technische universität dortmund

Ein aktuarielles Modell für die Portabilität der Alterungsrückstellungen in der PKV

Henryk Zähle

Preprint 2009-11 September 2009

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

tu-dortmund.de/MathPreprints

Ein aktuarielles Modell für die Portabilität der Alterungsrückstellungen in der PKV

Henryk Zähle*

Zusammenfassung

Es wird ein aktuarielles Modell für die Portabilität der Alterungsrückstellungen in der deutschen Privaten Krankenversicherung (PKV) präsentiert, das im Gegensatz zu herkömmlichen PKV-Modellen auf einer (altersdynamischen) Einteilung des Versichertenbestandes in bestimmte Risikoklassen basiert. Das Modell erlaubt eine mathematisch exakte und versicherungstechnisch zufrieden stellende Lösung für das Problem der Portabilität der Alterungsrückstellungen: Die Storno-Option sollte bei der Bestimmung der Prämien praktisch unberücksichtigt bleiben, während bei der Ausübung der Storno-Option dem kündigenden Versicherungsnehmer ein Kapital in Höhe des erwarteten Barwertes der noch folgenden Leistungsüberschüsse *bedingt auf die aktuelle Risikoklasse des Versicherungsnehmers* mitzugeben ist.

Schlagwörter. Private Krankenversicherung, Alterungsrückstellung, Markovprozess, elementare bedingte Wahrscheinlichkeit, elementarer bedingter Erwartungswert

*Postanschrift: Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, Vogelpothsweg 87, D-44227 Dortmund; E-Mail: henryk.zaehle@math.tu-dortmund.de

1 Einleitung

Seit dem 01.01.2009 müssen Private Krankenversicherungsunternehmen (PKV-U) ihren Kunden eine Portabilität der Alterungsrückstellungen – genauer eines gewissen Übertragungswertes – gewährleisten. Im § 204 der ab 01.01.2009 gültigen Fassung des VVG heißt es: „Bei bestehendem Versicherungsverhältnis kann der Versicherungsnehmer vom Versicherer verlangen, dass dieser (...) bei einer Kündigung des Vertrages und dem gleichzeitigen Abschluss eines neuen Vertrages (...) bei einem anderen Krankenversicherer die kalkulierte Alterungsrückstellung (...) an den neuen Versicherer überträgt, sofern die gekündigte Krankheitskostenversicherung nach dem 1. Januar 2009 abgeschlossen wurde".

Diese Neuregelung ist in erster Linie dem staatlichen Wunsch nach einer Stärkung des Wettbewerbs zwischen den PKV-Unternehmen geschuldet. In der Tat war ein Wechsel des PKV-U für einen Versicherten bisher äußerst unattraktiv. Bis Ende 2008 wurde einem kündigenden Versicherungsnehmer (VN) kein Kapital mitgegeben. Zwar hatte diese Regelung eine senkende Wirkung auf den Beitrag – die Stornowahrscheinlichkeiten waren als Rechnungsgrundlagen in der Prämienkalkulation fest verankert. Ein PKV-U-Wechsel führte für einen VN aber typischerweise zu einem mehr oder weniger erheblichen Mehrbeitrag, da der VN dann erneut mit dem Aufbau der Alterungsrückstellung (AR) beginnen musste. Auch wenn das „alte" Kalkulationsprinzip auf einer Äquivalenzgleichung basierte und somit ein „faires Spiel" induzierte, ist die oft genannte Kritik an der extrem schlechten Stellung von Wechslern aber wohl durchaus gerechtfertigt. Etwas überspitzt ausgedrückt konnte es sich ein PKV-U erlauben, als Folgerung von „schlechtem Wirtschaften" kontinuierlich Prämienanpassungen vorzunehmen, ohne dass ein Wechsel zu einem besser wirtschaftenden PKV-U für einen älteren VN lohnenswert gewesen wäre, denn die durchaus signifikanten Prämienanpassungen fielen letzlich doch meist harmloser aus als der Mehrbeitrag eines neuen Vertrages bei einem anderen PKV-U.

Auch wenn die Mitgabe von Kapital bei einer Vertragskündigung bereits gesetzlich vorgeschrieben ist, so existiert doch bisher kein aktuariell zufrieden stellendes Verfahren, mit dem man „faire" Werte sowohl für die Prämie als auch für das mitzugebende Kapital bestimmen kann.

Eine auf den ersten Blick vermeintlich faire Lösung dieses Problems wäre es, die Stornowahrscheinlichkeiten in den Rechnungsgrundlagen gleich Null zu setzen und einem kündigenden VN ein Kapital in Höhe der für ihn (bei Weiterlaufen des Vertrages) benötigten AR mitzugeben. Auf den zweiten Blick ist dieser Ansatz aber in keiner Weise tragbar, da er in späteren Vertragsjahren überdurchschnittlich gesunden VN gewissermaßen „free lunch with vanishing risk" einräumt und überdurchschnittlich kranken VN praktisch wieder die Wechselmöglichkeit nimmt. In der Tat: Entwickelt sich der Gesundheitszustand eines VN bis zu einem späteren Zeitpunkt überdurchschnittlich gut, dann ist der für ihn zu diesem Zeitpunkt individuell erwartete Barwert der zukünftigen Leistungsüberschüsse kleiner als seine herkömmlich berechnete Alterungsrückstellung V. Kann der VN seinen überdurchschnittlich guten Gesundheitszustand im Rahmen einer Gesundheitsprüfung belegen, dann wird ihn ein anderes PKV-U bzgl. des Beitrages besser stellen können, wenn es von dem alten PKV-U das Kapital V übertragen bekommt. Entwickelt sich der Gesundheitszustand eines VN im Laufe des Vertrages hingegen überdurchschnittlich schlecht, dann würde sich ein neuer Vertrag hinsichtlich des Beitrages negativ auswirken, da eine Gesundheitsprüfung feststellen würde, dass der erwartete Barwert der für ihn individuell noch benötigten Leistungsüberschüsse größer ist als seine herkömmlich berechnete Alterungsrückstellung V. Der oben zunächst in Betracht gezogene Ansatz würde eine adverse Selektion fördern und ist nicht zuletzt auf Grund dessen aus aktuarieller Sicht unsinnig.

Letztlich ist das Problem des eben diskutierten Ansatzes darauf zurückzuführen, dass die herkömmliche Prämienkalkulation – egal, ob die Stornowahrscheinlichkeiten gleich Null gesetzt werden oder nicht – die sich im Laufe eines Vertrages ändernde individuelle Risikolage eines VN nicht berücksichtigt und bei der Festlegung der individuellen AR nur die kollektive Risikolage beachtet. Will man das Problem der Portabilität der AR aktuariell vernünftig in den Griff bekommen, dann kommt man nicht umhin, das herkömmliche PKV-Modell derart zu modifizieren, dass die individuelle Risikolage eines VN berücksichtigt wird. Praktisch muss das modifizierte Modell dazu führen, dass die Kapitalmitgabe für einen gesunden VN geringer ausfällt als für einen kranken VN. Die Notwendigkeit dieser Bedingung wurde in der Literatur bereits mehrfach diskutiert, siehe z. B. [3, 4, 5, 6, 11, 12] und darin zitierte Arbeiten. Auf den dargestellte Ansatz wird oft auch als „Meyer-Modell“ verwiesen. Bisher existierte nach besten Wissen des Autors aber noch keine mathematisch exakte Behandlung dieser Thematik. In der vorliegenden Arbeit wird nun ein entsprechendes, aktuariell fundiertes Modell präsentiert. Im gewissen Sinne können die Ausführungen als eine mathematische Aufarbeitung des Meyer-Modells verstanden werden.

2 Hauptergebnis

Der entscheidende Punkt ist die Einteilung des Versichertenbestandes eines Tarifs nach den individuellen Gesundheitszuständen. Neben dem Merkmal „Lebensalter“ klassifizieren wir den Bestand also zusätzlich nach dem Merkmal „Gesundheitszustand“. Vereinfachend nehmen wir an, es gebe nur endlich viele Gesundheitszustände $1, \ldots, l$. Die VN mit dem gleichen Gesundheitszustand fassen wir dann zu einer *Risikoklasse* zusammen. Ein Wechsel zwischen den Risikoklassen $1, \ldots, l$ sei jedes Jahr möglich. Der mit einer Risikoklasse verbundene Gesundheitszustand ist relativ zum aktuellen Lebensalter zu sehen, so dass ein VN sein ganzes Leben einer Risikoklasse angehören kann, obwohl sich sein Gesundheitszustand absolut natürlich ändert. Im einfachsten Falle könnte man z. B. nur drei Risikoklassen betrachten: „überdurchschnittlich gesunde VN“, „durchschnittliche VN“ und „überdurchschnittlich kranke VN“. Wie in der Personenversicherung üblich, betrachten wir außerdem einen festen Altersbereich $AB := \{x_{\min}, \ldots, x_{\max}\} \subset \mathbb{N}$ von Altersstufen (diskretisierten Lebensaltern mit Schrittweite von einem Jahr). Dabei geben $x_{\min}$ typischerweise das Eintrittsalter in Erwachsenentarife und $x_{\max}$ das rechnerisch maximale aufgerundete Lebensalter an, z. B. $x_{\min} = 20$

oder 21, und $x_{\max} = 102$.

Wir betrachten nun einen PKV-Vertrag der folgenden Gestalt: Ein abgeschlossener Vertrag läuft prinzipiell bis zum Ableben des VN. Der VN hat aber die Option, den Vertrag zu Lebzeiten am Ende eines jeden Vertragsjahres zu kündigen. Die Laufzeit verkürzt sich dann auf die Spanne zwischen Vertragsabschluss und Kündigung. Während der Vertragslaufzeit zahlt der VN einen Beitrag, der über die Jahre konstant ist. Im Gegenzug übernimmt das PKV-U während der Laufzeit alle Schadenleistungen, die durch den betrachteten Tarif abgedeckt sind. Im Falle einer Vertragskündigung erhält der VN einen bestimmten Kapitalbetrag, der von der aktuellen Risikoklasse des VN und von der aktuellen Vertragsdauer abhängt (für jede Risikoklasse und Vertragsdauer aber bereits bei Vertragsabschluss festgelegt wird). Das Ziel ist eine adäquate Festlegung des Beitrages und der mitzugebenden Kapitalbeträge.

Der erste Schritt in diese Richtung ist die Formulierung eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells des eben beschriebenen Vertrages. Als Ausgangspunkt dienen dabei die Ausführungen in den Monographien [1, 8]. Eine aus Sicht des Autors sinnvolle Erweiterung des dort betrachteten Modells wird in Abschnitt 3 präsentiert. Mit Hilfe dieses Modells lassen sich dann wertvolle Erkenntnisse gewinnen. In Abschnitt 4 untersuchen wir zunächst den Fall, in dem der VN keine Kündigungsmöglichkeit besitzt. Wir bestimmen für diesen Fall sowohl einen adäquaten Beitrag als auch die Höhe der AR unter Berücksichtigung der jeweils aktuellen Risikoklasse. In Abschnitt 5 betrachten wir dann die Situation, in der dem VN eine Storno-Option eingeräumt wird. Wir geben eine mathematisch fundierte Verifikation der folgenden Aussage, die gewissermaßen die Hauptbotschaft dieses Artikels darstellt: Wird dem VN bei einer Vertragskündigung ein Kapital in Höhe der in Abschnitt 4 *unter Berücksichtigung der jeweils aktuellen Risikoklasse* bestimmten AR mitgegeben, dann garantiert die in Abschnitt 4 berechnete Äquivalenzprämie für den Vertrag ohne Storno-Option auch die Äquivalenz der erwarteten Leistungs- und Prämienbarwerte für den Vertrag mit Storno-Option. Bemerkenswert und für praktische Zwecke extrem nützlich ist dabei die Tatsache, dass das Stornoverhalten auf die Prämienkalkulation keinen Einfluss hat. Im Falle des bisher verwendeten PKV-Modells ([1, 8]), in dem nicht nach Risikoklassen klassifiziert wird, wurde diese Tatsache bereits in [8, Abschnitt 2.9] festgestellt; siehe auch [10, Kapitel 10].

