

# **Wärmetransformationsprozesse ohne Phasenumwandlung**

Thermodynamische Konzeption, Auslegung und Optimierung  
an Beispielen aus der Wärmepumpen- und Kältetechnik

## **Habilitationsschrift**

vorgelegt von  
Dr.-Ing. Hans-Detlev Kühl  
aus Hemer

Fachbereich Chemietechnik  
der Universität Dortmund

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Siegfried Schulz, Universität Dortmund  
Prof. Dr. Henrik Carlsen, DTU Lyngby, Dänemark  
Prof. Dr.-Ing. Stephan Kabelac, Universität der Bundeswehr, Hamburg

Habilitationskolloquium am 30.4.2003

Zuerkennung der Lehrbefähigung und der *Venia Legendi* für das Fachgebiet  
„Thermodynamik“ durch Beschluss des Fachbereichsrates vom 30.4.2003

Dortmund 2003



## Vorwort

Die vorliegende Schrift entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Thermodynamik im Fachbereich Chemietechnik der Universität Dortmund in den Jahren 1991 – 2001.

Mein besonderer Dank gilt zunächst Herrn Prof. Dr.-Ing. Siegfried Schulz, meinem Lehrer und Doktorvater, der mir als Inhaber des Lehrstuhls für Thermodynamik die Möglichkeit bot, dort nach meiner Promotion in der Position des Oberingenieurs selbständig wissenschaftlich zu arbeiten und dabei eine eigene Arbeitsgruppe aufzubauen. Er gewährte mir einerseits den Freiraum zur Verwirklichung eigener Ideen und stand mir andererseits stets hilfreich zur Seite, wo es erforderlich war, sei es bei der Akquisition und Bereitstellung von Forschungsmitteln, sei es als Ratgeber und Diskussionspartner in wissenschaftlichen und konzeptionellen Fragen.

Ebenso danke ich Frau Prof. Dr. Gabriele Sadowski, die mir nach ihrer Berufung auf den Lehrstuhl für Thermodynamik – in Nachfolge von Herrn Prof. Schulz – die Möglichkeit gab, meine Arbeiten weiterzuführen und in Form der nun vorliegenden Schrift zusammenzufassen, und mich dabei stets wohlwollend mit Rat und Tat unterstützt hat.

Weiterhin danke ich allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Thermodynamik und der gemeinsamen Einrichtungen des Fachbereichs Chemietechnik für ihre vielfältige Unterstützung und ihre engagierte und qualifizierte Mitarbeit, ohne die diese Arbeit niemals entstanden wäre. Dies gilt in besonderem Maße für meine Kollegen aus der Arbeitsgruppe „regenerative Kreisprozesse“, Arnd Hilligweg, Frank Schwendig, Bernd Thomas, Thomas Pfeffer, Christoph Walther und Joachim Rüther, die im Rahmen ihrer Promotionsarbeit unverzichtbare Beiträge geleistet haben. Ebenso danke ich allen studentischen Mitarbeitern in unserer Gruppe, die gleichfalls maßgeblichen Anteil an den erzielten Ergebnissen und dem Entstehen dieser Arbeit haben, sei es als Hilfskräfte oder im Rahmen von Studien- und Diplomarbeiten.

Wegbereitend für meine späteren Arbeiten und damit auch für diese Schrift war sicherlich in besonderem Maße meine ca. einjährige Tätigkeit als Research Associate an der University of Calgary in Kanada. Sie wurde mir durch ein Auslandsstipendium der Studienstiftung des Deutschen Volkes ermöglicht, für das ich mich – ebenso wie für die vorhergehende Förderung während meines Studiums – an dieser Stelle nochmals herzlich bedanke. Ich verdanke ihr viele Kenntnisse, Erfahrungen, Eindrücke und persönliche Kontakte, die für mich bis heute sehr wertvoll sind. Hierfür möchte ich mich insbesondere bei Herrn Prof. Dr. Graham Walker bedanken, mit dem ich in dieser Zeit zusammenarbeiten durfte, sowie bei den Professoren Dr. Owen Fauvel, Dr. John Kentfield und Dr. Peter Vermeulen. Ebenso danke ich den technischen Mitarbeitern des Department of Mechanical Engineering und der Faculty of Engineering, die mich bei den experimentellen Arbeiten vielfältig unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt weiterhin Herrn Prof. Dr. Henrik Carlsen an der DTU Lyngby für die gute Zusammenarbeit und die substantielle Unterstützung bei der Entwicklung der Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpen sowie für die vielen fruchtbaren Diskussionen, die wir bei verschiedenen Gelegenheiten führen konnten. Ebenso danke ich den Mitarbeitern der Firma BVE Thermolift in Aachen für die gute Zusammenarbeit im Rahmen der Projekte „Regeneratives Heizen und Kühlen“ I und II. Besonders nennen möchte ich hier Klaus Heikrodt, Roman Heckt, Thomas Koch und wiederum Bernd Thomas – mit ihm verbindet mich bis heute eine besonders langjährige fachliche Zusammenarbeit und Freundschaft, die bereits 1986 mit seiner Studienarbeit hier am Lehrstuhl für Thermodynamik begann.

Ohne finanzielle Unterstützung von dritter Seite wären die verschiedenen, im Laufe der Jahre in unserer Arbeitsgruppe durchgeführten Projekte nicht möglich und damit auch die in dieser Schrift dokumentierten Arbeitsergebnisse in weiten Teilen nicht zu erzielen gewesen. Ich danke daher der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG, dem Bundesministerium für Bildung und Forschung BMBF sowie der Deutschen Bundesstiftung Umwelt DBU für die großzügig gewährten Fördermittel. Ebenso danke ich den Firmen Viessmann Werke GmbH&Co (Allendorf/Eder) und Robert Bosch GmbH (Stuttgart), die als Partner in Verbundprojekten ebenfalls zur Finanzierung beigetragen haben. Den beteiligten Mitarbeitern in diesen Firmen wie auch im Institut für Luft- und Kältetechnik ILK (Dresden) und in der FEV Motorentechnik (Aachen) gilt mein Dank für die gute und konstruktive Zusammenarbeit.

Die genannten und viele andere Firmen haben darüber hinaus durch Spenden von Material und Geräten, Überlassung von Versuchsanlagen, kostengünstige Sonderanfertigungen von Bauteilen u. ä. in vielfältiger Form zum Gelingen insbesondere unserer experimentellen Arbeiten beigetragen. Hierfür sei an dieser Stelle nochmals gedankt.

Mein größter und herzlichster Dank gebührt schließlich meiner Mutter und meiner Freundin Claudia, die mich beide mit viel Liebe, Geduld und Toleranz unterstützt haben und gerade in der letzten Zeit häufig auf die Zuwendung verzichten haben, auf die sie eigentlich Anspruch gehabt hätten, um mir so die Fertigstellung meiner Arbeit zu ermöglichen.

Dortmund, im Mai 2002

Hans-Detlev Kühl

# Inhaltsverzeichnis

1	Thermodynamische Kreisprozesse im Überblick.....	1
2	Prozesskonfiguration und -auswahl.....	5
2.1	Systematische Synthese regenerativer Kreisprozesse .....	5
2.1.1	Synthese aus elementaren Komponenten .....	5
2.1.1.1	Begriffsdefinitionen .....	5
2.1.1.2	Unterscheidung von $\alpha$ -, $\beta$ - und $\gamma$ -Konfiguration im allgemeinen Fall.....	5
2.1.1.3	Phasenwinkel und Hubraumverhältnisse .....	7
2.1.2	Synthese aus mechanischen und thermischen Verdichtern.....	10
2.1.2.1	Die Bedeutung der Prozessdruckamplitude und ihrer Phasenlage.....	10
2.1.2.2	Der mechanische und der thermische Verdichter im Vergleich.....	11
2.1.2.3	Stirling- und Vuilleumier-Prozess als Kombination zweier Verdichter .....	12
2.1.2.4	Prozesse mit mehrfacher Expansion .....	13
2.1.2.5	Der Duplex-Ericsson-Prozess .....	15
2.1.2.6	Die Überlagerung mechanischer und thermischer Kompression.....	17
2.2	Allgemeine Klassifikation regenerativer Kreisprozesse .....	19
2.3	Der Einfluss des adiabatischen Verlustes auf die Prozessauswahl und -auslegung...24	
3	Beiträge zur mathematischen Modellierung.....	31
3.1	Vorbemerkungen und Literaturübersicht .....	31
3.1.1	Allgemeines.....	31
3.1.2	Verfahren erster Ordnung.....	31
3.1.3	Verfahren zweiter Ordnung.....	32
3.1.4	Verfahren dritter Ordnung.....	33
3.1.5	Neuere Entwicklungen .....	34
3.1.6	Probleme und Grenzen der eindimensionalen Modellierung.....	35
3.1.7	Mehrdimensionale Modellierung .....	37
3.2	Regeneratorverluste in Modellen zweiter Ordnung .....	39
3.2.1	Der Wärmeübergangsverlust.....	39
3.2.2	Wärmeleitungsverluste.....	42
3.2.3	Temperaturschwingungsverluste.....	44
3.2.4	Der Dispersionsverlust .....	46
3.2.5	Inhomogenitäten und Randgängigkeit.....	48
3.3	Strömungsdruckverluste in Modellen zweiter Ordnung .....	53
3.4	Beschreibung von Regeneratoren mit Fasermatrix .....	57
3.4.1	Verfügbare experimentelle Daten und Korrelationen .....	57
3.4.2	Neuer Ansatz zur Beschreibung der Strömungsdruckverluste.....	60
3.4.3	Neuer Ansatz zur Beschreibung des Wärmeübergangs .....	64
3.5	Beschreibung oszillierender Strömungen.....	69
3.5.1	Strömungsmodellierung und Druckverlust .....	69
3.5.1.1	Grundlagen.....	69
3.5.1.2	Die ausgebildete laminare Strömung .....	71
3.5.1.3	Die nicht ausgebildete laminare Strömung .....	74
3.5.1.4	Der laminar-turbulente Übergang bei oszillierender Strömung.....	77
3.5.1.5	Die Modellierung der oszillierenden turbulenten Strömung.....	78

3.5.2	Modellierung des Wärmeübergangs .....	80
3.5.2.1	Grundlagen.....	80
3.5.2.2	Wärmeübergang bei nicht ausgebildeter, laminarer Strömung.....	84
3.5.2.3	Wärmeübergang bei nicht ausgebildeter, turbulenter Strömung.....	88
4	Theoretische Ansätze und Methoden zur thermodynamischen Prozessoptimierung .....	93
4.1	Vorüberlegungen.....	93
4.1.1	Eigenschaften der Zielfunktion .....	93
4.1.2	Auswahl von Werkstoffen und Arbeitsmedium .....	95
4.1.3	Globale Parameter.....	95
4.1.3.1	Mittlerer Prozessdruck, Drehzahl und Summe des Hubvolumens .....	95
4.1.3.2	Die Summe des temperaturbezogenen Totvolumens.....	96
4.1.3.3	Hubraumverhältnisse und Phasenwinkel .....	97
4.1.4	Lokale Parameter der Prozesskomponenten .....	98
4.1.4.1	Kolbenspaltweiten und Hub-Durchmesser-Verhältnisse .....	98
4.1.4.2	Die Verteilung des temperaturbezogenen Totvolumens.....	99
4.1.4.3	Die geometrischen Abmessungen der Komponenten .....	100
4.1.5	Hierarchisch strukturierte Optimierung .....	101
4.2	Dimensionslose Kennzahlen zur Beschreibung regenerativer Kreisprozesse .....	103
4.2.1	Allgemeine Kennzahlen für den Gesamtprozess .....	103
4.2.2	Kennzahlen für einzelne Prozesskomponenten .....	104
4.2.2.1	Komponentenspezifische Druck-Kennzahl und Machzahl.....	104
4.2.2.2	Das bezogene Totvolumen und seine Bedeutung .....	105
4.2.2.3	Strömungs- und wärmetechnische Kennzahlen .....	106
4.2.2.4	Dimensionslose Entropieproduktion und Wärmebelastung.....	107
4.2.2.5	Weitere Kennzahlen.....	108
4.3	Skalierungsregeln.....	110
4.3.1	Skalierung bei vollständiger Ähnlichkeit der Gas-Prozesse .....	110
4.3.2	Skalierung der Querschnitte.....	113
4.3.3	Variation der Stirling-Zahl.....	114
4.4	Die Auswahl des Arbeitsmediums.....	116
4.5	Ähnlichkeitstheoretische Ansätze zur Optimierung .....	120
4.5.1	Vereinfachte Optimierung der Regeneratoren .....	120
4.5.2	Vereinfachte Optimierung der Wärmeübertrager .....	124
4.5.3	Ergebnisse für den Gesamtprozess .....	130
4.6	Numerische Optimierung.....	135
4.6.1	Hierarchisch strukturiertes Simplex-Verfahren .....	135
4.6.2	Lokale Approximation der Zielfunktion .....	143
4.6.2.1	Vorüberlegungen und frühere Arbeiten .....	143
4.6.2.2	Ermittlung von Ausgleichsfunktionen ersten und zweiten Grades.....	147
4.6.2.3	Unbeschränkte Optimierung auf der Basis der Ausgleichsfunktion .....	149
4.6.2.4	Berücksichtigung expliziter Nebenbedingungen .....	152
4.6.3	Vergleich der Optimierungsverfahren anhand eines Beispiels .....	153

5	Konstruktive Optimierung unter Kostenaspekten .....	155
5.1	Die Gestaltung der Wärmeübertrager .....	155
5.1.1	Wärmeaustausch mit Wärme- und Kälte­trägerkreisläufen .....	155
5.1.2	Kostengünstige Gestaltung von Erhitzer­köpfen.....	157
5.2	Kostengünstige Regeneratorbauarten.....	161
5.2.1	Ausgangssituation .....	161
5.2.2	Auswahl von Materialien für vergleichende Untersuchungen .....	163
5.2.3	Experimentelle Vorgehensweise .....	166
5.2.4	Versuchsauswertung und Ergebnisse .....	169
5.3	Kinematische Kolbenführungen.....	172
5.3.1	Allgemeine Anforderungen und Problematik .....	172
5.3.2	Entwicklung eines neuartigen Getriebemechanismus.....	175
5.4	Vuilleumier-Wärmepumpen in Freikolben-Bauweise .....	177
5.4.1	Bisherige Arbeiten.....	177
5.4.2	Gegenwärtige Entwicklungsziele .....	182
6	Zusammenfassung .....	191
	Literaturverzeichnis.....	193

## Anhang

1	Mathematische Behandlung der isothermen Idealprozesse .....	209
1.1	Grundgleichungen des idealen isothermen Modells regenerativer Kreisprozesse nach SCHMIDT.....	209
1.2	Die allgemeine Berechnung von Gasmassen-­verteilungen und Massenströmen ..	213
2	Herleitungen zur Modellierung von Verlusten .....	217
2.1	Der Wärmeleitungsverlust in der Behälterwand .....	217
2.2	Thermische Verluste an Zylindern und Kolben .....	218
2.3	Abschätzung des Dispersionsverlustes .....	220
2.4	Herleitungen zur Erfassung von Strömungsdruckverlusten in Prozessmodellen 2. Ordnung .....	222
3	Herleitungen ähnlichkeitstheoretischer Zusammenhänge .....	225
3.1	Entropieproduktion in Regeneratoren .....	225
3.2	Entropieproduktion in Wärmeübertragern .....	229
3.3	Bestimmung optimaler Auslegungsdaten.....	231
4	Auslegungsdaten und Zeichnungen verschiedener Vuilleumier-Wärmepumpen .....	234
4.1	Daten der 4 kW-Versuchsmaschine nach PFEFFER (1999) .....	234
4.2	Zeichnung der 4 kW-Versuchsmaschine (PFEFFER 1999) .....	239
4.3	Versuchsmaschine 4 kW nach HEIKRODT ET AL. (1996) .....	241
4.4	Baumuster 20 kW nach HEIKRODT UND HECKT (1999) .....	242
4.5	Seriennaher Konstruktionsentwurf (20 kW mit integrierter Bivalenz) nach HEIKRODT UND HECKT (1999) .....	243





# Formelzeichen

## Lateinische Symbole

Symbol	Definition	Beschreibung	SI-Einheit
A		Fläche	m <sup>2</sup>
a	$\lambda / \rho c_p$	Temperaturleitfähigkeit	m <sup>2</sup> /s
a		Koeffizient in Approximationsfunktionen	-
B	Gl. A1-2a	Mittelwert von $\Sigma V_i/T_i$	m <sup>3</sup> /K
b	Gl. 4-70	Abstand im central composite design	-
b	Gl. 4-75	Koeffizient linearer Nebenbedingungen	-
C		volumenspezifische Wärmekapazität	J/m <sup>3</sup> K
C		Federkonstante	N/m
c		spezifische Wärmekapazität (Feststoff)	J/kg K
c <sub>p</sub> , c <sub>v</sub>		isobare bzw. isochore Wärmekapazität	J/kg K
D	Gl. A1-2b	Amplitude von $\Sigma V_i/T_i$	m <sup>3</sup> /K
D		(Zylinder-, Kolben-) Durchmesser	m
D, D <sub>m</sub>		Dispersions-, Diffusionskonstante	m <sup>2</sup> /s
d		(Kanal-, Rohr-, Faser-) Durchmesser	m
E		Anzahl expliziter Nebenbedingungen	-
F		allgemeines Symbol für Hilfsfunktionen	
f	Gl. A2-18	Faktor in Druckverlustgleichungen	Pa (s/kg) <sup>i</sup>
f		Verlängerung des Strömungsweges	-
f	Gl. 3-16	Regenerator-Temperaturgradienten-Korr.	-
G <sub>ji</sub>	Gl. 3-30	Integral zur Berechnung von $\Phi_{ji}$	-
g	Gl. A1-13	Massenverteilungsfunktion	-
g	Gl. 4-75	Nebenbedingung in Optimierungen	-
H		Enthalpie	J
h		(Kolben-)Spaltweite	m
h		spezifische Enthalpie	J/kg
I		modifizierte Besselfunktion erster Art	-
i	$\sqrt{-1}$	imaginäre Einheit	-
J	Gl. 5-5	lineare Dämpfungskonstante	kg/s
K		empirischer Faktor	-

K	Gl. 5-5	effektive Federkonstanten-Summe	N/m
$l$		Länge (insbesondere in axialer Richtung)	m
M		molare Masse	g/mol
m		Masse, insbes. gesamte Prozessgasmasse	kg
N		Anzahl (Dimensionen, Parameter)	-
n		Anzahl	-
n	$\omega/2\pi$	Drehzahl, Frequenz	s <sup>-1</sup>
n		Polytrophenexponent	-
P		Leistung	W
P	Tabelle 4-5	Anzahl vermengter Wirkungen	-
p		Druck	Pa
Q		Wärmemenge	J
$\dot{q}$		Wärmestromdichte	W/m <sup>2</sup>
R		spezifische Gaskonstante	J/kg K
R		(Rohr-, Zylinder-, Kugel-) Radius	m
r		Radius (Koordinate)	m
S		Entropie	J/K
s		spezifische Entropie	J/kg K
s		Wandstärke, Netz- oder Gitterteilung	m
T		Temperatur	K
t		Zeit	s
U		Innere Energie	J
u		(axiale) Strömungsgeschwindigkeit	m/s
V	-	Volumen	m <sup>3</sup>
v	Gl. 4-6	bezogenes Totvolumen	-
v		radiale Strömungsgeschwindigkeit	m/s
W		Arbeit	J
w		freie Maschenweite (Drahtnetze o. ä.)	m
$X_j$	Gl. A1-14	Mittelwert von $\Sigma V_i/T_i$ oberhalb j	m <sup>3</sup> /K
x		Ortskoordinate, insbes. axial	m
x	Kap. 4.6.2.1	dimensionsloser Optimierungsparameter	-
Y		Funktion, insbes. lokale Approximation	-
$Y_j$	Gl. A1-15	Amplitude von $\Sigma V_i/T_i$ oberhalb j	m <sup>3</sup> /K

## Griechische Symbole

Symbol	Definition	Beschreibung	SI-Einheit
$\alpha$		Wärmeübergangskoeffizient	$\text{W/m}^2 \text{ K}$
$\beta$	Gl. A1-19	Hilfswinkel zur Massenstromberechnung	rad
$\Gamma$	Gl. 4-17	dimensionslose Wärmetauscherbelastung	-
$\delta$	Gl. 3-46	Grenzschichtdicke	m
$\varepsilon$		Porosität	-
$\zeta$		Leistungszahl	-
$\eta$		Wirkungsgrad	-
$\eta$		dynamische Viskosität	$\text{kg/m s}$
$\theta$	-	Phasenwinkel	rad
$\vartheta$		dimensionslose Temperatur	-
$\kappa$	$c_p / c_v$	Isentropenexponent	-
$\Lambda$		bezogene Komponentenlänge	-
$\lambda$		bezogene Längenkoordinate	-
$\lambda$		Lagrange'scher Multiplikator	-
$\lambda$		spezifische Wärmeleitfähigkeit	$\text{W/m K}$
$\mu$		Eigenwert, insbes. der Hesse-Matrix	-
$\nu$	$\eta/\rho$	kinematische Viskosität	$\text{m}^2/\text{s}$
$\xi$		Druckverlustbeiwert	-
$\xi$	Gl. 3-8	Regeneratorverlust	-
$\rho$		Dichte	$\text{kg/m}^3$
$\sigma$		Festigkeitskennwert	Pa
$\Phi$		dissipativer Korrekturterm	J
$\varphi$	-	Kurbelwinkel	rad
$\chi$		Skalierungsfaktor	-
$\psi_j$	Gl. A1-16	Phasenwinkel von $\Sigma V_i/T_i$ oberhalb j	rad
$\omega$	$2\pi n$	Kreisfrequenz	$\text{s}^{-1}$

## Dimensionslose Kennzahlen

Be	Gl. 3-1	Beale-Zahl
Ma	Gl. 4-4	Mach-Zahl
$N_p$	Gl. 4-3	Druck-Kennzahl
NTU	Gl. 3-9	Anzahl der Übertragungseinheiten
Nu	$\alpha d/\lambda$	Nusselt-Zahl
Pe	$u d/D_m$	Peclét-Zahl des Stofftransportes
Pr	$\eta c_p/\lambda$	Prandtl-Zahl
Re	$u d/\nu$	Reynolds-Zahl
$Re_\omega$	$\omega d^2/\nu$	kinetische Reynolds-Zahl, Valensi-Zahl
Sc	$\nu/D_m$	Schmidt-Zahl
Sg	Gl. 4-5	Stirling-Zahl
St	$\alpha/\rho c_p u$	Stanton-Zahl

## Indizes (tiefgestellt)

A	Axialer Punkt im central composite design
ab	abgeführt
aus	Ausströmung (insbesondere am Regenerator)
b	Mittelung über den Enthalpiestrom (engl.: „bulk“)
C	Carnot (Carnot-Wirkungsgrad, Carnot'scher Stoßverlust)
D	Verdränger (engl.: „displacer“)
En	Enthalpiestrom-Verlust (Gl. A2-7)
ein	Einströmung (insbesondere am Regenerator)
F	faktorieller (Teil-)Versuchsplan
f	unter Berücksichtigung des Verlängerungsfaktors f
frei	freier Strömungs- oder Innenquerschnitt, freies Volumen
ges	gesamt
Hub	auf den Kolbenhub bezogen (insbes. Hubvolumen)
h	hydraulisch (Radius, Durchmesser)
h	heiß, hohes Temperaturniveau
i	Index, insbes. für Prozesskomponenten
id	ideal
im	imaginär
irr	irreversibel
j	Index, insbes. für Schnittstellen zwischen Prozesskomponenten
X	

---

K	Kugel, Kugelschüttung
k	kalt, tiefes Temperaturniveau
k	Index, insbes. für Zylinderräume
l	laminar
M	Matrix (Speichermatrix eines Regenerators)
m	örtlicher Mittelwert
m	molekular (bez. Transportprozessen)
n	Ordnung (Bessel-Funktion)
min	minimal
max	maximal
n	Index für Prozesskomponente n
P	Verdichterkolben (engl.: „piston“)
p	Prozessdruck
q	(Anström-) Querschnitt
R	Regenerator
re	reell
ref	Referenzzustand
Sh	Shuttle-Verlust (Gl. A2-6)
St	Stange (Kolbenstangenquerschnitt)
stat	stationär
T	Totvolumen
t	anteilige Prozessgasmasse oberhalb einer Schnittstelle
t	turbulent (Wärme- und Temperaturleitfähigkeit)
theo	theoretisch (Austauschfläche)
V	Verlust
W	Wand (insbes. drucktragende Behälterwand)
Wl	Wärmeleitung
WÜ	Wärmeübergang (insbes. bez. Regeneratorverlusten)
WWl	Wand-Wärmeleitung
w	„warm“, mittleres Temperaturniveau
w	auf die freie Maschenweite w bezogen
wahr	wahre (aktive) Wärmeübertragungsfläche
Z	Zylinder
z	Vermischungszelle im Dispersionsmodell
zul	zulässig (Festigkeitskennwert)

## Indizes (hochgestellt)

-	Mittelwert (zeitlich, Vermischung)
^	Amplitudenwert
*	dimensionslose Größe
~	komplexe Größe
ˆ	modifizierte Größe, Näherungswert
·	Ableitung nach der Zeit
T	transponiert (Vektor, Matrix)

# 1 Thermodynamische Kreisprozesse im Überblick

Thermodynamische Kreisprozesse spielen in vielen Bereichen der Technik eine bedeutende Rolle, wobei ihre primäre Aufgabe stets in der Umwandlung von Energieströmen zu sehen ist. Dies gilt nicht nur für die unmittelbaren Anwendungen in der Energietechnik, sondern auch für die bekannten Prozesse zur Stofftrennung, die letztlich ebenfalls auf Energieumwandlungen beruhen, hier jedoch nicht näher betrachtet werden sollen. Grundsätzlich wird dabei ein Arbeitsmedium, das insbesondere bei geschlossenen Kreisprozessen oft in recht weiten Grenzen frei gewählt und dem jeweiligen Anwendungsfall angepasst werden kann, einer zyklischen Folge von Zustandsänderungen unterworfen, bei denen i. d. R. Energie in Form von Wärme oder Arbeit über die Systemgrenzen ausgetauscht wird.

Nach BIDARD (1970) bietet es sich an, hier zunächst eine weitere Unterteilung in isotherme und nicht isotherme Zustandsänderungen vorzunehmen, wobei zur ersten Gruppe die isobare Verdampfung und Kondensation, die isotherme Kompression und Expansion sowie die Änderung elektrischer, magnetischer und sonstiger Eigenschaften zählen. Letztere werden nur in Spezialfällen genutzt, z.B. in der extremen Tieftemperaturtechnik, und haben insofern keine energiewirtschaftliche Bedeutung. Ähnliches gilt für sonstige Phasenumwandlungen, bei denen feste Phasen beteiligt sind und die man sonst ebenfalls zu dieser Gruppe rechnen müsste.

Die zweite Gruppe umfasst alle verbleibenden Zustandsänderungen, die STEPHAN und MAYINGER (1986) allgemein durch Polytropen mit einem Polytropenindex  $n \neq 1$  beschreiben. Besonders hervorzuheben sind hierbei die bekannten Spezialfälle der Adiabaten mit  $n = \kappa = c_p/c_v$ , der Isobaren ( $n = 0$ ) oder der Isochoren ( $n = \infty$ ).

Nach BIDARD ist es anzustreben, einen Kreisprozess aus einer alternierenden Folge von Zustandsänderungen der ersten und der zweiten Gruppe zusammenzusetzen. Dies ist zumindest dann sinnvoll, wenn Wärmeströme mit Reservoirs möglichst reversibel ausgetauscht werden sollen, denn dies ist nur mit den Teilprozessen der ersten Gruppe möglich. Da ein sinnvoller thermodynamischer Prozess jedoch auf (mindestens) zwei unterschiedlichen Temperaturniveaus Wärme austauschen muss, benötigt man zusätzlich mindestens zwei Teilprozesse der zweiten Gruppe zur Überführung des Arbeitsmediums von einem Niveau zum anderen. Je nachdem, ob diese Prozesse, die von BIDARD als *perfekte* Prozesse bezeichnet werden, rechtsläufig oder linksläufig betrieben werden, sind sie bekanntlich entweder als Wärmekraftmaschinen oder als mechanisch angetriebene Kältemaschinen bzw. Wärmepumpen nutzbar.

Es existieren jedoch eine Reihe technisch wichtiger Kreisprozesse, die die Bedingung nach BIDARD nicht erfüllen und somit als *nicht perfekt* zu bezeichnen sind. Hier sind insbesondere der Joule-Prozess sowie der ideale Otto- und Diesel-Prozess zu nennen, aber auch der Dampfkraft- bzw. Kaltdampfprozess nach Clausius-Rankine, der zumindest auf dem jeweils höheren Temperaturniveau wegen des Wärmeaustausches im Bereich überhitzter Dampf- oder unterkühlter Flüssigkeitszustände nicht vollständig isotherm verläuft. Zur thermodynamischen Bewertung derartiger Prozesse werden oft Hilfsgrößen wie z.B. die thermodynamische Mitteltemperatur definiert, die letztlich jedoch nur zum Ausdruck bringen, dass das im jeweiligen Anwendungsfall für die Wärmeübertragung geforderte Temperaturniveau vom Prozess nicht eingehalten wird. Aus den Abweichungen resultieren grundsätzlich zusätzliche Irreversibilitäten, die den Gütegrad des Prozesses verschlechtern. So ist z.B. die Temperatur der Wärmezufuhr im Dampfkraftprozess i.d.R. durch die verwendeten Werkstoffe nach oben begrenzt, und somit führt eine darunter liegende thermodynamische Mitteltemperatur in jedem Falle zu einer

Verringerung des thermischen Wirkungsgrades. Dieses zentrale Problem der Kraftwerkstechnik wird meist durch eine Reihe bekannter, technisch z.T. durchaus aufwändiger Prozessmodifikationen entschärft (Luft- und Speisewasservorwärmung, Zwischenüberhitzung).

Das oft zugunsten einer nicht isothermen Wärmeübertragung angeführte Argument, dass so eine vorteilhafte Gegenstromführung mit einem externen Medium möglich ist, das dann seinerseits bei gleitender Temperatur Wärme aufnehmen oder abgeben kann, ist nur in bestimmten Fällen, wie z.B. der Abwärmenutzung bei einem vorhandenen Stoffstrom bestimmter Anfangstemperatur, wirklich relevant. In vielen Fällen liegt eher die Anbindung an ein Reservoir vor, sei es die Umgebung, ein Kühlraum, ein zu beheizendes Gebäude oder ein Wärmespeicher, dessen Verluste auszugleichen sind. Auch im Fall des Antriebs einer Wärmekraftmaschine durch einen Verbrennungsprozess lässt sich mit Hilfe einer Rauchgas-Luftvorwärmung grundsätzlich eine isotherme Wärmezufuhr bei der jeweils höchsten werkstofftechnisch möglichen Temperatur realisieren. Mit den heutigen Techniken zur Rauchgasrezirkulation, wie z.B. dem von WÜNNING (1991) entwickelten FLOX<sup>®</sup>-Verfahren, oder durch Einsatz von Katalysatoren ist eine annähernd isotherme Reaktionsführung möglich, bei der auch das Problem der zunehmenden Schadstoffemissionen (insbesondere NO<sub>x</sub>) beherrschbar bleibt.

Ein wesentlicher Grund, weshalb die zuletzt genannten Prozesse trotz ihrer thermodynamischen Nachteile große technische Bedeutung haben, ist vermutlich in ihrer bislang nicht erwähnten Gemeinsamkeit zu sehen, nämlich der Tatsache, dass sie alle ein Paar *adiabater* Zustandsänderungen enthalten, wodurch sich der externe Wärmeaustausch (der im Hinblick auf die damit verbundenen Irreversibilitäten hinreichend effizient sein muss und damit stets einen nennenswerten technischen Aufwand erfordert) auf denkbar einfachste Weise auf die zwei verbleibenden Zustandsänderungen beschränken lässt. Dies stellt unbestreitbar einen großen praktischen Vorteil dar – es sei hier nur beispielhaft auf die konstruktiven Schwierigkeiten bei der Realisierung gekühlter Verdichter hingewiesen.

Unter den perfekten Prozessen zeichnet sich lediglich der Prozess nach Carnot ebenfalls durch zwei adiabate (bzw. isentrope) Zustandsänderungen aus. Behält man nun die isothermen Zustandsänderungen bei (und bewahrt sich dadurch die theoretische Möglichkeit, den nach Carnot benannten reversiblen Grenzwert des Wirkungsgrades bzw. der Leistungszahl erreichen zu können), so gelangt man zu den *regenerativen* Prozessen. Zu ihnen sind auf der Ebene der hier betrachteten, lediglich aus vier einfachen Zustandsänderungen zusammengesetzten Kreisprozesse zunächst der Stirling und der Ericsson–Prozess zu rechnen, bei denen die Isentropen des Carnot–Prozesses durch Isochoren bzw. Isobaren ersetzt sind.

Damit ist hier im Gegensatz zu allen anderen zuvor genannten Prozessen grundsätzlich bei allen vier Zustandsänderungen eine Wärmeübertragung erforderlich. Bei näherer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass die während der nicht isothermen Teilprozesse ausgetauschten Wärmemengen – zumindest im Falle eines idealen Gases– betragsmäßig gleich groß sind und wegen der genau gegenläufigen Temperaturänderungen theoretisch vollständig in Regeneratoren intern zwischengespeichert werden können. Diese Komponenten tragen somit entscheidend dazu bei, dass der externe Wärmeaustausch bei regenerativen Prozessen tatsächlich nur während der isothermen Zustandsänderungen erfolgt, und sind in den Fällen, wo ein Wärmestrom auf ein höheres Temperaturniveau gehoben werden soll, für die Funktion sogar völlig unverzichtbar. Sie haben daher der gesamten Prozessgruppe mit Recht ihren Namen gegeben.

Theoretisch könnten die Regeneratoren bei paarweise um einen halben Zyklus zeitversetzt ablaufenden Prozessen auch durch im Gegenstrom betriebene Rekuperatoren ersetzt werden. In der Praxis scheitert dies jedoch an der thermischen Trägheit der Wärmeübertragungsflächen und daran, dass im Interesse einer hinreichenden Leistungsdichte das schädliche Volumen (im folgenden als „Totvolumen“ bezeichnet) gering gehalten werden muss, während zugleich eine



große Wärmeaustauschfläche anzustreben ist. Diese beiden Forderungen sind äquivalent mit der nach einem möglichst geringen hydraulischen Durchmesser. Dies erfordert wiederum sehr feine Strukturen, die sich in einem Rekuperator, der zudem noch einen idealen Gegenstrom ermöglichen muss, nur mit unverhältnismäßig hohem Aufwand (wenn überhaupt) realisieren lassen. Der Regenerator ist hier somit der prädestinierte Wärmeübertragertyp, denn hier wird nur eine einseitige Austauschfläche zwischen Fluid und Feststoff benötigt, die in Form verschiedener poröser oder disperser Materialien ungleich einfacher zu erhalten ist.

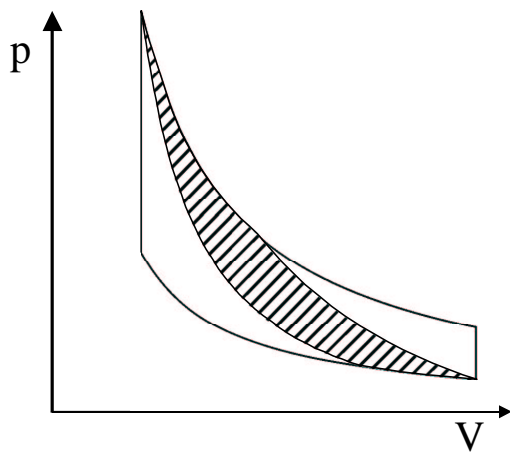
Die Forderung nach einem internen, möglichst verlustfreien Wärmeaustausch in diesen Prozessen bedingt zum einen den Verzicht auf Phasenumwandlungen des Arbeitsmediums – was allerdings teilweise durch die Freiheit bei der Wahl von Druck und Temperatur aufgewogen wird – und zum anderen zu dessen Realisierung einen höheren technischen Aufwand im Vergleich zum Carnot–Prozess. So stellt sich an dieser Stelle die Frage, weshalb sie dennoch eine gewisse praktische Bedeutung erlangt haben, während letzterer trotz seiner Einfachheit nach wie vor lediglich als thermodynamischer Referenzprozess von theoretischem Interesse ist.

Die Antwort auf diese Frage wurde bereits von mehreren Autoren gegeben, u.a. von WALKER (1980), und sei hier anhand eines Vergleichs zwischen dem Carnot– und dem idealen Stirling–Prozesses im  $p,V$ -Indikatordiagramm (Abb. 1-1) erläutert. Vorauszuschicken ist hierbei, dass für alle praktischen Anwendungsfälle neben dem Gütegrad vor allem auch die Leistungsdichte, d.h. die volumenbezogene Wärme-, Kälte- oder Arbeitsleistung von Bedeutung ist, die zumindest bei periodisch ablaufenden, durchweg in Kolbenmaschinen realisierten Prozessen eng mit der Änderung des Prozessvolumens (dem „Hubraum“) in Beziehung steht. Die Ausdehnung der Kurvenzüge in Abszissenrichtung, die in Abb. 1-1 gleich gewählt wurde, stellt demnach zumindest ein ungefähres Maß für die zu erwartende Baugröße einer den Prozess realisierenden Maschine dar, die somit hier vergleichbar wäre. Geht man nun weiter von gleichen Temperaturen der Wärmeaufnahme und –abgabe aus, so wird unmittelbar deutlich, dass der Stirling–Prozess alle diese Grenzen optimal ausschöpft und unter gegebenen Randbedingungen bezüglich des Arbeitsvolumens und der Betriebstemperaturen somit den Prozess mit der größtmöglichen Arbeitsleistung (bzw. -aufnahme) darstellt, während der Carnot–Prozess offensichtlich nur einen Bruchteil hiervon liefert. Wählt man das Verdichtungsverhältnis hinreichend niedrig bzw. das Temperaturverhältnis hinreichend hoch, so sind offensichtlich sogar Fälle konstruierbar, in denen der entsprechende Carnot–Prozess gar nicht realisierbar ist.

