf{I}^{\text{s}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \text{trl} \mathbf{N} \otimes \text{trl} \mathbf{N} \right) \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

und somit schließlich

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) = \left( \mathbf{I}^{\text{S}} - \frac{3\mu_{\text{r}} \Delta \gamma}{\text{trl} \sigma_{\text{veff}}} \left( \mathbf{I}^{\text{S}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \text{trl} \mathbf{N} \otimes \text{trl} \mathbf{N} \right) \right) : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}). \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} (\text{T5.2-9}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}) &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}}{\partial \text{trl} \sigma_{\text{veff}}} \mathbf{D}_{\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}}(\text{trl} \sigma_{\text{veff}}) : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) \\ &= 2\mu_{\text{r}} \sqrt{3/2} \text{trl} \mathbf{N} : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} (\text{T5.2-10}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \theta) &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \theta}{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}) \\ &= \left( \frac{\beta_{\text{r}}}{\rho_{\text{r}} c_{\theta \text{r}}} (1 - \text{trl} d) \Delta \gamma \ 2\mu_{\text{r}} \sqrt{3/2} \text{trl} \mathbf{N} \right) : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

wobei der Klammerausdruck eben genau die Ableitung  $\mathbf{D}_{\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}}({}^{t+\Delta t} \theta)$  bezeichnet.

$$\begin{aligned} (\text{T5.2-11}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}) &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}}{\partial \text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}} : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}}{\partial {}^{t+\Delta t} \theta} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \theta) \\ &= (3\lambda_{\text{r}} + 2\mu_{\text{r}}) \left( \frac{1}{3} \mathbf{I} - \alpha_{\theta \text{I}} \mathbf{D}_{\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}}({}^{t+\Delta t} \theta) \right) : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{trl} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} (\text{T5.2-12}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}}) &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}}}{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}) + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}}}{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}) \\ &= \frac{1}{{}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}} \left( \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}) - {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} (\text{T5.2-14}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} s) &= \frac{\partial {}^{t+\Delta t} s}{\partial {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{f}}} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\text{f}}}{\partial \bar{\sigma}_{\text{trx}}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}}) + \frac{\partial \varepsilon_{\text{f}}}{\partial \theta} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \theta) \right) \\ &= -\frac{\Delta \gamma D_{\text{c}}}{({}^{t+\Delta t} \varepsilon_{\text{f}})^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{\text{f}}}{\partial \bar{\sigma}_{\text{trx}}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}}) + \frac{\partial \varepsilon_{\text{f}}}{\partial \theta} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t} \theta) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

mit

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{f}}}{\partial \bar{\sigma}_{\text{trx}}} = \left( D_2 D_3 \exp \{ D_3 \bar{\sigma}_{\text{trx}} \} \right) \left( 1 + D_4 \ln \left( 1 + \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left( 1 + D_5 T(\theta) \right) \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{f}}}{\partial \dot{\gamma}} = \left( D_1 + D_2 \exp \{ D_3 \bar{\sigma}_{\text{trx}} \} \right) \frac{D_4}{\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\gamma}} \left( 1 + D_5 T(\theta) \right) \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{f}}}{\partial \theta} = \left( D_1 + D_2 \exp \{ D_3 \bar{\sigma}_{\text{trx}} \} \right) \left( 1 + D_4 \ln \left( 1 + \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \frac{D_5}{\theta_{\text{M}} - \theta_{\text{R}}} \quad (\text{B.17})$$

## B. Relevante Ableitungen zur Bildung der Materialtangenten

so dass aus (T 5.2-15) schließlich

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}d) = -D_w({}^{t+\Delta t}s)^{D_w-1} \frac{\Delta\gamma D_c}{({}^{t+\Delta t}\varepsilon_f)^2} \left( \frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\bar{\sigma}_{\text{trx}}} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\bar{\sigma}_{\text{trx}}) + \frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\theta} \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\theta) \right) \quad (\text{B.18})$$

folgt.

Mit der lokalen Residuungleichung für  $r^{(i)}$  gemäß (T 5.3-9) folgt dann letztendlich auch

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(r^{(i)}) = \left( \frac{\partial r^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{veff}}^{(i)}} + \frac{\partial r^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\theta^{(i)}} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\theta^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{veff}}^{(i)}} \right) \mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{veff}}^{(i)}) \quad (\text{B.19})$$

mit

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial r^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{veff}}^{(i)}} + \frac{\partial r^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\theta^{(i)}} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\theta^{(i)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{veff}}^{(i)}} \right) \\ &= 1 + (A + B(\varepsilon_{\text{vP}}^{(i)})^n) (1 + C \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{\text{vP}}^{(i)}/\dot{\varepsilon}_0)) \frac{m(T^{(i)})^{m-1}}{\theta_M - \theta_R} \frac{\beta_R}{\varrho_R c_{\theta R}} (1 - \text{tr}l d) \Delta\gamma \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}({}^{t+\Delta t}\sigma_{\text{veff}}^{(i)}) = \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{tr}l \sigma_{\text{veff}}) = 2\mu_R \sqrt{3/2} \text{tr}l \mathbf{N} : \mathbf{D}_{\mathbf{F}}(\text{tr}l \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) . \quad (\text{B.21})$$

### Algorithmische Ableitungen nach $\gamma$

Wie aus Gleichungen (T 5.2-1) bis (T 5.2-6) direkt zu erkennen ist, sind die vorgeschätzten Zustandsgrößen nicht von  ${}^{t+\Delta t}\gamma$  abhängig. Mit

$$\Delta\gamma = {}^{t+\Delta t}\gamma - {}^t\gamma \Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}(\Delta\gamma) = 1 \quad (\text{B.22})$$

gilt dann für die relevanten Größen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ :

$$(\text{T 5.2-7}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}}) = \text{tr}l \ln \mathbf{V}_{\mathbf{E}} - \sqrt{3/2} \text{tr}l \mathbf{N} \quad (\text{B.23})$$

$$(\text{T 5.2-9}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}) = -3\mu_R \quad (\text{B.24})$$

$$(\text{T 5.2-10}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \theta) = \frac{\beta_R}{\varrho_R c_{\theta R}} (1 - \text{tr}l d) ({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}} - 3\mu_R) \quad (\text{B.25})$$

$$(\text{T 5.2-11}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}) = -(3\lambda_R + 2\mu_R) \alpha_{\theta R} \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \theta) \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} (\text{T 5.2-12}) \Rightarrow \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}}) &= \frac{1}{{}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}} \left( \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{hyd eff}}) - {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}} \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}) \right) \\ &= \frac{1}{{}^{t+\Delta t} \sigma_{\text{veff}}} \left( 3\mu_R {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma}_{\text{trx}} - (3\lambda_R + 2\mu_R) \alpha_{\theta R} \mathbf{D}_{\gamma}({}^{t+\Delta t} \theta) \right) \quad (\text{B.27}) \end{aligned}$$