Theoretisch liefert dies eine erstaunlich einfache und praktikable Lösung des Problems der Portabilität der AR. Dies würde nämlich nichts anderes bedeuten, als dass bei der Beitrags- und AR-Kalkulation den Ausführungen von Abschnitt 4 gefolgt werden kann und dass dem VN bei Storno ein Kapital in Höhe der für ihn individuell benötigten AR mitzugeben ist. Praktisch ist man allerdings noch mit dem Problem der Prämienanpassungen konfrontiert. In Abschnitt 6 schlagen wir daher ein mögliches pragmatisches Vorgehen in der Praxis vor. Ein weiters Problem, das bleibt, ist eine adäquate Einteilung des Versichertenbestandes in Risikoklassen. Natürlich kann ein PKV-U im Laufe des Vertrages Informationen über den VN sammeln, die den Gesundheitszustand des VN spezifizieren. Allerdings müssen hier objektive und eindeutige Kriterien erarbeitet werden, da der VN und das PKV-U bei einer Kapitalmitgabe unterschiedliche Interessen verfolgen. Eine faire Lösung dieses Problems kann in den

Augen des Autors nur durch eine fachübergreifende Arbeitsgruppe aus Gesundheitsexperten, Versicherungswirtschaftlern, Juristen und Aktuaren konzipiert werden. Die Zuordnung eines VN zu eine Risikoklasse könnte sich z. B. an der Evaluierung des „Gesundheitszustandes" eines VN im Rahmen des morbiditätsorientierten Risikostrukturausgleichs im GKV-System orientieren. Diesbezügliche Details findet man z. B. in [2, 13].

3 Mathematisches Modell für einen VN

Wir betrachten einen (potenziellen) VN, der im Laufe seines Lebens einen PKV-Vertrag für einen bestimmten Tarif abschließen könnte. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, der groß genug ist, um alle relevanten Zufallsvariablen zu beherbergen. Wie bereits in Abschnitt 2 beschrieben, zeichnet sich das zu konstruierende Modell im Gegensatz zu herkömmlichen PKV-Modellen dadurch aus, dass das Versichertenkollektiv in bestimmte Risikoklassen eingeteilt wird.

3.1 Risikoklassen und Vertragszustände

Wir betrachten l Risikoklassen $1, \ldots, l$, denen der VN zu Lebzeiten angehören kann. Wir sagen ferner, der VN gehört der Risikoklasse ∂ an, falls er bereits verstorben ist. Die Menge $H_\partial := \{1, \ldots, l, \partial\}$ enthält somit alle möglichen Risikoklassen. Gehört der betrachtete VN zu Beginn seines x-ten Lebensjahres einer Risikoklasse aus $H := H_\partial \setminus \{\partial\} = \{1, \ldots, l\}$ an, dann ist er zu diesem Zeitpunkt also noch am Leben. Ein Wechsel von einer Risikoklasse aus H in eine beliebige andere Risikoklasse aus H_∂ sei am Ende einer jeden Altersstufe möglich. Die Risikoklasse ∂ ist hingegen eine „Falle". Ferner sei $R := \{0, 1, 2\}$ der Raum der möglichen Vertragszustände, wobei die Elemente 0, 1 und 2 die Zustände „Vertrag ist noch nicht abgeschlossen", „Vertrag läuft" bzw. „Vertrag wurde abgeschlossen, ist aber bereits wieder beendet" symbolisieren. Der Raum $Z := (H_\partial \times R) \setminus \{(\partial, 1)\}$ enthält dann alle möglichen „Zustände" des betrachteten VN. Befindet sich der VN zu einem bestimmten Zeitpunkt im Vertragszustand 1, dann sagen wir auch, er ist zu diesem Zeitpunkt *aktiv*.

Es sei nun $\zeta = (\zeta_y = (\chi_y, \rho_y) : y \in AB)$ ein Z-wertiger zeitdiskreter (inhomogener) Markovprozess, der die Risiko- und Vertragszustände des betrachteten VN in den einzelnen Altersstufen $y \in AB$ modelliert. Die Markoveigenschaft bedeutet anschaulich, dass die zukünftigen Risiko- und Vertragszustände nur vom jeweils aktuellen Risiko- und Vertragszustand abhängen, also von den Zuständen vergangener Jahre unabhängig sind. Das ist sicherlich eine vereinfachende, auf intuitiver Ebene aber durchaus vertretbare Annahme. Es bezeichne

$$\mu_{y,y'}((h,r),(h',r')) := \mathbb{P}[(\chi_{y'}, \rho_{y'}) = (h', r') \,|\, (\chi_y, \rho_y) = (h, r)] \tag{1}$$

die Übergangswahrscheinlichkeit von ζ für $(h,r),(h',r') \in Z$ und $y, y' \in AB$ mit $y \leq y'$. Um die gewünschte Interpretation von ζ zu rechtfertigen, sollten für $h, h' \in H$ und $y, y' \in AB$ mit $y < y'$ folgende Annahmen getroffen werden:

$$\mu_{y,y'}((h,0),(\partial,2)) \;=\; 0\,, \quad \text{falls } y' = y+1 \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{y,y'}((h,0),(h',2)) &= 0\,, \quad \text{falls } y' = y+1 && (3)\\
\mu_{y,y'}((\partial,0),(\partial,0)) &= 1 && (4)\\
\mu_{y,y'}((h,1),(\partial,0)) &= 0 && (5)\\
\mu_{y,y'}((h,1),(h',0)) &= 0 && (6)\\
\mu_{y,y'}((h,2),(h',0)) &= 0 && (7)\\
\mu_{y,y'}((h,2),(h',1)) &= 0 && (8)\\
\mu_{y,y'}((h,2),(\partial,0)) &= 0 && (9)\\
\mu_{y,y'}((\partial,2),(\partial,2)) &= 1 && (10)
\end{aligned}
$$

Wir nehmen ferner an, dass die Entwicklung des Gesundheitszustandes eines VN unabhängig davon ist, ob der Vertrag schon gekündigt wurde oder nicht. Auf mathematischer Ebene nehmen wir genauer an,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[\chi_{y'} = h' \,|\, \chi_y = h,\, \rho_y = 1] &= \mathbb{P}[\chi_{y'} = h' \,|\, \chi_y = h,\, \rho_y \geq 1]\,, && (11)\\
\mathbb{P}[\chi_{y'} = h' \,|\, \chi_y = h,\, \rho_y = 1] &= \mathbb{P}[\chi_{y'} = h' \,|\, \chi_y = h,\, \rho_y = 2]\,, && (12)\\
\mathbb{P}[\chi_{y'} = h' \,|\, \chi_y = h,\, \rho_y = 2] &= \mathbb{P}[\chi_{y'} = h' \,|\, \chi_y = h] && (13)
\end{aligned}
$$

für alle $h, h' \in H$ und $y, y' \in AB$ mit $y \leq y'$. Zwar scheinen diese Annahmen auf den ersten Blick diskutabel zu sein. Im Laufe unserer Untersuchungen wird aber deutlich werden, dass man keine Abhängigkeit zwischen dem Gesundheitszustand und dem Kündigungsverhalten eines VN annehmen sollte (was insbesondere die Annahmen (11)–(13) impliziert).

Es seien nun

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &:= \inf\{y \in AB : \rho_y = 1\}\,,\\
\tau_2 &:= \inf\{y \in AB : \rho_y = 2\}
\end{aligned}
$$

das Alter bei Vertragsabschluss bzw. das auf ganze Jahre aufgerundete Alter bei Vertragsende. Wie üblich verwenden wir die Konvention $\inf \emptyset = \infty$. Für alle $x \in AB$ setzen wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{x,h} &:= \mathbb{P}[\,.\,|\, \tau_1 = x,\, \chi_x = h] && (14)\\
&= \mathbb{P}[\,.\,|\, \rho_x = 1,\, \rho_{x-1} = 0,\, \chi_x = h]
\end{aligned}
$$

und erhalten mit der Markoveigenschaft von ζ

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{x,h}[(\chi_{y''}, \rho_{y''}) = (h'', r'') \,|\, (\chi_{y'}, \rho_{y'}) = (h', r')] && (15)\\
&\quad = \mathbb{P}[(\chi_{y''}, \rho_{y''}) = (h'', r'') \,|\, (\chi_{y'}, \rho_{y'}) = (h', r')]
\end{aligned}
$$

für alle $h, h' \in H$, $h'' \in H_\partial$, $r, r' \in \{1, 2\}$ und $x, y', y'' \in AB$ mit $x < y' \leq y''$. Die Identität (15) bleibt auch im Fall $x = y'$ richtig, falls $h = h'$. Die allgemeinen Übergangswahrscheinlichkeiten von Markovketten können bekanntlich mit Hilfe der Ein-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{y,y'}((h_y, r_y), (h_{y'}, r_{y'})) && (16)\\
&\quad = \sum_{(h_{y+1}, r_{y+1}) \in Z} \cdots \sum_{(h_{y'-1}, r_{y'-1}) \in Z} \prod_{z=y}^{y'-1} \mu_{z,z+1}((h_z, r_z), (h_{z+1}, r_{z+1}))
\end{aligned}
$$

für alle $y, y' \in AB$ mit $y \leq y'$ und $(h_y, r_y), (h_{y'}, r_{y'}) \in Z$.

3.2 Biometrische Rechnungsgrundlagen

Es seien

$$\begin{aligned} F_y &:= \{\chi_y \neq \partial,\, \rho_y \geq 1\}\,, \\ F_y^h &:= \{\chi_y = h,\, \rho_y \geq 1\} \end{aligned}$$

die Ereignisse, dass der betrachtete VN in Altersstufe $y \in AB$ noch am Leben ist und bereits aktiv war (oder noch ist) bzw. der Risikoklasse $h \in H$ angehört (insbesondere also noch am Leben ist) und bereits aktiv war (oder noch ist). Ferner seien

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_y &:= \{\rho_y = 1\}\,, \\ \widetilde{F}_y^h &:= \{\chi_y = h,\, \rho_y = 1\} \end{aligned}$$

die Ereignisse, dass der betrachtete VN zu Beginn von Altersstufe $y \in AB$ aktiv ist bzw. aktiv ist und der Risikoklasse $h \in H$ angehört. Schließlich seien

$$\begin{aligned} E_y &:= \{\tau_2 = y\}\,, \\ E_y^h &:= \{\chi_y = h,\, \tau_2 = y\} \end{aligned}$$

die Ereignisse, dass der VN seinen Vertrag zur Altersstufe $y \in AB$ (d. h. am Ende von Altersstufe $y-1$) storniert bzw. zur Altersstufe $y \in AB$ storniert und zu Beginn von Altersstufe y der Risikoklasse $h \in H$ angehört (insbesondere also noch am Leben ist).