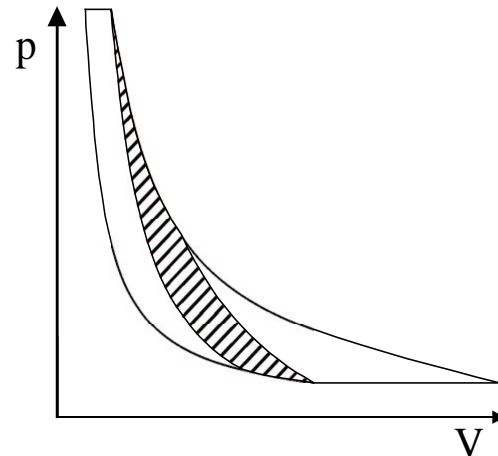
Dies gilt noch mehr für den Vergleich von Carnot– und Ericsson–Prozess gemäß Abb. 1-2. Letzterer ist dem Stirling–Prozess zwar hinsichtlich seiner Leistungsdichte unterlegen, bietet jedoch den Vorteil, dass die in Abb. 1-1 erkennbare ausgeprägte Druckspitze vermieden wird. Dies wirkt sich zwar nicht unmittelbar auf die Leistungsdichte, wohl aber über die Bauteildimensionierung auf das Leistungsgewicht und damit i. d. R. auch auf die Kosten aus. Darüber hinaus wird auch der später (Kap. 2.3) zu diskutierende, vom Druckverhältnis abhängige adiabatische Verlust reduziert, so dass hier in der Praxis u. U. bessere Gütegrade erzielbar sind.

Je nach den Randbedingungen des Einzelfalles ist also entweder der Stirling– oder der Ericsson–Prozess anzustreben. Der entsprechende Carnot–Prozess würde, sollte er denn überhaupt realisierbar sein, in jedem Fall nur einen Bruchteil der Leistung dieser regenerativen Prozesse erreichen, womit deren vergleichsweise große praktische Bedeutung begründet ist. Tatsächlich sind die meisten ausgeführten Stirling–Maschinen im Übergangsfeld zwischen diesen beiden theoretischen Idealprozessen einzuordnen (sofern denn ein Vergleich angesichts der durchweg großen Abweichungen zwischen Theorie und Praxis noch sinnvoll ist).

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass die regenerativen Prozesse offenbar einen besonders vorteilhaften Kompromiss zwischen den Forderungen nach einem hohen thermodynamischen Gütegrad einerseits und einer hinreichenden volumen- oder gewichtsbezogenen Leis-



**Abb. 1-1:** Vergleich zwischen idealem Stirling- und Carnot-Prozess



**Abb. 1-2:** Vergleich zwischen idealem Ericsson- und Carnot-Prozess

tung andererseits darstellen. Sie ermöglichen einen theoretisch reversiblen Wärmeaustausch auf verschiedenen Temperaturniveaus, wobei deren Zahl keineswegs auf zwei beschränkt bleiben muss, wie hier zunächst bei der Diskussion der einfachen Prozesse geschehen. Vielmehr sind Stirling- und Ericsson-Prozess lediglich als einfachste Vertreter einer theoretisch unendlichen „homologen Reihe“ regenerativer Kreisprozesse zu sehen, die im allgemeinsten Sinne des Wortes als Wärmetransformatoren zwischen  $n$  verschiedenen Temperaturniveaus fungieren. Als bekanntester Fall für  $n = 3$  ist hier der Vuilleumier-Prozess zu nennen, der sich als thermisch angetriebene Wärmepumpe eignet und theoretisch keine mechanische Arbeit austauscht. Auch für mehr als drei Temperaturniveaus existieren praktisch sinnvolle Prozesse, die nach später behandelten Grundregeln systematisch entwickelt werden können.

Aus dieser verallgemeinerten Sicht erscheint der Stirlingmotor als Wärmekraftmaschine im Nachhinein eher als Sonderfall. Die mechanische Arbeit, auf der hier das Hauptaugenmerk liegt, tritt in dieser Prozessgruppe nicht notwendigerweise auf, sondern (mit unterschiedlichen Vorzeichen) nur in den Fällen, in denen die Bilanzen nach dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik dies fordern. Es mag eine gewagte Hypothese sein, den im Vergleich zu seinen Hauptkonkurrenten bislang eher geringen Erfolg des Stirlingmotors darauf zurückzuführen, dass hier das „Nebenprodukt Arbeit“ zum „Hauptprodukt“ erhoben wurde und ein eigentlich eher zur Wärmetransformation geeigneter Prozess als Wärmekraftmaschine „zweckentfremdet“ wurde. Bezeichnenderweise sind jedoch die Fälle, in denen der Stirling-Prozess bislang kommerziell in nennenswerter Stückzahl realisiert wurde, gerade die seiner linksläufigen Umkehrung, die als „Philips-Gaskältemaschine“ zur Luftverflüssigung, aber auch in anderen Bereichen der Tieftemperaturtechnik eine recht weite Verbreitung gefunden haben und derzeit vor dem Hintergrund der FCKW-Problematik zunehmend auch in den bisher von den Kaldampfprozessen beherrschten Bereich der umgebungsnahen Kälteerzeugung vordringen.

In der vorliegenden Arbeit wird bewusst versucht, Beiträge zur Auslegung und Optimierung regenerativer Gaskreisprozesse in möglichst allgemeiner, von Sonderfall „Stirling“ losgelöster Form zu leisten. Soweit ein konkreter Prozess als Beispiel oder Referenzfall herangezogen wird, dient hierzu im folgenden der Vuilleumier-Prozess. Er repräsentiert mit seinem vorrangigen Einsatzgebiet als thermisch angetriebene Wärmepumpe einen typischen Fall aus dem Bereich der Wärmetransformation (im allgemeinen Sinne) und ist zudem in jüngster Zeit Gegenstand wachsenden Interesses und verstärkter Forschungs- und Entwicklungsarbeiten als mögliches zukünftiges Gebäudeheizungssystem, durch das sich ein erhebliches Reduktionspotential bei der  $\text{CO}_2$ -Emission in diesem großen Energieverbrauchssektor erschließt.

## 2 Prozesskonfiguration und -auswahl

### 2.1 Systematische Synthese regenerativer Kreisprozesse

#### 2.1.1 Synthese aus elementaren Komponenten

##### 2.1.1.1 Begriffsdefinitionen

Grundsätzlich lassen sich alle regenerativen Kreisprozesse ohne Ventilsteuerung als Kombinationen elementarer Komponenten auffassen, die allgemein in die vier Kategorien Zylinderräume, Wärmeaustauscher, Regeneratoren und Toträume eingeteilt werden können. Dabei zählen zur ersten Gruppe alle in ihrer Größe veränderlichen Räume, auch dann, wenn sie nicht als konventionelles Zylinder-Kolben-System ausgeführt sein sollten, sondern z.B. unter Verwendung rotierender Bauteile. Derartige Konstruktionen sind in der Literatur [DREXL 1976, KENTFIELD und KAPESI 1986, SCHAGER 1994, ISSHIKI et al. 1995, LYSENKO 1997] bereits mehrfach vorgeschlagen und zumindest theoretisch untersucht worden, haben jedoch offenbar bislang noch keine praktische Bedeutung erlangt.

Zur zweiten Gruppe sind alle (rekuperativen) Wärmeübertrager zu zählen, die in der Praxis fast immer für den Austausch der jeweiligen Netto-Wärmeströme auf den verschiedenen Temperaturniveaus erforderlich sind, da sich hinreichend gute Wärmeübertragungsbedingungen unmittelbar in den Zylinderräumen, wo der idealen isothermen Theorie<sup>1</sup> zufolge dieser Austausch eigentlich stattfinden müsste, i. d. R. nicht realisieren lassen. Sie werden zweckmäßig in den Überströmkanälen zu den angrenzenden Regeneratoren angeordnet.

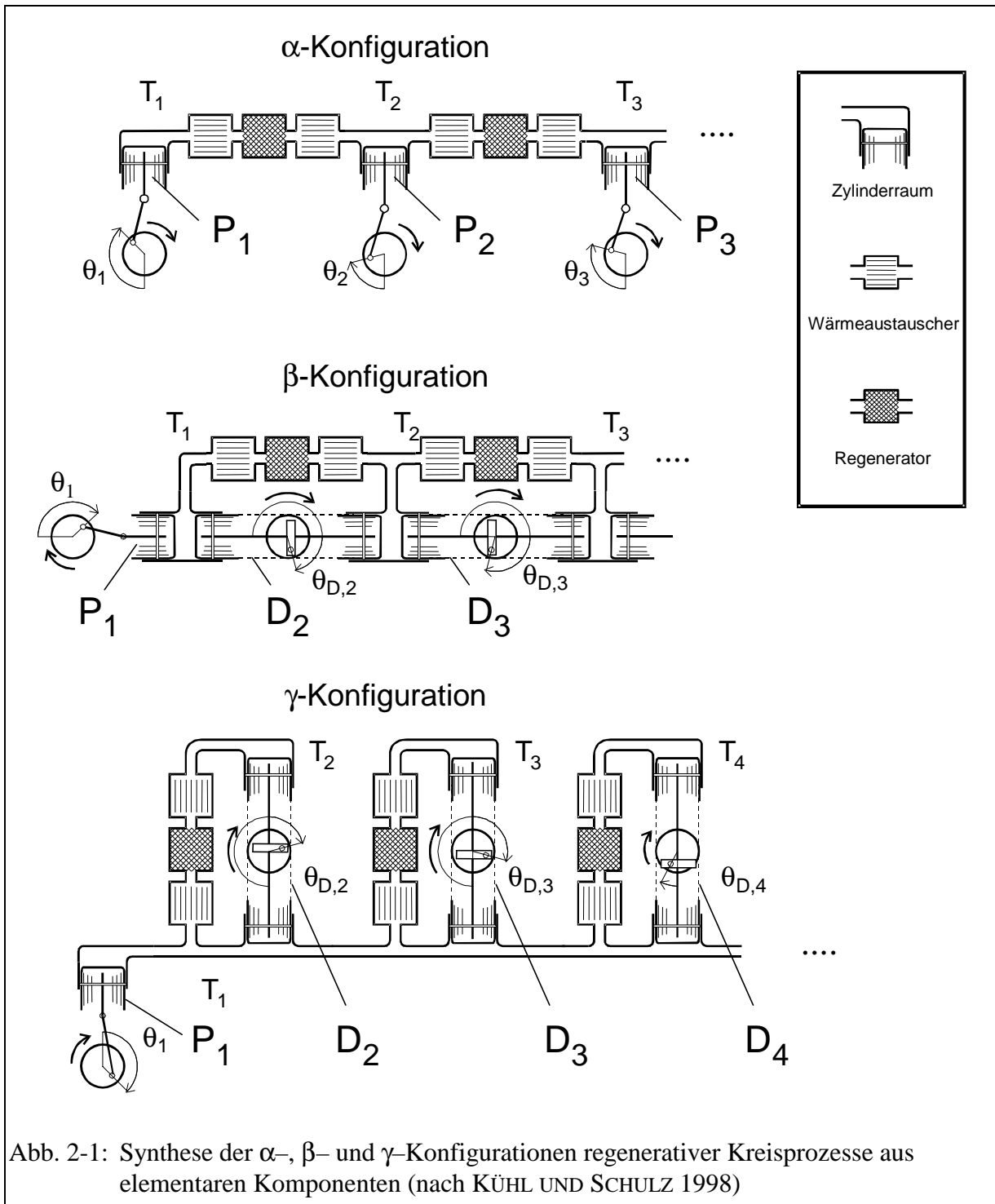
Neben den als zentralen Elementen dieser Prozessgruppe bereits diskutierten Regeneratoren, die einen theoretisch reversiblen Transfer des Prozessmediums zwischen verschiedenen Temperaturniveaus ermöglichen und damit für das Erreichen akzeptabler Wirkungsgrade bzw. Leistungszahlen praktisch unverzichtbar sind, sind schließlich noch reine Toträume als vierte Gruppe zu nennen. In ihr werden alle Teile des Prozessvolumens zusammengefasst, die keine unmittelbare thermodynamische Funktion haben und meist aus konstruktiven oder strömungstechnischen Gründen erforderlich sind, wegen ihres nachteiligen Einflusses auf die Prozessleistung jedoch nach Möglichkeit vermieden bzw. gering gehalten werden sollten.

##### 2.1.1.2 Unterscheidung von $\alpha$ -, $\beta$ - und $\gamma$ -Konfiguration im allgemeinen Fall

Wie bereits von KÜHL und SCHULZ (1998) dargelegt lassen sich gemäß Abb. 2-1 aus diesen Grundelementen beliebige regenerative Kreisprozesse aufbauen, wobei auch die Möglichkeit besteht, den Unterschieden zwischen den vom Stirling-Prozess bekannten  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Konfigurationen Rechnung zu tragen. Wie aus Abb. 2-1 ersichtlich ist diese Unterscheidung auch für den allgemeinen Fall eines zwischen  $n$  Temperaturniveaus arbeitenden Prozesses möglich. Das allgemeine Kennzeichen der  $\alpha$ -Konfiguration ist dabei, dass für jede Temperatur  $T_i$  nur *ein* Zylindervolumen  $V_i$  existiert, in dem die gesamte hier erforderliche Volu-

---

<sup>1</sup> Die ideale isotherme Theorie regenerativer Kreisprozesse wurde erstmals von SCHMIDT (1871) für den Stirlingmotor als „Theorie der Lehmann’schen kalorischen Maschine“ veröffentlicht und ist in der Literatur über Stirlingmaschinen vielfach wiedergegeben (z.B. WALKER 1980, URIELI und BERCHOWITZ 1984, READER und HOOPER 1983). Sie wurde später auch auf andere Prozesse, z.B. den Vuilleumier-Prozess, übertragen (RULE und QVALE 1969, NYKYRI und HIISMÄKI 1981). Die wesentlichen Gleichungen finden sich im Anhang A1 in allgemeiner Form.



menänderung durch die Bewegung eines einzelnen, einseitig wirkenden Kolbens bewirkt wird. Diese Bewegung wird i.a. durch einen geeigneten Getriebemechanismus oder (im Falle einer Freikolbenmaschine) ein entsprechend abgestimmtes Federsystem gesteuert, verläuft in fast allen Fällen zumindest annähernd sinusförmig und lässt sich somit durch Angabe von Hub und Phasenwinkel hinreichend charakterisieren. Ebenso wie schon in der isothermen Theorie nach Schmidt wird diese vereinfachende Annahme auch bei den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt, d. h. es sei (vgl. Anhang A1, Gl. A1-1)

$$V_i(\varphi) = \bar{V}_i + \hat{V}_i \cos(\varphi + \theta_i) \quad (2-1).$$

Wie aus Abb. 2-1 ersichtlich lässt sich im Rahmen dieser Einschränkungen jeder beliebige Kreisprozess auf einfache Weise in der  $\alpha$ -Konfiguration realisieren, da Phasenwinkel und Hub für alle  $n$  Kolben unabhängig wählbar sind. Andererseits offenbart sich hier der Nachteil dieser Betrachtung auf der Ebene elementarer Komponenten, denn die mit  $n$  wachsende Zahl der Freiheitsgrade führt zu einer unüberschaubaren Vielfalt denkbarer Prozesse, von denen nur ein geringer Bruchteil tatsächlich praktische Bedeutung hat. Es stellt sich hier die Frage, wie groß die Änderung einer der genannten Größen sein muss, damit man von einem grundsätzlich andersartigen Prozess sprechen kann. Im einfachsten Fall,  $n = 2$ , werden bekanntlich ungeachtet der teilweise erheblichen Unterschiede bei Phasenwinkel und Hubraumverhältnissen, mit denen insbesondere unterschiedlichen Betriebsbedingungen und Leistungsanforderungen Rechnung getragen wird, alle existierenden Varianten unter dem Begriff „Stirling“ zusammengefasst, während bereits für  $n = 3$  mehrere grundsätzlich verschiedene Prozesse existieren, die für verschiedene Anwendungsgebiete eine jeweils optimale Lösung darstellen, ohne dass es praktisch sinnvolle Übergangsfelder zwischen ihnen gibt (KÜHL und SCHULZ 1998).

### 2.1.1.3 Phasenwinkel und Hubraumverhältnisse

Die richtige Wahl von Phasenwinkeln und Hubraumverhältnissen stellt ein fundamentales Optimierungsproblem bei Gaskreisprozessen dar, das auf der Ebene idealisierter, isothermer und reversibler Prozesse nur mit dem Kriterium der Leistungsdichte, d. h. der auf Hubvolumen, Druck und Drehzahl bezogenen Prozessleistung<sup>2</sup>, zu behandeln ist. Zwar wird in einem späteren Stadium der Auslegung, wo zunehmend die verschiedenen Verluste des realen Prozesses Berücksichtigung finden, ein Kriterium wie der Wirkungsgrad, die Leistungszahl, die Entropieproduktion oder ein Gütegrad wachsende Bedeutung erlangen, jedoch wird nach wie vor auch die Leistungsdichte ein je nach Anwendungsfall mehr oder weniger großes Gewicht behalten, mit anderen Worten, man wird letztlich stets einen Kompromiss zwischen diesen beiden Kriterien suchen. Damit entfernt man sich zwar um ein gewisses Maß vom Fall der maximalen Leistungsdichte, jedoch führt dieses Kriterium zumindest in die Nähe des späteren Optimums und stellt damit in der Anfangsphase der Auslegung eine wichtige Orientierungshilfe dar. Ein Prozess, der bereits bei idealisierter Betrachtung eine geringe Leistungsdichte aufweist, wird angesichts der verschiedenen parasitären Verluste der real ausgeführten Maschine keinen hohen Gütegrad erreichen können.

Insbesondere für größere Werte von  $n$  ist die Aussicht, durch willkürliche Wahl von Phasenwinkeln und Hubräumen „zufällig“ eine Prozessauslegung mit hoher Leistungsdichte zu finden, sehr gering. Statt dessen werden sich die Druckänderungen, die von den einzelnen unkoordinierten Kolbenbewegungen bewirkt werden, im Mittel wahrscheinlich weitgehend kompensieren. Die resultierende Druckamplitude und damit auch die Leistungsdichte wird daher gering sein. Hinzu kommt noch, dass mit der Zahl der Temperaturniveaus auch das insgesamt im Prozess vorhandene Volumen der Wärmeaustauscher, Regeneratoren und sonstigen Toträume wächst. Damit wird die durch einen einzelnen Kolben hervorgerufene Druckänderung auch ungeachtet der Wechselwirkungen mit den anderen betragsmäßig immer geringer. Es wird somit deutlich, dass eine befriedigende Leistungsdichte gerade in komplexeren Prozessen nur durch Koordination der Kolbenbewegungen, d. h. eine zielgerichtete Wahl der genannten Parameter Hub und Phasenwinkel erreicht werden kann, für die die Betrachtung der  $\alpha$ -Konfiguration in Abb. 2-1 jedoch keinerlei unmittelbare Anhaltspunkte liefert.

<sup>2</sup> Je nach Anwendungsfall kann dies sowohl eine mechanische Leistung als auch eine Wärme- oder Kälteleistung sein. Bei reversiblen Prozessen stehen jedoch — für  $n > 3$  ggf. nach weiteren Festlegungen, die sich aus den Randbedingungen des Einzelfalls ergeben — alle ausgetauschten Energieströme in festem Verhältnis zueinander, so dass die Optimierung der Leistungsdichte ohnehin stets zum gleichen Ergebnis führt.

Dies ist dadurch begründet, dass in der  $\alpha$ -Konfiguration zwar einerseits jeder beliebige regenerative Kreisprozess auf einfachste Weise dargestellt werden kann, andererseits jedoch durch die gedankliche Zerlegung bis hinab zu den zu Beginn dieses Kapitels genannten elementaren Komponenten zugleich die Information über den thermodynamischen Sinn ihres Zusammenwirkens verloren geht. Denkt man sich z. B. den Vuilleumier-Prozess in der  $\alpha$ -Konfiguration dargestellt, so ist eines seiner wesentlichsten Merkmale, die Konstanz des Gesamtvolumens, die das Verschwinden der mechanischen Leistung und damit seine Anwendbarkeit als ausschließlich thermisch angetriebene Wärmepumpe bzw. Kältemaschine begründet, nicht mehr erkennbar (und bei beliebiger Variation aller Hubvolumina und Phasenwinkel auch keineswegs mehr sichergestellt).

Demgegenüber ist diese Information in der thermodynamisch äquivalenten  $\beta$ -Konfiguration oder der hieraus ableitbaren  $\gamma$ -Konfiguration (Abb. 2-1) noch vorhanden. Dass  $\alpha$ - und  $\beta$ -Konfiguration unmittelbar ineinander umwandelbar sind, ist für den Stirling-Prozess seit langem bekannt (vgl. z. B. WALKER 1980, ORGAN 1992) und lässt sich auch für den allgemeinen Fall mit  $n$  Temperaturniveaus leicht nachweisen, wenn man die durch die Kolben  $k$  bewirkten Volumenänderungen allgemein als komplexe Funktionen des Kurbelwinkels  $\varphi$  mit der Amplitude  $\hat{V}_k$  und dem Phasenwinkel  $\theta_k$  auffasst:

$$\tilde{V}_k = \hat{V}_k e^{i(\varphi + \theta_k)} \quad (2-2)$$

Das Zylindervolumen auf dem Temperaturniveau  $n$  wird in beiden Fällen nur durch den Kolben  $k = n$  verändert, und damit gilt für den Hubraum und den Phasenwinkel des Verdrängerkolbens  $D_n$  der  $\beta$ -Konfiguration (der sich wie alle Verdrängerkolben entsprechend der Darstellung in Abb. 2-1 formal als konstruktive Zusammenfassung zweier  $180^\circ$  phasenverschoben arbeitender Verdichterkolben auffassen lässt) unmittelbar

$$\hat{V}_{D,n} = \hat{V}_n \quad ; \quad \theta_{D,n} = \theta_n \quad (2-3).$$

Für einen beliebigen weiteren Zylinderraum  $i$  der  $\beta$ -Konfiguration ergibt sich die Volumenfunktion aus der komplexen Summe der von den Verdrängern  $D_{i+1}$  und  $D_i$  beigesteuerten Anteile, so dass sich die Hubfunktion von  $D_i$  rekursiv aus der von  $D_{i+1}$  ermitteln lässt, wenn eine bestimmte Volumenfunktion  $V_i(\varphi)$  der entsprechenden  $\alpha$ -Bauart nachgebildet werden soll:

$$\hat{V}_{D,i} e^{i(\varphi + \theta_{D,i})} = \hat{V}_{D,i+1} e^{i(\varphi + \theta_{D,i+1})} + \hat{V}_i e^{i(\varphi + \theta_i)} \quad (2-4)$$

Damit sind Amplitude und Phasenwinkel des Verdrängers  $D_i$  stets eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{D,i} &= \sqrt{\hat{V}_{D,i+1}^2 + \hat{V}_i^2 + 2\hat{V}_{D,i+1}\hat{V}_i \cos(\theta_{D,i+1} - \theta_i)} \quad ; \\ \tan(\theta_{D,i}) &= \frac{\hat{V}_{D,i+1} \sin \theta_{D,i+1} + \hat{V}_i \sin \theta_i}{\hat{V}_{D,i+1} \cos \theta_{D,i+1} + \hat{V}_i \cos \theta_i} \end{aligned} \quad (2-5)$$

Weiterhin lässt sich durch Aufsummieren von Gl. 2-4 für  $i = 1, \dots, n$  und mit  $\hat{V}_{n+1} = 0$  zeigen, dass die Änderung des Gesamtvolumens der  $\alpha$ -Konfiguration tatsächlich durch Amplitude und Phasenwinkel des Verdichterkolbens  $P_1$  der  $\beta$ -Bauart richtig wiedergegeben werden (wobei der Index  $D$  im Falle der Hubfunktion 1 somit eigentlich  $P$  lauten müsste):

$$\sum_{i=1}^n \tilde{V}_i(\varphi) = \tilde{V}_{ges}(\varphi) = \hat{V}_{ges} e^{i(\varphi + \theta_{ges})} = \hat{V}_{D,1} e^{i(\varphi + \theta_{D,1})}$$

$$\Rightarrow \hat{V}_{D,1} = \hat{V}_{ges} \quad ; \quad \theta_{D,1} = \theta_{ges}$$
(2-6)

Während sich  $\alpha$ - und  $\beta$ -Konfiguration also lediglich konstruktiv, nicht jedoch thermodynamisch unterscheiden, besteht – wie vom Stirling-Prozess bekannt – zwischen  $\beta$ - und  $\gamma$ -Konfiguration der grundsätzliche Unterschied, dass die Summe der Zylindervolumina, die sich auf dem Temperaturniveau des Verbindungskanals<sup>3</sup> befinden, im allgemeinen Fall nicht null werden kann. Es existiert hier also ein „systematisches“ Totvolumen, das in seiner Größe von den Hubvolumina und Phasenwinkeln aller beteiligten Kolben abhängig ist. Damit sind die optimalen Werte dieser Größen bei einer Maximierung der Leistungsdichte i.a. leicht unterschiedlich, weichen jedoch nicht so sehr voneinander ab, dass man von grundsätzlich verschiedenen Prozessen sprechen müsste<sup>4</sup>.

Ungeachtet dieses Unterschiedes liefert die Betrachtung der allgemeinen  $\gamma$ -Konfiguration mehr noch als die der  $\beta$ -Konfiguration den Schlüssel zu einer von vornherein zielgerichteten Suche nach praktisch sinnvollen Prozessen mit hinreichender Leistungsdichte, denn hier ist das Zusammenwirken der elementaren Komponenten in den thermodynamischen *Funktionsgruppen* des mechanischen und des thermischen Verdichters (Abb. 2-2) am klarsten erkennbar. Wie schon von KÜHL (1990) dargelegt, lassen sich alle bekannten regenerativen Kreisprozesse in ihrer  $\gamma$ -Konfiguration als Kombinationen aus diesen Modulen auffassen.

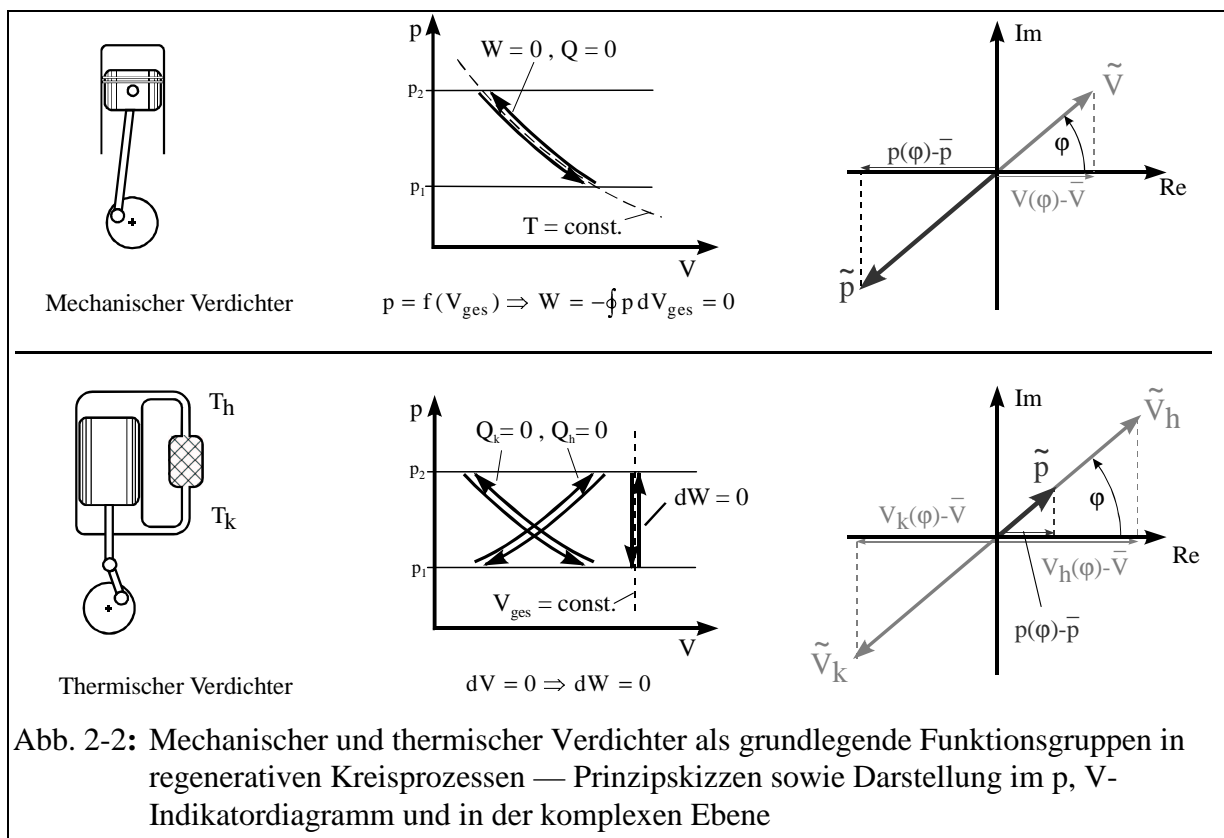


Abb. 2-2: Mechanischer und thermischer Verdichter als grundlegende Funktionsgruppen in regenerativen Kreisprozessen — Prinzipskizzen sowie Darstellung im p, V-Indikatordiagramm und in der komplexen Ebene

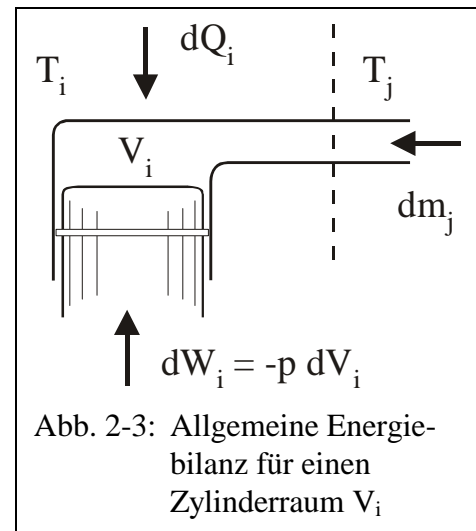
<sup>3</sup> Als Temperaturniveau wird hier i. d. R. das der umgebungsnahen Wärmesenke gewählt. Es gibt jedoch auch Überlegungen, hier im Falle eines Stirlingmotors die heiße Antriebstemperatur zu wählen. Aus thermodynamischer Sicht lässt sich so der schädliche Einfluss dieses Totvolumens reduzieren (s. z. B. THOMAS ET AL. 1994)

<sup>4</sup> Für den Phasenwinkel des  $\beta$ -Stirling-Prozesses erhält man z.B. ca.  $90^\circ$  zwischen den beiden Zylindervolumina, während sich für die  $\gamma$ -Konfiguration ein Wert von  $90^\circ$  zwischen Verdichter- und Verdrängerkolben ergibt.

## 2.1.2 Synthese aus mechanischen und thermischen Verdichtern

### 2.1.2.1 Die Bedeutung der Prozessdruckamplitude und ihrer Phasenlage

Ein einzelnes Zylindervolumen  $V_i$  (ggf. einschließlich unmittelbar angrenzender, auf dem gleichen Temperaturniveau  $T_i$  befindlicher Wärmeübertrager) steht, wie aus Abb. 2-1 ersichtlich, mit den übrigen Zylinderräumen des Prozesses entweder direkt durch Überströmkanäle oder, falls sich die jeweiligen Temperaturen unterscheiden, über Regeneratoren in Verbindung. Die Energiebilanz für ein solches Volumen umfasst daher gemäß Abb. 2-3 neben der zugeführten Wärme  $dQ_i$  und der Volumenänderungsarbeit  $dW_i$  zusätzlich alle über die Schnittstellen  $j$  strömenden Enthalpien  $dH_j = h_j(T_j) dm_j$ , wobei während der Ausströmung sowie bei Annahme idealer Regeneratoren und isothermer Zylinderräume auch während der Einströmung stets  $T_j = T_i$  gilt:



$$dU_i = dQ_i - p dV_i + \sum_j h_j dm_j \quad (2-7)$$

Auch ohne diese Annahmen, d. h. für den realen, nicht isothermen Prozess mit verlustbehafteten Regeneratoren, folgt mit der Massenerhaltung  $dm_i = \sum dm_j$  sowie den für ideale Gase mit konstanten Wärmekapazitäten gültigen Beziehungen aus Gl. 2-7 nach einigen Umformungen

$$m_i c_p dT_i = dQ_i + V_i dp + \sum_j c_p (T_j - T_i) dm_j \quad (2-8)$$

Andererseits liefert die unmittelbare Integration von Gleichung 2-7 ohne weitere idealisierende Annahmen für die vom Zylinderraum  $i$  pro Zyklus übertragene Wärmemenge

$$Q_i = \oint p dV_i + \sum_j \oint h_j dm_j = -\oint V_i dp + \sum_j \Delta H_j \quad (2-9)$$

Sie setzt sich damit aus einer der Fläche im  $p, V_i$ -Indikatordiagramm entsprechenden, „indizierten“ Wärmemenge zu- bzw. abzüglich evtl. netto über die Schnittstellen  $j$  transportierter Enthalpien  $\Delta H_j$  zusammen. Letztere entsprechen entweder den jeweiligen thermischen Verlusten eines angrenzenden Regenerators, oder es liegt (z. B. in einer  $\gamma$ -Konfiguration) ein Netto-Enthalpiestrom zwischen nicht-isothermen Zylinderräumen vor, die dem gleichen Temperaturniveau zugeordnet und durch einen Überströmkanal verbunden sind. Im Falle der isothermen Idealprozesse ( $dT_i = 0$ ) mit idealen Regeneratoren sind sie alle gleich null, und unter diesen Annahmen folgt dann aus Gl. 2-8 bereits für die differentielle Wärmemenge

$$dQ_i = -V_i dp \quad (2-10)$$

Dies verdeutlicht die zentrale Bedeutung der Prozessdruckschwankung für die Funktion aller regenerativen Kreisprozesse, denn ein reversibler, nicht durch thermische Verluste bedingter Wärmeaustausch  $dQ_i$  ist damit nur aufgrund einer Druckänderung  $dp$  möglich. Im Hinblick auf eine hohe Leistungsdichte muss es also Ziel der Auslegung sein, mechanische und thermische Verdichter möglichst effektiv zur Erzeugung solcher Druckschwankungen einzusetzen.



Weiterhin erkennt man an Gl. 2-10, dass eine große Netto-Wärmemenge  $Q_i$  nur dann übertragen wird, wenn sich die Größe des Volumens während des Druckanstiegs möglich stark von der während des Druckabfalls unterscheidet. Wie auch im Anhang A1 anhand der allgemeinen isothermen Berechnungsgleichungen gezeigt wird (Gl. A1-4a), ist ein Netto-Wärmeaustausch somit nur über in ihrer Größe veränderliche Räume möglich. Darüber hinaus muss diese Größenänderung zeitlich versetzt zur Druckschwankung im System erfolgen, d. h. bei Annahme zumindest annähernd sinusförmiger Druck- und Volumenänderungen sollte deren relative Phasenverschiebung möglichst  $\pm 90^\circ$  betragen und nicht etwa  $0^\circ$  oder  $180^\circ$ .

### 2.1.2.2 Der mechanische und der thermische Verdichter im Vergleich

Der mechanische Verdichter nach Abb. 2-2 besteht lediglich aus einem Gasvolumen veränderlicher Größe und bedarf sicherlich keiner weiteren Erläuterung. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass auch hier die idealisierende Annahme einer isothermen Zustandsänderung gilt, auch wenn in der Realität eher adiabate Verhältnisse vorliegen. Nimmt man einen reibungsfreien Betrieb an, so kann zwar in beiden Fällen gleichermaßen eine reversible periodische Druckschwankung erzeugt werden, für die Kombination zu reversiblen regenerativen Kreisprozessen wird diese Annahme jedoch benötigt. Wie das Verschwinden der Fläche im  $p, V$ -Diagramm verdeutlicht, liegt hier der oben erwähnte Fall einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$  vor, d. h. es wird netto weder Arbeit noch Wärme mit der Umgebung ausgetauscht. Das System würde - einmal in Gang gesetzt - theoretisch unendlich lange laufen, allerdings auch ohne irgendetwas anderes als eine periodische Druckschwankung zu bewirken. Voraussetzung wäre dazu lediglich ein ausreichend dimensioniertes Schwungrad o. ä. zur zwischenzeitlichen Speicherung der Volumenänderungsarbeit.