B. Relevante Ableitungen zur Bildung der Materialtangente

$$(T5.2-14) \Rightarrow D_\gamma(t+\Delta t)_s = \frac{D_c}{t+\Delta t_{\varepsilon_f}} - \frac{\Delta\gamma D_c}{(t+\Delta t_{\varepsilon_f})^2} \left( \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \bar{\sigma}_{\text{trx}}} D_\gamma(t+\Delta t)_{\bar{\sigma}_{\text{trx}}} + \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \dot{\gamma}} D_\gamma(t+\Delta t)_{\dot{\gamma}} + \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \theta} D_\gamma(t+\Delta t)_\theta \right) \quad (B.28)$$

mit  $D_\gamma(t+\Delta t)_{\dot{\gamma}} = 1/\Delta t$  und den partiellen Ableitungen darin gemäß (B.15 bis B.17), so dass aus (T5.2-15) letztendlich

---

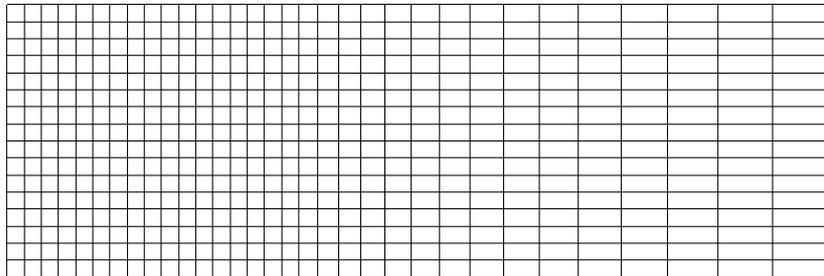

$$\Rightarrow D_\gamma(t+\Delta t)_d = D_w(t+\Delta t)_s^{D_w-1} \frac{D_c}{t+\Delta t_{\varepsilon_f}} \left( 1 - \frac{\Delta\gamma}{t+\Delta t_{\varepsilon_f}} \left( \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \bar{\sigma}_{\text{trx}}} D_\gamma(t+\Delta t)_{\bar{\sigma}_{\text{trx}}} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \dot{\gamma}} + \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \theta} D_\gamma(t+\Delta t)_\theta \right) \right) \quad (B.29)$$


---

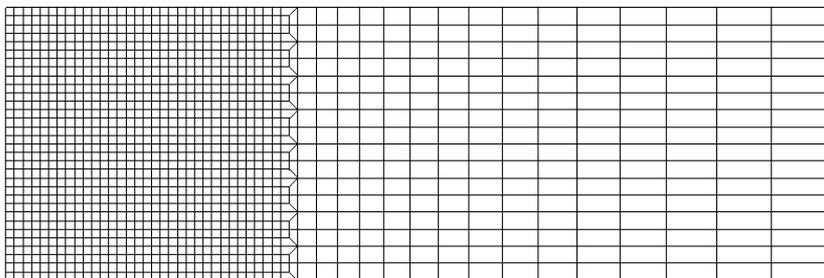
folgt.

## C FE-Netze

mesh $16 \times 16$ :  $\ell_h = 50.0 \mu\text{m}$



mesh $32 \times 32$ :  $\ell_h = 25.0 \mu\text{m}$



mesh $64 \times 64$ :  $\ell_h = 12.5 \mu\text{m}$

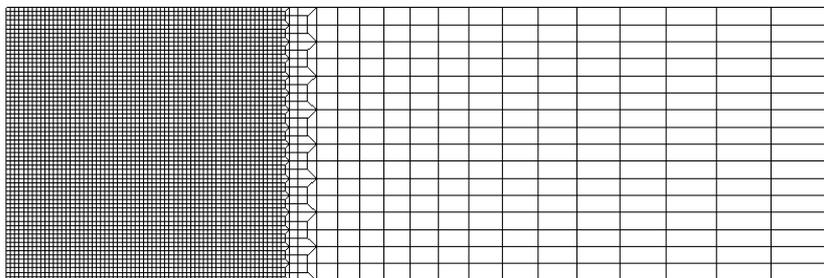
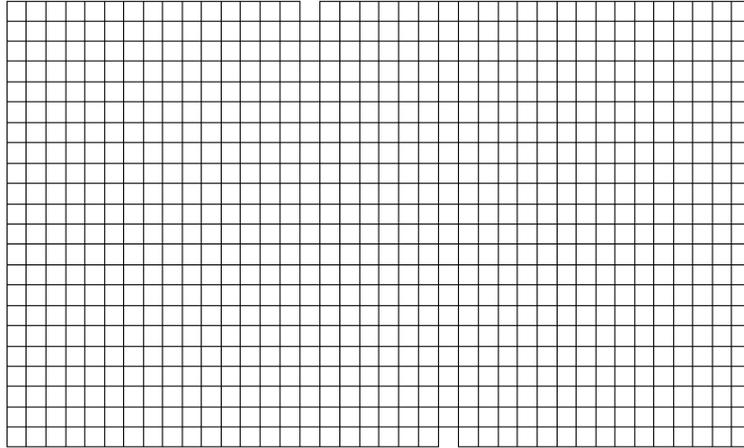
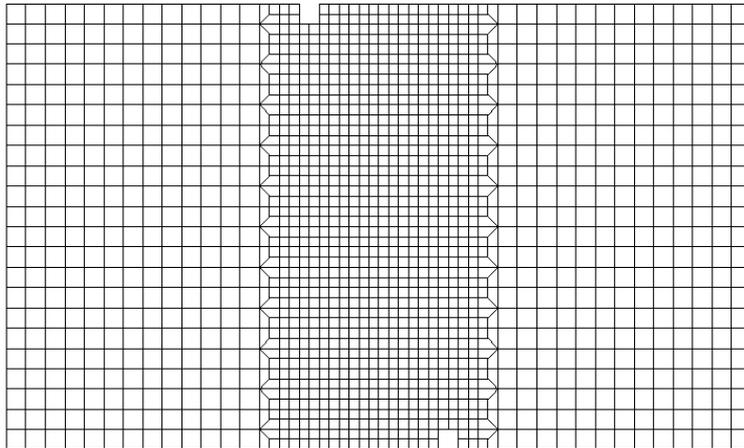