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein y-jähriger VN aus Risikoklasse $h \in H$, der bereits aktiv war (oder noch ist), in Altersstufe $y' \geq y$ der Risikoklasse $h' \in H$ angehört, bezeichnen wir mit $p_{y,y'}^{h,h'}$, d. h.

$$\begin{aligned} p_{y,y'}^{h,h'} &:= \mathbb{P}[F_{y'}^{h'} \mid F_y^h] && (17) \\ &= \mathbb{P}[F_{y'}^{h'} \mid \widetilde{F}_y^h]\,. && (18) \end{aligned}$$

Wir nennen diese Größe auch *Überlebenswahrscheinlichkeit*. Die Identität (18) ist eine Folgerung von (11). Im Anhang A.1 werden wir zeigen, dass für alle $h_y, h_{y'} \in H$ und $y, y' \in AB$ mit $y \leq y'$ gilt,

$$p_{y,y'}^{h_y,h_{y'}} = \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \cdots \sum_{h_{y'-1}=1}^{l} \prod_{z=y}^{y'-1} p_{z,z+1}^{h_z,h_{z+1}}\,. \tag{19}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein y-jähriger aktiver VN aus Risikoklasse $h \in H$ auch in Altersstufe $y' \geq y$ aktiv ist und dann der Risikoklasse h' angehört, bezeichnen wir mit $\widetilde{p}_{y,y'}^{h,h'}$, d. h.

$$\widetilde{p}_{y,y'}^{h,h'} := \mathbb{P}[\widetilde{F}_{y'}^{h'} \mid \widetilde{F}_y^h]\,. \tag{20}$$

Wir nennen diese Größe auch *Verbleibswahrscheinlichkeit.* Als Spezialfall von (16) erhalten wir unter Beachtung von (6)–(8) für alle $h_y, h_{y'} \in H$ und $y, y' \in AB$ mit $y \leq y'$

$$\widetilde{p}_{y,y'}^{h_y,h_{y'}} = \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \cdots \sum_{h_{y'-1}=1}^{l} \prod_{z=y}^{y'-1} \widetilde{p}_{z,z+1}^{h_z,h_{z+1}} . \tag{21}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein y-jähriger aktiver VN aus Risikoklasse h seinen Vertrag zur Altersstufe $y' \geq y$ (d. h. am Ende von Altersstufe $y'-1$) storniert und zu Beginn von Altersstufe y' der Risikoklasse h' angehört, bezeichnen wir mit $w_{y,y'}^{h,h'}$, d. h.

$$w_{y,y'}^{h,h'} \quad := \quad \mathbb{P}[E_{y'}^{h'} \,|\, \widetilde{F}_y^h] \,. \tag{22}$$

Wir nennen diese Größe auch *Stornowahrscheinlichkeit.* Wir erhalten folgende Beziehung zwischen den Überlebens-, Verbleibs- und Stornowahrscheinlichkeiten, deren Beweis im Anhang A.2 zu finden ist.

Lemma 3.1 *Für alle $h, h_y \in H$ und $x, y \in AB$ mit $x \leq y$ gilt*

$$p_{x,y}^{h,h_y} = \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} p_{u,y}^{h_u,h_y} w_{x,u}^{h,h_u} .$$

Die Höhe des von dem betrachteten VN in Altersstufe $y \in AB$ verursachten Schadens, der durch den betrachteten Tarif potenziell abgedeckt wäre, bezeichnen wir mit Y_y. Wir nehmen dabei an, dass $Y_{x_{\min}}, \ldots, Y_{x_{\max}}$ nichtnegative, $\mathbb{P}$-integrierbare Zufallsvariablen sind, d. h. $Y_{x_{\min}}, \ldots, Y_{x_{\max}} \in L_+^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. In Anlehnung an die in der PKV übliche Terminologie nennen wir nun

$$K_y^h \quad := \quad \mathbb{E}[Y_y \,|\, F_y^h]$$

den *Kopfschaden* von Altersstufe $y \in AB$ und Risikoklasse $h \in H$. Wir nehmen an, für alle $h \in H$ und $y \in AB$ sei die Schadenhöhe Y_y von der Historie $(\zeta_z : z \in \{x_{\min}, \ldots, y-1\})$ des Zustandsprozesses unter den bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_{F_y^h} := \mathbb{P}[\,.\,|\, F_y^h]$ und $\mathbb{P}_{\widetilde{F}_y^h} := \mathbb{P}[\,.\,|\, \widetilde{F}_y^h]$ stochastisch unabhängig. Zudem sei Y_y unter beiden Wahrscheinlichkeitsmaßen identisch verteilt. Wir erhalten dann folgende Aussagen, die im Anhang A.3 bewiesen werden.

Lemma 3.2 *Für alle $h \in H$, $y, y' \in AB$ mit $y \leq y'$ gelten*

$$\mathbb{E}[Y_{y'} \mathbb{1}_{F_{y'}} \,|\, F_y^h] \quad = \quad \sum_{h'=1}^{l} K_{y'}^{h'} \, p_{y,y'}^{h,h'} , \tag{23}$$

$$\mathbb{E}[Y_{y'} \mathbb{1}_{\widetilde{F}_{y'}} \,|\, \widetilde{F}_y^h] \quad = \quad \sum_{h'=1}^{l} K_{y'}^{h'} \, \widetilde{p}_{y,y'}^{h,h'} . \tag{24}$$

Bemerkung 3.3 Für $x \in AB$ mit $x \leq y$ bleiben die Definitionen (17), (20) und (22) sowie die Identitäten (18), (23) und (24) unverändert, wenn man das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}[\,.\,|F_y^h]$ bzw. $\mathbb{P}[\,.\,|\widetilde{F}_y^h]$ durch das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_{x,h}[\,.\,|F_y^h]$ bzw. $\mathbb{P}_{x,h}[\,.\,|\widetilde{F}_y^h]$ ersetzt. Für (17), (18), (20) und (22) folgt dies aus (15), letztlich also aus der Markoveigenschaft von ζ. Für (23) und (24) folgt dies aus der unmittelbar vor Lemma 3.2 getroffenen Annahme und der zweiten Zeile in (14). Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir die genannte Tatsache mehrfach stillschweigend ausnutzen. $\diamond$

Wie wir in Abschnitt 5 feststellen werden sind die konkreten Werte der Stornowahrscheinlichkeiten für die Kalkulation der Prämien und der AR irrelevant. Einen Einfluss haben allein die Überlebens- und Verbleibswahrscheinlichkeiten. Zusammen mit den Kopfschäden bilden diese die *biometrischen Rechnungsgrundlagen* und müssen geschätzt werden. Dank (19) und (21) genügt es, die einjährigen Überlebens- und Verbleibswahrscheinlichkeiten zu schätzen. Dafür können etablierte Methoden (vgl. z. B. [8, Abschnitt II.4.3]) benutzt werden.

3.3 Kosten

Ein abgeschlossener PKV-Vertrag ruft für das PKV-U natürlich Kosten hervor, auf deren Modellierung wir in diesem Abschnitt näher eingehen wollen. Wir legen das in der Personenversicherung übliche α, β, γ-System zu Grunde. Zur Wiederholung:

- α-*Kosten* sind die unmittelbaren Abschlusskosten, in erster Linie also Maklerprovisionen. Sie fallen einmalig zum Vertragsbeginn an und berechnen sich in der PKV als ein Vielfaches des Monatsbeitrages.
- β-*Kosten* sind alle Kosten, die mit dem laufenden Einbezug von Beiträgen zusammenhängen. Sie werden daher auch Inkassokosten genannt. Sie fallen während der gesamten Laufzeit an.
- γ-*Kosten* sind Verwaltungs- und Gemeinkosten, insbesondere mittelbare Abschlusskosten (z. B. allgemeine Werbung). Sie fallen ebenso wie die β-Kosten während der gesamten Laufzeit an.

Die β- und γ-Kosten setzt man während der gesamten Laufzeit als „im Mittel“ konstant an. Zudem modelliert man die β-Kosten ebenso wie die α-Kosten als „beitragsproportional“. Dies wird in den weiter unten formulierten Annahmen 4.1 und 5.1 genauer ausgeführt. Dabei bezeichnen wir die Kosten, die mit dem betrachteten Tarif (potenziell) verbunden wären, mit $C_{x_{\min}}, \ldots, C_{x_{\max}}$. Wir nehmen an, dass $C_{x_{\min}}, \ldots, C_{x_{\max}} \in L^1_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Natürlich können nur dann Kosten angesetzt werden, wenn der Vertrag läuft. Auch diese Überlegung fließt in die Annahmen 4.1 und 5.1 ein.

3.4 Sonstige Rechnungsgrundlagen

Neben den biometrischen Rechnungsgrundlagen und den Kosten haben zwei weitere Größen einen essenziellen Einfluss auf die Bestimmung der Prämien und der AR. Zum Einen handelt es sich dabei um den deterministischen Rechnungszins $r > 0$ des PKV-U und zum Anderen um eine deterministische Größe $\sigma > 0$, die wir hier *Sicherheitsgewicht* nennen wollen. Der vom PKV-U angesetzte Rechnungszins r darf eine gesetzlich vorgeschriebene Maximalhöhe $r_{\max} > 0$ nicht überschreiten. Die Maximalhöhe liegt seit 1950 bei 3.5%, d. h, $r_{\max} = 0.035$. Der Rechnungszins r kann als eine vorsichtige Schätzung der jährlichen (zufälligen) Nettoverzinsung angesehen werden; diese Sicht findet man z. B. im Modell für den Aktuariellen Unternehmenszins (AUZ) wieder. Das Sicherheitsgewicht $\sigma > 0$ wird in der Personenversicherung auch als Sicherheitszuschlag bezeichnet. Allerdings wird der Begriff „Sicherheitszuschlag“ in der allgemeinen Versicherungsmathematik eher mit dem Geldbetrag assoziiert, um den der Beitrag den Erwartungswert des Risikos übersteigt. Da sich der Sicherheitszuschlag im letzt genannten Sinne in der Personenversicherung durch

$$\text{Sicherheitszuschlag} = \sigma \cdot \text{erwartetes Risiko}$$

berechnet, verwenden wir für σ besser die Nomenklatur „Sicherheitsgewicht“. Beide Größen r und σ seien im Folgenden fest vorgegeben.

4 Prämien und Alterungsrückstellungen (Fall 1)

Wir gehen nun davon aus, dass der in Abschnitt 3 betrachtete VN zu Beginn von Altersstufe $x \in AB$ einen Vertrag abschließen möchte und zu diesem Zeitpunkt der Risikoklasse $h \in H$ angehört. In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst den Fall, in dem der VN den abzuschließenden Vertrag nicht stonieren kann. In Abschnitt 5 untersuchen wir dann den Fall, in dem eine Stonierung möglich ist. In beiden Fällen sind eine adäquate Prämie und geeignete Alterungsrückstellungen für den Vertrag gesucht, der die Risiken $Y_x, \ldots, Y_{x_{\max}}$ abdeckt und der mit den in Abschnitt 3.3 beschriebenen Kosten verbunden ist.

Auf mathematischer Ebene könnte man die fehlende Storno-Option so modellieren, dass man die in (22) definierten Stornowahrscheinlichkeiten gleich 0 setzt. Wir werden alternativ aber den Standpunkt einnehmen, dass eine Kündigung nicht rechtskräftig ist, der Vertrag bei Storno also bis zum Tod weiterläuft (der VN also bis zum Tod aktiv bleibt). Dies bedeutet letztlich, dass in den weiter unten gegebenen Definitionen (25) und (26) die Ereignisse F_y und nicht $\widetilde{F}_y$ verwendet werden. Für die in Abschnitt 3.3 eingeführten Kosten machen wir folgende Annahme.

Annahme 4.1 *Für alle $h, h' \in H$ und $x, y \in AB$ mit $x \leq y$ nehmen wir an,*

(i) $\mathbb{E}_{x,h}[C_y | F_y^{h'}] = \alpha \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B_{x,h}^{\alpha,\sigma} + \gamma_x,$

(ii) $\mathbb{E}_{x,h}[C_y | (F_y^{h'})^{\mathsf{c}}] = 0.$

Dabei bezeichnen $\alpha, \beta_x, \gamma_x \in \mathbb{R}_+$ die jeweiligen Kostensätze und $B_{x,h}^{\alpha,\sigma} \in \mathbb{R}_+$ den Jahresbeitrag für einen Vertrag mit Eintrittsalter x und Eintrittsrisiko h.