Linearisiert man den reziproken Zusammenhang zwischen Druck und Volumen, was zumindest für die in ausgeführten Prozessen auftretenden, eher geringen relativen Druckschwankungen sicherlich zulässig ist, so erhält man für ein sinusförmig veränderliches, nach Gl. 2-2 als komplexe Funktion darstellbares Volumen einen ebensolchen Druckverlauf, der zu ersterem einen Phasenversatz von  $180^\circ$  aufweist. Im Falle eines isolierten, bei der Temperatur  $T$  betriebenen mechanischen Verdichters, dessen Volumen gemäß

$$V(\varphi) = \bar{V} + \hat{V} \cos(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{V}(\varphi) = \hat{V} \cdot e^{i\varphi} \quad (2-11)$$

sinusförmig variiert, erhält man mit Gl. A1-2a bis c zunächst

$$B = \frac{\bar{V}}{T} \quad ; \quad D = \frac{\hat{V}}{T} \quad ; \quad \theta_p = \pi \quad (2-12)$$

und mit Gl. A1-7a und 8 folgt weiter für die komplexe Druckamplitudenfunktion

$$\tilde{p} = \frac{\bar{p}}{\sqrt{1 - (\hat{V}/\bar{V})^2}} \frac{\hat{V}}{\bar{V}} e^{i(\varphi - \pi)} = - \frac{\bar{p}}{\sqrt{1 - (\hat{V}/\bar{V})^2}} \frac{\tilde{V}}{\bar{V}} \quad (2-13)$$

Die Darstellung im komplexen Zeigerdiagramm zeigt in Abb. 2-2 demnach zwei entgegengesetzt orientierte, gemeinsam mit dem Kurbelwinkel  $\varphi$  rotierende Vektoren. Als Folge hiervon entartet die Ortskurve im  $p, V$ -Diagramm zu einer Diagonalen mit negativer Steigung, eben der erwähnten linearisierten Druckfunktion.

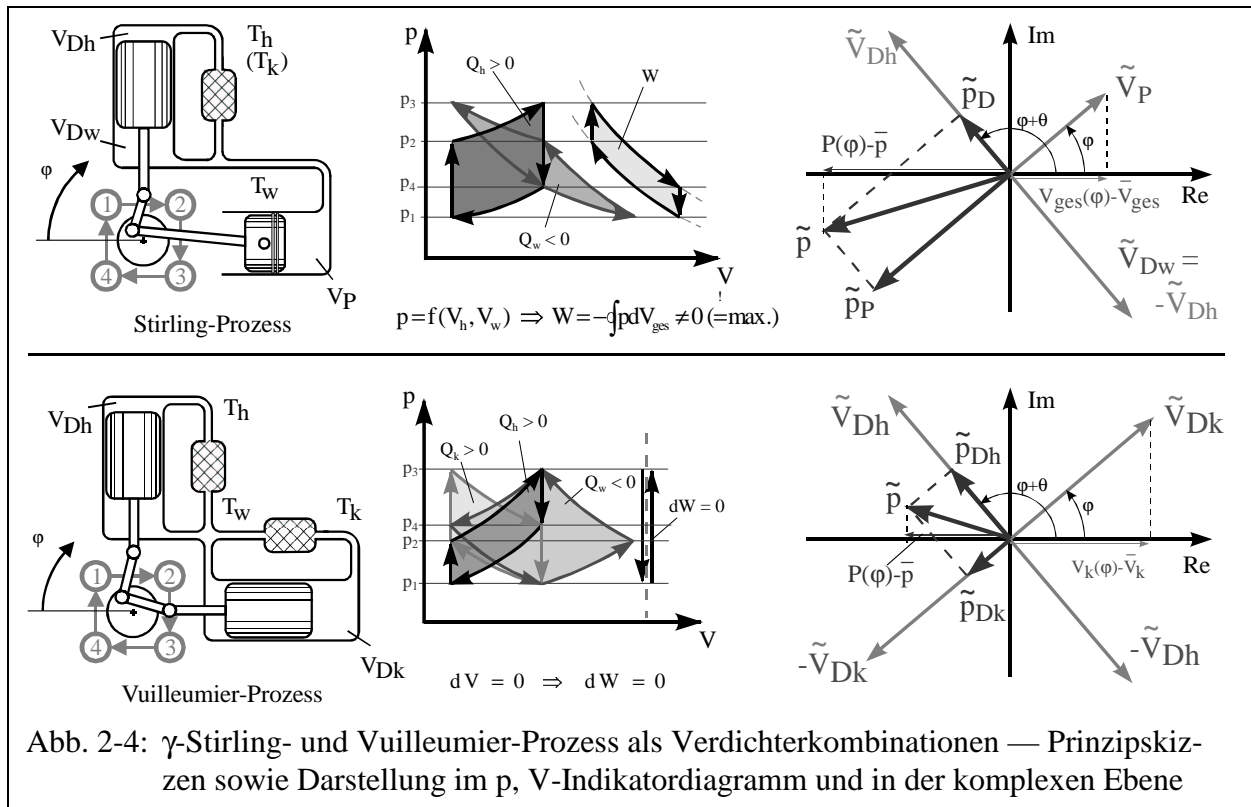
Ebenso wie mit dem mechanischen lässt sich auch mit dem isolierten thermischen Verdichter eine reversible Druckschwankung hervorrufen. Da die Bewegung des Verdrängerkolbens (Abb. 2-2) bei Vernachlässigung des Querschnitts der Kolbenstange sowie von Trägheits- und Reibungseffekten keine Kraft erfordert, wird hier kein mechanischer Energiespeicher (Schwungrad) benötigt, wohl aber ein thermischer in Gestalt des Regenerators, so dass zwischen beiden eine gewisse Analogie besteht. Die Darstellungen im  $p, V$ -Diagramm zeigen, dass in keinem der beiden Zylinderräume ein Netto-Wärmeaustausch erfolgt und dass die Arbeit hier wegen des konstanten Gesamtvolumens sogar bei differentieller Betrachtung bereits verschwindet. Die nach Linearisierung wiederum mögliche Darstellung im komplexen Zeigerdiagramm zeigt zwei entgegengesetzt orientierte Volumenvektoren gleichen Betrages sowie einen in Richtung des "heißeren" Volumens gerichteten Druckamplitudenvektor  $\tilde{p}$ , dessen Betrag im Vergleich zu dem des mechanischen Verdichters i. d. R. deutlich geringer ist.

Der Grund hierfür ist in dem begrenzten werkstofftechnisch realisierbaren Temperaturverhältnis zu sehen, das Werte von 3:1 (z.B. 900 K : 300 K) nur in Ausnahmefällen überschreitet. Berücksichtigt man zudem noch das für den Regenerator und ggf. weitere Wärmeaustauscher erforderliche Totvolumen, so sinkt nach einer Abschätzung von KÜHL und HEIKRODT (1998) das erzielbare Druckverhältnis bereits auf die Größenordnung von  $\sqrt{3} : 1$ , und da sich bei der Kombination mehrerer Verdichter zu sinnvollen Prozessen die jeweils eingebrachten Totvolumina aufaddieren, müssen bei Prozessen, die ausschließlich auf dem Prinzip der thermischen Kompression beruhen, wie z.B. dem Vuilleumier-Prozess, bereits Druckamplituden von 10% des Mittelwertes als schwer erreichbar bezeichnet werden. Das theoretisch unbegrenzte Druckverhältnis des isolierten mechanischen Verdichters reduziert sich in komplexeren Prozessen aufgrund analoger Überlegungen selbstverständlich ebenfalls. Dennoch weisen Prozesse mit mechanischer Kompression durchweg höhere Druckverhältnisse auf, die bei hochverdichtenden Stirlingmotoren bis etwa 2 : 1 reichen können (WALKER 1980).

### 2.1.2.3 Stirling- und Vuilleumier-Prozess als Kombination zweier Verdichter

Die bisherigen Überlegungen zeigen, dass sowohl der thermische als auch der mechanische Verdichter zwar einerseits geeignet sind, Druckänderungen hervorzurufen, andererseits aber aufgrund dieser selbsterzeugten (oder anderer phasengleich oder -entgegengesetzt überlagerter) Druckschwankungen keine Netto-Energieströme mit der Umgebung austauschen können. Wie auch mathematisch in den Ableitungen im Anhang A1, insbesondere in den Sinusfunktionen in Gl. A1-9 und A1-10, zum Ausdruck kommt, ist hierfür vielmehr *ausschließlich* die im komplexen Zeigerdiagramm auf den jeweiligen Volumenvektoren senkrecht stehende Komponente des Druckvektors ausschlaggebend. Insofern ist die vektorielle Addition der von den verschiedenen Verdichtern eines zusammengesetzten Prozesses hervorgerufenen Komponenten zu einem resultierenden Vektor der Gesamtdruckänderung eher irreführend.

Grundregel im Interesse einer möglichst hohen Leistungsdichte muss es also sein, zumindest zwei Verdichter unter einem relativen Phasenwinkel von  $90^\circ$  zu kombinieren, und so entstehen zunächst der Stirling- und der Vuilleumier-Prozess als einfachste regenerative Kreisprozesse durch Zusammenschalten von einem thermischen mit einem mechanischen bzw. einem weiteren thermischen Verdichter gemäß Abb. 2-4. Bei den Prozessdarstellungen im  $p, V$ -Diagramm wurden dabei die von den einzelnen Verdichtern hervorgerufenen Kompressionen und Expansionen, die bei harmonischen Kolbenbewegungen eigentlich überlagert ablaufen, getrennt dargestellt, d. h. der Prozess wurde idealisierend in vier Abschnitte eingeteilt, in denen sich jeweils ein Kolben in einem seiner Totpunkte in Ruhe befindet, während sich der



jeweils andere von einem Totpunkt zum anderen bewegt. Die schattierten, näherungsweise parallelogrammförmigen Flächen im  $p, V$ -Diagramm, die den jeweils übertragenen Wärmemengen bzw. der Arbeit entsprechen, sind daher größer als die tatsächlich zu erwartenden, die den einbeschriebenen, nach Gl. A1-9 und 10 näherungsweise ellipsenförmigen Flächen entsprechen. Andererseits wird durch diese Darstellung klarer verdeutlicht, dass die Wirkung der beiden genannten (wie auch aller anderen) Gaskreisprozesse ausschließlich auf dieser Wechselwirkung zwischen abwechselnd aktiven und passiven Verdichtern beruht. Ein Netto-Energietransfer über einen vollen Prozesszyklus hinweg kommt offensichtlich nur dadurch zustande, dass ein von dem gerade passiven Verdichter während seiner totpunktsnahen Phase *vorübergehend* dargebotenes Zylindervolumen  $V_i$  von einem (bzw. in komplexeren Prozessen mehreren)  $90^\circ$  phasenversetzt arbeitenden anderen aktiven Verdichter(n) einer Druckänderung unterworfen wird. Der dabei ausgetauschten Wärme und Arbeit steht (anders als bei allen zeitlich konstanten Volumina) kein entgegengesetzt gleicher Austausch in der anderen Zyklushälfte gegenüber, da das betreffende Volumen dann seinen Minimalwert angenommen hat.

### 2.1.2.4 Prozesse mit mehrfacher Expansion

Komplexere regenerative Kreisprozesse können aus den beiden vorgestellten einfachsten Prozessen grundsätzlich durch Hinzufügen weiterer Verdichter entstehen. Das Hinzufügen eines zweiten mechanischen Verdichters zu einem bereits vorhandenen wäre jedoch prinzipiell sinnlos. Bei identischem Temperaturniveau könnten sie durch Addition ihrer komplexen Volumenfunktionen unmittelbar wieder zu einem einzelnen vereinigt werden, und falls sich ihre Temperaturen unterscheiden, läge ein ähnlicher Fall vor wie schon beim  $\alpha$ -Stirling-Prozess, der sich wie oben beschrieben zunächst in eine äquivalente  $\beta$ -Konfiguration und von dort ggf. weiter in den entsprechenden  $\gamma$ -Prozess umwandeln ließe, wodurch sich die Zahl der mechanischen Verdichter ebenfalls wieder auf eins reduziert.

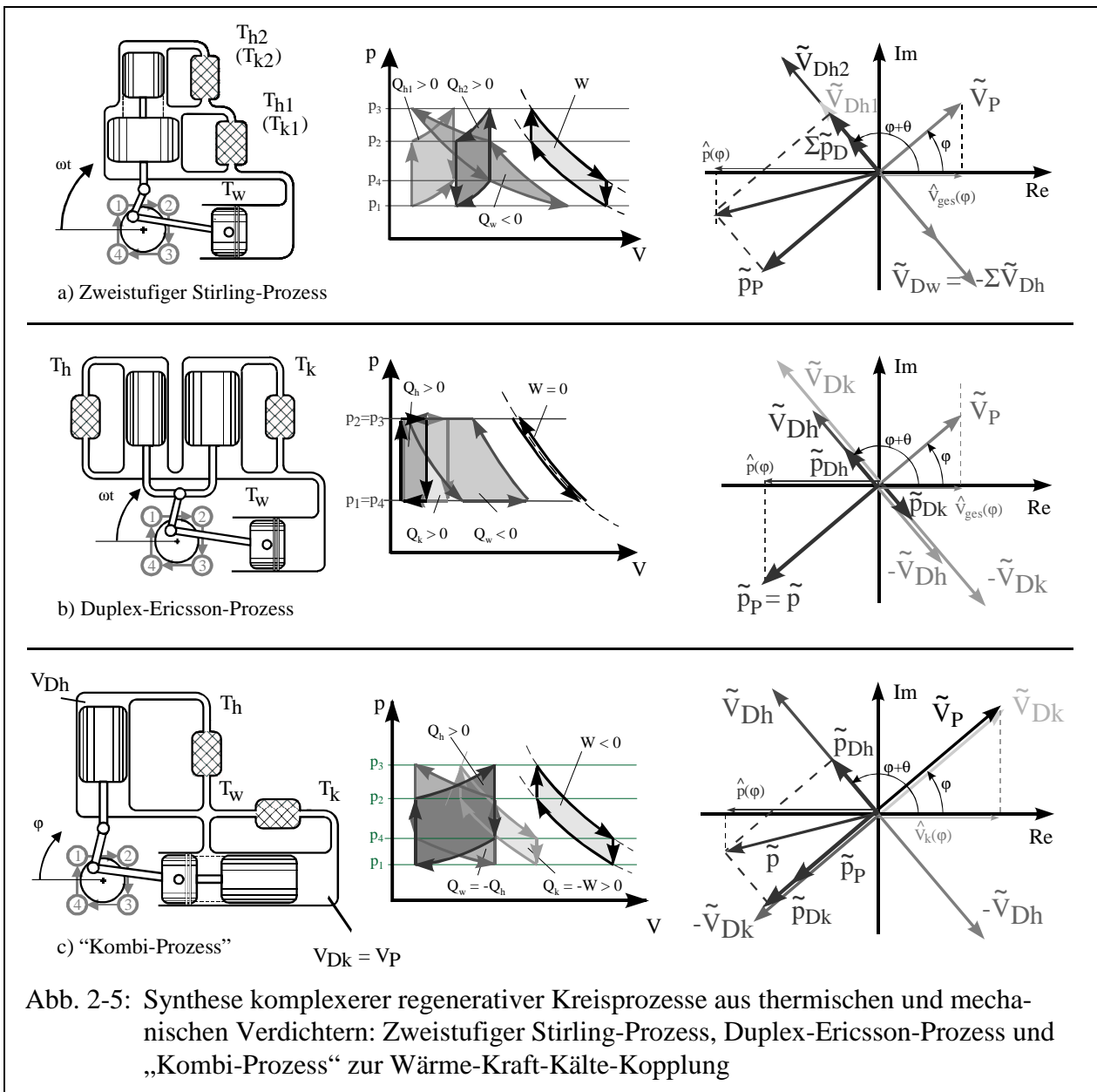
Insofern bietet es sich an, zunächst grundsätzlich zwischen Prozessen mit mechanischer Verdichtung und solchen mit ausschließlich thermischer Kompression, d. h. mit konstanten Gesamtvolumen, zu unterscheiden. Stirling- und Vuilleumier-Prozess stellen somit die jeweils einfachsten Vertreter dieser beiden Gruppen dar, und weitere, komplexere Gaskreisprozesse können nur durch Hinzufügen weiterer *thermischer* Verdichter zu einem dieser beiden Prozesse entstehen. Dies hat dann wiederum die Existenz eines weiteren Temperaturniveaus, auf dem Wärme übertragen werden soll, zur Voraussetzung, denn zwei zwischen den gleichen Temperaturen arbeitende thermische Verdichter können selbstverständlich durch Addition ihrer komplexen Volumenfunktionen wiederum zu einem einzelnen vereinigt werden.

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so sollte der zusätzliche thermische Verdichter aufgrund der vorhergehenden Überlegungen nicht etwa in der Weise in den Prozess integriert werden, dass man die Volumenvektoren im komplexen Zeigerdiagramm „gleichmäßig“ auf die zur Verfügung stehenden 360 Winkelgrade „verteilt“, denn dadurch würde das Prinzip der Maximierung der Druck-Volumenwechselwirkung durch möglichst paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren verletzt, und die Leistungsdichte würde bei jeder derartigen Prozessenerweiterung fortschreitend reduziert. Vielmehr sollte der zusätzliche Verdichter so eingefügt werden, dass sich seine Wirkung zu der eines vorhandenen möglichst phasengleich addiert.

Fügt man dem thermischen Verdichter des  $\gamma$ -Stirling-Prozesses nach Abb. 2-4 weitere hinzu, so gelangt man, sofern sich ihre Kompressionswirkungen gleichsinnig addieren, zu den Prozessen mit doppelter bzw. mehrfacher Expansion, die sich konstruktiv am einfachsten durch stufenförmig ausgeführte Verdrängerkolben realisieren lassen (Abb. 2-5 a). Dieses Prinzip ist bei den kältetechnischen Anwendungen des (linksläufigen) Stirling-Prozesses durchaus verbreitet und erleichtert das Erreichen extrem tiefer Temperaturen in der Kryotechnik erheblich (WALKER 1983, 1983a). Der thermodynamische Vorteil besteht dabei darin, dass die Verlustwärmeströme, die aufgrund von Wärmeleitung und anderen thermischen Verlustmechanismen vorwiegend über die Zylinderwände, die Regeneratoren und die Verdrängerkolben zum kalten Maschinenteil fließen und damit die Kälteleistung verringern, größtenteils bereits auf den vorgeschalteten Zwischenstufen bei noch relativ hoher Temperatur abgefangen werden können. Der thermodynamische Aufwand hierfür ist erheblich geringer als wenn der gesamte Verlustwärmestrom vom tiefsten Zieltemperaturniveau wieder angehoben werden müsste.

Der in Abb. 2-5 a dargestellte Fall eines rechtsläufigen, zweistufigen Stirlingmotors ist zwar theoretisch ebenso denkbar, führt aber in der Praxis zu erheblichen Abdichtungs- und Führungsproblemen des stufenförmigen Verdrängers im Bereich hoher Temperaturen. Darüber hinaus wäre sein Einsatz nur in solchen Fällen thermodynamisch sinnvoll, wo Wärme bei gleitender Temperatur oder auf mehreren vorgegebenen Temperaturstufen zugeführt werden soll, also z. B. bei der Ausnutzung der Abwärme eines Stoffstromes. Andernfalls ist es, wie schon in Kap. 1 ausgeführt wurde, stets sinnvoller, möglichst den gesamten Antriebswärmestrom auf dem höchsten Temperaturniveau zuzuführen, das unter den jeweiligen Randbedingungen realisierbar ist, z. B. über einen Brenner mit integrierter Rauchgas-Luft-Vorwärmung.

Die gleiche Erweiterungsmöglichkeit zu mehrstufigen Prozessen existiert auch für den Vuilleumier-Prozess, wobei ebenfalls nur die mehrfache Expansion auf der kalten Seite praktische Bedeutung erlangt hat – auch hier speziell bei kryotechnischen Anwendungen. So wurde beispielsweise von RENYER (1973) die Entwicklung einer Tieftemperatur-Vuilleumier-Kältemaschine mit dreifacher Expansion für den Einsatz in der Raumfahrt beschrieben.



### 2.1.2.5 Der Duplex-Ericsson-Prozess

Allen diesen mehrstufigen Prozessen<sup>5</sup> liegt der Gedanke zugrunde, die Kompressionswirkungen der thermischen Verdichter möglichst effektiv, d. h. phasengleich zu addieren und so sowohl die mechanische als auch die thermische Leistungsdichte des Prozesses zu maximieren. Daneben besteht jedoch auch die Möglichkeit, durch gegenphasige Zusammenschaltung zweier oder auch mehrerer Verdichter deren Kompressionswirkungen ganz oder teilweise zu kompensieren. Ein solches Vorgehen stellt zwar einen Verstoß gegen das Prinzip der Maximierung der Leistungsdichte dar, kann aber dennoch zu sinnvollen Prozessen führen. Erweitert man z. B. den Stirling-Prozess durch einen zweiten, zum ersten 180° phasenversetzt betriebenen thermischen Verdichter und wählt man deren Hubvolumina  $\hat{V}_{Dh}$  und  $\hat{V}_{Dk}$  in Abhängigkeit von den typischen Betriebstemperaturen  $T_h$ ,  $T_w$  und  $T_k$  für den Idealprozess gemäß

<sup>5</sup> Analog zu den Prozessen mit mehrfacher Expansion sind selbstverständlich auch solche mit mehrfacher Kompression denkbar, wenn auf mehr als einem Temperaturniveau Nutz- oder Abwärme abgegeben werden soll bzw. kann. Sie haben jedoch bislang keine praktische Bedeutung und werden daher hier nicht weiter diskutiert.

$$\frac{V_{Dh}}{V_{Dk}} = \frac{T_w - T_k}{T_h - T_w} \cdot \frac{T_h}{T_k} \quad (2-14),$$

so entsteht der Duplex-Ericsson-Prozess (Abb. 2-5 b). Bei Erfüllung von Gl. 2-14 sind die den beiden thermischen Verdichtern zugeordneten Druckamplitudenvektoren  $\tilde{p}_{Dh}$  und  $\tilde{p}_{Dk}$  im komplexen Zeigerdiagramm betragsmäßig gleich, so dass der resultierende Vektor  $\tilde{p}$  lediglich aus der Komponente  $\tilde{p}_p$  besteht, die auf den mechanischen Verdichter zurückzuführen ist und somit gegenphasig zu dessen Volumenfunktion  $\tilde{V}_p$  verläuft. Die mechanische Leistung dieses Prozesses verschwindet damit aus dem gleichen Grunde wie beim isolierten mechanischen Verdichter nach Abb. 2-2. Bei Betätigung der beiden gekoppelten thermischen Verdichter kommt es zu einer *isobaren* Verdrängung des Arbeitsmediums vom „heißen“ und „kalten“ Volumen in die entsprechenden „warmen“ Volumina und zurück, womit auch die Bezeichnung dieses Prozesses begründet ist. Bei entsprechender Umlaufrichtung kommt es folglich zu einer isothermen Kompression in den warmen Räumen und einer dazu gegenläufigen Expansion im heißen und kalten Volumen. Der Prozess wirkt damit ähnlich wie der Vuilleumier-Prozess als thermisch angetriebene Wärmepumpe, auch wenn sich die zugrundeliegenden Prinzipien deutlich unterscheiden:

Während der Vuilleumier-Prozess auf der Wechselwirkung zweier thermischer Verdichter bei fehlender mechanischer Kompression (d. h. konstantem Gesamtvolumen) beruht, wird die Druckschwankung im Duplex-Ericsson-Prozess *ausschließlich* durch mechanische Kompression bewirkt, während zugleich die thermischen Kompressionseffekte durch die gegenseitige Kompensation der thermischen Verdichter minimiert werden. Dem Nachteil, dass diese beiden Prozesskomponenten nicht zur Erzeugung von Druckänderungen und damit zur Maximierung der Leistungsdichte eingesetzt werden, steht dabei der Vorteil gegenüber, dass isobar verlaufende Prozessschritte im isothermen Idealprozess nicht mit periodisch hin- und herfließenden, sog. Pendelwärmeströmen verbunden sind, die in der Realität zu zusätzlichen, verlustbehafteten Belastungen der Wärmeübertragungsflächen und zu erhöhten adiabatischen Verlusten führen. Die Leistungsdichte kann, falls sie zu gering sein sollte, durch einen vergrößerten Hubraum des Verdichterkolbens mit vergleichsweise geringem Aufwand gesteigert werden. In Kapitel 2.3 wird jedoch gezeigt, dass dies wegen des bereits erwähnten adiabatischen Verlustes nur bedingt sinnvoll ist.

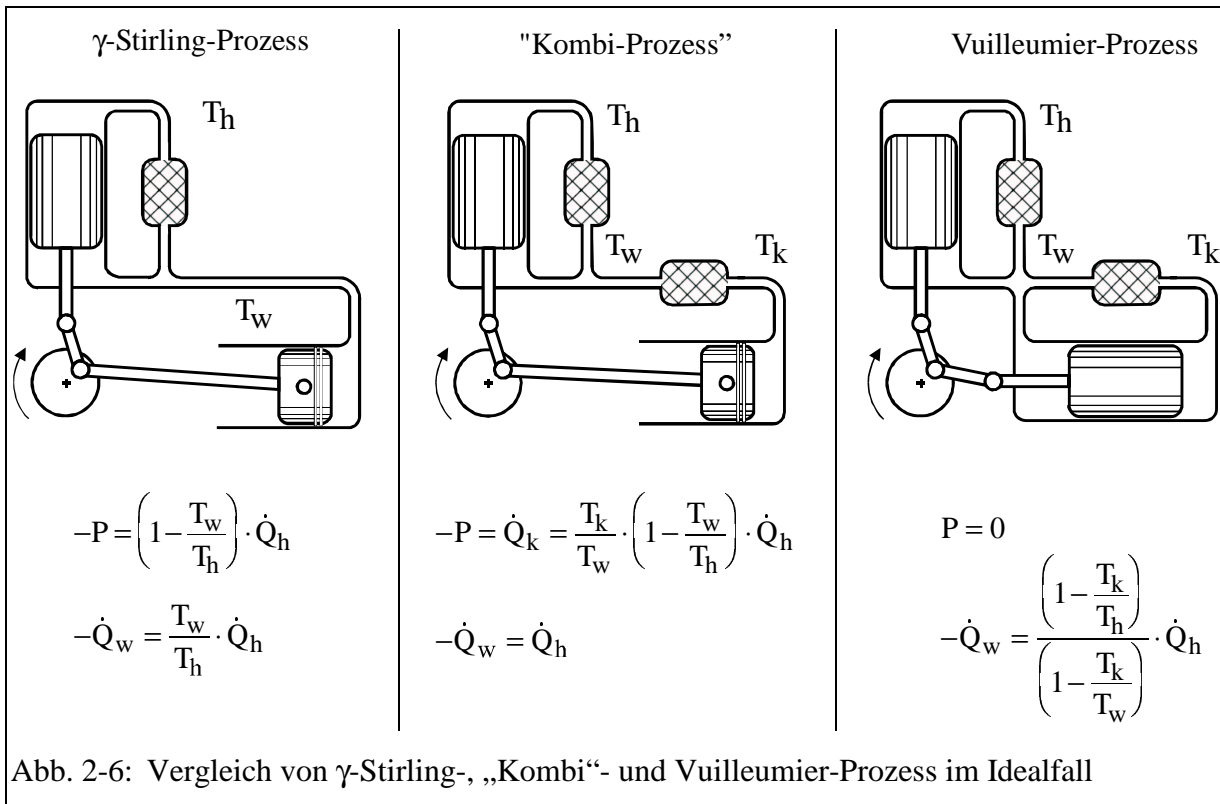
Zusammenfassend kann man zum Duplex-Ericsson-Prozess sagen, dass er im Vergleich zum Vuilleumier-Prozess den Vorteil einer grundsätzlich frei einstellbaren und damit potentiell höheren Leistungsdichte aufweist. Er bietet sich folglich als Alternative zu diesem z. B. für mobile oder sonstige Einsatzfälle an, wo Gewicht und Baugröße von besonderer Bedeutung sind und gewisse Einbußen bei der Leistungszahl sowie die durch den mechanischen Verdichter erhöhte konstruktive Komplexität und Verschleißanfälligkeit in Kauf genommen werden können (HILLIGWEG UND SCHULZ 1992, KÜHL UND HEIKRODT 1998).

### 2.1.2.6 Die Überlagerung mechanischer und thermischer Kompression

Der in Abb. 2-5 c dargestellte, von KÜHL (2001) als „Kombi-Prozess“ für die dezentrale Kraft-Wärme-Kälte-Kopplung vorgeschlagene Prozess sei schließlich als Beispiel dafür angeführt, dass auch die phasengleiche Kopplung eines thermischen und eines mechanischen Verdichters sinnvoll sein kann. Selbstverständlich wird man bei seiner Realisierung den Verdichter- und den Verdrängerkolben konstruktiv zusammenfassen, wie durch die gestrichelten Linien angedeutet ist. Damit entfällt der zugehörige Zylinderraum vollständig, und das Ergebnis ist schließlich wiederum ein einzelner Verdichterkolben mit dem Hubvolumen  $V_{DK} = V_P$ . Im komplexen Zeigerdiagramm kommt dies durch zwei entgegengesetzt gleiche Vektoren zum Ausdruck, die sich somit volumetrisch kompensieren. Dem einzig verbleibenden, den kalten Zylinderraum beschreibenden Volumenvektor sind jedoch zwei unterschiedliche komplexe Druckamplitudenvektoren  $\tilde{p}_P$  und  $\tilde{p}_{DK}$  zuzuordnen. Ersterer beschreibt die rein mechanische, durch die Änderung des Gesamtvolumens bedingte Kompression, während letzterer den thermischen Kompressionseffekt repräsentiert, der auf die Temperaturänderung des Gases auf seinem Weg durch den warm-kalten Regenerator zurückzuführen ist.

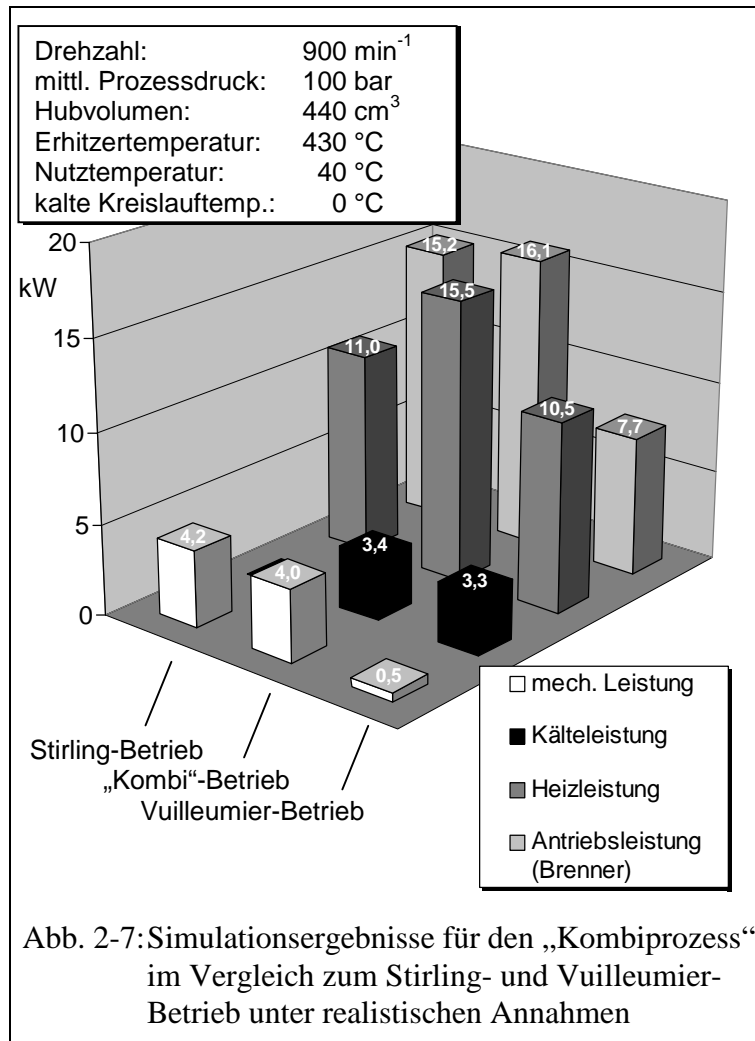
Nach KÜHL (2001) lässt sich der Prozess einerseits durch Einfügen eines zusätzlichen Regenerators in den  $\gamma$ -Stirling-Prozess und die damit mögliche Auftrennung der Temperaturniveaus des „warmen“ Verdrängerhubvolumens und des nun „kalten“ Kolbenhubraumes herleiten, andererseits aber auch durch „Abschalten“ des warmen Zylindervolumens im warm-kalten thermischen Verdichter des Vuilleumier-Prozesses. Beides ist mit geringem technischen Aufwand möglich, sofern man den zusätzlichen Regenerator im Falle des Stirling-Betriebes im Prozess belässt und lediglich die Temperaturniveaus  $T_w$  und  $T_k$  angleicht. Somit lässt sich auf diese Weise ein schrittweise zwischen drei Betriebszuständen umschaltbarer Prozess realisieren, der sich für ein flexibles, unterschiedlichen Bedarfssituationen anpassbares Hausenergiesystem eignet. Es ermöglicht im Stirling-Betrieb die vorrangige Stromerzeugung, ggf. auch über den Eigenbedarf hinaus zur gezielten Abdeckung von Lastspitzen im öffentlichen Netz. In Grundlastzeiten kann dagegen der Wärmebedarf im Vuilleumier-Betrieb ohne unerwünschte Stromeinspeisung gedeckt werden, wobei auch hier die Primärenergieausnutzung gegenüber konventionellen Heizungsanlagen deutlich verbessert ist.

Der „Kombi-Prozess“ ist, wie von KÜHL (2001) gezeigt wird, sowohl bei idealer Betrachtung als auch im realen Betriebsverhalten durch eine im Vergleich zum Stirling-Betrieb geringfügig reduzierte mechanische Leistungsproduktion und eine betragsmäßig etwa gleich große Kälteleistung gekennzeichnet. Zwangsläufig entspricht daher auch seine Heizleistung betragsmäßig dem über den Brenner zugeführten Antriebswärmestrom. Er nimmt somit nicht nur konstruktiv, sondern auch thermodynamisch eine Mittelstellung zwischen den beiden zuvor genannten Betriebszuständen ein, wie die Gegenüberstellung in Abb. 2-6 verdeutlicht. Die dort angegebenen Beziehungen zwischen den Energieströmen, insbesondere die Wirkungsgrad- und Leistungszahlangaben, gelten dabei jeweils für die Idealprozesse. Hinsichtlich der Leistungsdichte liegt der Vuilleumier-Prozess wegen seiner ausschließlich thermischen Kompression unter den beiden anderen Prozessen. Seine Kälteleistung entspricht (sowohl ideal als auch real) praktisch der des Kombi-Prozesses. Dies ist unmittelbar durch die identische Kompressionswirkung des heißen thermischen Verdichters zu erklären, die, wie im komplexen Zeigerdiagramm ersichtlich ist, als einzige mit dem kalten Volumen in Wechselwirkung steht. Heiz- und Antriebswärmestrom sind daher entsprechend geringer.



In Abb. 2-7 sind die von KÜHL (2001) angegebenen Ergebnisse realitätsnaher, numerischer Simulationsrechnungen für ein derartiges, umschaltbares System dargestellt. Hier bestätigt sich sowohl die annähernde betragsmäßige Gleichheit von mechanischer Leistung und Kälteleistung im Fall des „Kombi“-Prozesses als auch die Übereinstimmung der Kälteleistung mit derjenigen im Vuilleumier-Betrieb. Die jeweils erforderliche Antriebsleistung ist selbstverständlich größer als im Falle der Idealprozesse nach Abb. 2-6.

Das Beispiel verdeutlicht somit, dass die Ergebnisse einer systematischen Synthese auf der Ebene der Idealprozesse auch bei realistischer Betrachtung für praktische Anwendungen nutzbar sein können, wie in diesem Fall zur dezentralen, bedarfsgerecht anpassbaren Kraft-Wärme-Kälte-Kopplung.





## 2.2 Allgemeine Klassifikation regenerativer Kreisprozesse

Aufgrund der bisherigen Überlegungen lässt sich zusammenfassend sagen, dass eine systematische Einteilung der regenerativen Kreisprozesse einerseits hinsichtlich ihrer konstruktiven Realisierung in der  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Konfiguration möglich ist, andererseits aber auch nach der Anzahl der thermischen und mechanischen Verdichter und der Art ihrer Wechselwirkung. Aus thermodynamischer Sicht ist die erste Art der Unterscheidung eher unwesentlich, da sich lediglich die  $\gamma$ -Bauart aufgrund des zuvor erwähnten systematischen Totvolumens von den thermodynamisch äquivalenten  $\alpha$ - und  $\beta$ -Konfigurationen geringfügig unterscheidet. Sie ist aus diesem Grunde eher irreführend und hat in der Vergangenheit mehrfach dazu geführt, dass thermodynamische Gemeinsamkeiten verschiedener in der Literatur vorgeschlagener Prozesse nicht erkannt wurden.

So wurde die  $\beta$ -Bauart des in der  $\gamma$ -Variante bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts patentierten Vuilleumier-Prozesses (VUILLEUMIER 1918) von YENDALL (1960) unter der Bezeichnung „Taconis Cycle“ als neuartiger Prozess vorgeschlagen (auch wenn auf die Ähnlichkeit zwischen beiden hingewiesen wird). Der Duplex-Ericsson-Prozess findet sich in der  $\gamma$ -Bauart mit freischwingenden Kolben erstmals in einer Veröffentlichung von BENSON (1973), während die  $\beta$ -Konfiguration von COOKE-YARBOROUGH (1976) ebenfalls als freischwingendes System mit stufenförmigem Verdrängerkolben konzipiert wurde. Schließlich wurde die  $\alpha$ -Bauform mehrfach von FINKELSTEIN (1980, 1992, 1992a, 1992b) zunächst als „heat-activated Stirling heat pump“, später dann unter der Bezeichnung „balanced compounded Vuilleumier“ vorgeschlagen, wobei sich die letztgenannten Attribute darauf beziehen, dass vier jeweils um  $90^\circ$  phasenversetzt arbeitende Prozesse über doppelt wirkende Kolben zu einem Gesamtsystem mit konstantem Volumen zusammengesetzt werden, ähnlich wie dies vom Siemens-Stirlingmotor seit längerem bekannt ist (BABCOCK 1885, VAN WEENEN 1947).