Bild C.1: Verwendete Diskretisierungen der Zugscheibe ohne anfängliche Imperfektionen aus Abschnitt 8.3.1

mesh1:  $\ell_h \approx 400. \mu\text{m}$



mesh2:  $\ell_h \approx 200. \mu\text{m}$



mesh4:  $\ell_h \approx 100. \mu\text{m}$

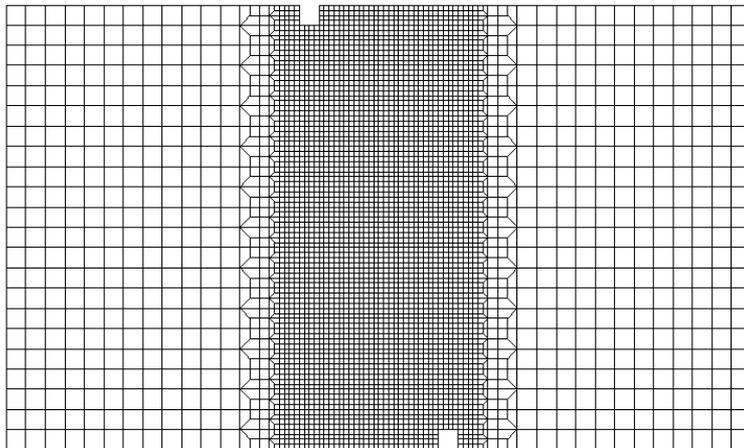
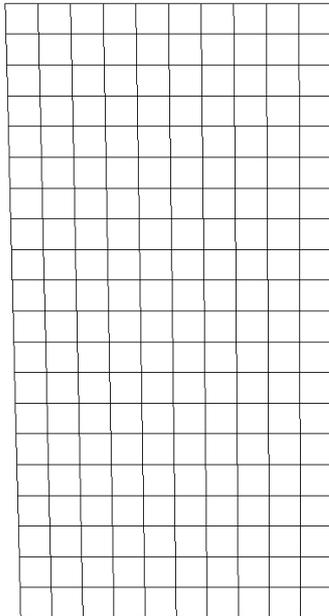


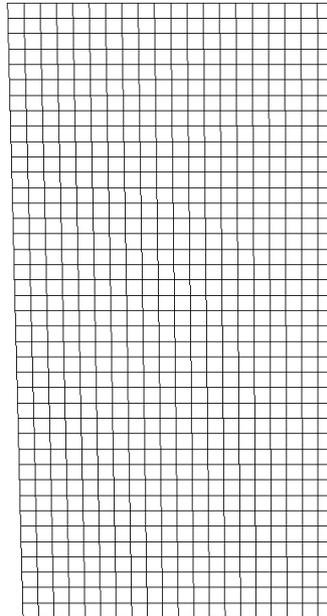
Bild C.2: Verwendete Diskretisierungen der Zugscheibe mit seitlich versetzten Kerben aus Abschnitt 8.3.2

### C. FE-Netze

mesh10×20:  $\ell_h = 100. \mu\text{m}$



mesh20×40:  $\ell_h = 50. \mu\text{m}$



*Bild C.3: Verwendete Diskretisierungen der ebenen Problemstellung unter Druckbelastung aus Abschnitt 8.4*

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Adiabatische Scherbänder in Metallen . . . . .	2
2.1	Bewegung eines Kontinuums von der Referenz- in die Momentankonfiguration	10
2.2	Polare Zerlegung des Deformationsgradienten in einen Rotations- und Streckungsanteil mit Angabe der jeweiligen Komponenten und Basen eines Vektordifferentials . . . . .	12
2.3	Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und plastischen Anteil . . . . .	13
2.4	Kraftvektor am virtuellen Schnittufer des verformten Kontinuums und CAUCHY'sches Spannungstetraeder . . . . .	17
3.1	Prinzipielles Spannungs- plastisches Dehnungsverhalten von Metallen für verschiedene isotherme Zustände und unterschiedliche, konstante Dehnraten . .	30
3.2	Phänomenologische Beschreibung duktiler Schädigung . . . . .	38
3.3	Einfluss der Mehrachsigkeit, plastischen Dehnraten und Temperatur auf die äquivalente Versagensdehnung nach JOHNSON & COOK . . . . .	40
3.4	Spannungs- plastisches Dehnungsverhalten sowie Entwicklung der Temperatur und Schädigung für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei unterschiedlichen, konstanten plastischen Dehnraten. . . . .	42
3.5	Verzweigungsproblem infolge unterschiedlicher Strukturdiskretisierung . . . .	43
4.1	Wichtungsfunktionen von Integralansätzen für $n_{\text{dim}} = 1$ . . . . .	47
4.2	Statistisch verteilte und geometrisch notwendige Versetzungsdichten infolge plastischer Deformation . . . . .	49
4.3	Die GREEN-Funktion der HELMHOLTZ-Gleichung für $n_{\text{dim}} = 1$ und unbegrenzter Intervalllänge im Vergleich zu der GAUSS-Verteilung . . . . .	51
5.1	Einteilung der Zeitachse in finite Zeitinkremente . . . . .	58
6.1	Ortsdiskretisierung der Struktur im Rahmen der FEM . . . . .	69
6.2	Vierknotiges Element in physikalischen und natürlichen Koordinaten . . . . .	73
6.3	Das nicht-lokale Lösungsfeld für eindimensionale Problemstellungen mit starkem Gradienten des lokalen Feldes. . . . .	82
7.1	Ausbreitung einer zum Zeitpunkt $t^\circ$ an der Stelle $X^\circ$ eines eindimensionalen Kontinuums eingeleiteten Störung für verschiedene Parameterwerte . . . . .	90
7.2	Eindimensionale Betrachtung verschiedener Belastungsarten . . . . .	93
7.3	Spannungs-Dehnungsverhalten des lokalen JOHNSON & COOK-Modells bei ausschließlicher Temperaturentfestigung und unterschiedlichen, konstanten plastischen Dehnraten. . . . .	103

7.4	Die dominante Wachstumsrate der Störung in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei konstanter plastischer Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten. . . . .	103
7.5	Der Realteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten. . . . .	104
7.6	Der Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten. . . . .	104
7.7	Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} \text{ 1/s}$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten. . . . .	104
7.8	Die innere Länge des lokalen, ratenabhängigen JOHNSON & COOK-Modells für unterschiedliche plastische Dehnrates. . . . .	105
7.9	Einfluss der Dehnrates abhängigen Materialparamter auf die innere Länge des lokalen JOHNSON & COOK-Modells. . . . .	105
7.10	Spannungs-Dehnungs Verhalten des lokalen Riss-Modells mit linearer Dehnratesverfestigung bei unterschiedlichen, konstanten Rates der Gesamtverzerrung.	108
7.11	Entwicklung der plastischen Dehnrates für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratesverfestigung bei unterschiedlichen, konstanten Rates der Gesamtverzerrung. . . . .	108
7.12	Die dominante Wachstumsrate der Störung in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratesverfestigung. . . . .	108
7.13	Der Realteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratesverfestigung. . . . .	109
7.14	Der Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratesverfestigung. . . . .	109
7.15	Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für das lokale Riss-Modell mit linearer Dehnratesverfestigung. . . . .	109
7.16	Bereich stabiler Lösungen bei Entfestigung in Abhängigkeit der Wellenzahl und des nicht-lokalen Parameters für ein ratenunabhängiges Modell der Gradienten-Plastizität. . . . .	112
7.17	Die Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für ein ratenunabhängiges Modell der Gradienten-Plastizität. . . . .	113
7.18	Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für ein ratenunabhängiges Modell der Gradienten-Plastizität. . . . .	113