Der Jahresbeitrag $B_{x,h}^{\alpha,\sigma}$ ist dabei eine noch zu bestimmende Größe, die wir gleich in Abschnitt 4.1 näher untersuchen. Die Annahmen (i) und (ii) setzen insbesondere voraus, dass die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Risikoklasse auf die Kosten im „$\mathbb{P}_{x,h}$-Mittel“ keinen Einfluss hat.

4.1 Prämien

Grundlage der Prämienberechnung in der Personenversicherung ist das so genannte Äquivalenzprinzip, das besagt, dass der erwartete Barwert aller zukünftigen Schadenleistungen und Kosten mit dem erwarteten Barwert aller zukünftigen Prämieneinnahmen übereinstimmen muss. Eine etablierte Konvention in der PKV ist die vereinfachende Annahme, dass die Prämien- und Schadenzahlungen vorschüssig, d. h. zu Beginn einer jeden Altersstufe anfallen. Für $z \in AB$ bezeichnet

$$LBW_z^{\alpha} := \sum_{y=z}^{x_{\max}} \frac{Y_y + C_y}{(1+r)^{y-z}} \, \mathbb{1}_{F_y} \tag{25}$$

somit den Barwerte aller zukünftigen Leistungen ab Altersstufe z und

$$PBW_z(B) := \sum_{y=z}^{x_{\max}} \frac{B}{(1+r)^{y-z}} \, \mathbb{1}_{F_y} \tag{26}$$

den Barwerte aller zukünftigen Pämieneinnahmen ab Altersstufe z bei erhobener Bruttoprämie $B \in \mathbb{R}_+$. Der Ausdruck „Brutto“ spielt hierbei darauf an, dass die erhobene Prämie auch die Kosten abdecken soll. Ein Sicherheitszuschlag ist hier noch nicht im Spiel.

Definition 4.2 *Man nennt $B \in \mathbb{R}_+$ (gezillmerte) Bruttoprämie (ohne Sicherheitszuschlag) für einen Vertrag, der in Altersstufe $x \in AB$ und in Risikoklasse $h \in H$ abgeschlossen wird und der die Risiken $Y_x, \dots, Y_{x_{\max}} \in \mathbb{R}_+$ abdeckt, falls B die Äquivalenzgleichung*

$$\mathbb{E}_{x,h}[LBW_x^{\alpha}] = \mathbb{E}_{x,h}[PBW_x(B)] \tag{27}$$

löst. In diesem Fall schreiben wir auch $B_{x,h}^{\alpha}$.

Zur Wiederholung: $\mathbb{P}_{x,h}$ ist das auf das Ereignis $\{\tau_1 = x, \chi_x = h\}$ bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß. Unter Beachtung von Lemma 3.2, Bemerkung 3.3 und Annahme 4.1 kann die Äquivalenzgleichung (27) mit $B = B_{x,h}^{\alpha}$ alternativ wie folgt formuliert werden

$$A_{x,h} + \alpha \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{12} + \beta_x \, B_{x,h}^{\alpha,\sigma} \, a_{x,h} + \gamma_x \, a_{x,h} = B_{x,h}^{\alpha} \, a_{x,h} \, , \tag{28}$$

wobei $B_{x,h}^{\alpha,\sigma}$ der noch zu bestimmende Beitrag (Bruttoprämie zzgl. Sicherheitszuschlag) ist und

$$A_{x,h} \;:=\; \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{K_y^{h_y}}{(1+r)^{y-x}} \, p_{x,y}^{h,h_y}, \tag{29}$$

$$a_{x,h} \;:=\; \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{1}{(1+r)^{y-x}} \, p_{x,y}^{h,h_y}. \tag{30}$$

Für $B^{\alpha}_{x,h}$ ergibt sich also folgende Darstellung

$$B^{\alpha}_{x,h} = \frac{A_{x,h}}{a_{x,h}} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12\, a_{x,h}} + \beta_x \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x . \tag{31}$$

Fasst man die Kosten wie in Abschnitt 3.3 als zusätzliche zufällige Schäden auf, dann stellt $B^{\alpha}_{x,h}$ gewissermaßen eine Nettorisikoprämie dar. Diese sollte bekanntlich um einen Sicherheitszuschlag erhöht werden. Würde die Beitragskalkulation in der PKV – wie oft behauptet – tatsächlich im Geiste des Erwartungswertprinzips erfolgen, dann würde sich der Beitrag, d. h. die mit einem Sicherheitsgewicht von σ versehene Bruttoprämie, durch $(1+\sigma)B^{\alpha}_{x,h}$ berechnen, also aus folgender Äquivalenzgleichung hervorgehen

$$B^{\alpha,\sigma}_{x,h} \,\Big(= B^{\alpha}_{x,h}\,(1+\sigma)\Big) = \Big(\frac{A_{x,h}}{a_{x,h}} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12\, a_{x,h}} + \beta_x \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x\Big)(1+\sigma).$$

Die Bruttoprämie würde dementsprechend um einen Sicherheitszuschlag von $\sigma B^{\alpha}_{x,h}$ erhöht werden. Traditionell bestimmt sich der Beitrag $B^{\alpha,\sigma}_{x,h}$ in der PKV aber aus der in (31) spezifizierten Bruttoprämie erhöht um einen Sicherheitszuschlag von $\sigma B^{\alpha,\sigma}_{x,h}$ (einer Größe, die bereits vom Beitrag abhängt). Mit anderen Worten: Der *Beitrag* $B^{\alpha,\sigma}_{x,h}$ bestimmt sich aus der modifizierten Äquivalenzgleichung

$$B^{\alpha,\sigma}_{x,h} \,\Big(= B^{\alpha}_{x,h} + \sigma\, B^{\alpha,\sigma}_{x,h})\Big) = \frac{A_{x,h}}{a_{x,h}} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12\, a_{x,h}} + \beta_x \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x + \sigma\, B^{\alpha,\sigma}_{x,h}$$

bzw.

$$A_{x,h} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12} + \beta_x \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h}\, a_{x,h} + \sigma\, B^{\alpha,\sigma}_{x,h}\, a_{x,h} + \gamma_x\, a_{x,h} = B^{\alpha,\sigma}_{x,h}\, a_{x,h} \, . \tag{32}$$

Zwar ist dieser Ansatz aus Sicht des Autors durchaus diskutabel, wir folgen aber dem traditionellen Vorgehen.

Natürlich setzt die Vorschrift (31) bereits die Kenntnis der Lösung von Gleichung (32) voraus. In diesem Sinne sollte man (32) als grundlegende Äquivalenzgleichung für den Beitrag ansehen und die Bruttoprämie durch $B^{\alpha}_{x,h} := B^{\alpha,\sigma}_{x,h}(1-\sigma)$ berechnen. In jedem Fall ergibt sich aus (32) folgende Gestalt für den Beitrag

$$B^{\alpha,\sigma}_{x,h} = \frac{\frac{A_{x,h}}{a_{x,h}} + \gamma_x}{1 - \frac{\alpha}{12 a_{x,h}} - \beta_x - \sigma} \, . \tag{33}$$

Setzt man alle Kostensätze und das Sicherheitsgewicht gleich Null, d. h. $\alpha := \beta_x := \gamma_x := \sigma := 0$, dann nennt man $B^{\alpha,\sigma}_{x,h}$ auch *Nettoprämie*. In diesem Fall schreiben wir $P_{x,h}$ und erhalten

$$P_{x,h} = \frac{A_{x,h}}{a_{x,h}} \, . \tag{34}$$

4.2 Alterungsrückstellungen

Die in (31) spezifizierte Bruttoprämie garantiert die Äquivalenz zwischen den erwarteten zukünftigen Leistungszahlungen und Kosten und den erwarteten zukünftigen Prämieneinnahmen zunächst nur zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses, was gerade (28) entspricht. Nun stellt sich die Frage, ob man die „Äquivalenz“ auch zu späteren Zeitpunkten erhält. Spart und verzinst man die Prämienüberschüsse, dann kann diese Frage (im Sinne von (36)) mit „ja“ beantwortet werden. Für alle $h \in H$ und $x, x' \in AB$ mit $x \le x'$ definieren wir unter Verwendung der Konvention $\sum_{j=1}^{0} := 0$

$$S_{x,x'}^{h;\alpha} := \sum_{y=x}^{x'-1} (B_{x,h}^{\alpha} - Y_y - C_y) \mathbb{1}_{F_y} (1+r)^{x'-y}, \tag{35}$$

und nennen $S_{x,x'}^{h;\alpha}$ die gesparten und verzinsten Prämienüberschüsse (kurz: *Sparüberschüsse*) zu Beginn von Altersstufe x', falls der Vertrag in Altersstufe x und in Risikoklassse h abgeschlossen wurde. Multipliziert man beide Seiten von (27) mit $(1+r)^{x'-x}$ und stellt die Gleichung geeignet um, dann erhält man

$$\mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha}] = \mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha}) + S_{x,x'}^{h;\alpha}]. \tag{36}$$

Für $x' = x$ entspricht (36) gerade (27).

Gleichung (36) beantwortet die eingangs gestellte Frage positiv im Sinne des „$\mathbb{P}_{x,h}$-Mittels“. Wie sieht es aus, wenn man auf das Ereignis $F_{x'}^{h'}$, also auf den Vertragszustand 1 und Risikoklasse h' in Altersstufe x' bedingt? Für die „Äquivalenz“ zu Beginn von Altersstufe x' wird dann ein zusätzliches Kapital in Höhe von

$$V_{x,x'}^{h,h';\alpha} := \mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha} \,|\, F_{x'}^{h'}] - \mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha}) \,|\, F_{x'}^{h'}] \tag{37}$$

benötigt. Tritt keines der Ereignisse $F_{x'}^{1}, \dots, F_{x'}^{l}$ ein, tritt also das Ereignis $F_{x'}^{\mathsf{c}}$ ein, dann ist natürlich kein Kapital mehr notwendig. Diese Überlegung führt zu folgender Definition.

Definition 4.3 *Es sei $x' \in \{x, \dots, x_{\max}\}$. Die für den betrachteten VN benötigte Alterungsrückstellung zu Beginn von Altersstufe x' ist definiert durch die Zufallsvariable*

$$R_{x,x'}^{h;\alpha} := \sum_{h'=1}^{l} V_{x,x'}^{h,h';\alpha} \, \mathbb{1}_{F_{x'}^{h'}},$$

wobei $V_{x,x'}^{h,h';\alpha}$ durch (37) gegeben ist.

Proposition 4.4 *Es sei $x' \in \{x, \dots, x_{\max}\}$. Falls $\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}^{h'}] > 0$, dann gilt*

$$\mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha} | F_{x'}] = \frac{\mathbb{E}_{x,h}[S_{x,x'}^{h;\alpha}]}{\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]}. \tag{38}$$

Für einen Beweis siehe Anhang A.4. In praktisch relevanten Fälle gilt typischerweise

$$\frac{\mathbb{E}_{x,h}[S^{h;\alpha}_{x,x'}\,\mathbb{1}_{F_{x'}}]}{\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]} < \frac{\mathbb{E}_{x,h}[S^{h;\alpha}_{x,x'}]}{\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]}\,,$$

also

$$\mathbb{E}_{x,h}[S^{h;\alpha}_{x,x'}\,|\,F_{x'}] < \mathbb{E}_{x,h}[R^{h;\alpha}_{x,x'}|F_{x'}]\,. \tag{39}$$

Das heißt die bis zu Beginn von Altersstufe x' angesammelten Sparüberschüsse reichen im „$\mathbb{P}_{x,h}[\,.\,|F_{x'}]$-Mittel“ nicht aus, um die benötigte AR zu decken. Andererseits werden dem PKV-U im Falle des Eintretens des Komplementärereignises $F^{\mathsf{c}}_{x'}$ alle bis dahin angesammelten Sparüberschüsse leistungsfrei „vererbt“. Vor diesem Hintergrund stellt die Ungleichung (39) kein Problem dar. In der Tat ist für die „Fairness“ des Vertrages nur die Aussage von Satz 4.5 relevant. Es sei jedoch erwähnt, dass die Ungleichung (39) in gewissem Sinne impliziert, dass ein einzelner Vertrag für ein PKV-U zu riskant ist. In der Tat ist die „Verlustwahrscheinlichkeit“ $\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]$ in vielen Fällen signifikant größer als 0. Fasst man hingegen gleichartige Risiken zu einem möglichst großen Kollektiv zusammen, dann gleichen sich günstige und ungünstige Fälle bis zu einem bestimmte Grade aus. In diesem Sinne kann ein VN – anders als oft dargestellt – eigentlich nicht individuell, sondern nur im Kollektiv betrachtet werden. Dem wird praktisch aber insofern schon Rechnung getragen, als das die Größe des Kollektivs bei der Bestimmung des Sicherheitsgewichtes σ (bewusst oder unbewusst) berücksichtigt wird. Einen Beweis des folgenden Satzes findet man im Anhang A.5.