Der zuletzt genannte Fall ist ein Beispiel dafür, dass in der Literatur bisweilen die Bezeichnung „Vuilleumier-Prozess“ pauschal für alle regenerativen Prozesse verwendet wird, die zwischen drei Temperaturniveaus arbeiten. WURM ET AL. (1990) definieren den Begriff sogar explizit in dieser Weise, übersehen jedoch dabei offenbar, dass dann auch Stirling-Prozesse mit doppelter Expansion nach Abb. 2-5 a so bezeichnet werden müssten, was sicherlich nicht beabsichtigt ist. Darüber hinaus wird man bei einer derart allgemeinen Verwendung dieses Begriffes dem thermodynamischen Prinzip des von Vuilleumier patentierten Prozesses, nämlich der Wechselwirkung zweier thermischer Verdichter bei konstantem Gesamtvolumen, nicht gerecht und verkennt die grundsätzlich andere Wirkungsweise des Duplex-Ericsson-Prozesses, der dort als „mechanical compression Vuilleumier cycle“ bezeichnet und vom „traditional Vuilleumier cycle“ mit thermischer Kompression unterschieden wird.

Nach einem Vorschlag von KÜHL UND SCHULZ (1998) sollte man den Begriff „Vuilleumier“ schärfer fassen und nur auf Prozesse anwenden, die auf dem zuvor genannten Prinzip beruhen, d. h. auf den „ursprünglichen“ Prozess nach VUILLEUMIER (1918), die  $\beta$ -Variante nach YENDALL (1960) sowie deren Abkömmlinge mit mehrfacher Expansion (z. B. RENYER 1973). Der Duplex-Ericsson-Prozess wird danach als einfachster Vertreter einer dritten Prozessgruppe angesehen, die durch Einführung mehrfacher Expansionsstufen sowohl auf der kalten als auch (zumindest theoretisch) auf der heißen Seite in ähnlicher Weise wie die beiden anderen Gruppen erweitert werden kann. Die Begriffe „Stirling“ und „Vuilleumier“ können damit entsprechend ihrer ursprünglichen thermodynamischen Definition verwendet werden und brauchen nicht – wie in der Literatur verschiedentlich geschehen – als Sammelbegriffe für in ihrer Funktion völlig verschiedene regenerative Kreisprozesse verallgemeinert werden.

Die drei Prozessgruppen können damit wie folgt beschrieben und unterschieden werden:

- Die Prozesse der Stirling-Gruppe sind dadurch gekennzeichnet, dass ein mechanischer Verdichter *zum Zwecke der Leistungsübertragung* (je nach Umlaufsinn mit positivem oder negativem Vorzeichen) vorhanden ist. Da diese Leistung i. d. R. maximiert werden soll, werden alle thermischen Verdichter gleichsinnig zusammengeschaltet – sofern mehrere vorhanden sind, also bei Prozessen mit mehrfacher Expansion – und mit ca. 90° Phasenverschiebung zum Arbeitskolben betrieben. Das Kennzeichen dieser Prozessgruppe ist somit die *maximale Wechselwirkung zwischen thermischer und mechanischer Kompression*.
- Die Prozesse der Vuilleumier-Gruppe besitzen keinen mechanischen Verdichter. Ihre mechanische Leistung ist wegen des konstanten Gesamtvolumens gleich null. Ihr charakteristisches Kennzeichen ist die *maximale Wechselwirkung zweier thermischer Verdichter* (bzw. Verdichterguppen), die daher mit ca. 90° Phasenverschiebung betrieben werden.
- Der Duplex-Ericsson-Prozess und seine denkbaren Abkömmlinge mit mehrfacher Expansion verzichten im Gegensatz zum Vuilleumier-Prozess auf das Prinzip der thermischen Kompression, da alle vorhandenen thermischen „Verdichter“ (die Bezeichnung ist hier eigentlich unangemessen) so gegeneinandergeschaltet und abgestimmt werden, dass sich ihre Wirkungen kompensieren. Stattdessen findet sich hier ein *mechanischer* Verdichter, der jedoch im Gegensatz zu den Prozessen der Stirling-Gruppe *ausschließlich zur Erzeugung einer Druckamplitude* dient, nicht jedoch zur Übertragung mechanischer Nettoleistung. Diese ist hier ebenfalls theoretisch null, jedoch nicht, weil das Gesamtvolumen konstant ist, sondern weil seine Phasenverschiebung zur Druckschwankung 180° beträgt.

Die letztgenannte Bedingung ist allerdings nur erfüllt, wenn die Betriebstemperaturen und die Hubräume der Verdrängerkolben ein Kriterium entsprechend Gl. 2-14 erfüllen. Andernfalls verbleibt im komplexen Zeigerdiagramm (Abb. 2-5 b) ein resultierender, durch thermische Kompression bedingter Druckvektor  $\tilde{p}_{Dh}$  bzw.  $\tilde{p}_{Dk}$ , und der Prozess kann damit sowohl Leistung abgeben als auch aufnehmen. Beides kann in der Praxis durchaus erwünscht sein, ersteres z. B. zum Zwecke des Selbstantriebes, d. h. zur Überwindung der im realen Prozess auftretenden Reibungs- und Strömungsdruckverluste, oder auch darüber hinaus zur Erzeugung mechanischer bzw. elektrischer Nutzleistung (wobei man sich dann sicherlich in das Übergangsfeld zur Stirling-Gruppe begibt), letzteres, um z. B. Lastspitzen des Wärmebedarfs unter ungünstigen Bedingungen (d. h. bei großem Temperaturhub  $T_w - T_k$ ) unter Zuschaltung eines mechanischen bzw. elektrischen Hilfsantriebes abzudecken.

An dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass die erstgenannte Möglichkeit auch bei den Prozessen der Vuilleumier-Gruppe existiert und auch bei allen bislang bekannten Maschinen der  $\gamma$ - und  $\beta$ -Bauart genutzt wurde (z. B. EDER 1987, CARLSEN 1989, KÜHL UND SCHULZ 1990, SUGANAMI ET AL. 1990, CARLSEN 1994, CARLSEN ET AL. 1994, SEKIYA ET AL. 1995, HEIKRODT UND HECKT 1999, RÜTHER, KÜHL UND SCHULZ 2000). In der  $\gamma$ -Bauart werden dazu die zur Anbindung der Verdrängerkolben an das Getriebe ohnehin erforderlichen Kolbenstangen genutzt. Sie werden an der Durchführung in den Getrieberaum zwecks Abtrennung dieses sonst als Totraum wirkenden Volumens gedichtet und bewirken damit als Tauchkolben eine geringe Veränderung des Gesamtvolumens, die etwa 90° phasenversetzt zum Prozessdruck verläuft und bei geeigneter Wahl des Querschnitts (besonders der kalten Stange) die gewünschte mechanische Leistung liefern kann. In der  $\beta$ -Bauart werden solche Stangen aus dem gleichen Grunde eingesetzt, auch wenn sie konstruktiv nicht erforderlich sind (s. Kap. 5.4.2).

Sofern auf diese Weise nur der Eigenbedarf der Maschine und evtl. ihrer Peripherie gedeckt wird, seien derartige Abweichungen vom jeweiligen Grundprinzip des Prozesses, wie dem des konstanten Gesamtvolumens im Falle des Vuilleumier-Prozesses oder auch der Bedingung

nach Gl. 2-14 im Falle des Duplex-Ericsson-Prozesses, bei der hier vorgeschlagenen Klassifikation vernachlässigt. Ist die Aufnahme oder Abgabe mechanischer Leistung jedoch beabsichtigt und überschreitet sie das zum Ausgleich unerwünschter Verluste erforderliche Maß, so handelt es sich um wirkliche Übergangsfälle zwischen den drei genannten Prozesskategorien, deren Existenz also keineswegs bestritten wird. Ein solcher Fall liegt z. B. bei dem von YAGYU ET AL. (1997) beschriebenen Prozess vor, der grundsätzlich einem  $\alpha$ -Duplex-Ericsson-Prozess mit leicht veränderten Phasenwinkeln ähnelt.

Abweichungen von den lediglich hinsichtlich der Leistungsdichte optimierten Idealprozessen - insbesondere hinsichtlich der Phasenwinkel - sind, wie schon zuvor betont wurde, durchaus sinnvoll und üblich. Sie ergeben sich, wenn bei der fortgeschrittenen Prozessoptimierung auch die den Gütegrad bestimmenden Verluste, wie z. B. der nachfolgend (Kap. 2.3) diskutierte adiabatische Verlust, mit berücksichtigt werden. Allerdings wurde in dem zitierten Fall das System bewusst so ausgelegt, dass neben dem thermischen auch ein mechanischer Antrieb in nennenswertem Umfang erforderlich ist, womit der Prozess im Übergangsfeld zur Stirling-Kältemaschine (bzw. -Wärmepumpe) einzuordnen wäre.

Besondere Erwähnung verdienen an dieser Stelle die Prozesse, die von BUDLIGER (1987, 1994, 1995, 1997) als thermische Wärmepumpen und später auch als spezielle Bauform eines Freikolben-Stirlingmotors (BUDLIGER 2000) vorgeschlagen wurden. Sie sind alle durch die Existenz einer in Resonanz schwingenden Gassäule gekennzeichnet. Der Fall eines beidseitig offenen Resonanzrohres zwischen dem heißen und dem kalten Verdrängersystem entspricht, wie auch BUDLIGER (1994) selbst schreibt, einer Duplex-Stirling-Wärmepumpe, d. h. der Kombination eines rechtsläufigen und eines linksläufigen Stirlingprozesses, die durch einen doppelt wirkenden Verdichterkolben gekoppelt sind und unterschiedliche Prozessdruckverläufe aufweisen. Duplex-Stirling-Wärmepumpen lassen sich besonders als freischwingendes System vorteilhaft realisieren (BEALE ET AL. 1983), werden hier jedoch nicht weiter diskutiert, da durch die mechanische Kopplung zweier Stirling-Prozesse kein neuartiger thermodynamischer Prozess entsteht.

Wenn das Resonanzrohr dagegen einseitig verschlossen ist, wirkt die Gassäule auf den gesamten Prozess ähnlich wie ein mechanischer Verdichterkolben. Es liegt nahe, dass die Gassäule netto weder Arbeit abgeben noch aufnehmen kann, wenn man von der durch innere Verluste dissipierten Energie absieht. Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass ihre Wirkung in dem Wärmepumpenprozess, für den BUDLIGER (1987, 1994, 1995) sowohl die Bezeichnung „Stirling“ als auch „Vuilleumier“ verwendet, genau der des Verdichterkolbens im Duplex-Ericsson-Prozess entspricht. Da auch die (freischwingenden) Verdrängerkolben praktisch gegenphasig arbeiten und über ihre Schwingungsamplituden das Kriterium nach Gl. 2-14 erfüllen müssen, ist der Prozess nach der hier vorgeschlagenen Nomenklatur als Duplex-Ericsson-Prozess zu bezeichnen.

In dem Freikolben-Prozess nach BUDLIGER (2000), der als Stirling-ähnliche Wärmekraftmaschine wirkt, liegt eine vergleichbare Situation vor. Auch hier muss sichergestellt werden, dass die Energiebilanz des Resonanzrohres, das dem Verdichterkolben des Stirlingmotors entspricht, ausgeglichen ist, d. h. die Bewegung des Verdrängerkolbens, des einzigen beweglichen Bauteils im System, darf keine Veränderung des Prozessdruckes hervorrufen. Während dies im Falle des Duplex-Ericsson-Prozesses durch gegenphasiges Zusammenschalten zweier thermischer Verdichter erreicht wird, wird hier stattdessen der thermische mit einem entgegengesetzt wirkenden mechanischen Verdichter – realisiert durch eine entsprechend verdickte Kolbenstange am kalten Ende des Verdrängers – gekoppelt.

Auch hier muss zwischen Hubvolumina und Temperaturen eine Beziehung ähnlich Gl. 2-14 erfüllt sein, um isobare Zustandsänderungen bei der Bewegung des Kolbens sicherzustellen.

Der Prozess stellt damit eine Annäherung des idealen Ericsson-Prozesses dar. Gemäß Kap. 2.1.2 könnten die zwei mechanischen Verdichter formal durch vektorielle Addition ihrer Volumenamplituden zu einem einzigen vereinigt werden. Damit wird die These bestätigt, dass die meisten ausgeführten Stirling-Maschinen im Übergangsfeld zwischen dem idealen Stirling- und Ericsson-Prozess einzuordnen sind (vgl. Kap. 1). Allerdings ist diese Betrachtungsweise wegen der unterschiedlichen Realisierung der beiden Verdichter – schwingende Gasssäule im Resonanzrohr einerseits, Verdrängerkolbenstange mit Puffervolumen andererseits – in diesem Fall wenig hilfreich. Der durch das Resonanzrohr realisierte Verdichter stellt diejenige Komponente dar, die die Druckamplitude aufbaut und daher selbst keine mechanische Leistung aufnimmt oder abgibt. Der durch die Kolbenstange realisierte Verdichter verrichtet durch seinen zur Druckamplitude phasenversetzten Betrieb Volumenänderungsarbeit, während andererseits seine Kompressionswirkung durch den thermischen Verdichter kompensiert wird.

Unabhängig von der Betrachtungsweise liegt hier in jedem Fall eine Wechselwirkung zwischen mechanischer und thermischer Kompression vor, so dass der Prozess in die Stirling-Gruppe eingeordnet werden kann und keine weitere, neuartige Kategorie repräsentiert.

Zusammenfassend ist die von KÜHL UND SCHULZ (1998) vorgeschlagene Einteilung der regenerativen Kreisprozesse in die genannten drei Gruppen in Abb. 2-8 dargestellt, wobei zusätzlich die in allen Fällen möglichen  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Bauarten gegenübergestellt wurden. Die in jedem dieser Fälle möglichen Erweiterungen zu Systemen mit mehrfacher Expansion wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mit aufgenommen.

Weiterhin sollte hier nochmals betont werden, dass es sich hier um Prinzipdarstellungen mit jeweiligen Phasenverschiebungen von  $\pm 90^\circ$  handelt, die sich aus der Forderung nach maximaler Leistungsdichte unter verschiedenen vereinfachenden Annahmen ergeben haben. Fasst man den Begriff „Leistungsdichte“ sehr präzise unter Beachtung der unterschiedlichen Einflüsse von Verdränger- und Verdichterhubräumen auf die zu erwartende Baugröße der Maschine und verzichtet man auf die den Gleichungen A1-9 und A1-10 zugrundeliegenden Näherungen, so erhält man bereits ohne Berücksichtigung der in realen Prozessen auftretenden Verluste leicht abweichende Ergebnisse für optimalen Phasenwinkel. Ebenso gelangt man auf diese Weise zu Aussagen über die jeweils optimalen Hubvolumenverhältnisse, die ebenfalls konfigurationsspezifisch sind und sowohl von der genauen Definition des Bezugsvolumens als auch von den Betriebstemperaturen abhängig sind. Hier ist insbesondere auf die Behandlung des idealen Stirling-Prozesses durch ORGAN (1992) hinzuweisen sowie auf die vergleichende Betrachtung aller drei Prozessgruppen durch THOMAS ET AL. (1989). Mit Hilfe eines weitgehend vom jeweiligen Anwendungsfall losgelösten Kriteriums, das man als „hubvolumenspezifischen Energiedurchsatz“ bezeichnen kann, gelangen sie zu einer allgemeinen Abstufung von Stirling-, Duplex-Ericsson- und Vuilleumier-Prozess in dieser Rangfolge.

Dies sollte jedoch nicht zu dem Schluss verleiten, dass die komplexeren Prozesse deshalb im Vergleich zum Stirling-Prozess grundsätzlich minderwertig wären oder dass der Duplex-Ericsson-Prozess dem Vuilleumier-Prozess in der Anwendung als thermisch angetriebene Wärmepumpe in jedem Fall vorzuziehen sei. Vielmehr ist die Auswahl des für einen bestimmten Anwendungsfall am besten geeigneten Prozesses ohne zusätzliche Betrachtung der wesentlichen Verluste, wie z. B. des adiabatischen Verlustes, nicht möglich.

Die Berücksichtigung dieser Verluste führt bei der späteren Detailoptimierung, auf die an anderer Stelle (Kap. 4) noch näher eingegangen wird, ohnehin oft zu abweichenden Resultaten für die optimalen Hubraumverhältnisse und Phasenwinkel. Aus dieser Sicht erscheint der Nutzen aufwändiger Optimierungsrechnungen auf der Basis der isothermen Idealprozesse eher gering. Derartige Überlegungen stellen vielmehr einen unnötigen Zwischenschritt bei der Op-

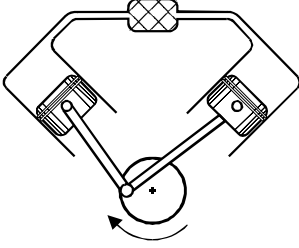
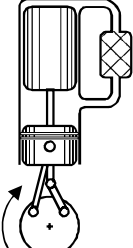
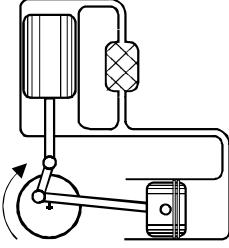
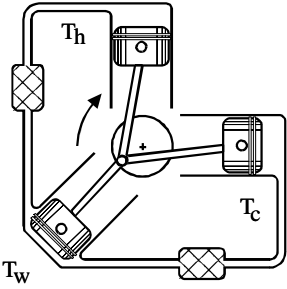
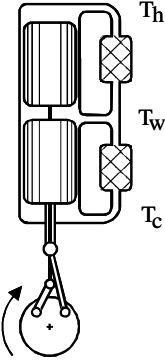
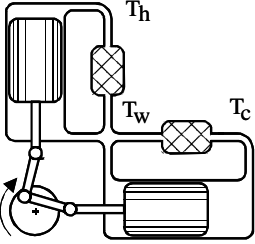
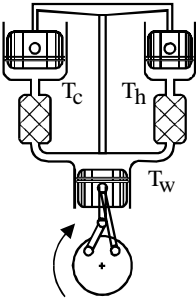
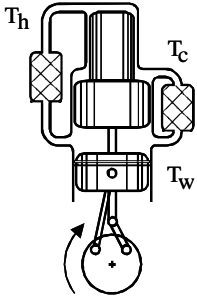
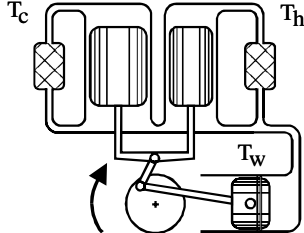
$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
 <p data-bbox="284 555 521 589"><math>\alpha</math>-Stirling-Prozess</p>	 <p data-bbox="691 555 928 589"><math>\beta</math>-Stirling-Prozess</p>	 <p data-bbox="1086 555 1321 589"><math>\gamma</math>-Stirling-Prozess</p>
 <p data-bbox="229 1025 496 1099"><math>\alpha</math>-VM, hypothetisch (<math>V_{ges} = \text{const.}</math>)</p>	 <p data-bbox="624 1025 948 1099">Taconis-Prozess (<math>\beta</math>-VM) (YENDALL 1960)</p>	 <p data-bbox="1050 1025 1358 1059">Vuilleumier-Prozess (<math>\gamma</math>)</p>
 <p data-bbox="213 1473 576 1547"><math>\alpha</math>-Duplex-Ericsson-Prozess (FINKELSTEIN 1980)</p>	 <p data-bbox="612 1473 995 1547"><math>\beta</math>-Duplex-Ericsson-Prozess (COOKE-YARBOROUGH 1976)</p>	 <p data-bbox="1027 1473 1385 1547"><math>\gamma</math>-Duplex-Ericsson-Prozess (BENSON 1973)</p>

Abb. 2-8:  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Varianten des Stirling-, Vuilleumier- und Duplex-Ericsson-Prozesses

timierung dar, dessen Ergebnisse durch die nachfolgenden Schritte sowie durch konstruktive und sonstige praktische Überlegungen i. d. R. wieder revidiert werden. So erhält z. B. ORGAN (1992) bei der Betrachtung des idealen Stirling-Prozesses nach Schmidt optimale Phasenwinkel  $< 90^\circ$ , während bei ausgeführten Maschinen durchweg Werte  $\geq 90^\circ$  zu finden sind. Ausschlaggebend hierfür ist die Reduktion des adiabatischen Verlustes, die sich mit der Annäherung an den idealen Ericsson-Prozess mit isobaren (und damit in dieser Hinsicht verlustfreien) Verdrängungsphasen einstellt. Der adiabatische Verlust ist als einziger in derart grundlegender Weise mit der Druckamplitude und damit auch mit der Leistungsdichte regenerativer Kreisprozesse verknüpft, dass er bereits für die grundsätzliche Prozessauswahl und nicht nur für die nachfolgende Optimierung Bedeutung besitzt. Aus diesem Grunde wird er bereits an dieser Stelle näher betrachtet.

## 2.3 Der Einfluss des adiabatischen Verlustes auf die Prozessauswahl und -auslegung

Wie bereits die Bezeichnung „adiabatischer Verlust“ vermuten lässt, ist seine Ursache in Abweichungen der realen Prozesse von den jeweiligen isothermen Idealprozessen zu finden. Sie sind darauf zurückzuführen, dass die theoretisch in den Zylinderräumen geforderte isotherme Wärmeübertragung wegen der sehr begrenzten verfügbaren Oberfläche und der bei Gasen grundsätzlich relativ schlechten Wärmeübergangskoeffizienten nicht einmal näherungsweise realisierbar ist. Die Verhältnisse können i. d. R. wesentlich eher durch den ideal adiabaten als durch den ideal isothermen Grenzfall beschrieben werden, was die Unverzichtbarkeit zusätzlicher Wärmeübertrager in praktisch allen ausgeführten Maschinen unterstreicht. Als Ausnahmen sind hier lediglich typische Modell-Stirlingmotoren sowie die in der englischsprachigen Literatur als „Low- $\Delta T$  Stirling engines“ bekannten Bauformen (z. B. nach KOLIN 1984 oder SENFT 1984) zu nennen. Hier gelingt die Annäherung an den isothermen Idealfall wegen des extrem günstigen Oberflächen-Volumen-Verhältnisses und der zugleich sehr geringen Leistungsdichte, die durch die niedrigen Druck- und Drehzahlwerte bedingt ist.

Die Grundlagen für die quantitative Beschreibung dieses Verlustes wurden von FINKELSTEIN (1960) gelegt, dem erstmals die numerische Integration der analytisch nicht mehr lösbaren Berechnungsgleichungen für den nicht-isothermen Stirling-Prozess gelang. Von KÜHL (1990) wurde dieses Simulationsmodell, das außer dem adiabatischen Verlust keine weiteren Irreversibilitäten berücksichtigt, für beliebige regenerative Kreisprozesse verallgemeinert und für die Ermittlung der wesentlichen Einflussgrößen genutzt. Zur allgemeinen Darstellung der Auswirkungen von Irreversibilitäten auf die thermodynamische Güte des Prozesses eignet sich dabei das dimensionslose Verhältnis der Entropieproduktion  $\dot{S}_{\text{irr}}$  zum insgesamt vom Prozess abgegebenen Entropiestrom  $\dot{S}_{\text{ab}}$ ,

$$s^* = \frac{\dot{S}_{\text{irr}}}{\dot{S}_{\text{ab}}} \quad (2-15).$$

Als Ergebnis ist dabei festzuhalten, dass unter der Voraussetzung eines bereits hinsichtlich der Leistungsdichte nach den zuvor genannten Regeln optimierten Prozesses lediglich eine relativ einfache Abhängigkeit der durch diesen Verlust verursachten Entropieproduktion vom Prozessdruckverhältnis auftritt. Sie lässt sich durch die empirische Gleichung

$$s^* = 0,8 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{p_{\text{min}}}{p_{\text{max}}} \right)^{R/c_p} \right] \quad (2-16)$$

ausdrücken. Dabei entspricht der Wert  $s^* = 0$  dem reversiblen Grenzfall, und der zweite Grenzfall,  $s^* = 1$ , wird durch „vollständig“ irreversible Prozesse (also z. B. eine Reibungsbremse) erreicht, bei denen der abgegebene Entropiestrom ausschließlich auf Produktion zurückzuführen ist. Die Größe  $s^*$  stellt damit ein dimensionsloses Bewertungskriterium ähnlich einem thermodynamischen Gütegrad dar, das die Einordnung realer Prozesse zwischen diesen beiden Grenzfällen ohne zusätzliche Festlegungen, wie z. B. die bei Verwendung des exergetischen Wirkungsgrades erforderliche Definition einer Umgebungstemperatur, erlaubt.

Der Zusammenhang zwischen  $s^*$  und dem thermischen Wirkungsgrad  $\eta$  einer Wärmekraftmaschine oder der Leistungszahl  $\zeta$  einer thermischen Wärmepumpe ist einfach herzuleiten:

$$\eta = 1 - \frac{1}{1 - s^*} \cdot \frac{T_k}{T_h} \quad (2-17)$$

$$\zeta = \frac{1 - T_k/T_h}{1 - (1 - s^*) \cdot T_k/T_w} \quad (2-18)$$

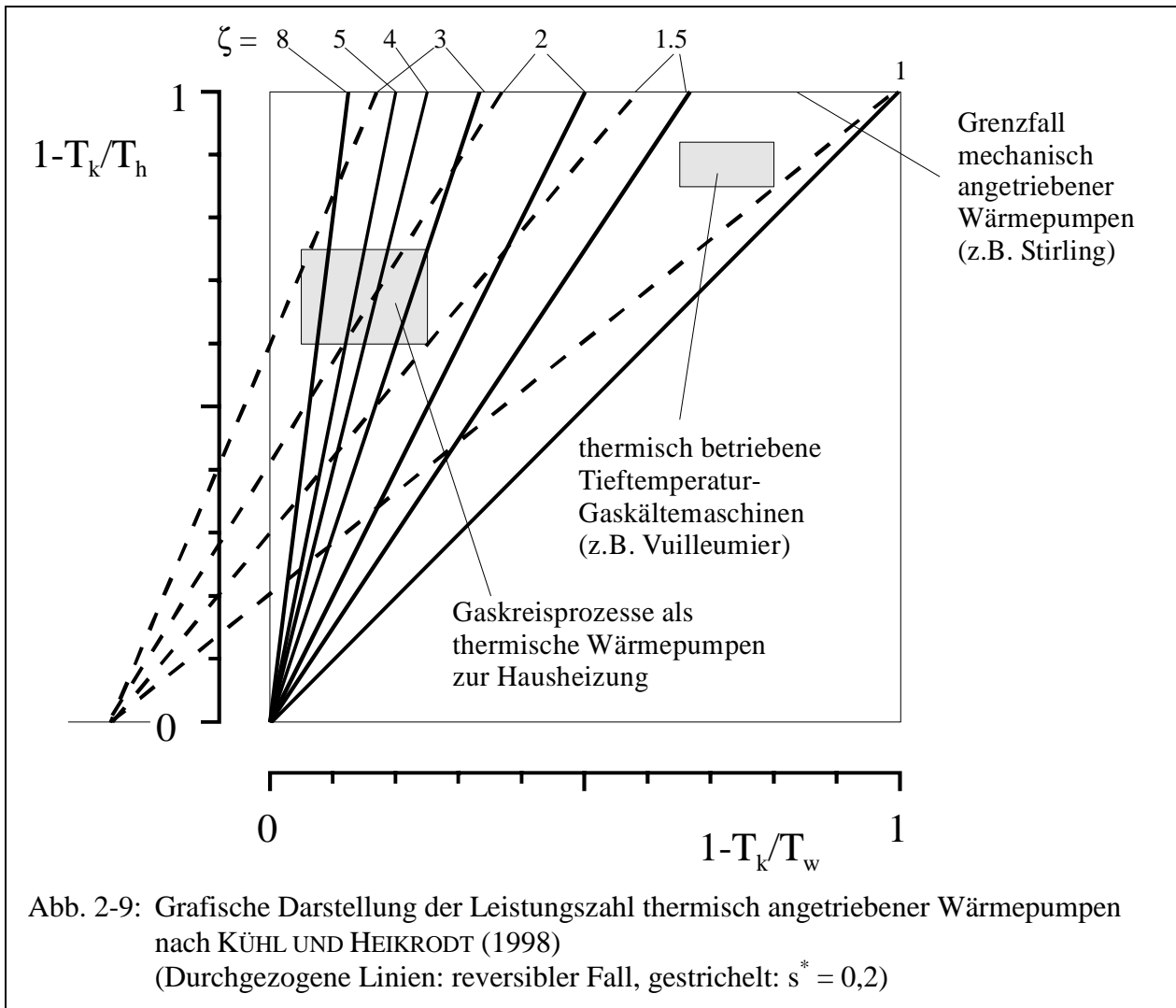
Damit wird der unmittelbare Einfluss des adiabatischen Verlustes auf diese Größen deutlich. Eine Maximierung der Leistungsdichte, die bei den bisherigen, idealisierten Betrachtungen stets alleiniges Optimierungsziel war, führt somit über das dann sehr große Druckverhältnis  $p_{\max}/p_{\min}$  zwangsläufig zu hohen Werten von  $s^*$  und damit zu unvermeidbaren Einbußen bei Wirkungsgrad bzw. Leistungszahl. Wie schon erwähnt wurde, muss bei der Auslegung und Optimierung realer Prozesse daher stets ein Kompromiss zwischen der Leistungsdichte und dem thermodynamischen Gütegrad des Prozesses gefunden werden, der letztlich immer durch die Randbedingungen des jeweiligen Anwendungsfalles bestimmt wird. Während z. B. bei mobilen Anwendungen das erste Kriterium bzw. ein geringes Leistungsgewicht von vorrangiger Bedeutung sein werden, ist bei stationären Heizungswärmepumpen ein niedriger Wert von  $s^*$  für eine befriedigende Leistungszahl unverzichtbar, denn die in diesem Anwendungsfall typischerweise geringen Temperaturhübe (d. h.  $T_k/T_w \approx 1$ ) führen gemäß Gl. 2-18 zu einem besonders starken Einfluss dieser Größe, der nach den von KÜHL UND HEIKRODT (1998) dargelegten und im folgenden kurz wiedergegebenen Untersuchungen nicht nur die Auslegung, sondern sogar die grundsätzliche Auswahl des hierfür vorzugsweise einzusetzenden Prozesses entscheidend beeinflusst.

In dem zitierten Beitrag wird die Leistungszahl thermischer Wärmepumpen nach Gl. 2-18 zunächst für den reversiblen Grenzfall ( $s^* = 0$ ) als Quotient zweier Carnot-Faktoren,  $1 - T_k/T_h$  und  $1 - T_k/T_w$ , aufgefasst und in dem in Abb. 2-9 wiedergegebenen Nomogramm grafisch dargestellt. Linien konstanter Leistungszahl entsprechen für  $s^* = 0$  somit den eingezeichneten Ursprungsgeraden. Weiterhin sind in Abb. 2-9 die für Heizungswärmepumpen und für Tieftemperatur-Gaskältemaschinen typischen Betriebsbereiche sowie der am oberen Rand auftretende Grenzfall einer mechanisch angetriebenen Wärmepumpe eingetragen.

Die Darstellung gilt zunächst allgemein und völlig unabhängig vom eingesetzten Prozess. Innerhalb der Gruppe der regenerativen Kreisprozesse kommen für die Realisierung einer thermisch angetriebenen Wärmepumpe sowohl der Vuilleumier- als auch der Duplex-Ericsson-Prozess in Betracht. Darüber hinaus ist noch die bereits erwähnte Duplex-Stirling-Wärmepumpe (oder auch Stirling-Stirling-Wärmepumpe) als mögliche Alternative zu nennen. Diese Kombination eines rechtsläufigen Stirlingmotors mit einer von ihm angetriebenen, linksläufigen Stirling-Kältemaschine wurde bereits vielfach vorgeschlagen und auch experimentell realisiert (s. z. B. WALKER ET AL. 1982, BERCHOWITZ 1982, BEALE ET AL. 1983, PENSWICK UND URIELI 1984, ELLISON ET AL. 1992, SHAO 2000).

Vergleicht man diese drei Alternativen ausschließlich unter dem Aspekt der mit ihnen erzielbaren Leistungsdichte, so gelangt man nach THOMAS ET AL. (1989) bereits bei der Betrachtung der isothermen Idealprozesse zu dem eindeutigen Ergebnis, dass die letztgenannte Möglichkeit die mit Abstand höchste Leistungsdichte aufweist, gefolgt vom Duplex-Ericsson-Prozess und – mit erheblichem Abstand – vom Vuilleumier-Prozess.

Der Grund für die im Vergleich zum Stirling-Prozess generell geringere Leistungsdichte der komplexeren Prozesse ist in dem vermehrten Auftreten thermischer Verdichter in letzteren zu sehen, deren Beitrag zur Prozessdruckamplitude aus den in Kap. 2.1.2 genannten Gründen stets geringer als die des mechanischen Verdichters ist. Darüber hinaus addieren sich beim Hinzufügen weiterer Verdichter zu bestehenden Prozessen deren temperaturbezogene Toträu-



me gemäß Gl. A1-2a in ihrer die Druckamplitude vermindern Wirkung unmittelbar auf, während dies für die „aktiven“, die Druckschwankungen bewirkenden Zylindervolumina nicht zutrifft (Gl. A1-2b). Der Grund hierfür liegt wiederum in der bereits diskutierten, stets erforderlichen Wechselwirkung von zwei ca. 90° phasenversetzt arbeitenden Verdichtergruppen.

Nach KÜHL UND HEIKRODT (1998) ist jedoch die Annahme, die Duplex-Stirling-Wärmepumpe sei für den Einsatz zur Gebäudeheizung wegen ihrer hohen Leistungsdichte in jedem Fall zu bevorzugen und die komplexeren Kreisprozesse seien im Vergleich zu ihr damit praktisch bedeutungslos, ein Trugschluss. Zur Begründung nehmen sie zunächst an, dass das Druckverhältnis einem Wert von  $p_{max} / p_{min} \approx 2:1$  aufweist, wie er nach WALKER (1980) für Stirlingmaschinen hoher Leistungsdichte typisch ist. Nach Gl. 2-16 lässt sich damit die zu erwartende Entropieproduktion durch den adiabatischen Verlust zu  $s^* \approx 0,2$  abschätzen.

Prüft man nun, wie sich ein Wert  $s^* > 0$  gemäß Gl. 2-18 auf die erzielbare Leistungszahl und deren graphische Darstellung in Abb. 2-9 auswirkt, so stellt man fest, dass sich der gemeinsame Schnittpunkt der Linien konstanter Leistungszahl vom Ursprung in negativer Abszissenrichtung um den Betrag  $s^* / (1 - s^*)$  verschiebt. Für den genannten Wert  $s^* = 0,2$  ergibt sich somit die in Abb. 2-9 eingezeichnete Verschiebung um 0,25 nach links. Dabei bleiben die Schnittpunkte der Linien mit der Senkrechten am rechten Rand des Diagramms (entsprechend einem Abszissenwert von 1 bzw. einem Temperaturverhältnis  $T_k/T_w = 0$ ) unverändert, so dass sich die gestrichelt eingezeichneten Verläufe ergeben.



Betrachtet man nun die Auswirkungen dieser Verschiebung auf die in den jeweiligen Betriebsbereichen erzielbare Leistungszahl, so erkennt man, dass die Auswirkung insbesondere bei mechanisch, aber auch bei thermisch angetriebenen Kältemaschinen im Tieftemperaturbereich verhältnismäßig gering sind. So sinkt z. B. bei einer zwischen 80 K und 300 K arbeitenden Stirling-Kältemaschine die Wärmepumpen-Leistungszahl  $\xi$  von 1,364 auf 1,271, d. h. die Kälteleistung verringert sich um ca. 25 %, was eine zwar merkliche, aber noch akzeptable Einbuße darstellt. Dagegen wird bei einer mit  $T_h = 900$  K,  $T_w = 320$  K und  $T_k = 270$  K betriebenen thermischen Heizungswärmepumpe die erzielbare Leistungszahl von 4,48 im reversiblen Fall auf 2,15 mehr als halbiert.

Bedenkt man nun, dass der adiabatische Verlust keineswegs der einzige nennenswerte Verlustmechanismus in realen Gaskreisprozessen ist – es sei hier nur beispielhaft auf die thermischen Regeneratorverluste sowie die in praktisch allen Prozesskomponenten auftretenden Wärmeleitungs-, Wärmeübertragungs- und Strömungsdruckverluste hingewiesen, die alle ebenfalls einen merklichen Beitrag zum Gesamtwert der Größe  $s^*$  liefern –, so wird unmittelbar klar, dass es unter diesen Umständen sehr schwierig ist, eine für den praktischen Einsatz akzeptable Leistungszahl (d. h. einen Wert von ca. 1,5) zu gewährleisten.

Man wird nun einwenden, dass man für derartige Einsatzbereiche keineswegs den angenommenen, sehr hohen Wert für das Prozessdruckverhältnis  $p_{\max} / p_{\min}$  wählen muss. Selbstverständlich sind auch Stirlingmaschinen mit wesentlich geringeren Verdichtungsverhältnissen realisierbar, und eine gezielte Optimierung unter Berücksichtigung der wesentlichen Verluste führt bei geringen Temperaturhuben auch zu solchen Lösungen. Hier bestätigt sich die generelle Regel, dass Temperatur- und Druckverhältnis aufeinander abgestimmt sein müssen. Nähert sich das erstere dem Grenzwert 1, so muss dies auch für letzteres gelten. So folgt aus der Bedingung  $\eta > 0$  mit Gl. 2-16 und 2-17 z. B. für Stirlingmotoren unmittelbar

$$\frac{p_{\min}}{p_{\max}} > \left[ 1 - \frac{1}{0,8} \left( 1 - \frac{T_k}{T_h} \right) \right]^{c_p/R} \quad (2-19).$$

Aufgrund ähnlicher Betrachtungen zum adiabatischen Verlust wie auch zu anderen (z. B. mechanischen) Verlusten gelangten bereits mehrere Autoren zu qualitativ ähnlichen Aussagen, die sich auch auf Wärmepumpen- und Kältemaschinenanwendungen übertragen lassen, so z. B. SENFT (1984), WEST (1986), CARLSEN ET AL. (1990) und SENFT (1991).