7.19	Die dominante Wachstumsrate der Störung in Abhängigkeit der Wellenzahl für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei konstanter plastischer Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} 1/s$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zu unterschiedlichen Zeitpunkten und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern. . . . .	118
7.20	Der Realteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} 1/s$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zum Zeitpunkt $t^\circ = \hat{t}$ und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern. . . . .	119
7.21	Der Imaginärteil der Wellenzahl in Abhängigkeit der Wellenwinkelgeschwindigkeit für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} 1/s$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zum Zeitpunkt $t^\circ = \hat{t}$ und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern. . . . .	119
7.22	Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Wellenzahl für das nicht-lokale JOHNSON & COOK-Modell bei einer konstanten plastischen Dehnrates von $\dot{\epsilon}_p = 10^{+3} 1/s$ und ausschließlicher Temperaturentfestigung zum Zeitpunkt $t^\circ = \hat{t}$ und unterschiedlichen nicht-lokalen Parametern. . . . .	119
7.23	Die innere Länge des nicht-lokalen JOHNSON & COOK-Modells im zeitlichen Verlauf und in Abhängigkeit des nicht-lokalen Parameters für verschiedene, konstant angenommene plastische Dehnrates. . . . .	120
7.24	Das Verhältnis der inneren Länge zu dessen Maximum im zeitlichen Verlauf für verschiedene Werte des nicht-lokalen Parameters. . . . .	121
7.25	Dehnratesabhängigkeit der (skalierten) inneren Länge für verschiedene Werte des nicht-lokalen Parameters. . . . .	121
8.1	Skizze der Problemstellung . . . . .	125
8.2	Entwicklung des Spannungsprofils für den Anfangs-Zeitbereich bis $t = 6 \mu s$ . . . . .	126
8.3	Entwicklung des räumlichen Verlaufs der lokalen, inelastischen Vergleichsdehnung für den gesamten Zeitbereich bis zum Versagen, für $\ell_h = 111 \mu m$ . . . . .	127
8.4	Abhängigkeit der plastischen Vergleichsdehnung des lokalen Modells von der Diskretisierung zum jeweiligen Versagenszeitpunkt . . . . .	127
8.5	Spannungs- logarithmische Dehnungs Diagramme zweier unterschiedlicher Punkte des Kontinuums sowie für verschiedene Diskretisierungen . . . . .	128
8.6	Entwicklung der inneren Länge des lokalen Modells für den Zeitbereich bis zum Beginn der Lokalisierung. . . . .	129
8.7	Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf die Verteilung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung bei einer Diskretisierung von $\ell_h = 111 \mu m$ . . . . .	130
8.8	Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf das Last-Verformungs Verhalten bei einer Diskretisierung von $\ell_h = 111 \mu m$ . . . . .	131
8.9	Verteilung des akkumulierten plastischen Vergleichsdehnungsfeldes $\gamma$ zum Zeitpunkt des Versagens für verschiedene Diskretisierungen unter Verwendung des nicht-lokalen Parameters mit $\sqrt{c_r} = 50 \mu m$ . . . . .	132

## Abbildungsverzeichnis

8.10 Einfluss des nicht-lokalen Parameters auf die Lokalisierungsbreite . . . . .	133
8.11 Auswertung des Verlaufs der inneren Längen des lokalen und nicht-lokalen, eindimensionalen JOHNSON & COOK-Modells . . . . .	134
8.12 Skizze der Zugscheibe im EVZ ohne anfängliche Imperfektionen . . . . .	134
8.13 Ausbildung von Scherbändern in der Zugscheibe als typische Form der Deformationslokalisierung . . . . .	135
8.14 Schädigungsverteilung in der Mitte der Zugscheibe für das lokale und nicht-lokale Modell infolge unterschiedlicher Diskretisierungen . . . . .	136
8.15 Skizze der Zugscheibe mit seitlich versetzten Kerben . . . . .	137
8.16 Last-Verschiebungs-Diagramm für unterschiedliche Entfestigungsmodellierungen des lokalen Modells . . . . .	138
8.17 Die berechnete Temperaturverteilung in der Probe infolge unterschiedlicher Entfestigungsmechanismen . . . . .	139
8.18 Verteilung der Spannungsmehrachsigkeit in der Probe kurz vor Lastabfall . . .	139
8.19 Reaktionskraft-Zeit Verläufe für das lokale und nicht-lokale Modell bei verschiedenen Diskretisierungen . . . . .	140
8.20 Vergleich der Netzabhängigkeit anhand der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung für das lokale und nicht-lokale Modell . . . . .	141
8.21 Skizze der untersuchten Problemstellung unter Druckbelastung . . . . .	142
8.22 Reaktionskraft-Zeit Verläufe für das lokale und nicht-lokale Modell bei verschiedenen Diskretisierungen . . . . .	143
8.23 Vergleich der Netzabhängigkeit der Ergebnisse anhand der Verteilung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung, der Schädigung sowie der Temperatur für das lokale und nicht-lokale Modell . . . . .	144
C.1 Verwendete Diskretisierungen der Zugscheibe ohne anfängliche Imperfektionen aus Abschnitt 8.3.1 . . . . .	168
C.2 Verwendete Diskretisierungen der Zugscheibe mit seitlich versetzten Kerben aus Abschnitt 8.3.2 . . . . .	169
C.3 Verwendete Diskretisierungen der ebenen Problemstellung unter Druckbelastung aus Abschnitt 8.4 . . . . .	170

## Tabellenverzeichnis

2.1	Beziehungen zwischen den Spannungstensoren . . . . .	18
3.1	Zusammenfassung des lokalen ARWPs . . . . .	45
4.1	Zusammenfassung des nicht-lokalen ARWPs der Thermoelasto–Gradienten- Thermoviskoplastizität . . . . .	57
5.1	Standardformen des NEWMARK-Integrationsverfahrens . . . . .	66
5.2	Zusammenfassung des Spannungsalgorithmus . . . . .	66
5.3	Bestimmung des lokalen Dehnungsinkrements $\Delta\varepsilon_{vp}$ und des plastischen Kor- rektors $\Delta p$ . . . . .	67
6.1	Integrationsstützstellen und Wichtungswerte nach GAUSS . . . . .	74
6.2	Einbindung der eigenen Elementformulierung in die Berechnung . . . . .	83
6.3	Verwendung unterschiedlicher Lösungsalgorithmen . . . . .	84
6.4	Verwendung des für jedes Feld getrennten Konvergenzkriteriums . . . . .	86
8.1	Materialkennwerte und Parameter des JOHNSON & COOK-Modells für INCO- NEL 718 . . . . .	124
A.1	Einige Identitätsbeziehungen unter Verwendung von Tensoren 2. Stufe. . . . .	154
A.2	Umformungen unter Verwendung von Einheitstensoren . . . . .	155