Satz 4.5 *Für alle $x' \in \{x, \dots, x_{\max}\}$ gilt*

$$\mathbb{E}_{x,h}[R^{h;\alpha}_{x,x'}] = \mathbb{E}_{x,h}[S^{h;\alpha}_{x,x'}].$$

In folgender Proposition, deren Beweis im Anhang A.6 zu finden ist, stellen wir $V^{h,h';\alpha}_{x,x'}$ mit Hilfe der „a_x, A_x“-Notation dar.

Proposition 4.6 *Für $x' \in \{x, \dots, x_{\max}\}$ und $h' \in H$ gilt*

$$V^{h,h';\alpha}_{x,x'} = \left(\Big(A_{x',h'} - P_{x,h}\,a_{x',h'}\Big) - \Big(\alpha\frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12}\Big)\frac{a_{x',h'}}{a_{x,h}}\right)\mathbb{1}_{x'>x}\,. \tag{40}$$

Die bedingte Alterungsrückstellung ist zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses also gleich Null und hängt danach nur von den α-Kosten ab. Die β- und γ-Kosten haben keinen Einfluss, was intuitiv damit begründet werden kann, dass laufende („im Mittel“ konstante) Kosten laufend (durch die konstanten Prämien) beglichen werden.

Bemerkung 4.7 Oft definiert man

$$V^{h,h;\alpha}_{x,x} := -\alpha\frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12}\,,$$

d. h. man setzt die bedingte AR zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses gleich der Höhe der α-Kosten. Vom rein mathematischen Standpunkt, also im Sinne von Definition 4.3, ist das zwar nicht korrekt. Vom praktischen Standpunkt kann man dies aber durchaus vertreten, da die Maklerprovision im Prinzip schon vor Vertragsbeginn (gewissermaßen im „0-ten Vertragsjahr“) fällig wird. ◇

Im Rahmen von Nettobetrachtungen, d. h. im Falle von $\alpha := \beta_x := \gamma_x := \sigma := 0$, schreiben wir auch $V_{x,x'}^{h,h'}$ statt $V_{x,x'}^{h,h';\alpha}$ und erhalten

$$V_{x,x'}^{h,h'} = \Big(A_{x',h'} - P_{x,h}\, a_{x',h'}\Big)\mathbb{1}_{x'>x}\,. \tag{41}$$

Wir nennen $V_{x,x'}^{h,h'}$ auch bedingte *Netto-Alterungsrückstellung*. Gleichung (40) kann somit alternativ wie folgt formuliert werden

$$V_{x,x'}^{h,h';\alpha} = \left(V_{x,x'}^{h,h'} - \Big(\alpha\frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{12}\Big)\frac{a_{x',h'}}{a_{x,h}}\right)\mathbb{1}_{x'>x}\,.$$

5 Prämien und Alterungsrückstellungen (Fall 2)

In diesem Abschnitt nehmen wir nun an, dass ein abgeschlossener Vertrag storniert werden kann und dem VN bei Storno ein bestimmtes Kapital mitgegeben wird. Kündigt ein der Risikoklasse h' angehöriger x'-jähriger VN seinen Vertrag, den er mit Alter x und in Risikoklasse h abgeschlossen hat, dann erhält er genauer einen Kapitalbetrag in Höhe von $V_{x,x'}^{h,h';\alpha}$ aus (40). Die Situation ändert sich im Vergleich zu Abschnitt 4 also wie folgt. Die Definitionen (25) und (26) sind zu ersetzen durch

$$\widetilde{LBW}_z^{\alpha} := \sum_{y=z}^{x_{\max}} \frac{Y_y + C_y}{(1+r)^{y-z}}\,\mathbb{1}_{\widetilde{F}_y} + \sum_{y=z}^{x_{\max}}\sum_{h_y=1}^{l} \frac{V_{x,y}^{h,h_y;\alpha}}{(1+r)^{y-z}}\,\mathbb{1}_{E_y^{h_y}}\,, \tag{42}$$

$$\widetilde{PBW}_z(B) := \sum_{y=z}^{x_{\max}} \frac{B}{(1+r)^{y-z}}\,\mathbb{1}_{\widetilde{F}_y}\,. \tag{43}$$

Ferner ist Annahme 4.1 leicht zu modifizieren:

Annahme 5.1 *Für alle $h, h' \in H$ und $x, y \in AB$ mit $x \le y$ nehmen wir an,*

(i) $\mathbb{E}_{x,h}[C_y|\widetilde{F}_y^{h'}] = \alpha\frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{12}\mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B_{x,h}^{\alpha,\sigma} + \gamma_x$,

(ii) $\mathbb{E}_{x,h}[C_y|(\widetilde{F}_y^{h'})^{\mathsf{c}}] = 0$.

Dabei bezeichen $\alpha, \beta_x, \gamma_x \in \mathbb{R}_+$ die jeweiligen Kostensätze und $B_{x,h}^{\alpha,\sigma}$ die eindeutige Lösung von (32).

Die eindeutige Lösung $B_{x,h}^{\alpha,\sigma}$ von (32) ist gerade der Jahresbeitrag für einen Vertrag mit Eintrittsalter x und Eintrittsrisiko h im Rahmen von Abschnitt 4. Das Verwenden dieser Größe mag zunächst etwas verwundern, da die α- und β-Kosten wie in Abschnitt 3.3 erwähnt proportional zu dem tatsächlich zu zahlenden Beitrag anzusetzen sind. Den „fairen“ Beitrag haben wir im aktuellen Fall aber noch gar nicht bestimmt. Es stellt sich jedoch im folgenden Satz heraus, dass die Lösung $B_{x,h}^{\alpha,\sigma}$ von (32) auch im aktuellen Fall die Äquivalenzprämie ist.

Satz 5.2 *Für die eindeutige Lösung $B^{\alpha,\sigma}_{x,h}$ von (32) gilt*

$$\mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{LBW}^{\alpha}_{x}] + \sigma\, B^{\alpha,\sigma}_{x,h}\, \widetilde{a}_{x,h} = \mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{PBW}_{x}(B^{\alpha,\sigma}_{x,h})]\,, \tag{44}$$

wobei $\widetilde{a}_{x,h}$ wie in (30) definiert ist mit $\widetilde{p}^{h,h_y}_{x,y}$ an Stelle von $p^{h,h_y}_{x,y}$.

Ein Beweis ist in Anhang A.7 zu finden. Gleichung (44) ist das Analogon der Äquivalenzgleichung (32). Setzt man keinen Sicherheitszuschlag an, d. h. setzt man das Sicherheitsgewicht gleich Null ($\sigma := 0$), dann erhält man analog zu (44) die Äquivalenzgleichung

$$\mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{LBW}^{\alpha}_{x}] = \mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{PBW}_{x}(B^{\alpha}_{x,h})]\,,$$

wobei $B^{\alpha}_{x,h}$ durch (31) gegeben ist.

Wir kommen nun zur Alterungsrückstellung im aktuellen Fall. Gehört der betrachtete VN zu Beginn von Altersstufe x' aktiv der Risikoklasse h' an, dann wird für die „Äquivalenz“ ein Kapital in Höhe von

$$\widetilde{V}^{h,h';\alpha}_{x,x'} := \mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{LBW}^{\alpha}_{x'} \,|\, \widetilde{F}^{h'}_{x'}] - \mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{PBW}_{x'}(B^{\alpha}_{x,h}) \,|\, \widetilde{F}^{h'}_{x'}] \tag{45}$$

benötigt. Tritt keines der Ereignisse $\widetilde{F}^{1}_{x'}, \dots, \widetilde{F}^{l}_{x'}$ ein, tritt also das Ereignis $\widetilde{F}^{\mathsf{c}}_{x'}$ ein, dann ist natürlich kein Kapital mehr notwendig. Diese Überlegung führt analog zu Definition 4.3 zu folgender Nomenklatur.

Definition 5.3 *Es sei $x' \in \{x, \dots, x_{\max}\}$. Die für den betrachteten VN benötigte Alterungsrückstellung zu Beginn von Altersstufe x' ist definiert durch die Zufallsvariable*

$$\widetilde{R}^{h;\alpha}_{x,x'} := \sum_{h'=1}^{l} \widetilde{V}^{h,h';\alpha}_{x,x'}\, \mathbb{1}_{\widetilde{F}^{h'}_{x'}}\,,$$

wobei $\widetilde{V}^{h,h';\alpha}_{x,x'}$ durch (45) gegeben ist.

Neben dem Beitrag bleibt auch die bedingte Alterungsrückstellung im Vergleich zu der Situation in Abschnitt 4 unverändert:

Satz 5.4 *Für $x' \in \{x, \dots, x_{\max}\}$ und $h, h' \in H$ gilt*

$$\widetilde{V}^{h,h';\alpha}_{x,x'} = V^{h,h';\alpha}_{x,x'}\,,$$

wobei $V^{h,h';\alpha}_{x,x'}$ und $\widetilde{V}^{h,h';\alpha}_{x,x'}$ durch (37) bzw. (45) gegeben sind.

Der Beweis funktioniert ganz analog zu dem Beweis von Satz 5.2; wir übergehen die Details. Um das Analogon von Satz 4.5 formulieren zu können, setzen wir analog zu (35)

$$\widetilde{S}^{h;\alpha}_{x,x'} := \sum_{y=x}^{x'-1} (B^{\alpha}_{x,h} - Y_y - C_y) \mathbb{1}_{\widetilde{F}_y}\, (1+r)^{x'-y} + \sum_{y=x}^{x'-1} \sum_{h_y=1}^{l} V^{h,h_y;\alpha}_{x,y}\, \mathbb{1}_{E^{h_y}_{y}}\, (1+r)^{x'-y}\,. \tag{46}$$

Analog zu dem Beweis von Satz 4.5 verifiziert man die folgende Aussage; wir übergehen die Details.