Die durch Gl. 2-19 aufgezeigte Tendenz zu geringeren Druckverhältnissen wird auch durch eine Reihe neuerer Forschungs- und Entwicklungsprojekte bestätigt, die vor dem Hintergrund der FCKW-Problematik das Ziel verfolgen, Stirling-Kältemaschinen speziell für den umgebungsnahen Temperaturbereich zu entwickeln bzw. anzupassen. MEIJER UND MINIATT (1993) wählen hierzu wegen des geringeren Isentropenexponenten sogar Wasserstoff statt Helium als Arbeitsmedium, erniedrigen zusätzlich die Druckamplitude und kompensieren den Verlust an Leistungsdichte durch einen hohen Mitteldruck (120 bar). Bei der Entwicklung von MAURER ET AL. (1994) wird das Druckverhältnis ebenfalls deutlich unter 2 gesenkt, und auch SIEGEL UND SCHIEFELBEIN (1996) schlagen diese Vorgehensweise vor, die nach den Berechnungen von STEIMLE ET AL. (1998) bereits ab einer Kältererzeugungstemperatur von  $-30^\circ\text{C}$  zu einer Konkurrenzfähigkeit im Vergleich zu herkömmlichen Kaltdampf-Kältemaschinen führt.

Die experimentelle Realisierung einer solchen Kältemaschine auf der Basis des von der Firma Solo zum BHKW-Modul weiterentwickelten V160-Stirlingmotors (BAUMÜLLER 1992, 1996, BAUMÜLLER UND SCHMIEDER 2001) bestätigt dies im wesentlichen (SCHIEFELBEIN 1997, SIEGEL 1998, SCHIKORA UND SIEGEL 2000). Bei allen angegebenen experimentellen Daten wird der durch Gl. 2-19 gegebene Grenzwert des Druckverhältnisses deutlich unterschritten.

Dennoch zeigt sich nach SCHIKORA ET AL. (1998) ein merklicher Einfluss des adiabatischen Verlustes, der jedoch in angemessenem Verhältnis zu den sonstigen, meist baugrößenabhängigen Verlusten steht und insofern nicht noch weiter auf Kosten der Leistungsdichte gesenkt werden sollte. Nach SCHIEFELBEIN (1997) ist insbesondere die mechanische Reibung ein nicht zu vernachlässigender Verlust, der größtenteils durch die trocken laufenden Dichtungen an den Verdichterkolben verursacht wird und sogar zu Kühlungsproblemen führen kann.

Man kann somit folgern, dass die festgestellte Untergrenze des bei Stirling-Kältemaschinen vertretbaren Temperaturhubes indirekt auch durch die mit der mechanischen Kompression zusammenhängenden Reibungsverluste bedingt ist. Bei den für Heizungswärmepumpen typischen, noch geringeren Temperaturhuben gelangt man nun nach Gl. 2-19 leicht zu Druckamplituden, die allein durch thermische Kompression (d. h. durch Prozesse der Vuilleumier-Gruppe) zumindest annähernd erreichbar sind. Damit stellt sich aus konstruktiver Sicht die Frage, ob angesichts der Nachteile der zusätzliche Aufwand für einen mechanischen Verdichterkolben noch gerechtfertigt ist. Grundsätzlich sind hier folgende Aspekte anzuführen:

- Während der Verdrängerkolben eines thermischen Verdichters nur gegen die sehr geringen Druckdifferenzen abgedichtet werden muss, die bei der Durchströmung des Regenerators und der Wärmeübertrager auftreten, wird ein mechanischer Verdichterkolben mindestens (d. h. im Idealfall eines sehr großen getriebeseitigen Pufferraumes, der sich auf dem mittlerem Prozessdruckniveau  $\bar{p}$  befindet) durch die volle Prozessdruckamplitude  $\hat{p}$  nach Gl. A1-8 belastet. Bei Getriebemaschinen wird deshalb i. d. R. eine reibende und damit verlustbehaftete und verschleißanfällige Dichtung eingesetzt, während bei Freikolbenmaschinen, wo eng tolerierte Spaltdichtungen bevorzugt werden, Drosselverluste durch Leckagen in Kauf genommen werden müssen. Diese stehen nur bei relativ hohen Betriebsfrequenzen, wie sie bei der Anbindung an einen elektrischen Lineargenerator zur Stromerzeugung bei Netzfrequenz erforderlich sind, in einem akzeptablen Verhältnis zur Prozessleistung. Derart hohe Frequenzen (50 bzw. 60 Hz) führen aus prinzipiellen, in Kap. 4 ausgeführten Gründen ebenfalls zu erheblichen Wirkungsgrad-Einbußen. Darüber hinaus sind die hohen Anforderungen an die Spalttoleranz gerade bei größeren Kolbendurchmessern nur mit erheblichem fertigungstechnischen Aufwand zu erfüllen und im Hinblick auf mögliche Wärmedehnungen in jedem Fall problematisch.
- Die ggf. auf den Getriebemechanismus übertragenen Leistungen führen zu hohen Belastungen der Lager. Dies gilt auch dann, wenn wie im Falle des Duplex-Ericsson-Prozesses die Netto-Leistung null ist, denn auch hier werden im Schwungrad erhebliche Energiemengen zwischengespeichert. Die so verursachten Probleme bei der Lagerdimensionierung sind vom Stirling-Prozess her seit langem bekannt und werden in der Fachliteratur ausführlich behandelt (vgl. z. B. WALKER 1980). Die beiden möglichen Lösungen, das drucklose, ölgeschmierte Kurbelgehäuse einerseits und das „trockene“, druckbeaufschlagte Getriebe mit dauergeschmierten Lagern andererseits, weisen spezifische Nachteile auf. Im ersten Fall ist die Abdichtung der Kolbenstangen gegen Gasverluste einerseits und gegen in den Prozessraum eindringendes Öl andererseits nur mit aufwändigen, relativ stark reibenden (s. o.), verschleißanfälligen und technologisch anspruchsvollen Dichtungen erreichbar. Im anderen Fall ist die Lebensdauer der Lager stets begrenzt, und Dimensionen, Gewicht und Kosten des Getriebes sowie des umgebenden Druckbehälters sind erheblich.
- Bei Freikolbenmaschinen müssen die mit der Leistungsübertragung verbundenen Reaktionskräfte stattdessen von entsprechend dimensionierten Federn aufgenommen werden. Auf Dauerschwingfestigkeit dimensionierte mechanische Federn führen dann i. d. R. zu Abmessungen des Generator-Gehäusevolumens, die das des eigentlichen Motors um ein Mehrfaches übersteigen (vgl. z. B. SCHMIDT ET AL. 1997). Werden stattdessen Gasfedern

entsprechender Steifigkeit eingesetzt, so müssen entweder merkliche Hystereseverluste oder ebenfalls sehr große Abmessungen in Kauf genommen werden.

- Die in Verbindung mit mechanischen Verdichterkolben auftretenden bewegten Massen sind i. d. R. deutlich größer als bei Verdrängerkolben. Ein in den meisten Anwendungsfällen geforderter oder zumindest wünschenswerter Massenausgleich ist entsprechend schwer zu realisieren.

Die genannten Probleme treten bei thermischen Verdichtern nicht oder nur in stark abgeschwächter Form auf. Daher kommen KÜHL UND HEIKRODT (1998) zu dem Ergebnis, dass der Vuilleumier-Prozess für thermisch angetriebene Wärmepumpen bei geringen Temperaturhuben, wie sie für den Einsatz im Bereich der Heizungstechnik typisch sind, ungeachtet (und sogar gerade *wegen*) seiner geringen Leistungsdichte am besten geeignet ist.

Inzwischen wurde auch experimentell nachgewiesen, dass Vuilleumier-Heizungswärmepumpen die Anforderungen sowohl an Leistungsdichte und -gewicht als auch an eine zufriedenstellende Jahresheizzahl erfüllen können. So wurden im Rahmen eines vom BMBF geförderten Verbundprojektes im Zeitraum 1993 - 1999 mehrere in ihrer Konstruktion und Auslegung bereits seriennahe Versuchsmaschinen mit über 20 kW Heizleistung realisiert, die in ihren Abmessungen konventionellen Heizkesseln gleicher Leistung entsprechen und mittlere Jahresheizzahlen von 1,45 bis 1,61 erreichen<sup>6</sup>. Hinzu kommt hier noch der Vorteil einer mit dem Temperaturhub steigenden Heizleistung, der bei keinem anderen Wärmepumpentyp zu finden ist und einen monovalenten Betrieb erlaubt. Er ist durch den für alle regenerativen Prozesse charakteristischen Verzicht auf Phasenumwandlungen sowie durch die mit dem Temperaturhub zunehmende Kompressionswirkung des kalten thermischen Verdichters begründet.

Wie dieses Beispiel verdeutlicht, gibt es ungeachtet der prinzipiellen Unterschiede bei der erzielbaren Leistungsdichte durchaus Anwendungsfälle, in denen die zunächst unvorteilhaft erscheinenden, komplexeren regenerativen Kreisprozesse gegenüber dem Stirling-Prozess bevorzugt werden sollten. Dies trifft dann zu, wenn deren spezifische Vorzüge besonders zum Tragen kommen, wie z. B. im beschriebenen Fall die einfachere konstruktive Realisierbarkeit ohne nennenswerte Abdichtungsprobleme und die wesentlich günstigeren Voraussetzungen, die im stationären Einsatz als Heizungswärmepumpe besonders hohen Anforderungen an Lebensdauer und Wartungsfreiheit zu erfüllen.

Das ökonomische und ökologische Potential, das gerade in den möglichen Einsatzfeldern für regenerative Kreisprozesse zur stationären, dezentralen Energieumwandlung liegt, ist erheblich größer als das im mobilen Bereich, für den speziell der Stirlingmotor über mehrere Jahrzehnte hinweg favorisiert wurde. So entfielen z. B. in der Bundesrepublik Deutschland im Jahre 1997 ca. 40% des Endenergieverbrauches auf die Sektoren Raumheizung und Prozesswärmeerzeugung unter 100°C (vorwiegend Warmwasserbereitung) und lediglich ca. 27,5 % auf den gesamten Verkehrssektor, wo zudem exergetisch hochwertige Antriebsleistung benötigt wird und die Einsparpotentiale dementsprechend gering sind. Dies begründet und rechtfertigt die verallgemeinerte Betrachtung der gesamten Prozessgruppe und die Entwicklung von Auslegungs- und Optimierungsverfahren in allgemeiner, vom Sonderfall Stirling losgelöster Form, zu der die vorliegende Arbeit beitragen soll.

---

<sup>6</sup> Die Bestimmung der Jahresheizzahl wurde aus Gründen der Vergleichbarkeit eng an die in DIN 4702 Teil 8 genormte Ermittlung des Norm-Nutzungsgrades von Heizkesseln angelehnt, und die genannten Werte beziehen sich auf die dort festgelegten Standardfälle einer Fußbodenheizung und einer konventionellen Radiatorheizung mit Vor- und Rücklauftemperaturen von 40°C und 30°C bzw. 75° und 60° im Nennlastfall. Die zusätzlich erforderliche Festlegung der Außentemperaturen für die verschiedenen zu vermessenden Teillast-Betriebszustände erfolgte dabei auf der Grundlage der Norm-Außentemperatur nach DIN 4701. Weitere Einzelheiten des Verfahrens sind im Abschlussbereich des Projektes (HEIKRODT UND HECKT 1999) zu finden.



## 3 Beiträge zur mathematischen Modellierung

### 3.1 Vorbemerkungen und Literaturübersicht

#### 3.1.1 Allgemeines

Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, wie sinnvolle regenerative Kreisprozesse systematisch aus den Funktionsgruppen des thermischen und des mechanischen Verdichters entwickelt werden können. Darüber hinaus wurde dargelegt, dass bei der Auswahl des für eine bestimmte Anwendung am besten geeigneten Prozesses neben der Leistungsdichte auch der Einfluss des adiabatischen Verlustes berücksichtigt werden muss und deshalb in Fällen mit hohen Anforderungen an die thermodynamische Güte der Energieumwandlung auch weniger leistungsdichte Prozesse eine vorteilhafte Wahl sein können. Dies gilt insbesondere dann, wenn damit zugleich auch konstruktive Vorteile einhergehen, wie z. B. bei Wegfall der mechanischen Kompression.

Im folgenden wird nun angenommen, dass die prinzipielle Auswahl des Prozesses unter Berücksichtigung der diskutierten Aspekte erfolgt ist. Damit stellt sich als nächstes die Frage nach der Prozessauslegung und –optimierung, d. h. es müssen für alle die auszuführende Maschine beschreibenden Abmessungen und Betriebsdaten einschließlich der zu verwendenden Materialien und des Arbeitsmediums Festlegungen getroffen werden.

Voraussetzung für jede derartige Optimierung ist selbstverständlich die Existenz einer geeigneten Zielfunktion, d. h. es muss ein mathematisches Modell des Prozesses existieren, das nicht nur die bislang als alleiniges Kriterium verwendete volumenbezogene Leistung, sondern auch dessen thermodynamische Güte möglichst realistisch beschreibt. Derartige Modelle wurden in der Vergangenheit in unterschiedlicher Komplexität von verschiedenen Autoren entwickelt. In der Literatur hat sich dabei bis heute eine auf MARTINI (1978) zurückgehende Klassifikation erhalten, auch wenn sie den zwischenzeitlichen Entwicklungen auf dem Gebiet der numerischen Simulation und dem daraus erwachsenden zusätzlichen Differenzierungsbedarf nicht voll gerecht werden kann. Danach wird zwischen Verfahren erster, zweiter und dritter Ordnung unterschieden.

#### 3.1.2 Verfahren erster Ordnung

Die Methoden erster Ordnung beschränken sich auf die Anwendung der für den isothermen Idealprozess geltenden Gleichungen, die bereits im vorhergehenden Kapitel verwendet wurden und im Anhang 1 zusammengefasst sind. Wegen der Vernachlässigung aller Verluste sind sie lediglich zur Abschätzung der Leistungsdichte und zur angenäherten Berechnung von Massenverteilungen und –strömen (nach den in Anhang 1.2 angegebenen Beziehungen) geeignet. Dies gilt auch dort, wo durch empirische Korrekturen eine Angleichung an experimentelle Befunde erfolgt, wie es z. B. bei Stirlingmotoren durch Einführung der Beale-Zahl,

$$Be = \frac{P_{\text{Nutz}}}{n \cdot \bar{p} \cdot V_{\text{Hub}}} \quad (3-1),$$

geschah, für die man nach Auswertung der Daten von einer größeren Zahl ausgeführter Maschinen den empirischen Zahlenwert  $Be \approx 0,15$  fand (WALKER 1979). Die hierdurch ausgedrückte Abhängigkeit der Nutzleistung  $P_{\text{Nutz}}$  von der Drehzahl  $n$ , dem mittleren Druck und dem Hubvolumen kommt bereits in der im Anhang 1 angegebenen Gleichung A1-5 zum Aus-

druck. Setzt man den dort für hoch verdichtende Stirlingmotoren abgeleiteten Wert  $D/B \approx 1/3$  ein und schätzt man den relativen Phasenwinkel mit dem für hohe Erhitzeremperaturen – Walker gibt hier  $650^\circ\text{C}$  an – typischen Wert  $|\theta_{\text{ges}} - \theta_p| \approx 150^\circ$  ab, so erhält man mit  $V_{\text{Hub}} = 2 \cdot \hat{V}_{\text{ges}}$  den theoretischen Wert

$$\text{Be}_{\text{theo}} = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin(150^\circ) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (1/3)^2}} \approx 0,27 \quad (3-2).$$

Damit erscheint der von Walker angegebene Wert von ca. 0,15 plausibel, da in der theoretischen Abschätzung keinerlei Reibungs- oder Strömungsdruckverluste enthalten waren.

Der angegebene Zahlenwert für  $\text{Be}$  setzt allerdings voraus, dass es sich um Stirlingmotoren mit üblichen (d. h. thermodynamisch günstigen) heißen und kalten Betriebstemperaturen sowie mit vorteilhaft gestalteten, d. h. hinsichtlich eines möglichst geringen Totvolumens optimierten Komponenten handelt. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, wie z. B. bei den von KOLIN (1984) und SENFT (1984, 1991) entwickelten Niedertemperatur-Motoren oder auch bei Motoren mit kostengünstig gestalteten Wärmeübertragern und – dadurch bedingt – vergleichsweise großen Totvolumina, so ergeben sich deutlich kleinere Werte für  $\text{Be}$ .

Insbesondere der Einfluss der Betriebstemperaturen wurde theoretisch von WEST (1981) und von SENFT (1982) untersucht und in eine erweiterte Definition dieser Kennzahl mit aufgenommen. An dieser Stelle werden die Methoden erster Ordnung nicht weiter diskutiert, da sie als Zielfunktion für weiterführende Optimierungen wegen der fehlenden bzw. zu pauschalen Verlustmodellierungen ungeeignet sind.

### 3.1.3 Verfahren zweiter Ordnung

Die Methoden zweiter und dritter Ordnung unterscheiden sich dadurch, dass erstere auf einem stark idealisierten, vereinfachten und dadurch mathematisch leicht handhabbaren Prozessmodell basieren, das durch voneinander unabhängige, „entkoppelte“ Verlustabschätzungen korrigiert wird, während letztere den realen Prozess mit allen zu berücksichtigenden Verlusten durch Differentialgleichungen beschreiben, die in Richtung der (einzigen) Ortskoordinate, d. h. in Hauptströmungsrichtung, diskretisiert und dann in der Zeit numerisch integriert werden.

Der Vorteil der Methoden zweiter Ordnung ist darin zu sehen, dass die einzelnen Verluste in ihrer jeweiligen Größe einfacher zu identifizieren, theoretisch nachzuvollziehen und zu bewerten sind und dass die Rechenzeit deutlich geringer ist als bei den Methoden dritter Ordnung. Diese bieten dafür die Gewähr, dass auch die Wechselwirkungen der verschiedenen Verlustmechanismen erfasst werden und benötigen weniger vereinfachende Annahmen als erstere. Dennoch ist umstritten, ob die Verfahren dritter Ordnung denen zweiter Ordnung generell überlegen sind. CHEN UND GRIFFIN (1983) kommen nach einer vergleichenden Bewertung der bis zu diesem Zeitpunkt veröffentlichten Verfahren zu dem Ergebnis, dass bezüglich der Genauigkeit bei der Wiedergabe experimenteller Daten keine allgemeingültige Aussage möglich ist. Dennoch besitzen die Verfahren dritter Ordnung wegen ihrer Flexibilität zweifellos ein größeres Potential bezüglich einer genauen Modellierung.

Die Verfahren zweiter Ordnung sind weiter zu unterteilen solche, die auf dem ideal-isothermen Prozessmodell (s. Anhang 1) basieren und diejenigen, denen das bereits in Kap. 2.3 erwähnte adiabate Modell nach FINKELSTEIN (1960) zugrunde liegt. Unabhängig davon, ob dabei die Zylinderräume als völlig adiabatisch angenommen werden oder ob ein begrenzter Wärmeübergang zugelassen wird (der sog. „semi-adiabate“ oder „polytrope“ Fall), sind die Glei-

chungen in diesem Falle nicht mehr analytisch, jedoch durch eine einfache, rasch zur stationären Lösung konvergierende numerische Integration lösbar.

Zur ersten Gruppe sind u. a. die Verfahren nach MARTINI (1978, 1978a, 1983), MARTINI UND ROSS (1979), SHOURESHI (1982), WALKER ET AL. (1989, 1992), WEISS ET AL. (1986, 1988, 1991), ISSHIKI UND TSUKAHARA (1984), LAZARIDES UND RALLIS (1990), PRIETO UND DIAZ (1993), PRIETO ET AL. (1997) und THOMAS (2001) ZU ZÄHLEN, zur zweiten die Verfahren nach QVALE UND SMITH (1967), RIOS ET AL. (1968), FEURER (1973), LEE ET AL. (1981), HEAMES ET AL. (1982), und DE CICCIO ET AL. (1983), die sich wie schon die zuvor genannten alle auf die Simulation des Stirling-Prozesses beschränken. Weiterhin wurden semi-adiabate Verfahren zweiter Ordnung für den Vuilleumier-Prozess von SHERMAN (1971), KÜHL ET AL. (1986, 1988) und EDER (1992) sowie ein isothermes Verfahren für Stirling- und Vuilleumier-Maschinen von SEKIYA UND YAMASHITA (1993) entwickelt. Gemeinsam ist allen diesen Verfahren die iterative Bestimmung der (ggf. zeitlich gemittelten) Gastemperaturen in den einzelnen Prozesskomponenten, die sich aus der jeweiligen Energiebilanz in Verbindung mit den Wärmeübergangsbedingungen und unter Berücksichtigung der einzeln ermittelten thermischen Verluste der Regeneratoren und der wärmeleitenden Bauteile der Maschine ergeben.

Eine Sonderstellung nehmen wegen der abweichenden Prozessmodellierung die Verfahren von Rauch (1980, 1984), CHEN ET AL. (1984, 1985) bzw. CHEN UND GRIFFIN (1986) und HUANG (1992) ein, die den Prozess durch Fourier-Reihenentwicklungen der relevanten Zustandsgrößen beschreiben und so unmittelbar die stationäre Lösung erhalten, sowie das Verfahren nach BAUWENS (1994, 1994a, 1995, 1995a), der einen adiabaten Prozess ohne Vermischungseffekte in den Zylinderräumen annimmt und hierfür eine analytische Lösung angibt.

### 3.1.4 Verfahren dritter Ordnung

Bei den Verfahren dritter Ordnung wird zunächst durchweg eine ortsfeste (Euler'sche) Diskretisierung in der Ortskoordinatenrichtung durchgeführt. Dabei ist weiterhin zu unterscheiden zwischen Verfahren, die neben der Massen- und der Energiebilanz auch die Impulsbilanz in allgemeiner Form berücksichtigen, und solchen, die im letztgenannten Fall mehr oder weniger weitgehende Vereinfachungen aufweisen. Diese können von der Vernachlässigung der Trägheitsterme bis zur Annahme eines vollständigen örtlichen Druckausgleichs reichen, d. h. zur Vernachlässigung von Strömungsdruckverlusten bei der numerischen Integration, die dann nachträglich wie bei den Verfahren zweiter Ordnung als Korrektur hinzugerechnet werden. Dem Genauigkeitsverlust steht dabei eine erheblich verbesserte numerische Stabilität insbesondere bei der Anwendung expliziter Integrationsverfahren gegenüber.

Von FINKELSTEIN (1975) wurde ein solches Verfahren mit vereinfachter Impulsbilanz (nur Strömungsdruckverluste, Vernachlässigung der kinetischen Energie) entwickelt, während in dem Verfahren nach TEW ET AL. (1978) die Druckverlustberechnung in der oben beschriebenen Weise völlig entkoppelt durchgeführt wird. Ähnliches gilt für die Verfahren nach AZETSU ET AL. (1982), SERRATE UND PARISE (1991) und nach MITCHELL UND BAUWENS (1988) bzw. Bauwens (1993), wobei bei letzterem lediglich die Trägheitsterme in der Impulsbilanz vernachlässigt werden. Über das von ZACHARIAS (1977) entwickelte Verfahren sind zu wenig Einzelheiten bekannt, um eine Einordnung vornehmen zu können, während die Verfahren nach URIELI ET AL. (1977), SCHOCK (1978, 1978a), GEDEON (1978), YUAN UND SPRADLEY (1992) und EPPERT (1995) alle Erhaltungssätze in allgemeiner Form berücksichtigen. Von BITTERLICH UND OBID (1986) wurden beide Wege alternativ beschrritten, wobei das vereinfachte Verfahren sich durch erheblich kürzere Rechenzeiten auszeichnet. SCHIEFELBEIN (1997) berücksichtigt linearisierte Trägheitsterme und verwendet – ähnlich wie auch KÜHL

(1990) und SCHWENDIG (1992) in ihren allgemein für beliebige Prozesse (s. u.) entwickelten Verfahren, jedoch mit höherer Gitterauflösung – zur Lösung der Impulsgleichung Vereinfachungen, die eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckinformation implizieren.

Neben kurze Zeitschrittweiten erzwingenden Stabilitätsproblemen bei den expliziten und aufwändigen Matrixinversionen bei den impliziten Integrationsmethoden ist die langsame Konvergenz zur stationären Lösung der Hauptgrund für die relativ langen Rechenzeiten der genannten Verfahren. Die physikalische Ursache hierfür sind im wesentlichen die hohen Wärmekapazitäten der Regeneratoren, weshalb bei allen Verfahren – soweit bekannt – gerade an dieser Stelle konvergenzbeschleunigende Maßnahmen eingesetzt werden. In günstigen Fällen können so die stationären Werte der Matrixtemperaturen nach etwa 10 berechneten Prozesszyklen mit hinreichender Genauigkeit erreicht werden.

Ein alternativer Weg zur Lösung des Konvergenzproblems wird von GEDEON (1986) und von FISCHER ET AL. (1995) beschritten, die das den Prozess beschreibende Differentialgleichungssystem vor der Lösung nicht nur in Orts-, sondern auch in Zeitrichtung vollständig diskretisieren. Der stationäre Betriebszustand ergibt sich dann als numerische Lösung eines umfangreichen algebraischen Gleichungssystems mit schwach besetzter Matrix.

Während alle bislang erwähnten Verfahren lediglich den Stirling-Prozess beschreiben, wurden auch für den Vuilleumier-Prozess analoge Berechnungsmethoden dritter Ordnung entwickelt, wobei insbesondere auf CARLSEN UND ANDERSEN (1989), OLSEN ET AL. (1989) und BRADLEY ET AL. (1992) hinzuweisen ist. Von KÜHL (1990) bzw. KÜHL UND SCHULZ (1990) und von SCHWENDIG (1992) wurden Verfahren dritter Ordnung mit teilweise vereinfachter Impulsbilanz (Grobe Diskretisierung der Ortskoordinate bei der Massenstromberechnung, Annahme einer ortsunabhängigen Zeitableitung des Prozessdruckes) allgemein für beliebige regenerative Kreisprozesse entwickelt. Hierzu wurde ein modulares Konzept eingeführt, das auf der im Anhang 1.2 erläuterten Methode zur allgemeinen Beschreibung komplexerer Prozesse aufbaut. In analoger Form findet sich diese Möglichkeit, Prozesse modular aus einer „Komponentenbibliothek“ aufzubauen, in Verbindung mit einer graphischen Benutzeroberfläche auch bei dem seit einigen Jahren kommerziell verfügbaren Programm von GEDEON (1994).

### 3.1.5 Neuere Entwicklungen

In neuerer Zeit sind einige Entwicklungsrichtungen zu verzeichnen, die insoweit auch zu den Verfahren dritter Ordnung zu zählen sind als es sich ebenfalls um numerische Integrationen eines den Prozess einschließlich seiner Verlustmechanismen beschreibenden Differentialgleichungssystems handelt. Sie unterscheiden sich von den bisherigen jedoch in der Formulierung bzw. in der Art der Diskretisierung.

Zum einen sind hier die Methoden zu nennen, die mit bewegten (Lagrange'schen) Koordinaten arbeiten. Grundgedanke ist dabei die Annahme, dass der thermodynamische Zustand des Arbeitsgases an einem bestimmten Punkt weniger eine Funktion des Ortes ist, sondern vielmehr von der „Vorgeschichte“ des betreffenden Fluidelementes abhängt, d. h. dass die Information, die zur Bestimmung des Zustandes benötigt wird, sich im wesentlichen mit der Strömungsgeschwindigkeit ausbreitet. Diese Annahme kann in regenerativen Kreisprozessen am ehesten in der Wärmeübertragern als erfüllt gelten, in guten Regeneratoren, die i. d. R. Wirkungsgrade von mehr als 95% erreichen, ist dagegen der Zustand des Arbeitsgases im wesentlichen ortsabhängig, was für die Verwendung Euler'scher Koordinaten zumindest in diesem Bereich spricht. Es wurden daher auch Verfahren entwickelt, die bei Regeneratoren und Wärmeaustauschern unterschiedliche Diskretisierungen verwenden, was allerdings den re-



chentechnischen Aufwand in die Höhe treibt<sup>1</sup>. Verfahren, die vollständig auf Lagrange'schen Koordinaten basieren, wurden u. a. von MARTINI (1986) und RIX (1986, 1988) entwickelt.

Eine konsequente Weiterführung des Lagrange'schen Gedankens, bei der Integration die Ausbreitungsgeschwindigkeit der relevanten Informationen zu berücksichtigen, stellt die Methode der Charakteristiken dar, die insbesondere bei der Beschreibung extrem gleichgewichtsferner gasdynamischer Phänomene, wie z. B. der Ausbreitung von Detonationswellen, seit langem bewährt ist. Hier wird der Tatsache Rechnung getragen, dass zwar die Information über die Temperatur und damit die Enthalpie eines Fluidelementes zu einem gewissen Teil (wenn auch nicht ausschließlich – es sei hier auf den Wärmeaustausch mit Wandoberflächen oder auf Dispersionseffekte hingewiesen) mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit weitergeleitet wird, während sich die Druckinformation mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet. Damit ergeben sich im örtlich eindimensionalen Fall drei charakteristische Richtungen in der Ort-Zeit-Ebene, von denen eine durch die Strömungsgeschwindigkeit und zwei durch die Schallgeschwindigkeit in positiver und negativer Ortskoordinatenrichtung bestimmt werden. Die Differentialgleichungen werden nun vor der Diskretisierung in das durch diese Richtungen definierte, neue Koordinatensystem transformiert und anschließend numerisch integriert.

Berechnungsverfahren, die auf der Methode der Charakteristiken beruhen, werden von CHEN UND GRIFFIN (1983) als eigenständige Gruppe angesehen und von den auf Euler'schen Koordinaten basierenden Methoden dritter Ordnung unterschieden. Derartige Verfahren wurden z. B. von LARSON (1981, 1982), ORGAN (1982, 1982a), TAYLOR (1984) und RISPOLI (1985, 1988) entwickelt. ORGAN (1992, 1996) vertritt in sehr kompromissloser Form die Auffassung, dass allein mit diesen Verfahren eine physikalisch korrekte Beschreibung des Stirling-Prozesses (und damit implizit auch aller anderen regenerativen Kreisprozesse) möglich sei, und rückt alle mit Euler'schen Diskretisierungen arbeitenden Methoden in die Nähe einer arglistigen Täuschung (engl.: fraud, ORGAN 1996).

Sein Haupteinwand gegen letztere ist die Tatsache, dass die numerische Lösung vom dem grundsätzlich (zumindest in gewissen Grenzen) frei wählbaren Verhältnis aus Orts- und Zeitschrittweite abhängig ist, das in dimensionsloser Form durch die Courant-Zahl beschrieben werden kann. Andere Autoren, z. B. BAUWENS (1990, 1993) vertreten dagegen die Auffassung, dass die unbestreitbaren Diskretisierungsfehler numerischer Verfahren dann vertretbar sind, wenn sie mit zunehmender Verfeinerung der Gittereinteilung gegen die physikalisch richtige Lösung konvergieren. Dieser Nachweis lässt sich auch für Euler'sche Koordinaten führen. Die große Zahl der oben zitierten Methoden dritter Ordnung, mit denen durchweg zufriedenstellende Übereinstimmungen zwischen Simulation und Experiment erzielt wurden und die insbesondere auch die Einflüsse der unterschiedlichen Parameter richtig wiedergeben, belegt ihre grundsätzliche Eignung zur Modellierung regenerativer Kreisprozesse und insbesondere auch als Zielfunktion für Optimierungen.

### 3.1.6 Probleme und Grenzen der eindimensionalen Modellierung

Der Einwand, dass die Ausbreitung der Zustandsinformation durch die Wahl der Courant-Zahl beeinflusst wird, ist grundsätzlich zutreffend. Hinsichtlich der mit der Fluidströmung transportierten Information ist jedoch festzustellen, dass die *mittlere* Ausbreitungsgeschwindigkeit selbst im Falle einer Diskontinuität richtig wiedergegeben wird, auch wenn abhängig von der Zahl der finiten Elemente eine mehr oder wenig starke numerische Dispersion festzustellen ist. Im Falle ideal vermischter Elemente ist die mathematische Lösung bekannt und entspricht der Verweilzeitverteilungsfunktion der aus der chemischen Reaktionstechnik bekannten idea-

<sup>1</sup> H. Carlsen, DTU Lyngby, Dänemark, persönliche Mitteilung

len Rührkesselkaskade. Von KÜHL (1990) und SCHWENDIG (1992) wurde diese numerische Dispersion mit der tatsächlich auftretenden axialen Strömungsdispersion in Beziehung gesetzt und speziell bei der Modellierung von Regeneratoren auch zur angenäherten Erfassung des hierdurch bedingten Verlustes eingesetzt (vgl. Kap. 3.2.4). An anderer Stelle, z. B. in den Wärmeübertragern, ist die Auswirkung numerischer Dispersionseffekte auf die Simulationsergebnisse in der Praxis durchweg gering und vernachlässigbar, auch wenn das Auftreten dieses Phänomens aus theoretisch-physikalischer Sicht unbefriedigend ist.

Zur Beurteilung des bei Verwendung Euler'scher Koordinaten hinsichtlich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckinformation auftretenden Fehlers muss die Form der Behandlung der Impulsbilanz berücksichtigt werden. Verfahren, die die Impuls Gleichung vollständig berücksichtigen und bei ihrer Lösung das gleiche hochauflösende Gitter verwenden wie bei den anderen Gleichungen, benötigen zur stabilen Integration dieses dann sehr steifen Gleichungssystems i. d. R. so kurze Zeitschrittweiten, dass insgesamt eine in beiden Koordinatenrichtungen sehr hohe Auflösung und somit auch eine gute Annäherung an die physikalisch richtige Lösung erzielt wird, wenn auch auf Kosten eines erheblichen Rechenaufwandes.

Die Verfahren mit vereinfachter Impulsbilanz gehen i. d. R. so weit, dass sie implizit eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Druckes annehmen. Dies stellt eine in den meisten Fällen gut vertretbare Näherung dar, denn alle sinnvoll ausgelegten und praktisch brauchbaren Gaskreisprozesse zeichnen sich zwangsläufig durch extrem *gleichgewichtsnah*e örtliche Druckverteilungen aus. Die durch Strömungsvorgänge bedingten örtlichen Druckunterschiede liegen allgemein unter einem Prozent des mittleren Prozessdruckes, und es lässt sich durch Abschätzung der dissipierten Leistung leicht zeigen, dass ein Prozess bei deutlich höheren Strömungsdruckverlusten seinen thermodynamischen Zweck nicht mehr erfüllen würde und kaum noch sinnvoll zu betreiben wäre.

Deutliche Einflüsse der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Druckänderungen, deren Erfassung den Einsatz der Methode der Charakteristiken erfordert, lassen sich nur bei Annahme extremer, praktisch nicht anzutreffender Bedingungen demonstrieren. So geht ORGAN (1982) von einem mit Luft als Arbeitsmedium und bei der extrem hohen Drehzahl von  $4000 \text{ min}^{-1}$  betriebenen Stirlingmotor aus und nimmt zusätzlich noch relativ lange (220 mm) und schlanke Bauformen für die Wärmeübertrager an. Wegen der niedrigen Schallgeschwindigkeit treten hier tatsächlich merkliche Laufzeiteffekte auf. Allerdings ist die angenommene Drehzahl in der Praxis selbst bei mit Wasserstoff oder Helium betriebenen Maschinen trotz der in diesen Medien erheblich höheren Schallgeschwindigkeit nur selten anzutreffen.

Grundsätzlich muss von einem in Optimierungen einzusetzenden mathematischen Modell in erster Linie verlangt werden, dass es die Zielfunktion *im Bereich des zu erwartenden Optimums*, d. h. für thermodynamisch günstige Maschinenauslegungen, möglichst genau wiedergibt. Verlustmechanismen, die dort nur eine untergeordnete Rolle spielen und lediglich in Bereichen weit abseits des Optimums einen signifikanten (negativen) Einfluss auf die thermodynamische Güte des Prozesses ausüben, brauchen nur in verhältnismäßig grober Näherung berücksichtigt zu werden, so dass ihr Einfluss zumindest qualitativ richtig wiedergegeben wird und sich die Lage des Optimums nicht durch Modellierungsfehler verschiebt. Insofern ist die genaue Wiedergabe von Effekten, die nur mit Hilfe der Methode der Charakteristiken präzise beschrieben werden können, also z. B. der Ausbreitung von Diskontinuitäten oder des Einflusses der endlichen Schallgeschwindigkeit, in zur Optimierung eingesetzten mathematischen Modellen regenerativer Kreisprozesse aus praktischer Sicht entbehrlich.

Abweichungen zwischen theoretisch berechneten und experimentellen Ergebnissen, die auch bei Anwendung aufwändiger Verfahren noch auftreten, sind meist weniger auf die Art der Diskretisierung und der numerischen Integration als vielmehr auf eine zu optimistische Ab-

schätzung der Strömungsdruckverluste zurückzuführen, für die bis heute noch vielfach Korrelationen verwendet werden, die für stationäre Bedingungen und völlig gleichmäßige, definierte Anströmung der jeweiligen Prozesskomponenten gültig sind. Wegen der stets im Hintergrund stehenden Forderung nach einem möglichst geringen Totvolumen sind die tatsächlichen Verhältnisse dagegen durch eine Vielzahl meist scharfkantiger Strömungsumlenkungen und durch asymmetrische, ungleichmäßige Anströmbedingungen gekennzeichnet. Ihr Einfluss auf Druckverlust und Wärmeübergang auch in den Bereichen mit vermeintlich „definierter“ Strömung wird erfahrungsgemäß fast immer unterschätzt.