## Literaturverzeichnis

- ABU AL-RUB, R. K. UND G. Z. VOYIADJIS (2006). A physically based gradient plasticity theory. *International Journal of Plasticity* 22(4), 654–684.
- AIFANTIS, E. C. (1984). On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models. *Journal of Engineering Materials and Technology* 106, 326–330.
- AIFANTIS, E. C. (1992). On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal of Engineering Science* 30(10), 1279–1299.
- ALLIX, O. (2007). Personal communication, Nantes, Frankreich.
- ANAND, L., K. H. KIM UND T. G. SHAWKI (1987). Onset of shear localization in viscoplastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 35(4), 407–429.
- ARMERO, F. (2002). *Structural Mechanics*. Vorlesungsskript zu CE232, University of California at Berkeley, Dept. of Civil Engineering, SEMM.
- ARNDT, S. (2000). *Modellierung der Warmvorbereitung mit einem Schädigungsmodell für kombinierte Verfestigung am Beispiel des Werkstoffs 10MnMoNi5-5*. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. BAM.
- BAŞAR, Y. UND D. WEICHERT (2000). *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids. Fundamental mathematical and physical concepts*. Springer.
- BAI, Y. UND B. DODD (1992). *Adiabatic Shear Localization. Occurrence, Theories and Applications* (1. Auflage). Pergamon Press.
- BAI, Y. L. (1982). Thermo-plastic instability in simple shear. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 30(4), 195–207.
- BATRA, R. C. UND L. CHEN (2001). Effect of viscoplastic relations on the instability strain, shear band initiation strain, the strain corresponding to the minimum shear band spacing, and the band width in a thermoviscoplastic material. *International Journal of Plasticity* 17(11), 1465–1489.
- BATRA, R. C. UND Z. G. WEI (2007). Instability strain and shear band spacing in simple tensile/compressive deformations of thermoviscoplastic materials. *International Journal of Impact Engineering* 34(3), 448–463.
- BAŽANT, Z. P., T. BELYTSCHKO UND T.-P. CHANG (1984). Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics* 110, 1666–1692.
- BAŽANT, Z. P. UND M. JIRÁSEK (2002). Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics* 128(11), 1119–1149.
- BAŽANT, Z. P. UND F. B. LIN (1988). Nonlocal yield-limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26, 1805–1823.
- BÉDA, P. B. (1999). On the Nature of Flutter and Divergence Material Instabilities. *Periodica Polytechnica - Transport Engineering* 27(1-2), 93–99.

- BÉDA, P. B. (2000). Dynamical systems, rate and gradient effects in material instability. *International Journal of Mechanical Sciences* 42(11), 2101–2114.
- BELYTSCHKO, T., W. K. LIU UND B. MORAN (2001). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons.
- BENALLAL, A. UND V. TVERGAARD (1995). Nonlocal continuum effects on bifurcation in the plane strain tension-compression test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 43(5), 741–770.
- BERTRAM, A. (2005). *Elasticity and Plasticity of Large Deformations – An Introduction*. Springer.
- BETTEN, J. (2001). *Kontinuumsmechanik. Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe* (2. Auflage). Berlin: Springer.
- BIGONI, D. UND T. HUECKEL (1991). Uniqueness and Localization — I. Associative and Non-Associative Elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures* 28(2), 197–213.
- BIGONI, D. UND H. PETRYK (2002). A note on divergence and flutter instabilities in elastic-plastic materials. *International Journal of Solids and Structures* 39(4), 911–926.
- BODNER, S. R. UND Y. PARTOM (1975). Constitutive equation for elastoviscoplastic strain hardening material. *Journal of Applied Mechanics* 42, 385–389.
- BONNET-LEBOUVIER, A.-S., A. MOLINARI UND P. LIPINSKI (2002). Analysis of the dynamic propagation of adiabatic shear bands. *International Journal of Solids and Structures* 39(16), 4249–4269.
- BONORA, N. UND P. P. MILELLA (2001). Constitutive modeling for ductile metals behavior incorporating strain rate, temperature and damage mechanics. *International Journal of Impact Engineering* 26, 53–64.
- BRONSTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL UND H. MÜHLING (2005). *Taschenbuch der Mathematik*, Volume 6. Harri Deutsch.
- BØRVIK, T., O. S. HOPPERSTAD, T. BERSTAD UND M. LANGSETH (2001). A computational model of viscoplasticity and ductile damage for impact and penetration. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 20(5), 685–712.
- BØRVIK, T., O. S. HOPPERSTAD UND M. LANGSETH (2000). Experimental and numerical study of target plate failure in projectile impact. In A. Benallal (Ed.), *Continuous Damage and Fracture*, 317–327. Elsevier.
- BØRVIK, T., M. LANGSETH, O. S. HOPPERSTAD UND K. A. MALO (1999). Ballistic penetration of steel plates. *International Journal of Impact Engineering* 22(9-10), 855–886.
- CAMACHO, G. T. UND M. ORTIZ (1997). Adaptive Lagrangian modelling of ballistic penetration of metallic targets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 142(3-4), 269–301.

- CAMPAGNE, L., L. D. C. DARIDON UND S. D. D. AHZI (2005). A physically based model for dynamic failure in ductile metals. *Mechanics of Materials* 37(8), 869–886.
- CHADWICK, P. (1976). *Continuum Mechanics. Concise Theory and Problems* (2. Auflage). Mineola, New York: Dover.
- CHOPRA, A. K. (2001). *Dynamics of Structures: Theorie and Applications to Earthquake Engineering* (2. Auflage). Prentice-Hall.
- CLOS, R., H. LORENZ, U. SCHREPPPEL UND P. VEIT (2005). Verformungslokalisierung und Spanbildung in Inconel 718. In H. K. Tönshoff und F. Hollmann (Eds.), *Hochgeschwindigkeitsspanen*, 426–445. Weinheim: Wiley.
- DARIDON, L., O. OUSSOUADDI UND S. AHZI (2004). Influence of the material constitutive models on the adiabatic shear band spacing: MTS, power law and Johnson-Cook models. *International Journal of Solids and Structures* 41(11-12), 3109–3124.
- DE BORST, R. UND H. B. MÜHLHAUS (1992). Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35, 521–539.
- DE BORST, R., J. PAMIN UND M. G. D. GEERS (1999). On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 18(6), 939–962.
- DEY, S., T. BORVIK, O. S. HOPPERSTAD UND M. LANGSETH (2007). On the influence of constitutive relation in projectile impact of steel plates. *International Journal of Impact Engineering* 34(3), 464–486.
- EBERLE, A., D. KLINGBEIL UND J. SCHICKER (2000). The calculation of dynamic JR-curves from the finite element analysis of a Charpy test using a rate-dependent damage model. *Nuclear Engineering and Design* 198(1-2), 75–87.
- ENGELEN, R. A. B., M. G. D. GEERS UND F. P. T. BAAIJENS (2003). Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity* 19(4), 403–433.
- ERINGEN, A. C. (1966). A unified theory of thermomechanical materials. *International Journal of Engineering Science* 4, 179–202.
- ERINGEN, A. C. (1981). On nonlocal plasticity. *International Journal of Engineering Science* 19, 1464–1474.
- ESTRIN, Y., A. MOLINARI UND S. MERCIER (1997). The role of rate effects and of thermo-mechanical coupling in shear localization. *Journal of Engineering Materials and Technology* 119, 322–331.
- ESTRIN, Y., L. S. TOTH, A. MOLINARI UND Y. BRECHET (1998). A dislocation-based model for all hardening stages in large strain deformation. *Acta Materialia* 46(15), 5509–5522.
- FELDER, G. (2002). *Partielle Differenzialgleichungen*. Skript zur Vorlesung Analysis III, ETH Zürich, Departement Mathematik.