Satz 5.5 *Für alle $x' \in \{x, \ldots, x_{\max}\}$ gilt*

$$\mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{R}^{h;\alpha}_{x,x'}] = \mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{S}^{h;\alpha}_{x,x'}].$$

Bemerkung 5.6 Geht man bei einem PKV-U-Wechsel idealisierend davon aus, dass das alte und das neue PKV-U mit denselben biometrischen Rechnungsgrundlagen kalkulieren, dann würde die Nettoprämie nach dem Wechsel unverändert bleiben. In der Tat: Kündigt ein x'-jähriger VN in Risikoklasse h' seinen mit Alter x und in Risikoklasse h abgeschlossenen Vertrag, dann ist die neue Netto-Äquivalenzgleichung

$$A_{x',h'} = P_{x',h'} a_{x',h'} + V^{h,h'}_{x,x'} \tag{47}$$

gemäß (41) gerade erfüllt für $P_{x',h'} := P_{x,h}$. Auf der rechten Seite von (47) entspricht $V^{h,h'}_{x,x'}$ dem mitgegebenen Kapitalbetrag. In diesem Fall würde eine Beitragsänderung also nur durch unterschiedliche Kosten und Sicherheitsmargen hervorgerufen. ◇

Die Ausführungen in diesem Abschnitt zeigen, dass man bei der Prämien- und AR-Kalkulation theoretisch dem in Abschnitt 4 dargestellten Verfahren folgen kann. Dabei bestehen zwei Unterschiede zum herkömmlichen Vorgehen, das in den Monographien [1, 8] ausführlich beschrieben wird. Zum Einen sind die Stornowahrscheinlichkeiten gleich Null zu setzen, insbesondere aus den Rechnungsgrundlagen zu streichen. Zum Anderen ist der Versichertenbestand eines Tarifs nicht nur nach dem Merkmal „Lebensalter“ zu klassifizieren, sondern auch in die l Risikoklassen einzuteilen. Während das Nichtbeachten der Stornowahrscheinlichkeiten eher zu einer Vereinfachung der Tarifierung führt, bringt das Klassifizieren des Bestandes in Risikoklassen Mehrarbeit mit sich. Im folgenden Abschnitt diskutieren wir noch eine Schwachstelle des präsentierten Modells.

6 Kommentare

6.1 Kritik und Ausblick

In den Abschnitten 3–5 ist ein wesentlicher praktischer Aspekt unberücksichtigt geblieben. Bei der Modellbildung wurde davon ausgegangen, dass sich die Rechnungsgrundlagen während der Vertragslaufzeit nicht ändern. Bekanntlich ist diese Annahme im Allgemeinen jedoch falsch. Im bisher verwendeten PKV-Modell ([1, 8]) wurde einer Änderung der Rechnungsgrundlagen durch so genannte Prämienanpassungen Rechnung getragen. Für Details siehe z. B. [8, Kapitel III]. In dem in diesem Artikel präsentierten Modell ist eine adäquate Prämienanpassung allerdings nicht ohne weiteres möglich. Würde man in unserem Rahmen analog zu dem Verfahren in Kapitel III in [8] vorgehen, dann würde die aktuelle Risikoklasse bei der Prämienneuberechnung eine entscheidende Rolle spielen. Aus Sicht des VN wäre das natürlich vollends inakzeptabel. Letztlich muss das hier präsentierte Modell – insbesondere der wahrscheinlichkeitstheoretische Teil – derart modifiziert werden, dass bei der Prämienanpassung nur die

Risikoklasse ins Kalkül zu ziehen ist, der der VN bei Vertragsabschluss angehört hat. Insofern ist dieser Artikel als ein erster mathematischer Schritt in die Richtung eines „perfekten“ aktuariellen Modells zu verstehen. Aus Sicht des Autors ist eine adäquate Weiterentwicklung des Modells realistisch.

6.2 Pragmatik

Trotz der in Abschnitt 6.1 beschriebenen Schwachstelle des Modells liefern bereits die Resultate dieses Artikels relevante Informationen für die Theorie und die Praxis des Privaten Krankenversicherungswesens. Zum Einen zeigen die Ergebnisse, wie man in einer Welt ohne Veränderung der Rechnungsgrundlagen vorgehen könnte; in diesem Fall scheint das präsentierte Modell sehr gut geeignet zu sein. Zum Anderen kann man durchaus Argumente dafür finden, dass auch im Rahmen des aktuell praktizierten Vorgehens der in (37) (bzw. (40)) spezifizierte Kapitalbetrag $V_{x,x'}^{h,h';\alpha}$ mitgegeben werden sollte. Letzteres soll nun etwas näher erläutert werden.

Momentan folgen die PKV-U bei der Beitrags- und AR-Bestimmung sowie bei der Beitragsneuberechnung (Prämienanpassung) bekanntlich den in [8, Kapitel II und III] beschriebenen Verfahren, wobei die Stornowahrscheinlichkeiten gleich Null gesetzt werden. Insbesondere erfolgt keine Einteilung des VN-Bestandes in Risikoklassen. Im Falle einer Kündigung wird ein Kapital in Höhe der kalkulierten AR des Teils der Versicherung, dessen Leistungen dem Basistarif entsprechen, vom alten an das neue PKV-U übertragen (vgl. VVG § 204). Dieser Betrag – wir bezeichnen ihn mit $W_{x,x'}^{h;\alpha}$ – ist in aller Regel deutlich kleiner als die rechnerische AR für alle durch den jeweiligen Tarif abgedeckten Leistungen. Dies führt letztlich zu einer Situation, die mit aller Macht vermieden werden sollte: Praktisch werden in erster Linie die überdurchschnittlich gesunden VN (also die VN, für die $V_{x,x'}^{h,h';\alpha} \leq W_{x,x'}^{h;\alpha}$ gilt) wechseln. Wird statt $W_{x,x'}^{h;\alpha}$ der Betrag $V_{x,x'}^{h,h';\alpha}$ mitgegeben, dann ist dieses Problem gelöst oder zumindest essenziell abgeschwächt. Dabei haben wir stillschweigend angenommen, dass ein VN bei Vertragsbeginn einmalig einer „Eintrittsrisikoklasse“ h zugeordnet wird. Der Beitrag und die AR würden dann jeweils von dieser und nur von dieser Risikoklasse h abhängen. Zwar wird dies momentan noch nicht praktiziert. Vor dem Hintergrund des stattlichen Wunsches einer Öffnung der Bestände für „schlechte Risiken“ ist das auf lange Sicht aber wohl ohnehin unumgänglich. Die Formel (40) zeigt zusammen mit den Formeln (29), (30) und (33) auf, wie das mitzugebende Kapital $V_{x,x'}^{h,h';\alpha}$ zu berechnen ist.

Es sollte zudem herausgestellt werden, dass das eben diskutierte Vorgehen in gewissem Sinne konsistent zu dem in den Abschnitten 3–5 vorgestellten Modell ist. Für die Tarifierung und Bilanzierungszwecke spielt die Risikoklassenbildung nämlich eine eher untergeordnete Rolle. In der Tat gleichen sich in einigermaßen großen Kollektiven die sich gut und die sich schlecht entwickelnden Risiken bis zu einem gewissen Grade aus. Mathematisch kann das durch den Satz vom iterierten Logarithmus und den zentraler Grenzwertsatz (oder auch durch die Ungleichung von Cantelli) konkretisiert werden. Wir verzichten darauf, diese Standardargumente näher auszuführen. Es sei jedoch erwähnt, dass dies auch die Grundlage des bisher praktizierten Vorgehens im PKV-Wesen war. Das verbleibende Rest(schwankungs)risiko wird dabei durch die vergleichsweise hohen Sicherheitszuschläge abgefedert.

Zu klären bleibt die Frage, wie ein wechselnder VN in das neue Kollektiv eingegliedert werden soll. Dem neuen PKV-U muss in diesem Zusammenhang natürlich zugestanden werden, eine Äquivalenzgleichung aufstellen und dabei insbesondere die individuelle Risikolage des VN berücksichtigen zu dürfen (Zuordnung einer neuen „Eintrittsrisikoklasse“). Auf der Seite des Prämienbarwertes muss dann aber der mitgegebene Kapitalbetrag additiv eingehen. Wechselt z. B. ein überdurchschnittlich kranker VN das PKV-U, dann wird eine Gesundheitsprüfung zwar seinen „schlechten Gesundheitszustand“ aufdecken, allerdings gleicht der vergleichsweise hohe Transferbetrag diese vermeintliche „Schlechterstellung“ aus. In dem Fall, in dem sowohl für das alte als auch für das neue Kollektiv die gleichen Rechnungsgrundlagen angesetzt werden, würde die Prämie nach einem Wechsel unabhängig von der individuellen Risikolage des VN gerade unverändert bleiben, vgl. Bemerkung 5.6. Die Gültigkeit dieser Bedingung ist in diesem Kontext ganz entscheidend, um nicht zu sagen notwendig. Das heißt aber nicht, dass zwingend die gleichen Rechnungsgrundlagen verwendet werden müssen. Im Falle von unterschiedlichen Rechnungsgrundlagen kann dann schlichtweg eine Prämienänderung erfolgen. Typischerweise wird sich die Prämie ohnehin ändern, da selbst vergleichbare Tarife in der Regel leichte Leistungsdifferenzen aufweisen.

Folgt man dem in diesem Abschnitt beschriebenen Vorschlag, dann führt das offensichtlich zu höheren Beiträgen im Vergleich zu der herkömmlichen Situation, in der die Stornowahrscheinlichkeiten nicht verschwinden. Die Flexibilität bei der Wahl des PKV-U durch die Portabilität der AR wird also durch einen Mehrbeitrag erkauft. Nun könnte man überlegen, ob man einen VN bei Vertragsabschluss vor die Wahl stellt, ob er bei Ausübung der Storno-Option eine Kapitalmitgabe wünscht oder nicht. Da die Versicherten dadurch wohl aber stärker als bisher für die Nachteile einer Kündigung sensibilisiert werden würden, wäre es recht wahrscheinlich, dass kaum noch Verträge ohne AR-Mitgabe gekündigt würden. Insbesondere würden die Beitragsdifferenzen so gut wie verschwinden. Will man also einerseits den Wettbewerb zwischen den PKV-U stärken und andererseits die VN-Interessen vertreten, ohne dabei die PKV-U zu benachteiligen, dann scheint das beschriebene Vorgehen eine sinnvolle Lösung zu sein.

6.3 Verbleibendes Problem

Das in Abschnitt 6.2 beschriebene pragmatische Vorgehen bringt zunächst den Vorteil mit sich, dass Prämienanpassungen prinzipiell nach dem gleichen Verfahren (vgl. [8, Kapitel III]) erfolgen können wie bisher auch. Eine verbleibende Schwachstelle wurde aber bereits in [11, 12] aufgezeigt. Bei der Bemessung eines risikogerechten Transferwertes müsste u. U. neben der individuellen Risikolage eines VN auch die Risikolage des Kollektivs berücksichtigt werden, da diese über Prämienanpassungen Auswirkungen auf die zukünftigen Prämieneinnahmen aus dem Vertrag hat. Entwickeln sich zwei vergleichbare Kollektive (Tarife) bei zwei verschiedenen PKV-U unterschiedlich, dann könnten die gesunden Risiken in dem schlechteren Kollektiv dazu tendieren in das bessere Kollektiv des anderen PKV-U wechseln zu wollen. In [12] wurde daher der Vorschlag unterbreitet, den Transferwert von der kollektiven Risikolage abhängen zu lassen. Dabei sollte der Transferwert einem Abschlag oder einem Zuschlag unterworfen werden, je nach dem, ob die Risikolage des Kollektivs „gut“ oder „schlecht“ ist. In [12] wurden einerseits notwendige Bedingungen für die Ab- bzw. Zuschlagsfunktion diskutiert, andererseits aber auch eingeräumt, dass sich bzgl. der konkreten mathematischen Spezifizierung weiterer Forschungsbedarf ergibt.

An dieser Stelle sollte auch herausgestellt werden, dass die „Verschlechterung“ eines Kollektivs zu einem nicht unwesentlichen Teil durch den medizinischen Fortschritt hervorgerufen wird. In der Tat führt die Verbesserung der Behandlungsmethoden stetig zu einer Erhöhung der Kosten im Gesundheitswesen und somit im Endeffekt zu einer Erhöhung der Kopfschäden. Da diese Kostensteigerung alle PKV-U gleichermaßen betrifft, muss eine diesbezügliche „Verschlechterung“ des Kollektivs wohl nicht durch einen entsprechenden Zu- oder Abschlag ausgeglichen werden. Im Rahmen von [12] bleibt weiterhin zu klären, inwieweit die negative Entwicklung eines Teilkollektivs (Tarifs) und dem damit potenziell verbundenen Abgang von VN durch die positive Entwicklung eines anderen Teilkollektivs (Tarifs) und dem damit verbundenen Zugang von VN ausgeglichen wird (Risikoausgleich zwischen den Teilkollektiven). Zu beachten ist dabei insbesondere, dass Verschlechterungen von Teilkollektiven (Tarifen), die durch einzelne Großschäden verursacht werden, in der heutigen Praxis durch das PKV-Ausgleichsverfahren (Poolausgleich) abgefedert werden. Ohne Zweifel ist aber eine mathematische Weiterentwicklung des Modells in [12] in jedem Falle anstrebenswert.