Der Einsatz von Korrelationen, die für periodisch oszillierende Strömungen gelten, führt hier zwar zu einer Verbesserung, löst aber nicht das zuletzt genannte Problem, denn man nimmt auch hier weiterhin an, dass z. B. alle Rohre eines Wärmeübertragers gleichmäßig durchströmt werden und dass in der Matrix eines Regenerators ein bei makroskopischer Betrachtung kolbenförmiges Strömungsprofil vorliegt. Zusammenfassend kann man daher sagen, dass die Gründe für die trotz aller bislang geschilderten Anstrengungen immer noch begrenzte Genauigkeit und Verlässlichkeit numerischer Prozessmodelle vorwiegend darauf zurückzuführen sind, dass man an die Grenzen des mit örtlich eindimensionaler Strömungsmodellierung Möglichen stößt. Man muss sich hier vor Augen halten, dass jede Beschreibung von Strömungsdruckverlusten oder Wärmeübergängen durch Korrelationen den Versuch darstellt, ein tatsächlich mehrdimensionales Phänomen auf den einfachen Fall einer eindimensionalen Kolbenströmung zu reduzieren. Dass dies gerade unter den komplexen räumlichen und zudem zeitlich stets instationären Bedingungen in regenerativen Kreisprozessen eine sehr problematische Vereinfachung darstellt, wurde schon früh erkannt, musste jedoch zunächst wegen der Kapazitätsgrenzen der verfügbaren EDV-Anlagen, die eine vollständig mehrdimensionale Modellierung nicht zuließen, in Kauf genommen werden.

### 3.1.7 Mehrdimensionale Modellierung

Erste Versuche einer mehrdimensionalen Modellierung beschränkten sich auf einzelne Prozesskomponenten, und es wurde versucht, die Ergebnisse so aufzubereiten, dass sie in eindimensionale Modelle des Gesamtprozesses integriert werden konnten. Hier ist u. a. auf die Arbeiten von GEDEON (1985, 1988, 1989), GOLDBERG (1987) und IBRAHIM ET AL. (1989, 1990, 1991) hinzuweisen. Insgesamt mehrdimensionale Prozessmodellierungen sind auch auf dem heutigen Stand der numerischen Rechentechnik noch als sehr aufwändig einzustufen. Hier sei auf die Arbeiten von GOLDBERG (1990), HALL ET AL. (1990) sowie MAKHKAMOV UND INGHAM (1998, 1999, 2000) hingewiesen.

Grundsätzlich ist im Zusammenhang mit den Versuchen einer mehrdimensionalen Prozessmodellierung jedoch anzumerken, dass die so erzielbare Steigerung der numerischen Auflösung nur dann wirklich sinnvoll ist, wenn auch entsprechend detaillierte Informationen über die physikalischen Gegebenheiten in der ausgeführten bzw. auszuführenden Maschine vorliegen. Viele der mit eindimensionalen Modellen nicht mehr vollständig erfassbaren Verluste, wie z. B. die durch Randgängigkeiten oder durch Inhomogenitäten in der Matrixstruktur verursachten Regeneratorverluste, auf die in Kap. 3.2.5 noch näher eingegangen wird, oder auch die Folgen der durch Einbaulage, Anströmung und Fertigungstoleranzen bedingten ungleichmäßigen Durchströmung parallelgeschalteter Kanäle in Wärmeaustauschern oder entsprechend gebauten Regeneratoren sind kaum mit der erforderlichen Genauigkeit vorhersagbar und bei ausgeführten Maschinen auch nachträglich messtechnisch nur schwer bestimmbar.

Als Fazit ist damit festzuhalten, dass die Möglichkeiten der numerischen Modellierung regenerativer Kreisprozesse auf dem heutigen Stand so weit reichen, dass die dennoch bestehen-

den Abweichungen zwischen Theorie und Experiment weniger auf deren prinzipielle Grenzen als vielmehr auf einen Mangel an physikalischer Detailkenntnis zurückzuführen ist. Mit anderen Worten: Das Problem besteht eher darin, dass es nicht gelingt, eine Maschine mit der erforderlichen Präzision dem numerisch bestimmten Optimum nachzubilden, und dass es umgekehrt kaum möglich ist, technisch bedingte Streuungen – z. B. bei der Herstellung eines Regenerators mit regelloser Fasermatrix – in theoretisch fassbarer Form in die vorhersagende Modellierung und Optimierung einzubinden. Dieses prinzipielle Problem existiert zwar grundsätzlich auch in allen anderen Bereichen der Technik, jedoch tritt es bei den regenerativen Kreisprozessen besonders deutlich in Erscheinung, weil hier eine sehr große verlustbedingte Diskrepanz zwischen der thermodynamischen Güte des idealen Vergleichsprozesses und derjenigen der ausgeführten Maschine besteht.

Es ist nicht Gegenstand dieser Schrift, den Themenkomplex der mathematischen Modellierung regenerativer Kreisprozesse umfassend zu behandeln, zumal dies in der zitierten Literatur bereits in großem Umfang geschehen ist. Die in den folgenden Kapiteln behandelte Vorgehensweise bei der Auslegung und Optimierung ist – soweit eine numerisch ermittelte Zielfunktion eingesetzt werden soll – weitgehend unabhängig von den Einzelheiten der mathematischen Formulierung und Lösung des entsprechenden Gleichungssystems. Soweit im folgenden beispielhaft Ergebnisse numerischer Optimierungen dargestellt werden, wurden sie unter Verwendung einer weiterentwickelten Fassung des bereits von KÜHL (1990, 1990a) beschriebenen modularen Simulationsprogramms für beliebige regenerative Kreisprozesse erzielt. Aspekte der numerischen Modellierung werden daher im folgenden nur in soweit behandelt als sie entweder in dieses Programm konkret eingebracht wurden oder sofern sie als Grundlage für die Ähnlichkeitstheoretischen Überlegungen in Kap. 4 benötigt werden.

## 3.2 Regeneratorverluste in Modellen zweiter Ordnung

### 3.2.1 Der Wärmeübergangsverlust

Auch wenn die Wärmeübergangsbedingungen in Regeneratoren generell als sehr gut zu bezeichnen sind, übertrifft dennoch der thermische Verlust durch unvollständigen Wärmeübergang i. d. R. die übrigen, im folgenden beschriebenen Verluste – möglicherweise mit Ausnahme des Wandwärmeverlustes, der jedoch nicht zu den Regeneratorverlusten im engeren Sinne zu zählen ist. Der Wärmeübergangsverlust bildet zusammen mit dem später diskutierten Temperaturschwingungsverlust die Grundlage der klassischen Regeneratortheorie nach HAUSEN (1950), die allerdings vorwiegend für Regeneratoren im großtechnischen Maßstab entwickelt wurde, wie sie z. B. bei der Rauchgas-Luftvorwärmung an Industrieöfen oder Kraftwerken zu finden sind. Die Betriebsbedingungen von Regeneratoren in regenerativen Kreisprozessen unterscheiden sich deutlich von diesen, was dadurch zum Ausdruck kommt, dass sich insbesondere für die von Hausen verwendete reduzierte Periodendauer extrem geringe Werte ergeben und man sich im Randbereich der entsprechenden Diagramme bewegt. Die Verlustabschätzungen fallen auf diesem Wege i. d. R. zu optimistisch aus, was darauf zurückzuführen ist, dass einige von Hausen getroffene vereinfachende Annahmen hier nicht mehr aufrecht zu erhalten sind (ORGAN 1997). Umgekehrt werden von Hausen Verlustmechanismen berücksichtigt, die nur bei größeren reduzierten Periodenlängen von Bedeutung sind.

Aus diesem Grunde wurden schon früh vereinfachte Modellvorstellungen für Regeneratorverluste unter den speziellen Randbedingungen in regenerativen Kreisprozessen entwickelt (z. B. MARTINI 1978, URIELI UND BERCHOWITZ 1984), die hier in Kürze zusammenfasst werden. Für die Bestimmung des Wärmeübergangsverlustes werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Temperaturverläufe von Gas und Matrix sind linear.
- Massenstrom  $\dot{m}$  und zyklische Massenverschiebung  $\Delta m$  sind über die Länge konstant, d. h. Kompressionseffekte durch den schwankenden Prozessdruck werden vernachlässigt.
- Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  ist zeitlich und örtlich konstant.
- Die Wärmekapazität der Matrix wird als unendlich angenommen.
- Das Arbeitsmedium ist ein ideales Gas mit temperaturunabhängiger Wärmekapazität  $c_p$ .

Falls die Gaseintritts- und -austrittstemperaturen am heißen bzw. kalten Ende,  $T_{h,ein}$ ,  $T_{h,aus}$ ,  $T_{k,ein}$  und  $T_{k,aus}$  zeitlich veränderlich sind, seien sie im folgenden als enthalpiebezogene Mittelwerte definiert, d. h. es sei

$$T = \frac{\Delta H}{\Delta m \cdot c_p} = \frac{1}{\Delta m \cdot c_p} \cdot \int_{t_1}^{t_2} |\dot{m}(t)| c_p T(t) dt \quad (3-3)$$

mit  $t_1$  und  $t_2$  als den Zeitpunkten der Massenstromumkehr.

Die regenerierte, d. h. in der Matrix zwischengespeicherte und nach Strömungsumkehr wieder an das Gas zurückgegebene Wärmemenge  $Q_R$  ist unter diesen Annahmen gleich der Enthalpieänderung der periodisch hindurchströmenden Gasmenge  $\Delta m$ :

$$\begin{aligned} Q_R &= \Delta H_{h,ein} - \Delta H_{k,aus} = \Delta m c_p (T_{h,ein} - T_{k,aus}) = \\ &= \Delta H_{h,aus} - \Delta H_{k,ein} = \Delta m c_p (T_{h,aus} - T_{k,ein}) \end{aligned} \quad (3-4)$$

Für den idealen Regenerator ist an beiden Matrixenden die mittlere Temperatur und damit auch die Enthalpie  $\Delta H$  des ausströmenden Gases gleich der des jeweils zuvor bzw. danach einströmenden. Die im Idealfall regenerierte Wärmemenge ist damit

$$Q_{R,id} = \Delta H_{h,ein} - \Delta H_{k,ein} = \Delta m c_p (T_{h,ein} - T_{k,ein}) \quad (3-5),$$

und die verlustbedingt pro Zyklus durch den Regenerator transferierte Enthalpie  $\Delta H_V$  beträgt

$$\begin{aligned} \Delta H_V = Q_{R,id} - Q_R &= \Delta H_{h,ein} - \Delta H_{h,aus} = \Delta m c_p (T_{h,ein} - T_{h,aus}) = \\ &= \Delta H_{k,aus} - \Delta H_{k,ein} = \Delta m c_p (T_{k,aus} - T_{k,ein}) \end{aligned} \quad (3-6).$$

Der Wirkungsgrad  $\eta_R$  eines Regenerators wird allgemein als das Verhältnis aus der tatsächlich und der im Idealfall regenerierten Wärmemenge definiert, d. h. es gilt

$$\eta_R = \frac{Q_R}{Q_{R,id}} = \frac{\Delta H_{h,ein} - \Delta H_{k,aus}}{\Delta H_{h,ein} - \Delta H_{k,ein}} = \frac{\Delta H_{h,aus} - \Delta H_{k,ein}}{\Delta H_{h,ein} - \Delta H_{k,ein}} \quad (3-7).$$

Entsprechend gilt für den dimensionslosen Regeneratorverlust allgemein

$$\xi_R = 1 - \eta_R = \frac{\Delta H_V}{Q_{R,id}} = \frac{\Delta H_{h,ein} - \Delta H_{h,aus}}{\Delta H_{h,ein} - \Delta H_{k,ein}} = \frac{\Delta H_{k,aus} - \Delta H_{k,ein}}{\Delta H_{h,ein} - \Delta H_{k,ein}} \quad (3-8).$$

Wird nun lediglich der Verlust durch unvollständigen Wärmeübergang betrachtet, so ergibt sich unter den obigen Annahmen das in Abb. 3-1 dargestellte Bild, wobei die gestrichelt dargestellten, jeweils um eine konstante Temperaturdifferenz  $\Delta T$  gegenüber der Matrixtemperatur versetzten Gastemperaturverläufe für zeitlich konstante Eintrittstemperaturen  $T_{h,ein}$  und  $T_{k,ein}$  gelten. Nach einfacher Rechnung (vgl. z. B. MARTINI 1978 oder URIELI UND BERCHOWITZ 1984) erhält man für den dimensionslosen Wärmeübergangsverlust

$$\xi_{w\ddot{U}} = \frac{1}{1 + NTU/2} \quad \text{mit} \quad NTU = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{\alpha A}{\Delta m c_p} \quad (3-9),$$

wobei  $\alpha$  und  $A$  den Wärmeübergangskoeffizienten und die Austauschfläche der Matrix bezeichnen und für die Strömungszeiten jeweils die halbe Zykluszeit,  $\pi/\omega$ , angenommen wurde.

Gute Regeneratoren, wie sie als Ergebnis von Optimierungsrechnungen unter normalen Randbedingungen zu erwarten sind, erreichen in der Praxis Wirkungsgrade  $> 95\%$ , d. h. die Zahl der Übertragungseinheiten  $NTU$  ist (bedingt durch die sehr große Oberfläche der fein strukturierten Matrix und den bei kleinen hydraulischen Radien sehr guten Wärmeübergang) relativ hoch. Der im folgenden als Beispiel angenommene Wert  $NTU \approx 50$  entsprechend einem Wärmeübergangsverlust  $\xi_{w\ddot{U}} \approx 4\%$  stellt somit eine eher niedrige Schätzung dar.

Betrachtet man nun ein Fluidelement mit einer vom zeitlichen Mittel abweichenden Ausgangstemperatur  $T_0$ , das sich – ausgehend von einer angenommenen Startposition  $x_0$  – entsprechend den obigen Annahmen durch die Matrix bewegt, so lässt sich dessen Temperatur als Funktion der Zeit und bei Berücksichtigung der als konstant angenommenen Strömungsgeschwindigkeit auch als Funktion des Ortes durch die Funktion

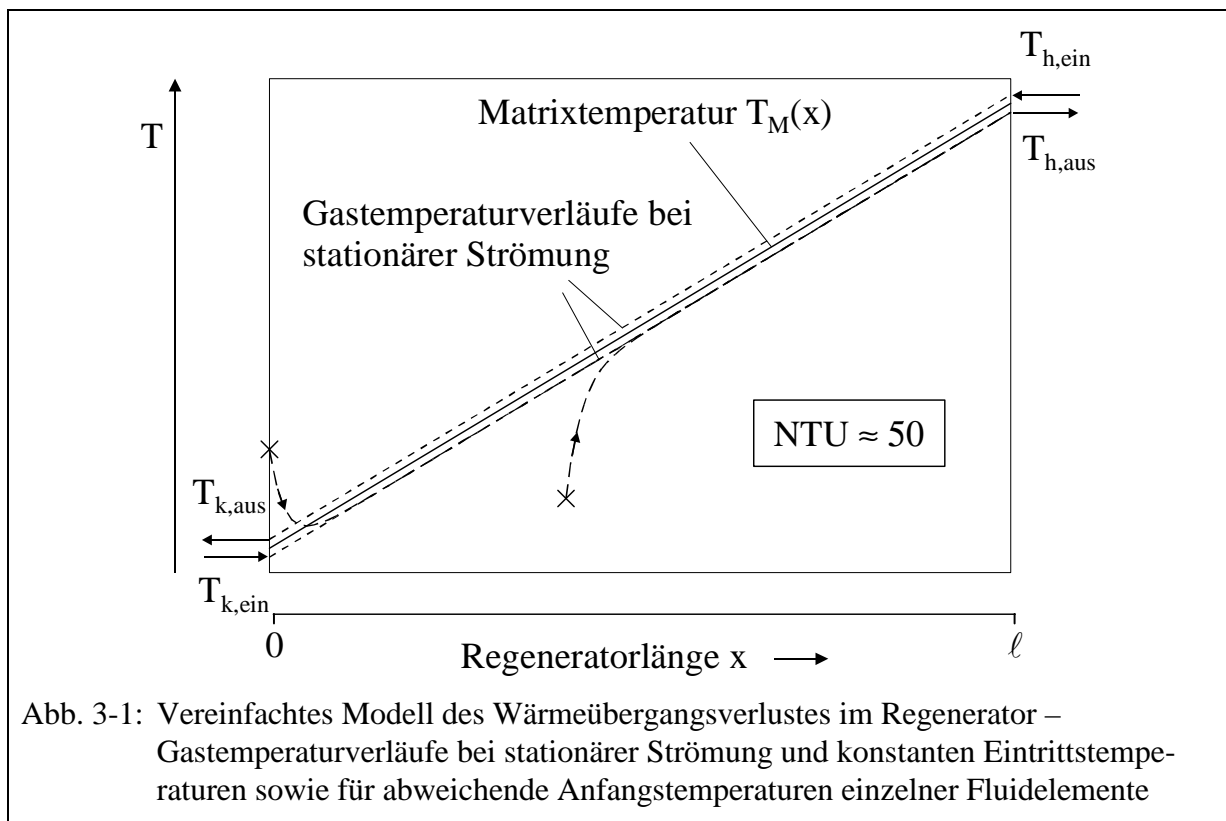


Abb. 3-1: Vereinfachtes Modell des Wärmeübergangsverlustes im Regenerator – Gastemperaturverläufe bei stationärer Strömung und konstanten Eintrittstemperaturen sowie für abweichende Anfangstemperaturen einzelner Fluidelemente

$$T(x) = T_M(x) - \frac{T_{M,h} - T_{M,k}}{NTU} \left[ 1 - \exp\left(-NTU \frac{x-x_0}{\ell}\right) \right] + (T_0 - T_{M0}) \exp\left(-NTU \frac{x-x_0}{\ell}\right) \quad (3-10)$$

beschreiben, wobei  $\ell$  die Regeneratorlänge und  $T_{M,h}$ ,  $T_{M,k}$  und  $T_{M0}$  die Matrixtemperaturen am heißen und kalten Ende sowie an der Position  $x_0$  bezeichnen (KÜHL UND SCHULZ 1996). Man erkennt, dass die ursprüngliche Temperaturdifferenz  $T_0 - T_{M0}$  exponentiell abklingt, während sich umgekehrt die stationäre Abweichung zwischen Gas- und Matrixtemperatur,

$$\Delta T = \frac{T_{M,h} - T_{M,k}}{NTU} = \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{Q_R}{\alpha A} \quad (3-11),$$

asymptotisch einstellt. Dieser Ausgleichsvorgang wird durch  $NTU$  gesteuert und erfolgt entsprechend rasch, wie in Abb. 3-1 beispielhaft für  $NTU = 50$  und für zwei Ausgangspunkte unmittelbar am Eintritt ( $x_0 = 0$ ) sowie an einem willkürlichen Punkt innerhalb der Matrix dargestellt ist. Der erste – sicherlich realistischere – Fall beschreibt dabei eine mögliche Situation unmittelbar nach der Strömungsumkehr, wo – zumindest bei Annahme einer idealen Kolbenströmung – eine Diskontinuität im Gastemperaturverlauf auftreten kann.

Offensichtlich geht die Information über die Ausgangstemperatur eines Fluidelementes – und damit auch die Diskontinuität als solche – bei der Durchströmung eines guten Regenerators bereits innerhalb eines kleinen Teils des Strömungsweges praktisch vollständig verloren und wird durch eine weitgehend ortsabhängige Temperatur ersetzt. Dies unterstreicht die in Kap. 3.1.5 formulierte These, dass die Verwendung ortfester, Euler'scher Koordinaten bei der differentiellen Modellierung guter Regeneratoren sinnvoll und berechtigt ist.

### 3.2.2 Wärmeleitungsverluste

Angesichts der oft sehr hohen axialen Temperaturgradienten in Regeneratoren – in Stirlingmotoren bis ca. 20 K/mm – liegt die Vermutung nahe, dass Wärmeleitungsverluste einen erheblichen Anteil am gesamten thermischen Verlust eines Regenerators haben. Tatsächlich sind sie jedoch i. d. R. geringer als der zuvor behandelte Wärmeübergangungsverlust, wobei allerdings zum einen zwischen dem Wärmeleitungsverlust der eigentlichen Matrix und dem der umgebenden, meist drucktragenden Gehäusewände und zum anderen auch zwischen verschiedenen Matrixstrukturen zu unterscheiden ist.

Es liegt auf der Hand, dass Strukturen mit durchgehenden axialen Leitungspfaden insbesondere dort, wo aus Gründen der Temperaturbeständigkeit metallische Werkstoffe eingesetzt werden, möglichst zu vermeiden sind. Ein solcher Fall liegt z. B. dann vor, wenn Regeneratoren durch Aufwickeln von Folien hergestellt werden, wobei durch Prägung oder andere Maßnahmen für die Gasströmung Spalten definierter Breite zwischen benachbarten Lagen eingestellt werden. In solchen Fällen führt eine Optimierung daher auch zu sehr langen Bauformen mit geringem Querschnitt (z. B. SCHULZ UND THOMAS 1991). Dies ist hier zwar wegen des relativ geringen Druckverlustes solcher Strukturen vertretbar, führt aber dennoch zu vergleichsweise schlechten Wirkungsgraden. Hinzu kommt noch die in Kap. 3.2.5 eingehender diskutierte Empfindlichkeit bezüglich einer evtl. Ungleichförmigkeit der einzelnen Kanäle, die zu einem weiteren Abfall des Regeneratorwirkungsgrades wie auch der Strömungsverluste führen kann. Dies wurde z. B. von THOMAS (1992) auch experimentell festgestellt.

Der beschriebene Nachteil wird von diskontinuierlichen Feststoffstrukturen vermieden, in denen lediglich punktuelle, meist statistisch verteilte Kontaktstellen existieren. Hier sind zunächst Haufwerke aus zumindest annähernd kugelförmigen Partikeln zu nennen, die jedoch nach Untersuchungen von RADEBAUGH UND LOUIE (1983) generell ein ungünstiges Verhältnis von Druckverlust zu Wärmeübergang aufweisen und daher nur in kryotechnischen Anwendungen wegen der dort erforderlichen, anders nicht konfektionierbaren Materialien verwendet werden. Stattdessen finden sich bei der überwiegenden Mehrzahl technisch ausgeführter Regeneratoren Matrizen aus faserförmigen Materialien, insbesondere aus metallischen Drähten, die entweder in geordneter Form als Drahtgewebepackungen oder als regelloses, in axialer Richtung gepresstes Haufwerk vorliegen. Mit ersteren werden erfahrungsgemäß sehr hohe Wirkungsgrade erzielt, während letztere kostengünstiger herzustellen sind. Beiden Formen gemeinsam ist, dass die einzelnen Drähte bzw. Fasern vorwiegend quer zur Strömungsrichtung bzw. zum Temperaturgradienten ausgerichtet sind und damit Wärmeleitungsbrücken in dieser Richtung weitgehend vermieden werden.

Die effektive Wärmeleitfähigkeit einer solchen Struktur hängt grobenteils von der Zahl und der Beschaffenheit der Kontaktstellen zwischen den Fasern bzw. Sieblagen ab, die von Grad der Verpressung abhängig und schwer vorhersagbar ist. KOH UND FORTINI (1973) geben für die effektive Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{eff}}$  unterschiedlicher Haufwerke die empirische Beziehung

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_M \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + 11 \varepsilon^2} \quad (3-12)$$

an, wobei es aus theoretischer Sicht unbefriedigend ist, dass hier nur die Leitfähigkeit  $\lambda_M$  des reinen Matrixmaterials und die Porosität  $\varepsilon$  als Parameter eingehen, während die konkrete Struktur sowie im Falle nicht kugelförmiger Partikel die vorwiegende räumliche Ausrichtung unberücksichtigt bleiben. Weiterhin ist zu bedenken, dass der Einfluss der kontinuierlichen Phase, also des Arbeitsmediums, nicht vernachlässigbar ist, denn dort, wo Feststoffoberflä-



chen lediglich durch einen sehr engen Spalt getrennt sind, entstehen zusätzliche Wärmeleitungsbrücken; wenn diese durch ein Fluid ausgefüllt werden. Gerade Wasserstoff und Helium, deren spezifische Wärmeleitfähigkeiten in der gleichen Größenordnung wie die von Flüssigkeiten liegen, üben hier zweifellos einen deutlichen Einfluss aus, d. h. die effektive Leitfähigkeit der gasgefüllten Matrix ist sicherlich größer als der mit Gl. 3-12 ermittelte Wert.

Ähnliches gilt für die experimentellen Ergebnisse, die von ORGAN UND MAECKEL (1996) durch Messungen der elektrischen Leitfähigkeit von Drahtnetzpackungen erhalten wurden. Eine Analogie zwischen elektrischer Leitung und Wärmeleitung besteht lediglich unter Vakuumbedingungen und bei Vernachlässigung von Strahlungseffekten. Der Einfluss der kontinuierlichen Phase könnte hier möglicherweise durch Einbetten der Probe in ein Elektrolyt definierter Leitfähigkeit berücksichtigt werden. Berichte über derartige Messungen liegen jedoch offenbar bislang nicht vor.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Probleme bei der Beschreibung des Wärmeleitungsverlustes im wesentlichen in einem Mangel an experimentell gesichertem Datenmaterial bestehen. Unberücksichtigt blieb dabei bislang der unmittelbare Beitrag der Wärmeleitfähigkeit des Arbeitsmediums, der nicht auf einer Wechselwirkung mit der Matrixstruktur beruht. Er ist allerdings i. d. R. vernachlässigbar, soweit lediglich die molekulare Wärmeleitung im ruhenden Fluid betrachtet wird. Von signifikanter Bedeutung kann jedoch die durch Turbulenz und Wirbelbildung erhöhte effektive Leitfähigkeit strömender Fluide sein. Nach Untersuchungen von YAGI ET AL. (1960) hat sie Tensorcharakter und ist in der hier relevanten axialen Richtung ca. fünf mal größer als quer zur Strömungsrichtung. Sie ist in Analogie zur scheinbar erhöhten Viskosität in turbulenten Strömungen oder auch zur erhöhten stofflichen Dispersion (relativ zur molekularen Diffusion) zu sehen und wird daher unter der Bezeichnung „Dispersionsverlust“ in Kap. 3.2.4 behandelt.

Da die Regeneratormatrix in fast allen Fällen unmittelbar in eine drucktragende Gehäusewand eingebettet ist, muss zusätzlich auch der hier auftretende Wandwärmeleitungsverlust berücksichtigt werden, der, wie im Anhang 2.1 gezeigt wird, unter gewissen vereinfachenden Annahmen proportional zur eingeschlossenen Querschnittsfläche ist. Im Falle eines ringförmig um einen Zylinder angeordneten Regenerators – einer häufig anzutreffenden Bauart – setzt er sich aus zwei durch den Kolben- und durch den Matrixquerschnitt bedingten Anteilen zusammen. Werden dagegen Kolben und Regenerator in getrennten zylindrischen Mänteln unterbracht, so ergibt sich zwar in der Summe der gleiche wärmeleitende Wandquerschnitt, jedoch könnte sich im Falle des Kolben-Zylinder-Systems ein im Vergleich zum Regenerator deutlich geringerer Temperaturgradient einstellen, während in der Wand des Regeneratorgehäuses stets annähernd der gleiche Gradient wie in der unmittelbar angrenzenden Matrix herrscht. Hinsichtlich des Wandwärmeleitungsverlustes sowie der bei der Dimensionierung zu berücksichtigenden Wärmespannungen wäre diese Bauart somit zu bevorzugen.

Sie ist insbesondere bei Stirlingmotoren hoher Leistungsdichte zu finden, z. B. bei dem von TEW ET AL. (1979) beschriebenen Motor GPU-3 oder bei einigen für den KFZ-Antrieb konzipierten Mehrzylindermotoren der Siemens-Bauart, z. B. dem von Ford und Philips entwickelten Typ F4-215 (URIELI UND BERCHOWITZ 1984). In anderen Anwendungsbereichen regenerativer Kreisprozesse, z. B. im Bereich der dezentralen Kraft-Wärme-Kopplung und der Heizungswärmepumpen, findet sich dagegen aus Kostengründen vorwiegend die erstgenannte Bauart. Dies gilt insbesondere für die von CARLSEN (1990, 1991, 1993, 1994, 1995), BOVIN UND CARLSEN (1997), THORSEN ET AL. (1996) und CARLSEN UND BOVIN (2000) konstruierten Stirling- und Vuilleumier-Versuchsmaschinen sowie für die von HEIKRODT ET AL. (1996) sowie HEIKRODT UND HECKT (1999) dokumentierten, unter besonderer Berücksichtigung von Kostenaspekten durchgeführten Entwicklungen von Vuilleumier-Heizungswärmepumpen.

### 3.2.3 Temperaturschwingungsverluste

Temperaturschwingungsverluste sind zum einen auf die endliche Wärmekapazität der Matrix zurückzuführen. Daneben wird in der englischsprachigen Literatur der Begriff „internal temperature swing loss“ für den Verlust verwendet, der durch die begrenzte Eindringtiefe der periodischen Temperaturschwankungen in den Kernbereich der Matrixstrukturen verursacht wird und der sich relativ treffend mit „Penetrationsverlust“ übersetzen lässt. Von HAUSEN (1950) wird er über eine Korrektur des Wärmedurchgangskoeffizienten berücksichtigt. Unter den für regenerative Kreisprozesse typischen Bedingungen ist er in den meisten Fällen vernachlässigbar, denn insbesondere bei metallischen Werkstoffen ist diese Eindringtiefe größer als die charakteristischen Abmessungen des Matrixmaterials, die sich aus anderen, unabhängigen Forderungen (große Austauschfläche, kleiner hydraulischer Radius) ergeben. Als Maß für diese Größe findet man für sinusförmige Temperaturschwingungen der Kreisfrequenz  $\omega$

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot a_M}{\omega}} \quad (3-13),$$

wobei  $a_M = \lambda_M / \rho_M c_M$  die Temperaturleitfähigkeit des Matrixmaterials bezeichnet.

Lediglich bei Verwendung nichtmetallischer Werkstoffe ist dieser Verlustmechanismus wegen deren deutlich niedrigerer Wärmeleitfähigkeit besonders zu beachten. Möglicherweise ist hier z. B. die Ursache für die unerwartet schlechten experimentellen Resultate zu suchen, die von RAWLINS ET AL. (1992) mit einem aus aufgewickelter Polyamid-Folie hergestellten Regenerator erzielt wurden. Da die erforderlichen Distanzstege hier durch ein relativ aufwändiges photo-optisches Verfahren sehr gleichmäßig aufgebracht wurden, sind Ungleichmäßigkeiten der Strömungskanäle als Ursache eher auszuschließen, und die volumenspezifische Wärmekapazität von Polymeren liegt in der gleichen Größenordnung wie bei Metallen.

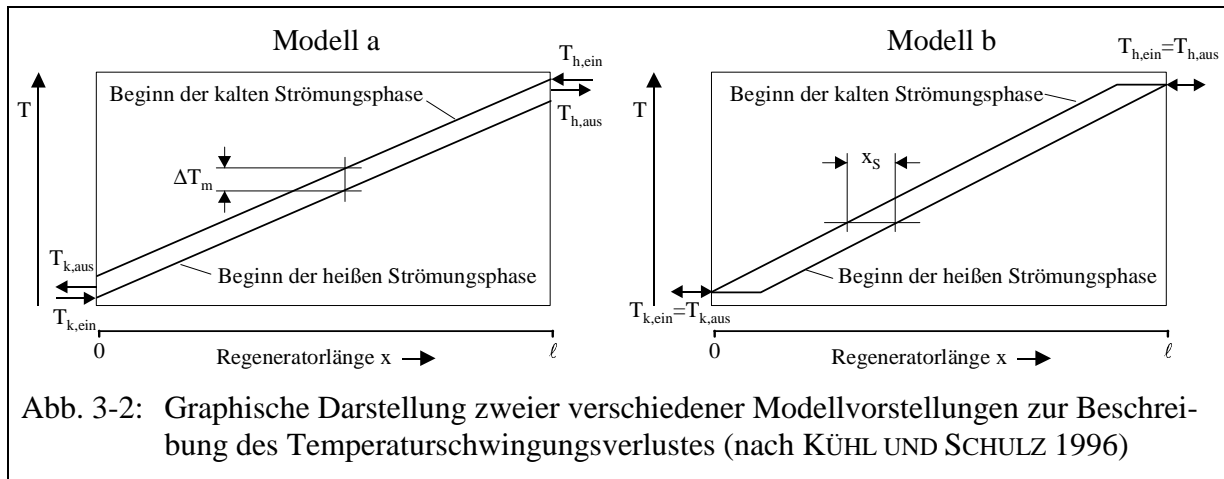
Von PFEFFER (1998) wurde festgestellt, dass bei bezüglich dieses Verlustes hinreichend dünnen Folien die Aufbringung von Stegen o. ä. mittels Heißprägeverfahren prinzipiell daran scheitert, dass die untere Grenze der Foliendicke bei diesem Verfahren ebenfalls durch die Eindringtiefe nach Gl. 3-13 gegeben ist. Abgesehen von diesem Problem ist die Verwendung von Polymeren als Regeneratormaterial im Bereich niedriger Temperaturen eine unter Kostengesichtspunkten interessante Alternative, die auch bereits erfolgreich realisiert wurde, z. B. von SAKAMOTO UND YAMADA (1998).

Für den Temperaturschwingungsverlust im eigentlichen, zuvor genannten Sinne existieren zwei vereinfachte Modellvorstellungen, die sich für die Verwendung in Simulationsverfahren zweiter Ordnung eignen. Die erste wurde von MARTINI (1978) formuliert und geht von einem insgesamt linearen Temperaturverlauf in der Matrix aus, der sich während des Prozesszyklus periodisch um einen über der Länge  $\ell$  konstanten Betrag

$$\Delta T_M \approx \frac{Q_{R,id}}{m_M \cdot c_M} = \frac{\Delta m \cdot c_p}{m_M \cdot c_M} (T_{h,ein} - T_{k,ein}) \quad (3-14)$$

auf und ab bewegt. Damit weichen die mittleren Austrittstemperaturen gemäß Abb. 3-2 a um  $\Delta T_M / 2$  von der jeweiligen Eintrittstemperatur ab, und es kommt zu einem Verlust

$$\xi_{TS} = \frac{\Delta T_M / 2}{T_{h,ein} - T_{k,ein}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m \cdot c_p}{m_M \cdot c_M} \quad (3-15).$$



Da die Annahme eines auch im Bereich der Enden stets unveränderlichen Temperaturgradienten bei näherer Betrachtung gerade für zeitlich konstante Gaseintrittstemperaturen kaum haltbar ist, wird in der zweiten Modellvorstellung nach Abb. 3-2 b hiervon abgewichen. Stattdessen wird angenommen, dass eine gewisse Zone der Matrix am jeweiligen Strömungseintritt allmählich die Temperatur des in dieser Phase einströmenden Gases annimmt. Nach Strömungsumkehr wird dieser Bereich quasi konstanter Matrixtemperatur in umgekehrter Richtung wieder abgebaut, so dass man bei pauschaler Betrachtung den Eindruck eines nicht mehr in Richtung der Temperaturachse auf und ab bewegten, sondern stattdessen in Strömungsrichtung hin und her verschobenen Temperaturgefälles gewinnt. Damit verursacht die Temperaturschwingung der Matrix unmittelbar keinen zusätzlichen thermischen Verlust, denn Gasein- und -austrittstemperatur sind in dieser Modellvorstellung identisch, sofern das Prinzip der entkoppelten Verlustbetrachtung beibehalten wird und somit alle sonstigen Regeneratorverluste, wie z. B. der Wärmeübergangungsverlust, bei dieser Betrachtung außer Acht gelassen werden.

Gerade im Fall der zweiten dargestellten Modellvorstellung sind die Auswirkungen einer endlichen – möglicherweise zu geringen – Wärmekapazität der Matrix jedoch nur bei Betrachtung der Wechselwirkung mit anderen Regeneratorverlusten, also unter Verletzung dieses Prinzips, erkennbar, denn es kommt primär lediglich zu einer Vergrößerung des Temperaturgradienten, weil für die Überbrückung des Temperaturunterschiedes  $T_{h,ein} - T_{k,ein}$  gemäß Abb. 3-2 b nur noch die verkürzte Länge  $\ell - x_S$  zur Verfügung steht. Eine einfache Energiebilanz ergibt für den Faktor  $f$ , um den sich der effektive Temperaturgradient  $\partial T_M / \partial x$  gegenüber dem Idealwert  $(\partial T_M / \partial x)_{id}$  bei unendlicher Wärmekapazität der Matrix erhöht, den Ausdruck

$$f = \frac{\partial T_M / \partial x}{(\partial T_M / \partial x)_{id}} = \frac{\ell}{\ell - x_S} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta m c_p}{m_M c_M}} \quad (3-16).$$

Alle weiteren thermischen Verluste des Regenerators erhöhen sich nun indirekt um diesen Faktor, zumal sie – zumindest im Rahmen der hier vorgenommenen Vereinfachungen – alle proportional zum Temperaturgradienten sind. Weiterhin erkennt man hier den theoretischen Grenzfall, in dem der Faktor  $f$  bei Vernachlässigung aller sonstigen Verluste unendlich würde, nämlich den Fall gleicher integraler Wärmekapazitäten von zu regenerierender Gasmenge und Matrix. Hier ergäbe sich das Bild eines stufenförmigen Temperatursprunges, der die Matrix vollständig durchläuft. Offensichtlich stoßen die vereinfachten Modelle, die die einzelnen Verluste weitgehend unabhängig voneinander als additive Korrekturen eines zunächst als ideal angenommenen Regenerators abbilden, spätestens hier an ihre Grenzen. Sie eignen sich lediglich zu Beschreibung von Regeneratoren mit hohem Wirkungsgrad, bei denen die Wechselwirkungen der betragsmäßig geringen Verluste noch vernachlässigbar sind.