- FLATTEN, A. (2001). *Erweiterung eines thermo-hygro-mechanischen finiten Mehrfeldelementes auf ein hierarchisch basiertes Elementkonzept*. Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Statik & Dynamik.
- FLECK, N. A. UND J. W. HUTCHINSON (1993). A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41(12), 1825–1857.
- FLECK, N. A. UND J. W. HUTCHINSON (1997). Strain Gradient Plasticity. *Advances in Applied Mechanics* 33, 295–361.
- FLECK, N. A., G. M. MULLER, M. F. ASHBY UND J. W. HUTCHINSON (1994). Strain gradient plasticity: Theory and experiment. *Acta Metallurgica et Materialia* 42(2), 475–487.
- FOLLANSBEE, P. S. UND U. F. KOCKS (1988). A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable. *Acta Metallurgica* 36(1), 81–93.
- FRESSENGEAS, C. UND A. MOLINARI (1987). Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 35(2), 185–211.
- GAO, H., Y. HUANG, W. D. NIX UND J. W. HUTCHINSON (1999). Mechanism-based strain gradient plasticity - I. Theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47(6), 1239–1263.
- GEERS, M. G. D., R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS UND R. H. J. PEERLINGS (1998). Strain-based transient-gradient damage model for failure analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 160(1-2), 133–153.
- GID (2007). *The Personal Pre and Postprocessor, Version 8.0*. Reference manual, International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE, Spanien.
- GIOIA, G. UND M. ORTIZ (1996). The two-dimensional structure of dynamic boundary layers and shear bands in thermoviscoplastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44(2), 251–292.
- GOVINDJEE, S. (2002). *Finite Element Methods*. Course notes CE222, UC Berkeley, SEMM.
- GUDURU, P. R. UND L. B. FREUND (2002). The dynamics of multiple neck formation and fragmentation in high rate extension of ductile materials. *International Journal of Solids and Structures* 39(21-22), 5615–5632.
- GURSON, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I. - Yield criteria and flow rules for porous media. *Journal of Engineering Materials and Technology* 99, 2–15.
- HADAMARD, J. (1903). *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Paris: A. Hermann.
- HILL, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 6(3), 236–249.
- HILL, R. (1962). Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10(1), 1–16.

- HOFFMANN, T. (2006). *Erweiterung eines FE-Modells der Gradientenplastizität für duktilen, dehnraten- und temperaturabhängiges Werkstoffverhalten auf eine dreidimensionale Formulierung*. Diplomarbeit, TU-Berlin, Institut für Luft- und Raumfahrt.
- HORTIG, C. UND B. SVENDSEN (2007). Simulation of chip formation during high-speed cutting. *Journal of Materials Processing Technology* 186(1-3), 66–76.
- HUANG, Y., H. GAO, W. D. NIX UND J. W. HUTCHINSON (2000). Mechanism-based strain gradient plasticity - II. Analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48(1), 99–128.
- HUGHES, T. J. R. (2000). *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover.
- INAL, K., P. D. WU UND K. W. NEALE (2002a). Finite element analysis of localization in FCC polycrystalline sheets under plane stress tension. *International Journal of Solids and Structures* 39(13-14), 3469–3486.
- INAL, K., P. D. WU UND K. W. NEALE (2002b). Instability and localized deformation in polycrystalline solids under plane-strain tension. *International Journal of Solids and Structures* 39(4), 983–1002.
- JIRÁSEK, M. (2004). *Nonlocal Theories in Continuum Mechanics*. Profesorské přednášky, Czech Technical University in Prague, Civil Engineering.
- JIRÁSEK, M. UND Z. P. BAŽANT (2001). *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley. § 26: Models for Localization of Softening and Size Effects.
- JOHNSON, G. R. UND W. H. COOK (1983). A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. In *Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, The Hague, Netherlands., 541–547.
- JOHNSON, G. R. UND W. H. COOK (1985). Fracture Characteristics of Three Metals Subjected to Various Strains, Strain Rates, Temperatures and Pressures. *Engineering Fracture Mechanics* 21(1), 31–48.
- KLINGBEIL, D. (2006). *Finite-Elemente-Methoden in der nichtlinearen Festkörpermechanik*. Vorlesungsskript, Technische Universität Berlin, Institut für Luft- und Raumfahrt.
- KUHL, E. UND E. RAMM (1999). Simulation of strain localization with gradient enhanced damage models. *Computational Materials Science* 16(1-4), 176–185.
- LASRY, D. UND T. BELYTSCHKO (1988). Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures* 24(6), 581–597.
- LEE, E. H. (1969). Elastic plastic deformation at finite strain. *Journal of Applied Mechanics* 36, 1–6.
- LEMAITRE, J. (1992). *A Course on Damage Mechanics* (2. Auflage). Springer.
- LEMAITRE, J. UND R. DESMORAT (2005). *Engineering Damage Mechanics*. Springer.

- LIANG, R. UND A. S. KHAN (1999). A critical review of experimental results and constitutive models for BCC and FCC metals over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity* 15(9), 963–980.
- LIEBE, T., A. MENZEL UND P. STEINMANN (2003). Theory and numerics of geometrically non-linear gradient plasticity. *International Journal of Engineering Science* 41(13-14), 1603–1629.
- LIEBE, T., P. STEINMANN UND A. BENALLAL (2001). Theoretical and computational aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(49-50), 6555–6576.
- LITOŃSKI, J. (1977). Plastic Flow of a tube under adiabatic torsion. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences - Série des Sciences Technique* 25, 7–14.
- LORET, B. UND J. H. PREVOST (1990). Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids, Part 1. General formulation and one-dimensional examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83(3), 247–273.
- MALVERN, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- MAUGIN, G. A. (1990). Internal Variables and Dissipative Structures. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 15, 173–192.
- MEYER, H. W. UND D. S. KLEPONIS (2001). Modeling the high strain rate behavior of titanium undergoing ballistic impact and penetration. *International Journal of Impact Engineering* 26(1-10), 509–521.
- MIEHE, C. (1996). Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 134(3-4), 223–240.
- MINDLIN, R. D. (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 16, 51–78.
- MITROFANOV, A. V., V. I. BABITSKY UND V. V. SILBERSCHMIDT (2004). Finite element analysis of ultrasonically assisted turning of Inconel 718. *Journal of Materials Processing Technology* 153-154, 233–239.
- MOLINARI, A. (1997). Collective behavior and spacing of adiabatic shear bands. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45(9), 1551–1575.
- MOLINARI, A. UND R. J. CLIFTON (1987). Analytical characterization of shear localization in thermoviscoplastic materials. *Journal of Applied Mechanics* 54, 806–812.
- NEEDLEMAN, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67, 69–85.
- NIX, W. D. UND H. GAO (1998). Indentation size effects in crystalline materials: A law for strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46(3), 411–425.
- PAMIN, J. (1994). *Gradient-Dependent Plasticity in Numerical Simulation of Localization Phenomena*. Dissertation, Technische Universiteit Delft.