Für eine weiterführende kritische Diskussion der Problematik der Portabilität der AR sei auf [7, 9] und darin zitierte Arbeiten verwiesen.

A Anhang

A.1 Beweis von (19)

Mit Hilfe von (18), der Fallunterscheidungsformel für elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten (unter Beachtung von (4) und (10)), der Markoveigenschaft von $\zeta = ((\chi_z, \rho_z) : z \in AB)$ und der Annahme (12) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& p_{y,y'}^{h_y,h_{y'}} \\
&= \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \,|\, F_y^{h_y}] \\
&= \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \,|\, \widetilde{F}_y^{h_y}] \\
&= \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \,|\, \{\chi_{y+1} = h_{y+1},\, \rho_{y+1} = 1\} \cap \widetilde{F}_y^{h_y}]\, \mathbb{P}[\chi_{y+1} = h_{y+1},\, \rho_{y+1} = 1 \,|\, \widetilde{F}_y^{h_y}] \\
&\quad + \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \,|\, \{\chi_{y+1} = h_{y+1},\, \rho_{y+1} = 2\} \cap \widetilde{F}_y^{h_y}]\, \mathbb{P}[\chi_{y+1} = h_{y+1},\, \rho_{y+1} = 2 \,|\, \widetilde{F}_y^{h_y}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}}]\, \mathbb{P}[\widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}} \mid \widetilde{F}_{y}^{h_y}] \\
&\quad + \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \chi_{y+1} = h_{y+1},\, \rho_{y+1} = 2]\, \mathbb{P}[E_{y+1}^{h_{y+1}} \mid \widetilde{F}_{y}^{h_y}] \\
&= \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}}]\, \mathbb{P}[\widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}} \mid \widetilde{F}_{y}^{h_y}] \\
&\quad + \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \chi_{y+1} = h_{y+1},\, \rho_{y+1} = 1]\, w_{y,y+1}^{h_y,h_{y+1}} \\
&= \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}}]\, \widetilde{p}_{y,y+1}^{h_y,h_{y+1}} + \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}}]\, w_{y,y+1}^{h_y,h_{y+1}} \\
&= \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}}]\, (\widetilde{p}_{y,y+1}^{h_y,h_{y+1}} + w_{y,y+1}^{h_y,h_{y+1}}) \\
&= \sum_{h_{y+1}=1}^{l} \mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}}]\, p_{y,y+1}^{h_y,h_{y+1}}
\end{aligned}
$$

wobei wir für den letzten Schritt Lemma 3.1 benutzt haben. Unterwirft man nun $\mathbb{P}[F_{y'}^{h_{y'}} \mid \widetilde{F}_{y+1}^{h_{y+1}}]$ der analogen Rechnung und fährt in dieser Weise iterativ fort, dann erhält man in der Tat (19).

A.2 Beweis von Lemma 3.1

Mit Hilfe von (18), der Fallunterscheidungsformel für elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten, der Markoveigenschaft von $\zeta = ((\chi_z, \rho_z) : z \in AB)$ und den Annahme (10) und (13) erhalten wir für alle $h, h_y \in H$ und $x, y \in AB$ mit $x \leq y$ wie gewünscht

$$
\begin{aligned}
&p_{x,y}^{h,h_y} \\
&\quad = \mathbb{P}[F_y^{h_y} \mid \widetilde{F}_x^h] \\
&\quad = \mathbb{P}[\chi_y = h_y,\, \rho_y \geq 1 \mid \chi_x = h,\, \rho_x = 1] \\
&\quad = \mathbb{P}[\chi_y = h_y,\, \rho_y = 1 \mid \chi_x = h,\, \rho_x = 1] + \mathbb{P}[\chi_y = h_y,\, \rho_y = 2 \mid \chi_x = h,\, \rho_x = 1] \\
&\quad = \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} \mathbb{P}[\chi_y = h_y,\, \rho_y = 2 \mid \{\chi_x = h,\, \rho_x = 1\} \cap E_u^{h_u}]\ \mathbb{P}[E_u^{h_u} \mid \chi_x = h,\, \rho_x = 1] \\
&\quad = \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} \mathbb{P}[\chi_y = h_y,\, \rho_y = 2 \mid \chi_u = h_u,\, \rho_u = 2]\ \mathbb{P}[E_u^{h_u} \mid \chi_x = h,\, \rho_x = 1] \\
&\quad = \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} \mathbb{P}[\chi_y = h_y \mid \chi_u = h_u,\, \rho_u = 2]\ \mathbb{P}[E_u^{h_u} \mid \chi_x = h,\, \rho_x = 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} \mathbb{P}[\chi_y = h_y \,|\, \chi_u = h_u]\ \mathbb{P}[E_u^{h_u} \,|\, \chi_x = h,\ \rho_x = 1] \\
&= \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} \mathbb{P}[F_y^h \,|\, F_u^h]\ \mathbb{P}[E_u^{h_u} \,|\, \widetilde{F}_x^h] \\
&= \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} p_{u,y}^{h_u,h_y} w_{x,u}^{h,h_u} .
\end{aligned}
$$

A.3 Beweis von Lemma 3.2

Wir beweisen nur (23), der Beweis von (24) funktioniert analog. Für $y' = y$ ist die Aussage (23) trivial. Für $y' > y$ erhalten wir mit Hilfe der Fallunterscheidungsformel für elementare bedingte Erwartungswerte und der unmittelbar vor Lemma 3.2 getroffenen Annahme wie gewünscht

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{y'} \mathbb{1}_{F_{y'}} \,|\, F_y^h] &= \sum_{h'=1}^{l} \mathbb{E}[Y_{y'} \mathbb{1}_{F_{y'}} \,|\, F_{y'}^{h'} \cap F_y^h]\ \mathbb{P}[F_{y'}^{h'} \,|\, F_y^h] \\
&= \sum_{h'=1}^{l} \mathbb{E}_{F_{y'}^{h'}}[Y_{y'} \mathbb{1}_{F_{y'}} \,|\, F_y^h]\ \mathbb{P}[F_{y'}^{h'} \,|\, F_y^h] \\
&= \sum_{h'=1}^{l} \mathbb{E}_{F_{y'}^{h'}}[Y_{y'} \mathbb{1}_{F_{y'}}]\ \mathbb{P}[F_{y'}^{h'} \,|\, F_y^h] \\
&= \sum_{h'=1}^{l} \mathbb{E}[Y_{y'} \mathbb{1}_{F_{y'}} \,|\, F_{y'}^{h'}]\ \mathbb{P}[F_{y'}^{h'} \,|\, F_y^h] \\
&= \sum_{h'=1}^{l} \mathbb{E}[Y_{y'} \,|\, F_{y'}^{h'}]\ \mathbb{P}[F_{y'}^{h'} \,|\, F_y^h] \\
&= \sum_{h'=1}^{l} K_{y'}^{h'}\ p_{y,y'}^{h,h'} .
\end{aligned}
$$

A.4 Beweis von Proposition 4.4

Mit Hilfe der Fallunterscheidungsformel für elementare bedingte Erwartungswerte erhält man wie gewünscht

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha} | F_{x'}] \\
&\quad = \mathbb{E}_{x,h}\Big[\sum_{h'=1}^{l} V_{x,x'}^{h,h';\alpha} \mathbb{1}_{F_{x'}^{h'}} \,\Big|\, F_{x'} \Big] \\
&\quad = \sum_{h'=1}^{l} \Big(\mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha} \,|\, F_{x'}^{h'}] - \mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha}) \,|\, F_{x'}^{h'}] \Big) \mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}^{h'} \,|\, F_{x'}]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h'=1}^{l} \Big(\mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha} \,|\, F_{x'}^{h'} \cap F_{x'}] - \mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha}) \,|\, F_{x'}^{h'} \cap F_{x'}] \Big) \mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}^{h'} \,|\, F_{x'}] \\
&= \mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha} \,|\, F_{x'}] - \mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha}) \,|\, F_{x'}] \\
&= \frac{\mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha}\, \mathbb{1}_{F_{x'}}]}{\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]} - \frac{\mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha})\, \mathbb{1}_{F_{x'}}]}{\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha}] - \mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha})]}{\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{x,h}[S_{x,x'}^{h;\alpha}]}{\mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}]}\,,
\end{aligned}$$

wobei für den letzten Schritt (36) verwendet wurde. Für den vorletzten Schritt wurde ausgenutzt, dass auf dem Ereignis $\{\tau_1 = x, \chi_x = h\}$ die Identität $\mathbb{1}_{F_{x'}} \mathbb{1}_{F_y} = \mathbb{1}_{F_y}$ für alle $y \geq x'$ gilt.

A.5 Beweis von Satz 4.5

Mit Hilfe der Fallunterscheidungsformel für elementare bedingte Erwartungswerte erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha}] &= \mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha} \,|\, F_{x'}]\, \mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}] + \mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha} \,|\, F_{x'}^{\mathsf{c}}]\, \mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}^{\mathsf{c}}] \\
&= \mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha} \,|\, F_{x'}]\, \mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}] + \mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha}\, \mathbb{1}_{F_{x'}^{\mathsf{c}}} \,|\, F_{x'}^{\mathsf{c}}]\, \mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}^{\mathsf{c}}] \\
&= \mathbb{E}_{x,h}[R_{x,x'}^{h;\alpha} \,|\, F_{x'}]\, \mathbb{P}_{x,h}[F_{x'}] + 0 \\
&= \mathbb{E}_{x,h}[S_{x,x'}^{h;\alpha}]\,,
\end{aligned}$$

wobei für den letzten Schritt (38) verwendet wurde.

A.6 Beweis von Proposition 4.6

Einerseits erhalten wir für den bedingten Leistungsbarwert

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{x,h}[LBW_{x'}^{\alpha} \,|\, F_{x'}^{h'}] \\
&\quad = \mathbb{E}_{x,h}\left[\sum_{y=x'}^{x_{\max}} \frac{Y_y + C_y}{(1+r)^{y-x'}}\, \mathbb{1}_{F_y} \,\middle|\, F_{x'}^{h'} \right] \\
&\quad = \begin{cases} A_{x,h} + \alpha \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{12} + \beta_x\, B_{x,h}^{\alpha,\sigma}\, a_{x,h} + \gamma_x\, a_{x,h} & , \quad x' = x,\ h' = h \\ 0 & , \quad x' = x,\ h' \neq h \\ A_{x',h'} + \beta_x\, B_{x,h}^{\alpha,\sigma}\, a_{x',h'} + \gamma_x\, a_{x',h'} & , \quad x' > x \end{cases} .
\end{aligned}$$

Für den bedingten Prämienbarwert erhalten wir mit Hilfe von (31) und (34) andererseits

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B_{x,h}^{\alpha}) \,|\, F_{x'}^{h'}] \\
&\quad = \mathbb{E}_{x,h}\left[\sum_{y=x'}^{x_{\max}} \frac{B_{x,h}^{\alpha}}{(1+r)^{y-x'}}\, \mathbb{1}_{F_y} \,\middle|\, F_{x'}^{h'} \right]
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \; x' = x, \, h' \neq h \\ B^{\alpha}_{x,h} \, a_{x',h'} & , \; x' = x, \, h' = h; \text{ oder } x' > x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \; x' = x, \, h' \neq h \\ \left(\frac{A_{x,h}}{a_{x,h}} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12 \, a_{x,h}} + \beta_x \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x \right) a_{x',h'} & , \; x' = x, \, h' = h; \text{ oder } x' > x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \; x' = x, \, h' \neq h \\ \left(P_{x,h} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12 \, a_{x,h}} + \beta_x \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x \right) a_{x',h'} & , \; x' = x, \, h' = h; \text{ oder } x' > x \end{cases} .$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} V^{h,h';\alpha}_{x,x'} &= \mathbb{E}_{x,h}[LBW^{\alpha}_{x'} \,|\, F^{h'}_{x'}] - \mathbb{E}_{x,h}[PBW_{x'}(B^{\alpha}_{x,h}) \,|\, F^{h'}_{x'}] \\ &= \begin{cases} \left(A_{x,h} - P_{x,h} \, a_{x,h} \right) & , \; x' = x, \, h' = h \\ 0 & , \; x' = x, \, h' \neq h \\ \left(A_{x',h'} - P_{x,h} \, a_{x',h'} \right) - \left(\alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12} \, \frac{a_{x',h'}}{a_{x,h}} \right) & , \; x' > x \end{cases} . \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (34) erhält man also (40).