### 3.2.4 Der Dispersionsverlust

Die Vorstellung eines diskontinuierlichen Sprunges der Gas- und Matrixtemperatur, der den Regenerator in unveränderter Form durchläuft, ist bereits wegen der zuvor behandelten Wärmeübergangs- und -leitungsverluste unrealistisch. Vielmehr besteht die verbreitetste Methode, den Wärmeübergangskoeffizienten in einer Regeneratormatrix experimentell zu bestimmen, gerade darin, dass die Veränderung eines am Strömungseintritt aufgeprägten, plötzlichen Sprunges der Gastemperatur nach Durchströmen einer geeignet dimensionierten Probe des Matrixmaterials aufgezeichnet und ausgewertet wird. Nach einem von HAUSEN (1950) angegebenen Verfahren lässt sich aus dem Steigungsmaximum der Sprungantwort auf die NTU-Zahl der Probe und damit auf den Wärmeübergangskoeffizienten schließen, wobei der Zusammenhang nichtlinear ist und im Bereich kleiner NTU-Zahlen einer sehr ungünstigen Fehlerfortpflanzung aufweist.

Dieses Verfahren, bei dem die Abflachung der Sprungantwort ausschließlich auf den Wärmeübergang zwischen Gas und Matrix zurückgeführt wird, ist insofern als problematisch anzusehen, als auch in dem hypothetischen Fall eines verschwindenden Wärmeübergangskoeffizienten allein aufgrund der dispersiven Strömung und der damit verbundenen stofflichen und somit zwangsläufig auch energetischen Ausgleichseffekte bereits mit einer solchen Abflachung zu rechnen ist. Dies wird unmittelbar deutlich, wenn man den stofflichen Analogiefall einer in Form einer Sprungfunktion zudosierten Tracer-Substanz betrachtet. Auch dann, wenn keinerlei stoffliche Austauschwirkungen mit der Matrixoberfläche (wie z. B. Adsorption) zu erwarten sind, tritt bekanntlich nach dem Durchströmen einer porösen Struktur eine auf Abweichungen von der idealen, eindimensionalen Kolbenströmung zurückzuführende Abflachung des zeitlichen Konzentrationsverlaufes auf. Dies würde damit auch für die Temperatur als zur Konzentration analoge Größe gelten. Das Phänomen tritt in abgeschwächter Form auch bei homogenen turbulenten Strömungen auf und wird dort durch die turbulente Temperatur- oder Wärmeleitfähigkeit,  $a_t$  bzw.  $\lambda_t$ , beschrieben. Es könnte somit auch hier durch eine aufgrund dispersiver Effekte erhöhte Wärmeleitfähigkeit des Prozessmediums erfasst werden.

Hier ergibt sich nun die praktische Schwierigkeit, dass speziell für die in Regeneratoren eingesetzten Materialien kaum experimentelle Daten hierzu existieren. Lediglich GEDEON UND WOOD (1996) geben für den Wärmeübergang und die erhöhte Wärmeleitfähigkeit getrennte Korrelationen an, die sich – wie theoretisch zu erwarten – in der Porositätsabhängigkeit unterscheiden, nicht jedoch in der Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl. Ansonsten werden in der allgemein zugänglichen Literatur nur Korrelationen für die Nusselt- oder Stanton-Zahl angegeben. Hier sind insbesondere TONG UND LONDON (1957) und MIYABE ET AL. (1982) zu nennen, die Messungen an Drahtnetzpackungen durchführten, sowie HEMPEL UND BÖHM (1997), die zusätzlich auch regellose Metallfaserfliese untersuchten.

Einem Vorschlag von KÜHL UND SCHULZ (1995, 1996) zufolge lassen sich jedoch auf der Grundlage von Daten zur stofflichen Dispersion in Haufwerken zumindest Abschätzungen vornehmen. Insbesondere Schüttungen aus annähernd kugelförmigen Partikeln sind wegen ihrer Bedeutung in der chemischen Reaktionstechnik verhältnismäßig gut untersucht. Wie im Anhang 2.3 ausgeführt wird, lassen sich die Ergebnisse so deuten, dass unter den für regenerative Kreisprozesse typischen Bedingungen alle Hohlräume zwischen den Partikeln näherungsweise als ideal vermischte Zellen aufgefasst werden können. Überträgt man dieses Ergebnis sinngemäß auf Regeneratoren mit Fasermatrix, so wäre zunächst für den Fall geordneter Gewebepackungen die mittlere Ausdehnung der Vermischungszellen in Hauptströmungsrichtung – dies ist die relevante Größe – näherungsweise mit dem zweifachen Drahtdurchmesser abzuschätzen.

Der Fall einer regellosen Fasermatrix ist hier erheblich schwieriger zu beurteilen. Es ist – vorbehaltlich eingehenderer statistischer oder experimenteller Untersuchungen – anzunehmen, dass der für Gewebepackungen genannte Wert hier eher eine untere Grenze bildet, der zumindest zur groben Abschätzung des Dispersionsverlustes verwendet werden kann.

Ungeachtet dieser Schwierigkeiten bei der genauen Festlegung der durchschnittlichen Größe der Vermischungszellen besagt dieses Ergebnis, dass bei der – hier nicht näher behandelten – differentiellen Modellierung regenerativer Kreisprozesse die Beschreibung eines Regenerators in Euler'schen Koordinaten dann ein (unter den für eindimensionale Prozessmodelle allgemein erforderlichen Annahmen) exaktes Abbild der Realität darstellt, wenn die Zahl der finiten Elemente gleich der der Vermischungszellen des Kaskadenmodells gewählt wird und diese ebenfalls als ideal vermischt angenommen werden (KÜHL UND SCHULZ 1995). Insofern ist der von ORGAN (1997; S. 75) gegen diese Vorgehensweise erhobene Einwand unbegründet, es sei nicht sichergestellt, dass numerische und physikalische Dispersion einander entsprächen, und die Zahl der Zellen müsse zu diesem Zweck ständig der veränderlichen Strömungsgeschwindigkeit nachgeführt werden. Tatsächlich ist dies nicht erforderlich, solange die Zellen als ideal vermischt angenommen werden können, und dies ist mit Ausnahme sehr kurzer Phasen des Prozesszyklus unmittelbar an den Umkehrpunkten des Massenstromes der Fall.

Die praktische Schwierigkeit, die sich hier ergibt, ist lediglich, dass die Zahl der finiten Elemente in diesem Fall sehr groß (i. d. R.  $> 100$ ) ist und aus Gründen der Rechenzeiterparnis reduziert werden sollte. Hierfür wird von KÜHL UND SCHULZ (1995) ein Näherungsverfahren mit nicht ideal vermischten Zellen geringerer Zahl und entsprechend größerer Ausdehnung vorgeschlagen, mit dem man sich von dem theoretisch korrekten Modell entfernt. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Zahl der Zellen auf diese Weise bis in den Bereich von ca. 10 verringert werden kann, ohne dass die so verursachten numerischen Fehler einen signifikanten Einfluss auf den berechneten Regeneratorverlust bzw. –wirkungsgrad haben.

Um auf dieser Grundlage ein Modell zweiter Ordnung für den Dispersionsverlust aufzustellen, sind derartige Vereinfachungen jedoch nicht erforderlich. Man muss sich lediglich vor Augen halten, dass das Temperaturprofil eines durch  $n$  ideal vermischte Zellen beschriebenen Regenerators einen treppenförmigen Verlauf aufweist. Dies hat zur Folge, dass sich die mittlere Gasein- und –austrittstemperatur an den Enden jeweils um eine „Stufenhöhe“ unterscheiden. Wie schon URIELI (1980) ausführt, verursacht die Annahme ideal vermischter Zellen, die aus Gründen der numerischen Stabilität von einigen Autoren verwendet wurde, bei der Modellierung von Regeneratoren einen zusätzlichen, durch diese Stufenhöhe bedingten Verlust  $\xi = 1 / (n+1)$ . Wird  $n$  hier willkürlich gewählt, so kann dieses in der englischsprachigen Literatur als „upwind differencing“ bezeichnete Verfahren zu erheblichen, numerisch bedingten Fehlern führen. Setzt man dagegen für  $n$  den Wert ein, der sich gemäß Anhang 2.3 für das dem Dispersionsmodell äquivalente Kaskadenmodell ergibt, so erhält man

$$\xi_{\text{Disp}} = \frac{1}{u \cdot \ell / 2D + 1} \quad (3-17)$$

als eine für Modelle zweiter Ordnung geeignete Berechnungsgleichung für den Dispersionsverlust, bei der lediglich die oben bereits diskutierte Schwierigkeit verbleibt, den Dispersionskoeffizienten  $D$  bzw. die mittlere Größe der Vermischungszellen für das jeweilige Regeneratormaterial zu ermitteln.

### 3.2.5 Inhomogenitäten und Randgängigkeit

Der zuvor beschriebene Dispersionsverlust ist auf Vermischungseffekte in den Zellen der Matrix zurückzuführen, deren Abmessungen in der Größenordnung des charakteristischen Materialdurchmessers liegen. Der Verlust ist also darauf zurückzuführen, dass bei „mikroskopischer“ Betrachtung Abweichungen von der Idealvorstellung einer streng eindimensionalen Kolbenströmung auftreten. Derartige Abweichungen sind auch auf „makroskopischer“ Ebene möglich, wenn z. B. Randgängigkeiten, Kanalbildungen oder sonstige Inhomogenitäten vorliegen, die die Matrix als Ganzes betreffen. Randspalte entstehen z. B. häufig dadurch, dass sich die Druckbehälterwand im Betrieb durch den Innendruck elastisch dehnt und sich im Bereich hoher Temperaturen zusätzlich durch Wärmedehnung aufweitet. darüber hinaus ist bekannt, dass bei praktisch allen Haufwerken allein durch die Nähe der Behälterwand während des Befüll- oder Pressvorganges Strukturinhomogenitäten entstehen, die zu erhöhter Randgängigkeit führen können. Darüber hinaus ist insbesondere bei Regeneratoren mit regelloser Fasermatrix je nach Verfahrensweise beim Einbringen der Matrix mit lokalen Unterschieden in der Packungsdichte und den hiervon bestimmten Druckverlusteigenschaften zu rechnen, die auch in der Kernzone eine ungleichmäßige Durchströmung zur Folge haben können.

Derartige Phänomene sind mit eindimensionalen Prozessmodellen kaum zu beschreiben. Im folgenden wird jedoch ein Weg vorgestellt, sie näherungsweise über einen korrigierten Wärmeübergang zu erfassen (KÜHL UND SCHULZ 1996). Hierzu wird als typischer Fall der eines der Regeneratormatrix parallelgeschalteten Spaltes betrachtet, der in Abb. 3-3 beispielhaft für die kalte Strömungsphase dargestellt ist. Es wird wiederum ein linearer Temperaturverlauf der Matrix  $T_M(x)$  angenommen, während für die Gaseintrittstemperatur  $T_{k,ein}$  ein momentaner, vom Mittelwert gemäß Gl. 3-3 abweichender Wert zulässig sei. Nimmt man für die Wände des Spaltes den gleichen Temperaturverlauf  $T_M(x)$  wie in der Matrix an, so lässt sich Gl. 3-10 mit  $x_0 = 0$  und  $x = \ell$  auf beide Fälle anwenden, sofern die Zahl der Übertragungseinheiten,

$$NTU = \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\alpha A}{(1-k) \Delta m c_p} \quad \text{bzw.} \quad NTU' = \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\alpha' A'}{k \Delta m c_p} \quad (3-18)$$

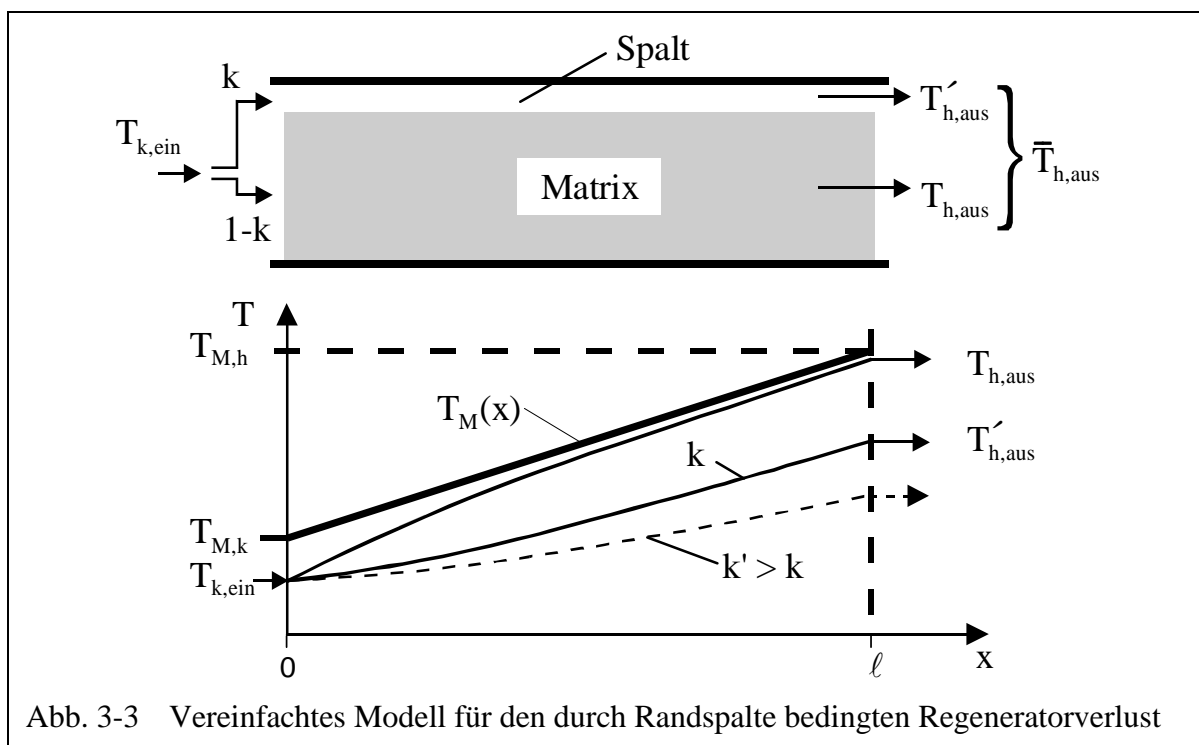


Abb. 3-3 Vereinfachtes Modell für den durch Randspalte bedingten Regeneratorverlust

entsprechend eingesetzt wird. Dabei bezeichnen  $NTU'$ ,  $\alpha'$  und  $A'$  die für den Spalt gültigen Größen. Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass sich die Strömung anteilig auf Spalt und Matrix verteilt, wobei der Anteil  $k$  der Spaltströmung über die Bedingung der Gleichheit der Strömungsdruckverluste in einer separaten Rechnung zu bestimmen ist.

Da der Spalt durch ein im Verhältnis zur Matrix wesentlich – i. d. R. mehrere Größenordnungen – kleineres Produkt aus Wärmeübergangskoeffizient und Austauschfläche gekennzeichnet ist, fällt  $NTU'$  bereits bei verhältnismäßig kleinen Werten von  $k$  – oft schon bei weniger als 1% – unter den für die Matrix gültigen Wert ab. Dies hat zur Folge, dass die sich asymptotisch einstellende Temperaturdifferenz Gas-Matrix (bzw. Gas-Wand) nach Gl. 3-11 mit  $k$  deutlich ansteigt, wie in Abb. 3-3 qualitativ für zwei willkürlich gewählte Werte  $k$  und  $k' > k$  dargestellt ist<sup>2</sup>. Die Gasaustrittstemperatur des Gesamtsystems, die sich nach adiabater Vermischung der aus Matrix und Spalt austretenden Teilströme gemäß

$$\bar{T}_{h,aus} = (1 - k) \cdot T_{h,aus} + k \cdot T'_{h,aus} \quad (3-19)$$

ergibt, ist demnach geringer als im Falle  $k = 0$ , und es wird deutlich, dass durch den vom Spalt verursachten teilweisen Strömungskurzschluss der Wirkungsgrad des Regenerators vermindert bzw. ein zusätzlicher Verlust aufgetreten ist. Um ihn im Rahmen eines eindimensionalen Prozessmodells berücksichtigen zu können, bietet es sich an, ein gleichmäßig durchströmtes Ersatzmodell zu definieren, das unter den gegebenen Bedingungen, d. h. für den gleichen, linearen Verlauf der Matrixtemperatur und für ein mit der Temperatur  $T_{k,ein}$  einströmendes Fluidelement, die gleiche Austrittstemperatur liefert wie das in Abb. 3-3 dargestellte System, in dem sich die Strömung im Verhältnis  $k : 1 - k$  auf Spalt und Matrix aufteilt. Nimmt man an, dass Gl. 3-10 auch für diesen als homogen angenommenen „Ersatzregenerator“ gilt, so müsste dieser allein durch eine „effektive“ Zahl der Übertragungseinheiten  $\overline{NTU}$  zu beschreiben sein. Die implizite Definitionsgleichung für diese Größe erhält man somit, indem man die drei Gasaustrittstemperaturen in Gl. 3-19 mit Hilfe von Gl. 3-10 substituiert:

$$\begin{aligned} & (T_{k,ein} - T_{M,k}) e^{-\overline{NTU}} - (T_{M,h} - T_{M,k}) \frac{1 - e^{-\overline{NTU}}}{\overline{NTU}} = \\ & (T_{k,ein} - T_{M,k}) \left[ (1 - k) e^{-NTU} + k e^{-NTU'} \right] - \\ & - (T_{M,h} - T_{M,k}) \left[ (1 - k) \frac{1 - e^{-NTU}}{NTU} + k \frac{1 - e^{-NTU'}}{NTU'} \right] \end{aligned} \quad (3-20)$$

Diese transzendente Gleichung lässt sich im allgemeinen Fall nicht explizit nach  $\overline{NTU}$  auflösen, jedoch eignet sie sich für Grenzfallbetrachtungen.

Zunächst gilt Gl. 3-20 für Regeneratoren beliebiger Länge  $\ell$  und ebenso auch für einzelne Abschnitte einer insgesamt längeren Matrix. Verkürzt man gedanklich einen solchen Abschnitt, d. h. betrachtet man lediglich eine dünne Schicht der Dicke  $\Delta x$ , so stößt man schließlich an eine Grenze, die durch die charakteristischen Materialabmessungen gegeben ist. Im Falle einer Gewebepackung stellt z. B. die Dicke einer einzelnen Gewebelage die Untergrenze dar, an der (spätestens) die zuvor getroffenen Annahmen, z. B. die eines linearen Temperaturverlaufes in der Matrix, nicht mehr aufrechtzuerhalten sind. Dennoch ist die Betrachtung dieses Grenzfalles von theoretischem Interesse, denn sie führt auf ein scheinbares Paradox. Wegen der geringen Länge gilt nämlich hier sowohl für den Spalt als auch für die Matrix (und

<sup>2</sup> Die Temperaturverläufe in Abb. 3-3 entsprechen – insbesondere im Fall des Gastemperaturverlaufes in der Matrix – unrealistisch schlechten  $NTU$ -Werten (vgl. Abb. 3-1) und dienen nur der Klarheit der Darstellung.

damit auch für das Ersatzmodell)  $NTU \ll 1$ , so dass die Exponentialfunktionen in Gl. 3-20 mit Hilfe der Näherung  $e^x \approx 1 + x$  linearisiert werden können. Dabei fällt die Temperaturdifferenz  $T_{M,h} - T_{M,k}$ , d. h. der Einfluss des Temperaturgradienten in der Matrix, heraus. Hinzu kommt noch die Tatsache, dass diese Temperaturdifferenz hier ohnehin erheblich kleiner ist als die zwischen Gas und Matrix,  $T_{k,ein} - T_{M,k}$ , und daher die entsprechenden Summanden in Gl. 3-20 auch ohne diese Näherung bereits vernachlässigt werden könnten. So erhält man schließlich die einfache Beziehung

$$\begin{aligned} \overline{NTU} &= (1-k) \cdot NTU + k \cdot NTU' \\ \Rightarrow \overline{\alpha A} &= \alpha A + \alpha' A' \end{aligned} \quad (3-21).$$

Damit wirkt der Spalt bei Betrachtung einer dünnen Schicht der Matrix nicht etwa als ein den Regeneratorwirkungsgrad vermindender Kurzschluss, sondern er trägt – unabhängig von seiner Größe und Beschaffenheit – tendenziell im positiven Sinne zum Wärmeübergang bei. Dieses zunächst überraschende Ergebnis wird verständlich, wenn man sich vor Augen hält, dass im Maßstab dieses Grenzfalles, also z. B. bei Betrachtung einer einzelnen Gewebelage, die gesamte Matrix als Parallelschaltung einer Vielzahl derartiger „Kurzschlüsse“ erscheint, denn jede freie Gewebemasche oder auch jeder Freiraum zwischen den Fasern einer regellosen Matrix (im Sinne der in Kap. 3.2.4 definierten Vermischungszelle) muss hier als solcher angesehen werden. Offensichtlich ist es dabei auch unwesentlich, ob diese mikroskopischen Kanäle eine einheitliche Größe aufweisen, denn sie tragen alle in jedem Fall *additiv* zum Gesamtwärmeübergang zwischen Gas und Matrix bei.

Wird nun im Gegensatz hierzu eine Matrix größerer Länge  $\ell$  betrachtet, insbesondere also auch ein vollständiger Regenerator, der eine erhebliche Temperaturdifferenz  $T_{M,h} - T_{M,k}$  in axialer Richtung überbrückt, so ergibt sich ein völlig anderes Bild. Unter der Voraussetzung eines hohen Wirkungsgrades im Sinne von Kap. 3.2.1, d. h. eines geringen Wärmeübergangsverlustes der eigentlichen Matrix nach Gl. 3-9, ist hier die Annahme  $NTU \gg 1$  gerechtfertigt. Sofern der zusätzliche, durch den Spalt bedingte Verlust die typische Größenordnung der sonstigen Regeneratorverluste nicht überschreitet, gilt dies ebenso auch für  $\overline{NTU}$ , und somit können die entsprechenden Exponentialfunktionen in Gl. 3-20 als vernachlässigbar klein betrachtet werden. Da jetzt weiterhin auch die Annahme  $T_{k,ein} - T_{M,k} \ll T_{M,h} - T_{M,k}$  berechtigt ist, können die von der Temperaturdifferenz Gas-Matrix bestimmten Summanden in Gl. 3-20 aus zwei Gründen gegenüber denjenigen vernachlässigt werden, die von der Temperaturdifferenz zwischen dem heißen und dem kalten Ende der Matrix abhängig sind, und man erhält als Ergebnis dieser Vereinfachung den Zusammenhang

$$\frac{1}{\overline{NTU}} = (1-k) \frac{1}{NTU} + k \frac{1 - e^{-NTU'}}{NTU'} \quad (3-22),$$

der sich mit der Definition von  $NTU$  (Gl. 3-9) weiter umformen lässt zu

$$\frac{1}{\overline{\alpha A}} = \frac{(1-k)^2}{\alpha A} + \frac{k^2}{\alpha' A'} (1 - e^{-NTU'}) \quad (3-23).$$

Unabhängig von der genauen Größe des verbleibenden Exponentialterms, der wegen der zunächst unbekanntem Größenordnung von  $NTU'$  nicht ohne weiteres vereinfacht werden kann, ist zu erkennen, dass hier eine reziproke Summation der Wärmeübergänge in Matrix und Spalt mit einer von  $k$  abhängigen Gewichtung erfolgt. Damit wird der Wärmeübergang des Ersatzmodells durch das Auftreten eines Spaltes vermindert, falls dieser einen im Verhältnis zum



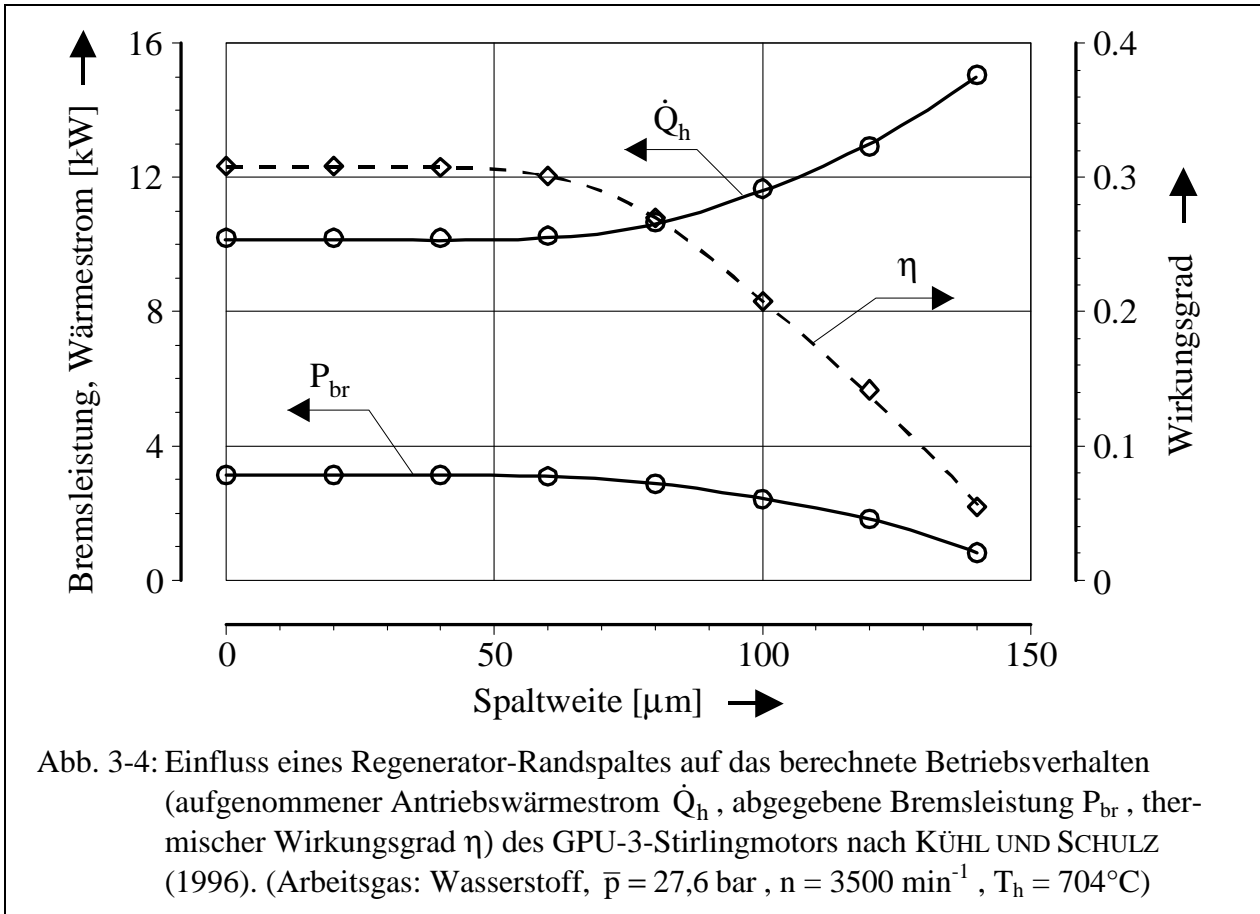
Strömungsanteil schlechteren Wärmeübergang als die Matrix aufweist, d. h. sofern  $\alpha' A' / k < \alpha A / (1 - k)$  gilt. Die gegenteilige Annahme wäre gleichbedeutend mit dem eher unwahrscheinlichen Fall, dass die Zahl der Übertragungseinheiten im Spalt trotz dessen relativ hoher Durchlässigkeit größer wäre als in der Matrix und dieser somit – für sich betrachtet – einen höheren Regeneratorwirkungsgrad aufwiese als letztere.

Vergleicht man die Ergebnisse beider Grenzfallbetrachtungen, so ist festzuhalten, dass Randspalte oder sonstige Strömungskurzschlüsse keine nachteiligen Auswirkungen auf den Regeneratorwirkungsgrad ausüben, solange sie auf Strecken in der Größenordnung des charakteristischen Materialdurchmessers beschränkt sind. Existieren sie jedoch über einen nennenswerten Weg in Richtung des Temperaturgradienten, ohne dass die Möglichkeit zum stofflichen und thermischen Austausch mit benachbarten Strömungswegen besteht, so verursachen sie einen zusätzlichen Verlust, der sich formal durch einen reduzierten Wärmeübergang zwischen Gas und Matrix beschreiben lässt. Als Konsequenz folgt aus dieser Erkenntnis, dass alle Matrixstrukturen, die einen solchen Austausch quer zur Hauptströmungsrichtung erschweren oder unterbinden, insbesondere also die zuvor erwähnten Folienregeneratoren oder andere Typen mit kanalartigen Strömungswegen, bezüglich dieses Verlustes besonders anfällig sind, denn schon ein einzelner Kanal oder Spalt überdurchschnittlicher Breite bewirkt hier einen Bypass-effekt über die gesamte Länge der Matrix hinweg. Umgekehrt sind Regeneratoren, die schichtweise aus faserartigem Material aufgebaut sind, hinsichtlich dieses Verlustes als weniger kritisch zu bewerten, was sicherlich zu deren weiter Verbreitung beigetragen hat.

Gl. 3-22 eignet sich im Rahmen von Modellen zweiter Ordnung zur Berechnung eines korrigierten NTU-Wertes und damit zur Beschreibung von Inhomogenitäten über einen erhöhten Wärmeübergangsverlust (Gl. 3-9). Weiterhin bietet sich mit Gl. 3-23 auch die Möglichkeit, Randspalt-Effekte o. ä. in eindimensionalen Modellen dritter Ordnung näherungsweise zu erfassen. Hierzu muss lediglich der Anteil der Spaltströmung  $k$  für den jeweiligen Massenstrom durch Gleichsetzen der Druckverluste bestimmt und ein entsprechend korrigierter Wärmeübergangskoeffizient berechnet werden. Dieser funktionale Zusammenhang kann bei häufiger Verwendung zur Verkürzung der Rechenzeit durch eine empirische, nur für die jeweilige Simulationsrechnung angepasste Ausgleichsfunktion angenähert und ebenso wie eine der Literatur entnommene Korrelation für die Nusselt- oder Stanton-Zahl gehandhabt werden.

In Abb. 3-4 ist der Einfluss eines in der beschriebenen Form simulierten Randspaltes im Regenerator auf das berechnete Betriebsverhalten des von TEW ET AL. (1979) beschriebenen GPU-3-Stirlingmotors dargestellt. Die Rechnungen wurden dabei mit einer entsprechend weiterentwickelten Fassung des von KÜHL (1990) beschriebenen Simulationsmodells dritter Ordnung durchgeführt. Offensichtlich führt der erhöhte Regeneratorverlust zunächst zu einem Anstieg des zur Konstanthaltung der vorgegebenen Erhitzertemperatur  $T_h$  erforderlichen Antriebswärmestroms wie auch des – hier nicht dargestellten – im Kühler abzuführenden Wärmestromes. Die so erhöhte Belastung der Wärmeübertragungsflächen bewirkt dann ein Nachlassen der thermischen Kompression und damit auch der Bremsleistung  $P_{br}$ . Die Überlagerung beider Effekte resultiert in einem deutlichen Abfall des thermischen Wirkungsgrades.

Man erkennt weiter, dass ein Einfluss der Spaltweite erst ab einem Wert von ca.  $50 \mu\text{m}$  auftritt, entsprechend einem hydraulischen Radius  $r_h' = 25 \mu\text{m}$ . Dieser Wert stimmt nahezu mit dem der Matrix,  $r_h = 23 \mu\text{m}$ , überein. Dies lässt sich theoretisch zumindest näherungsweise begründen und als Faustregel verallgemeinern, denn aufgrund obiger Überlegungen ist der Grenzwert der Spaltweite, bei dessen Überschreitung mit einem Abfall des Regeneratorwirkungsgrades zu rechnen ist, näherungsweise durch die Bedingung  $NTU' = NTU$  gegeben. In diesem Fall kann auch der verbleibende Exponentialterm in Gl. 3-22 vernachlässigt werden, und mit der Definition  $r_h = V_{frei} / A$  und der Vereinfachung  $V_{frei} = A_{frei} \cdot \ell$  folgt



$$\frac{\alpha}{r_h} \cdot \frac{A_{\text{frei}}}{1-k} = \frac{\alpha'}{r'_h} \cdot \frac{A'_{\text{frei}}}{k} \tag{3-24}$$

Nimmt man nun an, dass die Strömungsdruckverlustcharakteristiken von Matrix und Spalt einander soweit ähneln, dass bei gleichen Werten des hydraulischen Radius, der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und der damit bestimmten Reynolds-Zahl auch (zumindest annähernd) Gleichheit der Druckverluste gegeben ist, so entspricht die Strömungsverteilung der freien Querschnitte. Gl. 3-24 ist somit erfüllt, wenn zusätzlich auch Ähnlichkeit bezüglich der Wärmeübertragung besteht, d. h. wenn die mit dem hydraulischen Radius gebildeten Nusselt-Zahlen bei gleicher Reynolds-Zahl annähernd übereinstimmen.

Diese Abschätzung trifft nur für den Fall ähnlicher Strömungsformen in Matrix und Randspalt, also z. B. im Falle von Folienregeneratoren, exakt zu. In allen anderen Fällen kann sie nur als grober Anhaltspunkt für die kritische Spaltweite dienen. Nichtsdestoweniger ist dieses Kriterium schwer erfüllbar, denn in praktisch allen Haufwerken treten Randspalteffekte auf, die mindestens in der Größenordnung des Partikeldurchmessers liegen, in ihrer genauen Größe aber schwer vorhersagbar sind. Angesichts des starken Abfalls des Regeneratorwirkungsgrades in diesem Bereich liegt hier einer der vermutlich größten Unsicherheitsfaktoren bei der vorhersagenden Simulation und Auslegung regenerativer Kreisprozesse vor. Einerseits fordert die Theorie möglichst verschwindende Randgängigkeits- bzw. Inhomogenitätseffekte, andererseits erhält man mit dieser Annahme i. d. R. zu optimistische Vorhersagen der Prozessgüte. Umgekehrt lassen sich die Simulationsergebnisse durch die stets mehr oder weniger willkürliche Schätzung einer Spaltweite im fraglichen Bereich nahezu beliebig manipulieren. Wie schon erwähnt erscheint mancher Versuch, die Genauigkeit numerischer Prozesssimulationen auf andere Weise zu steigern, vor diesem Hintergrund eher fragwürdig (vgl. Kap. 3.1).

### 3.3 Strömungsdruckverluste in Modellen zweiter Ordnung

Wie schon in Kap. 3.1 erwähnt wurde, basieren die Modelle zweiter Ordnung entweder auf dem idealen isothermen Prozessmodell (s. Anhang 1) oder auf dem ebenfalls noch weitgehend idealisierten adiabaten bzw. semi-adiabaten Modell nach FINKELSTEIN (1960). In beiden Fällen werden die Lösungen für die Leistung und die Wärmeströme unter der Annahme eines örtlich konstanten Druckes, d. h. unter Vernachlässigung aller Strömungsdruckverluste, erhalten. In vielen Fällen erfolgt deren anschließende Berücksichtigung lediglich in der Form, dass anhand der mit diesen Modellen ebenfalls bestimmbaren Massenströme die durch Druckverluste dissipierte Leistung abgeschätzt und von der Nutzleistung des idealen Prozesses subtrahiert bzw. zu dessen Leistungsbedarf hinzuaddiert wird. Der dadurch verursachte Fehler in der Gesamtenergiebilanz wird entweder vernachlässigt oder durch pauschale Korrekturen der zu- und abgeführten Wärmeströme kompensiert.

Diese Vorgehensweise bietet jedoch gerade bei komplexeren Prozessen nicht die Gewähr, dass die Einflüsse der Strömungsdruckverluste auf die  $p$ ,  $V$ -Integrale der einzelnen Zylinder Räume und damit auf die indizierten Wärmemengen korrekt erfasst werden. Vielmehr ist hier zu bedenken, dass jeder Strömungsdruckverlust, der in einem bestimmten Teil des Prozesses auftritt, die gesamte Massenverteilung in einer bei komplexen, u. U. verzweigten Prozessen nicht unmittelbar überschaubaren Weise beeinflusst. Um die Veränderung des zeitlichen Druckverlaufes in einem bestimmten Zylinderraum gegenüber dem Idealfall des örtlich konstanten Prozessdruckes erfassen zu können, ist somit – anders als bei der Berechnung von Wärmeströmen und Leistung für den isothermen Idealprozess – die Kenntnis der genauen Prozessstruktur erforderlich. Sie wird im folgenden durch die Matrix  $(b_{ji})$  beschrieben, die auch im Anhang 1.2 zur Formulierung der Beziehungen für die Massenströme im ideal-isothermen Modell verwendet wird. Mit den dort eingeführten Definitionen, insbesondere der Nummerierung der  $n+1$  Prozesskomponenten durch den Index  $i = 0, \dots, n$  sowie der verknüpfenden Massenstromschnittstellen durch  $j = 1, \dots, n$  gilt für die Elemente dieser Matrix

- $b_{ji} = 1$  für alle Komponenten  $i$ , die von Raum 0 aus hinter der Schnittstelle  $j$  liegen,
- $b_{ji} = 0$  für alle Komponenten  $i$ , die von Raum 0 aus vor der Schnittstelle  $j$  liegen.

Mit der zusätzlichen Konvention, dass jede Schnittstelle die Nummer der von Raum 0 aus unmittelbar folgenden Komponente erhält, ergibt sich für  $(b_{ji})$  eine Dreiecksform mit  $b_{ii} = 1$  und  $b_{ji} = 0$  für  $i < j$ . Ist die Anordnung der Prozesskomponenten linear, wie z. B. im Falle des  $\alpha$ -Stirling-Prozesses nach Abb. 3-5 a oder des  $\gamma$ -Vuilleumier-Prozesses nach Abb. 3-5 b, so ist allgemein  $b_{ji} = 1$  für  $i > j$ . In Prozessen mit Verzweigungen, wie sie häufig in den  $\beta$ - und  $\gamma$ -Konfigurationen komplexerer Prozesse zu finden sind, gilt auch für  $i > j$  in bestimmten Bereichen  $b_{ji} = 0$ . Abb. 3-5 c zeigt dies am Beispiel einer Variante des  $\beta$ -Vuilleumier-Prozesses.