- PAMIN, J. (2004). *Gradient-enhanced continuum models: Formulation, discretization and applications*. Kraków: Politechnika Krakowska.
- PEERLINGS, R. H. J. (2007). On the role of moving elastic-plastic boundaries in strain gradient plasticity. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* 15, S109–S120.
- PEERLINGS, R. H. J., R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS UND J. H. P. DE VREE (1996). Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39(19), 3391–3403.
- PEERLINGS, R. H. J., R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS UND M. G. D. GEERS (2002). Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21(2), 175–189.
- PEERLINGS, R. H. J., M. G. D. GEERS, R. DE BORST UND W. A. M. BREKELMANS (2001). A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures* 38(44-45), 7723–7746.
- PEIRCE, D., C. F. SHIH UND A. NEEDLEMAN (1984). A tangent modulus method for rate dependent solids. *Computers & Structures* 18(5), 875–887.
- PIJAUDIER-CABOT, G. UND L. BODE (1992). Localization of damage in a nonlocal continuum. *Mechanics Research Communications* 19(2), 145–153.
- POLIZZOTTO, C., G. BORINO UND P. FUSCHI (1998). A thermodynamically consistent formulation of nonlocal and gradient plasticity. *Mechanics Research Communications* 25(1), 75–82.
- QIU, X., Y. HUANG, Y. WEI, H. GAO UND K. C. HWANG (2003). The flow theory of mechanism-based strain gradient plasticity. *Mechanics of Materials* 35(3-6), 245–258.
- REUSCH, F. (2003). *Entwicklung und Anwendung eines nicht-lokalen Materialmodells zur Simulation duktiler Schädigung in metallischen Werkstoffen*. Dissertation, Universität Dortmund, Fakultät Maschinenbau. BAM.
- REUSCH, F., B. SVENDSEN UND D. KLINGBEIL (2003a). Local and non-local Gurson-based damage and failure modeling at large deformation. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 22, 779–792.
- REUSCH, F., B. SVENDSEN UND D. KLINGBEIL (2003b). A non-local extension of Gurson-based ductile damage modeling. *Computational Materials Science* 26, 219–229.
- RICE, J. R. (1976). The localization of plastic deformation. In W. T. Koiter (Ed.), *Theoretical and Applied Mechanics*, 14th IUTAM Congress, Amsterdam, North-Holland, 207–220.
- ROGULA, D. (1965). Influence of spatial acoustic dispersion on dynamical properties of dislocations. I. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences - Série des Sciences Technique* 13, 337–343.
- ROLSHOVEN, S. (2003). *Nonlocal Plasticity Models for Localized Failure*. Dissertation, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Institute de structures.

- ROSAKIS, P., A. J. ROSAKIS, G. RAVICHANDRAN UND J. HODOWANY (2000). A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48(3), 581–607.
- ROUSSELIER, G. (1987). Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design* 105(1), 97–111.
- RUDNICKI, J. W. UND J. R. RICE (1975). Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23(6), 371–394.
- SIEVERT, R., H.-D. NOACK, A. HAMANN, P. LÖWE, K. N. SINGH, G. KÜNECKE, R. CLOS, U. SCHREPPPEL, P. VEIT, E. UHLMANN UND R. ZETTIER (2003). Simulation der Spansegmentierung beim Hochgeschwindigkeits-Zerspanen unter Berücksichtigung duktiler Schädigung. *Technische Mechanik* 23(2-4), 216–233.
- SIMO, J. C. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 99(1), 61–112.
- SIMO, J. C. UND T. J. R. HUGHES (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.
- SINGH, K. N. UND D. KLINGBEIL (2002). Containmentsicherheit bei Flugtriebwerken. Projektzwischenbericht BAM 0402-V-0495, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.
- SINGH, K. N., R. SIEVERT, H.-D. NOACK, R. CLOS, U. SCHREPPPEL, P. VEIT, A. HAMANN UND D. KLINGBEIL (2003). Simulation of failure under dynamic loading at different states of triaxiality for a nickel-base superalloy. *Journal de Physique IV - Proceedings* 110, 275–280. DYMAT 2003, 7th International Conference on Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading Porto, Portugal.
- SLUYS, L. J. (1992). *Wave Propagation, Localization and Dispersion in Softening Solids*. Dissertation, Technische Universiteit Delft.
- SLUYS, L. J. UND Y. ESTRIN (2000). The analysis of shear banding with a dislocation based gradient plasticity model. *International Journal of Solids and Structures* 37(46-47), 7127–7142.
- SVEDBERG, T. UND K. RUNESSON (1997). A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *International Journal of Plasticity* 13(6-7), 669–696.
- SVENDSEN, B. (1999). On the continuum thermodynamics of isotropic thermo-elastic materials with scalar degrees of freedom. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 11, 247–262.
- SVENDSEN, B. (2004). On thermodynamic- and variational-based formulations of models for inelastic continua with internal lengthscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193(48-51), 5429–5452.