A.7 Beweis von Satz 5.2

Unter Beachtung von Lemma 3.2, Annahme 5.1 und der Identität $B^{\alpha}_{x,h} = B^{\alpha,\sigma}_{x,h}(1-\sigma)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{LBW}^{\alpha}_{x}] + \sigma \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h} \, \widetilde{a}_{x,h} - \mathbb{E}_{x,h}[\widetilde{PBW}_{x}(B^{\alpha,\sigma}_{x,h})] \\ &= \left(\sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{K^{h_y}_{y} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{p}^{\,h,h_y}_{x,y} + \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{V^{h,h_y;\alpha}_{x,y}}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{w}^{\,h,h_y}_{x,y} \right) \\ &\quad + \sigma \, B^{\alpha,\sigma}_{x,h} \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{1}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{p}^{\,h,h_y}_{x,y} - \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{p}^{\,h,h_y}_{x,y} \\ &= \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{K^{h_y}_{y} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x + \sigma B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{p}^{\,h,h_y}_{x,y} + \\ &\quad \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{\sum_{z=y}^{x_{\max}} \sum_{h_z=1}^{l} \frac{K^{h_z}_{z} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x}{(1+r)^{z-y}} p^{h_y,h_z}_{y,z} - \sum_{z=y}^{x_{\max}} \frac{B^{\alpha}_{x,h}}{(1+r)^{z-y}} p^{h_y,h_z}_{y,z}}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{w}^{\,h,h_y}_{x,y} \\ &\quad - \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{p}^{\,h,h_y}_{x,y} \\ &= \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \left(\frac{K^{h_y}_{y} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x + \sigma B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{(1+r)^{y-x}} \, \widetilde{p}^{\,h,h_y}_{x,y} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{z=y}^{x_{\max}} \sum_{h_z=1}^{l} \frac{K^{h_z}_{z} + \alpha \frac{B^{\alpha,\sigma}_{x,h}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B^{\alpha,\sigma}_{x,h} + \gamma_x}{(1+r)^{z-x}} \, p^{h_y,h_z}_{y,z} \, \widetilde{w}^{\,h,h_y}_{x,y} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \left(\frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{(1+r)^{y-x}} \widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{z=y}^{x_{\max}} \sum_{h_z=1}^{l} \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}(1-\sigma)}{(1+r)^{z-x}} p_{y,z}^{h_y,h_z} \widetilde{w}_{x,y}^{h,h_y} \right) \\
= & \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{K_y^{h_y} + \alpha \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B_{x,h}^{\alpha,\sigma} + \gamma_x + \sigma B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{(1+r)^{y-x}} \left(\widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} p_{u,y}^{h_u,h_y} \widetilde{w}_{x,u}^{h,h_u} \right) \\
& - \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{(1+r)^{y-x}} \left(\widetilde{p}_{x,y}^{h,h_y} + \sum_{u=x}^{y} \sum_{h_u=1}^{l} p_{u,y}^{h_u,h_y} \widetilde{w}_{x,u}^{h,h_u} \right) \\
= & \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{K_y^{h_y} + \alpha \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{12} \mathbb{1}_{y=x} + \beta_x B_{x,h}^{\alpha,\sigma} + \gamma_x}{(1+r)^{y-x}} p_{x,y}^{h,h_y} + \sigma B_{x,h}^{\alpha,\sigma} \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{1}{(1+r)^{y-x}} p_{x,y}^{h,h_y} \\
& - \sum_{y=x}^{x_{\max}} \sum_{h_y=1}^{l} \frac{B_{x,h}^{\alpha,\sigma}}{(1+r)^{y-x}} p_{x,y}^{h,h_y} \\
= & \mathbb{E}_{x,h}[LBW_x^{\alpha}] + \sigma B_{x,h}^{\alpha,\sigma} a_{x,h} - \mathbb{E}_{x,h}[PBW_x(B_{x,h}^{\alpha,\sigma})] \\
= & 0 \,,
\end{aligned}
$$

wobei wir für den drittletzten Schritt Lemma 3.1 verwendet haben und die letzte Gleichung der Äquivalenzgleichung (32) entspricht.

Danksagung

Das finanzielle Engagement der drei Unternehmensgruppen Versicherungsverbund Die Continentale, Signal Iduna Gruppe und Volkswohl Bund Versicherungen im Bereich der Versicherungsmathematik an der Technischen Universität Dortmund sei an dieser Stelle ausdrücklich gewürdigt. Das dadurch geschaffene Umfeld hat zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen.

Literatur

[1] Bohn, K. (1980) *Die Mathematik der deutschen Privaten Krankenversicherung.* Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik **11**, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[2] Bundesversicherungsamt (2008) So funktioniert der neue Risikostrukturausgleich im Gesundheitsfonds.

[3] Meier, V., Baumann, F. und Werding, M. (2004) Modelle zur Übertragung individueller Alterungsrückstellungen beim Wechsel privater Krankenversicherer. *ifo Beiträge zur Wirtschaftsforschung* **14**, ifo Institut für Wirtschaftsforschung, München.

[4] Meier, V. und Werding, M. (2007) Übertragbarkeit risikoabhängiger Alterungsrückstellungen in der Privaten Krankenversicherung. *ifo Forschungsberichte* **38**, ifo Institut für Wirtschaftsforschung, München.

[5] Meyer, U. (2001), Mehr Wettbewerb in der privaten Krankenversicherung durch Übertragbarkeit der Alterungsrückstellung, *Arbeitspapier*, Universität Bamberg

[6] Meyer, U. (2007) Zum Verhältnis zwischen GKV und PKV. In *Hermann, H. und Gruner, P. (Hg.): Nordbayerischer Versicherungstag 2006*, Berlin/Nürnberg.

[7] Milbrodt, H. (2004) Wird es ernst? Zur Portabilität der Alterungsrückstellung in der PKV. Der Aktuar 10, 137–145

[8] Milbrodt, H. (2005) *Aktuarielle Methoden in der deutschen Privaten Krankenversicherung.* Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik **34**, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.

[9] Milbrodt, H. (2005) Eine unendliche Geschichte? Zur Mitgabe der Alterungsrückstellung in der PKV. *PKV Publik* 3/2005, 33–35

[10] Milbrodt, H. und M. Helbig (1999) *Mathematische Methoden der Personenversicherung.* De Gruyter, Berlin.

[11] Nell, M. und Rosenbrock, S. (2008) Wettbewerb in kapitalgedeckten Krankenversicherungssystemen: Ein risikogerechter Ansatz zur Übertragung von Alterungsrückstellungen in der Privaten Krankenversicherung. *Perspektiven der Wirtschaftspolitik*, **9**(2):173–195.

[12] Nell, M. und Rosenbrock, S. (2008) Ein Risikoausgleichsmodell für den Wettbewerb um Bestandskunden in der PKV. *Working papers on risk and insurance* **24**, Hamburg University.

[13] Wissenschaftlicher Beirat zur Weiterentwicklung des Risikostrukturausgleichs (2007) Wissenschaftliches Gutachten für die Auswahl von 50 bis 80 Krankheiten zur Berücksichtigung im morbiditätsorientierten Risikostrukturausgleich.

Preprints ab 2008/08

2009-11 **Henryk Zähle**
Ein aktuarielles Modell für die Portabilität der Alterungsrückstellungen in der PKV

2009-10 **Andreas Neuenkirch and Henryk Zähle**
Asymptotic error distribution of the Euler method for SDEs with non-Lipschitz coefficients

2009-09 **Karl Friedrich Siburg, Pavel A. Stoimenov**
Regression dependence

2009-08 **Wilfried Hazod**
Continuous convolution hemigroups integrating a sub-multiplicative function

2009-07 **Sergio Conti and Ben Schweizer**
On optimal metrics preventing mass transfer

2009-06 **Simon Castle, Norbert Peyerimhoff, Karl Friedrich Siburg**
Billiards in ideal hyperbolic polygons

2009-05 **Ludwig Danzer**
Quasiperiodic Tilings - Substitution Versus Inflation

2009-04 **Flavius Guiaş**
Direct simulation of the infinitesimal dynamics of semi-discrete approximations for convection-diffusion-reaction problems

2009-03 **Franz Kalhoff and Victor Pambuccian**
Existential definability of parallelism in terms of betweenness in Archimedean ordered affine geometry

2009-02 **Fulvia Buzzi, Michael Lenzinger and Ben Schweizer**
Interface conditions for degenerate two-phase flow equations in one space dimension

2009-01 **Henryk Zähle**
Approximation of SDEs by population-size-dependent Galton-Watson processes

2008-25 **Winfried Hazod**
Mehler semigroups, Ornstein-Uhlenbeck processes and background driving Lévy processes on locally compact groups and on hypergroups

2008-24 **Karl Friedrich Siburg, Pavel A. Stoimenov**
Symmetry of functions and exchangeability of random variables

2008-23 **Ina Kirsten Voigt**
Voronoi Cells of Discrete Point Sets

2008-22 **Michael Lenzinger and Ben Schweizer**
Effective reaction rates of a thin catalyst layer

2008-21 **Michael Voit**
Bessel convolutions on matrix cones: Algebraic properties and random walks

2008-20 **Margit Rösler and Michael Voit**
Limit theorems for radial random walks on $p \times q$-matrices as p tends to infinity

2008-19 **Michael Voit**
Central Limit Theorems for Radial Random Walks on $p \times q$ Matrices for $p \to \infty$

2008-18 **Michael Voit**
Limit theorems for radial random walks on homogeneous spaces with growing dimensions

2008-17 **Ansgar Steland and Henryk Zähle**
Sampling inspection by variables: nonparametric setting

2008-16 **Guy Bouchitté and Ben Schweizer**
Homogenization of Maxwell's equations with split rings

2008-15 **Wilfried Hazod**
Multiple selfdecomposable laws on vector spaces and on groups: The existence of background driving processes

2008-14 **Wilfried Hazod**
Mixing of generating functionals and applications to (semi-)stability of probabilities on groups

2008-13 **Wilfried Hazod**
Probability on Matrix-Cone Hypergroups: Limit Theorems and Structural Properties

2008-12 **Michael Lenzinger and Ben Schweizer**
Two-phase flow equations with outflow boundary conditions in the hydrophobic-hydrophilic case

2008-11 **Karl Friedrich Siburg**
Geometric proofs of the two-dimensional Borsuk-Ulam theorem

2008-10 **Peter Becker-Kern, Wilfried Hazod**
Mehler hemigroups and embedding of discrete skew convolution

2008-09 **Karl Friedrich Siburg, Pavel A. Stoimenov**
Gluing copulas

2008-08 **Karl Friedrich Siburg, Pavel A. Stoimenov**
A measure of mutual complete dependence