- SVENDSEN, B., V. LEVKOVITCH, J. WANG, F. REUSCH UND S. REESE (2006). Application of the concept of evolving structure tensors to the modeling of initial and induced anisotropy at large deformation. *Computers & Structures* 84(17-18), 1077–1085.
- TAYLOR, G. I. UND H. QUINNEY (1937). The Latent Heat Remaining in a Metal after Cold Working. *Proceedings of the Royal Society of London, A* 163(913), 157–181.
- TAYLOR, R. L. (2005). *FEAP – A Finite Element Analysis Program, Version 7.5*. User manual, Programmer manual, UC Berkeley.
- THOMASON, P. F. (1990). *Ductile Fracture of Metals*. Pergamon Press.
- TOUPIN, R. A. (1962). Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 11, 385–414.
- TVERGAARD, V. UND A. NEEDLEMAN (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica* 32(1), 157–169.
- TVERGAARD, V. UND A. NEEDLEMAN (1995). Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 32(8-9), 1063–1077.
- ŠILHAVÝ, M. (1997). *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Berlin: Springer.
- WANG, W. M. UND L. J. SLUYS (2000). Formulation of an implicit algorithm for finite deformation viscoplasticity. *International Journal of Solids and Structures* 37(48-50), 7329–7348.
- WRIGHT, T. W. (2002). *The physics and mathematics of adiabatic shear bands*. Cambridge monographs on mechanics. Cambridge University Press.
- WRIGHT, T. W. UND H. OCKENDON (1996). A scaling law for the effect of inertia on the formation of adiabatic shear bands. *International Journal of Plasticity* 12(7), 927–934.
- WÜST, R. (2002). *Mathematik für Physiker und Mathematiker. Band 2: Analysis im Mehrdimensionalen und Einführungen in Spezialgebiete*. Wiley-VCH. Kap. 17.
- WU, F. H. UND L. B. FREUND (1984). Deformation trapping due to thermoplastic instability in one-dimensional wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 32(2), 119–132.
- YADAV, S., E. A. REPETTO, G. RAVICHANDRAN UND M. ORTIZ (2001). A computational study of the influence of thermal softening on ballistic penetration in metals. *International Journal of Impact Engineering* 25(8), 787–803.
- ZBIB, H. M. UND E. C. AIFANTIS (1988). On the Localization and Postlocalization Behaviour of plastic Deformation I.-III. *Res Mechanica* 23, 261–277, 279–292, 293–305.
- ZENER, C. UND J. H. HOLLomon (1944). Effect of strain rate upon plastic flow of steel. *Journal of Applied Physics* 15, 22–32.
- ZERILLI, F. J. UND R. W. ARMSTRONG (1987). Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations. *Journal of Applied Physics* 61(5), 1816–1825.

- ZERILLI, F. J. UND R. W. ARMSTRONG (1990). Description of tantalum deformation behaviour by dislocation mechanics based constitutive relations. *Journal of Applied Physics* 68, 1580–1590.
- ZIENKIEWICZ, O. C. UND R. L. TAYLOR (2005). *The Finite Element Method* (6. Auflage). Butterworth Heinemann.

## Danksagung

Ich bedanke mich herzlich bei allen Personen, die mich unterstützt und zum erfolgreichen Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dietmar Klingbeil für seine Idee und Anregung zu dieser Arbeit, für seine kontinuierliche Betreuung sowie zahlreichen Anmerkungen und Kommentare. Sein mir entgegengebrachtes Vertrauen zusammen mit dem thematischen Überblick und Fokus auf Schwerpunkte haben den Rahmen für ein angenehmes Arbeitsverhältnis geschaffen. Darüber hinaus danke ich besonders Prof. Bob Svendsen für seine fachliche Unterstützung und Betreuung und für unsere zahlreichen Diskussionen über die verschiedenen Aspekte und Details dieser Arbeit. Bei Prof. Klaus Thermann bedanke ich mich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission und bei Prof. Andreas Menzel für sein entgegengebrachtes Interesse und anregenden Bemerkungen zu dieser Arbeit.

Meinen Kollegen an der BAM, insbesondere Georgia Künecke, Dr. Rainer Sievert, Mirjana Zelewski, Dr. Bernard Fedelich, Cetin Haftaoglu, Dieter Noack, Yusuf Kiyak und Arno Eberle sowie Ricarda Brandt, danke ich für die freundliche Arbeitsatmosphäre und gute Zusammenarbeit. Darüber hinaus danke ich Dr. Rainer Sievert für seine Hinweise und Euphorie zu dem Thema dieser Arbeit. Ebenso danke ich Dr. Frederik Reusch, Kai Singh und Dr. Vladislav Levkovitsch sowie Thorsten Hoffmann für den ständigen Gedankenaustausch, die Hilfestellungen und sämtlichen Diskussionen. Meinen weiteren Kollegen an der Universität Dortmund, insbesondere Christian Hortig, Jaan Unger, Tobias Kayser und Wang Xian danke ich für die nette Zeit auf Dienstreisen und Tagungen sowie Kerstin Walter und Christine Vu für ihre organisatorische Hilfe zum Ende meiner Dissertation. Nicht zuletzt danke ich den vielen Lehrern während meiner Studien in Berkeley und Bochum für die gute fachliche Ausbildung und Förderung; speziell Dr. Holger Karutz für seine vielen motivierenden Anregungen und Ideen sowie Dr. Stefan Grasberger für seine fachliche Förderung und Freundschaft.

In ganz besonderer Weise danke ich Stella Schmid, die mich nicht nur während der Zeit dieser Arbeit begleitet sowie hilfreich unterstützt und motiviert hat, sondern fortwährend mein Leben mit Ihrer Anteilnahme, Ihrem Verständnis und Vertrauen, Ihrem Zuhören und kritischen Hinterfragungen, mit Ihrer Impulsivität und Emotionalität sowie dank der vielen Momente geteilter Freude und durch das gemeinsame Schmieden neuer Ziele und Pläne stets wunderbar bereichert.

Weiter danke ich meinen Eltern Marion und Franz-Josef Flatten für Ihre Unterstützung und die zusammen mit meinem Großonkel August Flatten gestaltete Ermöglichung meines Studiums, meinem Bruder Christoph Flatten für seine Unterstützung sowie meiner Tante Roswitha Flatten für Ihre stets herzlichen Briefe und Wünsche. Darüber hinaus danke ich Familie Reni und Stefan Schmid und Familie Susanne und Franz Mittelviehhaus sowie Dr. Heribert Schmid für die offene und herzliche Einbeziehung in ihr Familienleben. Johannes Reichert und Hendrik Wobben möchte ich für ihre langjährige Freundschaft danken, sowie Johannes Rühl, Thorsten Falk und Kerstin Büttner mit Lotta sowie Verena Büttner, Stephan Velten und Lisa Neumann, Volker Hecht, Markus Gebhardt, Uwe Popall und Lydia Reich, Maja Schupfner und Christian Hanke für eine herrliche Zeit in Berlin und die vielen gemeinsamen Unternehmungen. Ebenso bedanke ich mich bei Daniel Hurtardo für seine Unterstützung und Freundschaft. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Doktorandenprogramm der BAM danke ich für die Finanzierung dieser Arbeit.

# Lebenslauf

## Personalien

Familienname: Flatten  
Vornamen: Arnd Dietmar  
Geburtsdatum und -ort: 8. Juni 1976 in Bochum  
Nationalität: Deutsch

## Akademische Ausbildung

1986 – 1995 Hellweg-Schule, Städtisches Gymnasium in Bochum,  
Abitur (06/1995)

1996 – 2001 Studium Bauingenieurwesen an der Ruhr-Universität Bochum,  
Diplom-Ingenieur (03/2001)

2001 – 2002 Studium Bauingenieurwesen an der University of California at  
Berkeley, USA,  
Master of Science (05/2002)

2002 – 2007 Wissenschaftlicher Angestellter an der Bundesanstalt für  
Materialforschung und -prüfung (BAM) Berlin,  
in Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Mechanik, Fakultät für  
Maschinenbau der Universität Dortmund