Ziel der hier angestellten Überlegungen ist es letztlich, nicht nur die mechanische Netto-Arbeit pro Zyklus, sondern auch die indizierten Wärmemengen  $Q_{i,id}$  des druckverlustfreien Idealprozesses durch einen dissipationsbedingten Summanden bzw. Subtrahenden

$$\Phi_i = Q_{i,id} - Q_i = \oint (p_m - p_i) \cdot dV_i \quad (3-25)$$

zu korrigieren. Dabei bezeichnet  $p_m$  den örtlich konstanten Druck nach Gl. A1-2 und  $p_i$  den tatsächlichen Druck im Volumen  $V_i$ , wie er sich bei Berücksichtigung der Druckverluste ergibt. Es wird nun weiterhin angenommen, dass die Massenströme an den Schnittstellen  $j$  nicht nur die unmittelbar in diesem Bereich auftretenden – z. B. durch unetstetige Querschnittsänderungen, Strömungsumlenkungen o. ä. bedingten – Druckverluste bestimmen, sondern

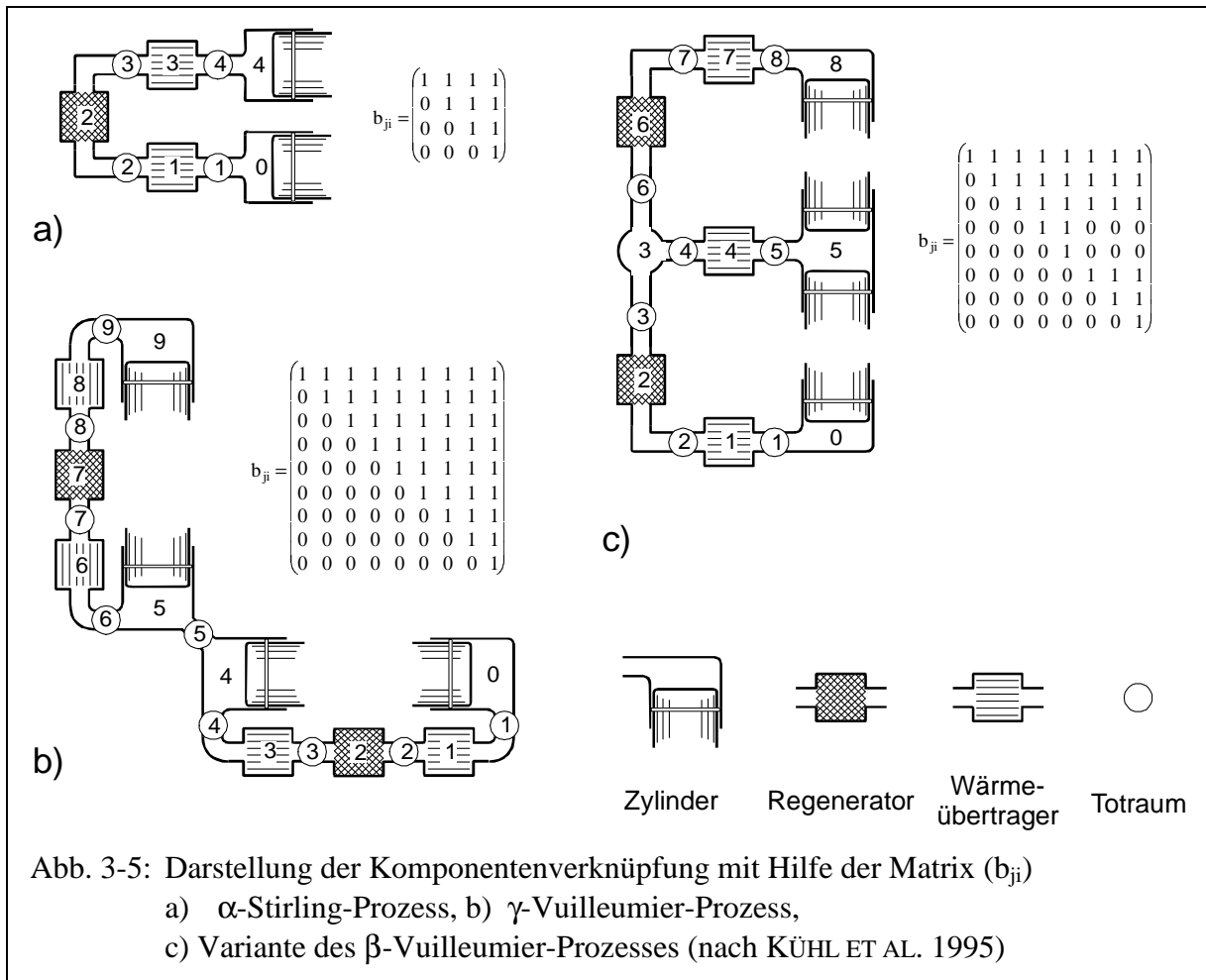


Abb. 3-5: Darstellung der Komponentenverknüpfung mit Hilfe der Matrix ( $b_{ji}$ )  
 a)  $\alpha$ -Stirling-Prozess, b)  $\gamma$ -Vuilleumier-Prozess,  
 c) Variante des  $\beta$ -Vuilleumier-Prozesses (nach KÜHL ET AL. 1995)

näherungsweise auch zur Berechnung derjenigen in den angrenzenden Prozesskomponenten bis jeweils zur halben Strömungslänge verwendbar sind. Damit werden alle Strömungsdruckverluste als quasi auf die Schnittstellen konzentriert angenommen und als Funktionen der dort ermittelten Massenströme aufgefasst. Innerhalb jeder Prozesskomponente kann dann weiterhin ein örtlich konstanter Druck  $p_i$  angenommen werden, wobei sich die Drücke benachbarter Komponenten um den der verbindenden Schnittstelle zugeordneten Druckverlust  $\Delta p_j$  unterscheiden. Weiterhin wird diese Abhängigkeit vom Massenstrom gemäß

$$\Delta p_j = -k_j(n) \cdot \dot{m}_j \tag{3-26}$$

linearisiert. Der Proportionalitätsfaktor  $k_j$  lässt sich als Funktion der Drehzahl  $n$  gemäß Anhang 2.4 aus den tatsächlich vorliegenden Druckverlustkorrelationen ermitteln (und ggf. im Rahmen der iterativen Lösung des Gleichungssystems entsprechend korrigieren).

Bei Kenntnis aller  $\Delta p_j$  als Funktion der Zeit bzw. des Kurbelwinkels  $\varphi$  ist nun möglich, die örtliche Druckdifferenz zwischen Raum 0 und einem beliebigen Prozessraum  $i$  anzugeben, denn sie ist offensichtlich gleich der Summe der Druckdifferenzen  $\Delta p_j$  für alle Schnittstellen, die von Raum 0 aus gesehen vor Raum  $i$  liegen, d. h. für diejenigen, für die  $b_{ji} = 1$  gilt:

$$p_i(\varphi) - p_0(\varphi) = \sum_j b_{ji} \cdot \Delta p_j(\varphi) \tag{3-27}$$

Die Abweichung des Druckes  $p_0$  vom örtlich gemittelten, über das ideale Prozessmodell bestimmbaren Druck  $p_m$  lässt sich nun nach Anhang 2.4 über eine Massenbilanz ermitteln:

$$p_0(\varphi) = p_m(\varphi) - \sum_j \Delta p_j(\varphi) \cdot g_j(\varphi) \tag{3-28}$$

Damit sind schließlich alle Drücke  $p_i$  bekannt, und Gl. 3-25 ist integrierbar (s. Anhang 2.4). Der dissipative Korrekturterm für die indizierte Wärmemenge des (Zylinder-)Volumens  $i$  ergibt sich danach als Summe der den einzelnen Schnittstellen zuzuordnenden Anteile  $\Phi_{ji}$ ,

$$\Phi_i = \sum_j \Phi_{ji} = \pi \cdot n \cdot m_{ges} \cdot \hat{V}_i \cdot \sum_j k_j(n) \cdot G_{ji} \tag{3-29}$$

mit

$$G_{ji} = -\int g_j(\varphi) \cdot [g_j(\varphi) - 2 b_{ji}] \cdot \cos(\varphi + \theta_i) d\varphi \tag{3-30}$$

Dabei ergibt sich der Vorteil, dass die Integrale  $G_{ji}$  lediglich von der Volumenverteilung und den charakteristischen Temperaturen der Komponenten abhängig sind. Auch wenn letztere in Verfahren zweiter Ordnung i. d. R. iterativ bestimmt werden und somit in gewissen Grenzen veränderlich sind, ist es in vielen Fällen (z. B. bei der numerischen Ermittlung der Jacobi-Matrix im Rahmen eines Newton-Verfahrens) möglich, mit konstanten, einmalig bestimmten Werten von  $G_{ji}$  zu rechnen. Andererseits bereitet auch die wiederholte Neuberechnung aller  $G_{ji}$  keine nennenswerten Schwierigkeiten, zumal die Lösung der Integrale analytisch möglich ist und zu einer geschlossenen (wenn auch unübersichtlichen und kaum noch theoretische Deutungen zulassenden) Lösung führt. Sie ist im Anhang 2.4 angegeben (KÜHL ET AL. 1995).

Die Korrekturterme  $\Phi_{ji}$  bzw. die Integrale  $G_{ji}$  geben in allgemeiner Form an, inwieweit die indizierte Wärmemenge des Zylindervolumens  $i$  durch den Strömungsdruckverlust an der Schnittstelle  $j$  verändert wird. Offensichtlich ist i. a. stets  $\Phi_{ji} \neq 0$  für alle in ihrer Größe veränderlichen Räume, so dass alle Strömungsdruckverluste im Prozess eine in Größe und Vorzeichen nicht ohne weiteres vorhersehbare Auswirkung auf alle indizierten Wärmemengen haben. Dies sei im folgenden anhand eines konkreten Falles, der von CARLSEN ET AL. (1993) beschrieben, in ihrer Konfiguration Abb. 3-5 b entsprechenden  $\gamma$ -Vuilleumier-Wärmepumpe, beispielhaft dargestellt. Abb. 3-6 zeigt die Ergebnisse für den Auslegungsbetriebszustand.

Die einzelnen Säulen entsprechen den Produkten aus  $\Phi_{ji}$  und der Drehzahl, durch Summation für ein Volumen erhält man somit  $\Phi_i$  nach Gl. 3-25; während die Summation für eine Schnittstelle  $j$  die dort dissipierte Energie angibt. Zunächst ist hier bemerkenswert, dass die parallel zu den Verdrängern auftretenden Druckverluste vorwiegend zu einer Verringerung der Wärmeaufnahme in dem jeweils endständigen Zylindervolumen, also dem „kalten“ Raum 0 und dem „heißen“ Raum 9, führen. Ein Anstieg der Wärmeabfuhr in den entsprechenden „warmen“ Räumen 4 bzw. 5 ist nur in geringerem Maße feststellbar. Offensichtlich ist also eine pauschale

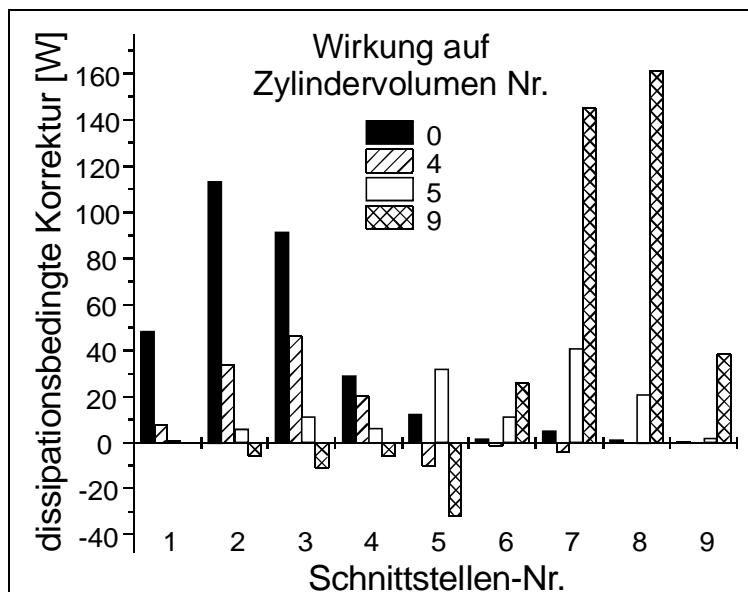


Abb. 3-6 Dissipationsbedingte Korrekturen der indizierten Wärmeströme für die Vuilleumier-Wärmepumpe nach CARLSEN ET AL. (1993) (Darstellung nach KÜHL ET AL. 1995)

„Gleichverteilung“ des dissipationsbedingten mechanischen Leistungsverlustes auf die indizierten Wärmeströme der Zylinderräume, wie sie in vielen Verfahren zweiter Ordnung praktiziert wird, zumindest im Falle komplexerer Prozesse nicht gerechtfertigt.

Dass die Wechselwirkungen zwischen der heißen und der kalten Prozesshälfte allgemein relativ gering sind, ist angesichts der Phasenverschiebung von ca.  $90^\circ$  zwischen den Verdrängerkolben nicht überraschend. Von besonderem Interesse ist dagegen die Betrachtung der Schnittstelle Nr. 5. Hier ergeben sich für die Zylinderräume 4 und 9 deutlich negative Korrekturen, d. h. die indizierten Wärmemengen sind *erhöht* (vgl. Gl. 3-25). Weiterhin kompensieren sie sich betragsmäßig mit denen für die Räume 0 und 5, so dass hier insgesamt  $\Phi_j \approx 0$  gilt. Ein Druckverlust an dieser Stelle bewirkt somit *keinen* Verlust an mechanischer Leistung, obwohl auch hier zweifellos ein dissipativer Vorgang vorliegt. Die produzierte Entropie wird offenbar ausschließlich dadurch abgeführt, dass der thermische Energiedurchsatz im heißen Prozessteil erhöht und im kalten reduziert ist.

Dieses Resultat wird verständlich, wenn man sich vor Augen hält, dass ein Druckverlust an dieser Stelle keine Auswirkungen auf die Kräftebilanzen an den beiden Verdrängerkolben hat. Gasströmungen über die Schnittstelle 5 sind ausschließlich durch thermische Kompressionseffekte bedingt und bewirken letztlich die Kopplung der beiden thermischen Verdichter und damit deren Zusammenwirken als thermische Wärmepumpe. Druckverluste an dieser Stelle bewirken also lediglich eine Verschlechterung dieser Wechselwirkung – im Grenzfall bis auf Null bei völlig verschlossenem Kanal – und damit eine Verringerung der Leistungszahl nach Gl. 2-18, nicht jedoch einen zusätzlichen Bedarf an mechanischer Antriebsleistung.

Zusammenfassend ist damit festzuhalten, dass die durch Strömungsdruckverluste bedingte Dissipation nicht ohne weiteres mit einem Verlust an mechanischer Leistung gleichgesetzt werden darf. Vielmehr wirkt sie sich grundsätzlich auf alle vom Prozess ausgetauschten Energieströme aus, wobei diese Wirkung nicht immer auf eine möglichst effiziente Abfuhr der erzeugten Entropie ausgerichtet zu sein scheint. So wird in dem zuvor beschriebenen Fall der Schnittstelle 5 nicht etwa der mechanische Leistungsbedarf erhöht (bzw. die über die Kolbenstangen nach dem in Kap. 2.2 erläuterten Prinzip produzierte mechanische Überschussleistung reduziert) und ein entsprechend erhöhter Abwärmestrom abgegeben, sondern es wird allein durch entsprechende Veränderung der Wärmeströme die Entropiebilanz erfüllt.

Als zweites Beispiel sei hier die Auswirkung der Druckverluste im Bereich des heißen thermischen Verdichters (Schnittstellen 6 bis 9) genannt. Sie führen offensichtlich gemäß Abb. 3-6 zu einer *Verminderung* des über den heißen Zylinderraum (Raum 9) aufgenommenen Antriebswärmestromes, obwohl gerade dieser Energiestrom wegen seines hohen Exergieanteils gut dazu geeignet wäre, die zusätzlich produzierte Entropie abzuführen, wenn er den Prozess auf dem mittleren, „warmen“ Temperaturniveau wieder verlässt.

Das hier beschriebene Verfahren bietet die Gewähr, dass die Auswirkungen von Strömungsdruckverlusten auch bei komplex strukturierten Prozessen im Rahmen der getroffenen vereinfachenden Annahmen korrekt berücksichtigt werden. Die erzielbare Genauigkeit ist für Verfahren zweiter Ordnung mit ihren an anderer Stelle wesentlich weiter gehenden Vereinfachungen sicherlich ausreichend. Es kann nicht nur – wie hier beschrieben – in die auf dem isothermen Idealprozess basierenden Verfahren integriert werden, sondern in analoger Weise auch in diejenigen, denen das semi-adiabate Modell nach FINKELSTEIN (1960) zugrunde liegt.

## 3.4 Beschreibung von Regeneratoren mit Fasermatrix

### 3.4.1 Verfügbare experimentelle Daten und Korrelationen

In den vorhergehenden Kapiteln wurde deutlich, dass die verschiedenen in regenerativen Kreisprozessen auftretenden Verluste in Prozessmodellen, die die Annahme einer örtlich ein-dimensionalen Strömung beinhalten, nur unter Verwendung empirischer Korrelationen für die auftretenden Strömungsdruckverluste und Wärmeübergänge beschrieben werden können. In den Wärmeübertragern kann durchweg von definierten Kanalströmungen ausgegangen werden, für die – zumindest unter der sehr verbreiteten, wenn auch im Grunde fragwürdigen Annahme einer quasi-stationären Strömung – hinreichend experimentelle und theoretische Erkenntnisse vorliegen, um eine zuverlässige Beschreibung zu ermöglichen.

Inwieweit sich die Verhältnisse hier ändern, wenn die periodische Oszillation der Strömung berücksichtigt wird, ist Gegenstand des nachfolgenden Kapitels (Kap. 3.5). An dieser Stelle sei lediglich vorweggenommen, dass die Auswirkungen des instationären Charakters der Strömung stark vom hydraulischen Durchmesser abhängig sind. Aus diesem Grunde ist die Annahme einer quasi-stationären Strömung im Falle von Regeneratoren generell zulässig. Die Hauptschwierigkeit bei ihrer Beschreibung ist nicht hier, sondern vielmehr in der – abhängig vom jeweiligen Matrixmaterial – oft unzureichenden experimentellen Datenbasis bzw. im Fehlen zuverlässiger Korrelationen zu sehen. Hier ist vor allem die Gruppe der aus Fasern aufgebauten Matrizen zu nennen, während die ebenfalls schon erwähnten, aus Folienwicklungen hergestellten Regeneratoren bei einheitlicher Spaltweite problemlos beschreibbar sind.

Die experimentellen Untersuchungen konzentrierten sich hier in der Vergangenheit auf die häufig in Stirlingmotor-Prototypen eingesetzten Drahtgewebepackungen, die wegen ihres definierten Aufbaus die geringste Neigung zu Inhomogenitäten und damit das größte Potential zur Erzielung hoher Wirkungsgrade besitzen. Messungen der Strömungsdruckverluste und Wärmeübergänge wurden hier von verschiedenen Autoren durchgeführt und in Form empirischer Korrelationen zusammengefasst (z. B. TONG UND LONDON 1957, BLASS 1964, MIYABE ET AL. 1982). Wegen des sehr hohen Preises derartiger Regeneratoren, der nicht nur die (durchaus nennenswerten) Kosten der Herstellung sehr dünner Drähte im Durchmesserbereich von ca. 20 – 60  $\mu\text{m}$ , sondern vor allem auch die des Webeprozesses widerspiegelt, wurden alternativ dazu vielfach die bereits erwähnten regellosen, axial gepressten Fasermaterialien eingesetzt. Von PFEFFER (1998) wurden vergleichende theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Auswahl geeigneter Matrixmaterialien insbesondere auch unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten durchgeführt, die in Kap. 5.2 noch eingehender diskutiert werden. Danach sind im Bereich der regellosen Fasermaterialien nach wie vor die besten Perspektiven für eine kostengünstige Serienfertigung von Regeneratoren zu sehen, wobei neben herkömmlichen Drähten auch andere metallische und nichtmetallische Fasern in Frage kommen.

Aus diesem Grunde wurden im Rahmen des von HEIKRODT ET AL. (1996) dokumentierten Verbundvorhabens zur Entwicklung einer wirtschaftlich produzierbaren Vuilleumier-Heizungswärmepumpe experimentelle Bestimmungen des Druckverlustes und des Wärmeüberganges an verschiedenen Metallfaservliesen durch das Institut für Luft- und Kältetechnik (ILK) in Dresden durchgeführt. Die Arbeiten wurden von HEMPEL UND BÖHM (1997) dokumentiert und erfolgten unabhängig und offenbar annähernd zeitgleich zu GEDEON UND WOOD (1996), die sowohl Drahtgewebe- als auch Metallfaservlies-Matrizen unter periodischen Strömungsbedingungen untersuchten (ohne dabei einen signifikanten Einfluss der Frequenz festzustellen, was die obige, theoretisch begründete Annahme einer quasi-stationären Strömung stützt).

HEMPEL UND BÖHM (1997) fassten ihre Ergebnisse in zwei empirischen Korrelationen für den Druckverlustbeiwert  $\xi$  und für die Stanton-Zahl  $St$  als Funktion der Reynolds-Zahl  $Re$  zusammen, wobei sie die Strömungsgeschwindigkeit  $u$  auf den mittleren, aus der Porosität  $\varepsilon$  und dem Anströmquerschnitt  $A_q$  ermittelten freien Querschnitt  $A_{frei}$  bezogen und als charakteristische Länge den hydraulischen Radius  $r_h$  verwendeten. Damit gelten mit  $d$  als Draht- bzw. Faserdurchmesser,  $\ell$  als Probenlänge sowie  $\dot{m}$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\nu$  und  $\eta$  als Massenstrom, mittlerer Dichte, isobarer Wärmekapazität, kinematischer und dynamischer Viskosität des Fluides die Definitionen

$$r_h = \frac{d}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (3-31),$$

$$u = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_{frei}} = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot \varepsilon \cdot A_q} \quad (3-32),$$

$$Re = \frac{4r_h \cdot u}{\nu} = \frac{4r_h \cdot \dot{m}}{\eta \cdot \varepsilon \cdot A_q} = \frac{u \cdot d}{\nu} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (3-33),$$

$$\xi = \frac{\Delta p}{\frac{\ell}{r_h} \cdot \frac{\rho}{2} u^2} = \frac{2 \Delta p \rho r_h}{\ell} \left( \frac{\varepsilon \cdot A_q}{\dot{m}} \right)^2 \quad (3-34),$$

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p u} \quad (3-35).$$

Dabei bezieht sich der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  auf die theoretische Austauschfläche des Matrixmaterials, d.h. auf die Gesamtoberfläche aller Fasern. Anstelle der Stanton-Zahl wird zu seiner dimensionslosen Darstellung im folgenden die zu ihr äquivalente Nusselt-Zahl

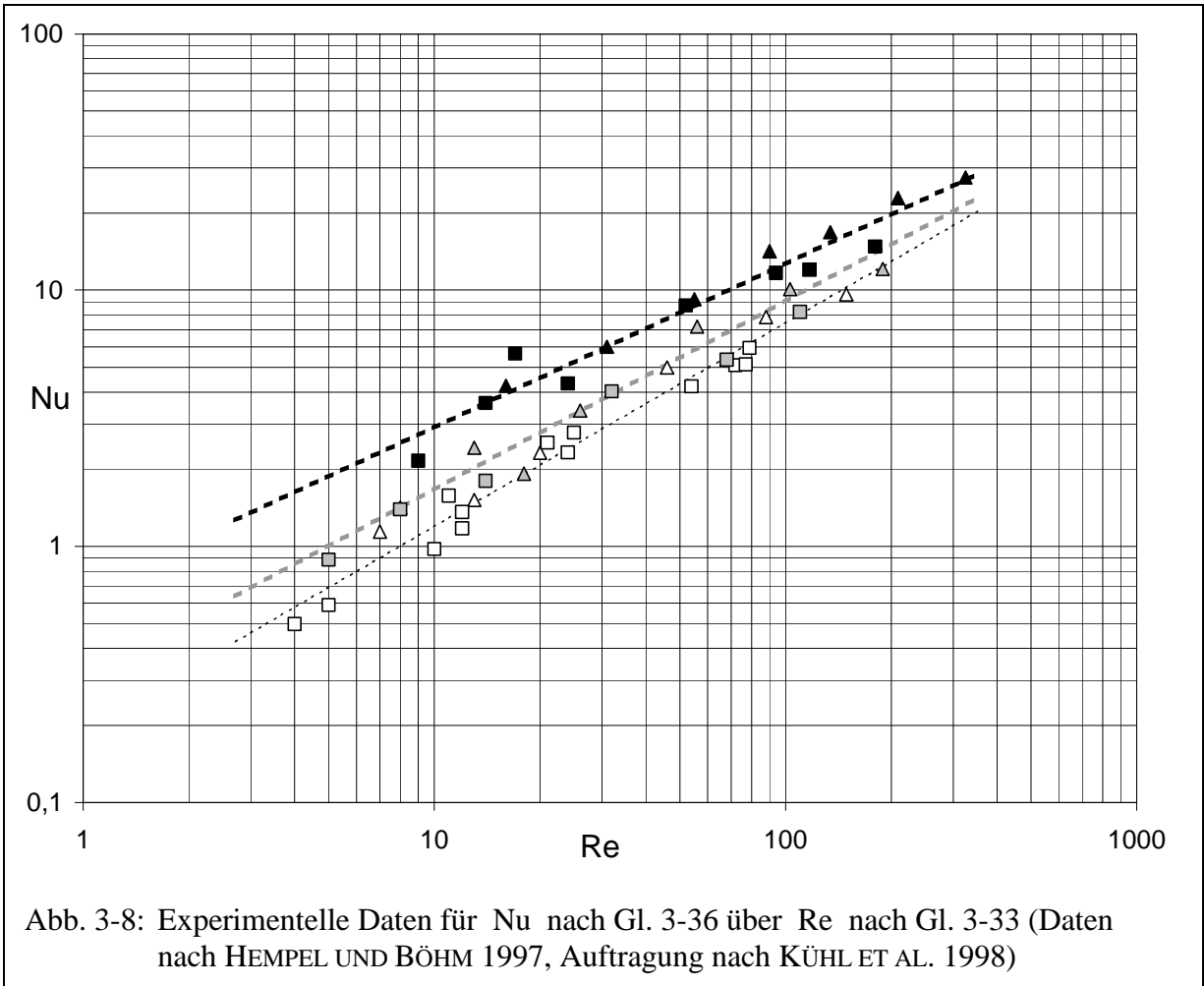
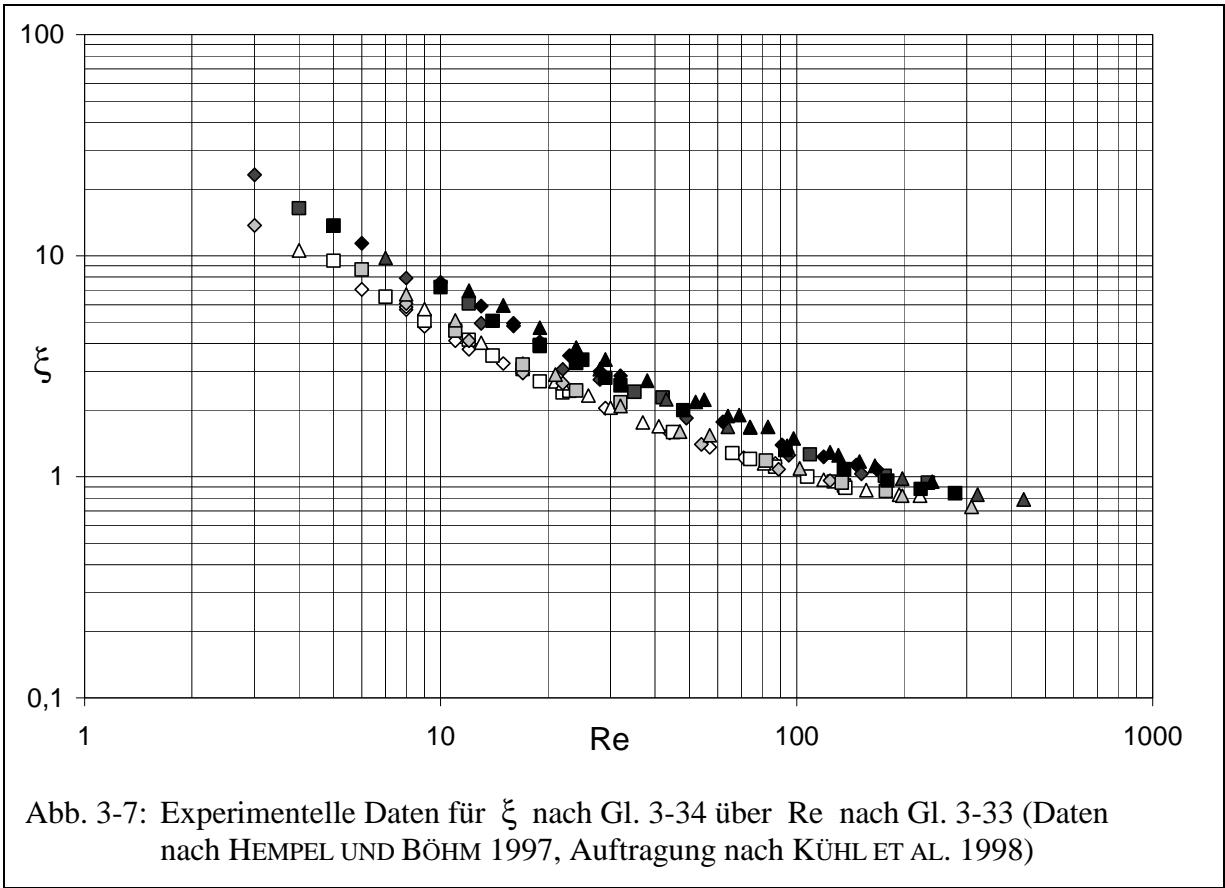
$$Nu = St \cdot Re \cdot Pr = \frac{4r_h \cdot \alpha}{\lambda} \quad (3-36)$$

verwendet, wobei  $Pr = \eta c_p / \lambda$  die Prandtl-Zahl und  $\lambda$  die spezifische Wärmeleitfähigkeit des Fluides bezeichnen. Abb. 3-7 und Abb. 3-8 geben die experimentellen Daten in entsprechender Auftragung wieder, wobei bezüglich der verwendeten Symbole auf Tabelle 3-1 verwiesen sei. Dort sind zugleich auch die Spezifikationen der verwendeten Materialproben angegeben. Bewusst wurde dabei für Proben gleicher Porosität jeweils eine einheitliche Schattierung gewählt, um als wesentliches Ergebnis die zusätzliche, systematische Abhängigkeit der Messergebnisse von dieser Größe deutlich zu machen, die bei der dimensionslosen Auftragung unter Verwendung der obigen Definitionen festzustellen ist.

**Tabelle 3-1:** Spezifikationen der vermessenen Metallfaserfließ-Proben (Herstellerbezeichnung: Bekipor® ST, Werkstoff: 316 L, Angaben nach HEMPEL UND BÖHM 1997)

Proben-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Faser- $\phi$ / $\mu\text{m}$	8	8	8	8	12	12	12	12	22	22	22	22
Porosität	0,75	0,80	0,85	0,88	0,75	0,80	0,85	0,88	0,75	0,80	0,85	0,88
Symbol												





Offensichtlich ist es also auf diese Weise nicht möglich, für den Druckverlust und den Wärmeübergang allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten anzugeben, was zu der Vermutung Anlass gibt, dass die gewählten Bezugsgrößen, also z. B. der hydraulische Radius als charakteristisches Längenmaß, der mittlere freie Strömungsquerschnitt als Berechnungsgrundlage für die Strömungsgeschwindigkeit oder auch der Bezug des Wärmeübergangskoeffizienten auf die theoretische Oberfläche, im vorliegenden Fall zur Beschreibung der physikalischen Situation unzureichend sind.

Um im Rahmen des o. g. Projektes dennoch kurzfristig die Messergebnisse für die praktische Verwendung aufzubereiten, wurden von HEMPEL UND BÖHM (1997) Anpassungen vorgenommen, bei denen die Koeffizienten als von der Porosität abhängige Polynome korreliert wurden. Dies führte zu folgenden empirischen Gleichungen, die wegen der fehlenden theoretischen Grundlage für die Porositätsabhängigkeit nur für den jeweils vermessenen Bereich gelten und in keiner Weise extrapolierbar sind:

$$\xi = \frac{1003.08 - 2573 \varepsilon + 1712.9 \varepsilon^2}{Re} + \frac{0.524 + 1.133 \varepsilon}{Re^{0.15}} \quad (3-37)$$

für  $0.75 \leq \varepsilon \leq 0.88$  und  $4 \leq Re \leq 400$  ;

$$\frac{Nu}{Pr^{1/3}} = (9.967 - 27.61 \varepsilon + 19.48 \varepsilon^2) Re^{(1.697 - 1.203 \varepsilon)} \quad (3-38)$$

für  $0.75 \leq \varepsilon \leq 0.88$  und  $4 \leq Re \leq 300$

Wegen dieser aus theoretischer Sicht unbefriedigenden expliziten Porositätsabhängigkeiten wurden von KÜHL ET AL. (1998) nachfolgend Überlegungen angestellt, um durch abweichende, theoretisch begründete Wahl der charakteristischen Bezugsgrößen zu allgemein für die untersuchte Materialklasse gültigen und möglicherweise auch eingeschränkt extrapolierbaren Gesetzmäßigkeiten zu gelangen. Dies wird im folgenden dargestellt.

### 3.4.2 Neuer Ansatz zur Beschreibung der Strömungsdruckverluste

Im Falle von Metallfaservliesen – wie auch anderen Materialien mit vorwiegend quer zur Strömung orientierten Fasern – ist die Verwendung des hydraulischen Radius als charakteristisches Längenmaß zur Modellierung des Strömungsdruckverlustes unzureichend, denn die theoretische Grundlage hierfür ist die Annahme einer Analogie zur ausgebildeten, insbesondere turbulenten Rohr- bzw. Kanalströmung. Bekanntlich lassen sich dort auch Strömungen durch nicht kreisförmige Querschnitte auf diese Weise in guter Näherung auf den Standardfall des kreisförmigen Rohrquerschnittes zurückführen. Eine derartige Analogie kann man jedoch nur dann annehmen, wenn der Strömungsdruckverlust ausschließlich oder doch zumindest vorwiegend auf Wandschubspannungen zurückzuführen ist, d. h. dort, wo es sich um ein reines Grenzschichtphänomen handelt.

Im hier vorliegenden Fall – wie allgemein bei Strömungen durch Haufwerke – ist jedoch anzunehmen, dass großenteils sog. Formdruckverluste vorliegen, die durch unetliche Querschnittsänderungen und die hierdurch bedingten Strömungsablösungen und Wirbelbildungen verursacht werden. Ähnlich wie in den bekannten Fällen des Carnot'schen Stoßverlustes und des Einlaufdruckverlustes bei Rohren sind sie hauptsächlich von der Strömungsform und -geschwindigkeit vor der Erweiterung bzw. nach der Verengung abhängig. Da nun in regellosen Fasermaterialien die freien Strömungswege zwischen den Fasern einer statistischen Ver-

teilung unterliegen, ergibt sich die Schwierigkeit, hier repräsentative Werte anzugeben. Einen möglichen Ansatz hierfür bietet der grundsätzlich ähnliche, aber einfacher beschreibbare Fall einer aus sich regelmäßig kreuzenden geraden Fasern oder Stäben aufgebauten Matrix, der bereits von TONG UND LONDON (1957) im Vergleich zu gewebten Drahtnetzen experimentell untersucht wurde. Während die genannten Autoren zur Korrelation ihrer experimentellen Daten noch eine korrigierte Form der mit dem hydraulischen Durchmesser gebildeten Reynolds-Zahl verwenden, bevorzugen MIYABE ET AL. (1982) zur Wiedergabe ihrer an Drahtnetzen gewonnenen Daten die freie Maschenweite sowohl als Bezugsquerschnitt für die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit als auch für das den Strömungszustand kennzeichnende Längenmaß. Diese Vorgehensweise wurde von KÜHL ET AL. (1998) auch auf den Fall regelloser Vliese übertragen, d. h. für die genannten Größen werden durch Betrachtung des obigen Analogiefalles unter der Nebenbedingung gleicher Porosität repräsentative Mittelwerte zur Korrelation der von HEMPEL UND BÖHM (1997) erhaltenen Messwerte gebildet.

In Abb. 3-9 ist hierzu eine Elementarzelle eines rechtwinkligen, quadratischen Stabgitters dargestellt. Offensichtlich ist hier der minimale, schattiert dargestellte Strömungsquerschnitt in senkrechter Projektion, d. h. in Hauptströmungsrichtung, durch das Quadrat der freien Maschenweite  $w$  gegeben, die ihrerseits mit der Gitterteilung  $s$  und dem Faserdurchmesser  $d$  sowie der Porosität  $\epsilon$  in unmittelbarem Zusammenhang steht. Bezieht man diesen Querschnitt auf den gesamten Anströmquerschnitt  $A_q$ , so ergibt sich für den zur Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit benötigten Minimalquerschnitt  $A_{\min}$  die Beziehung

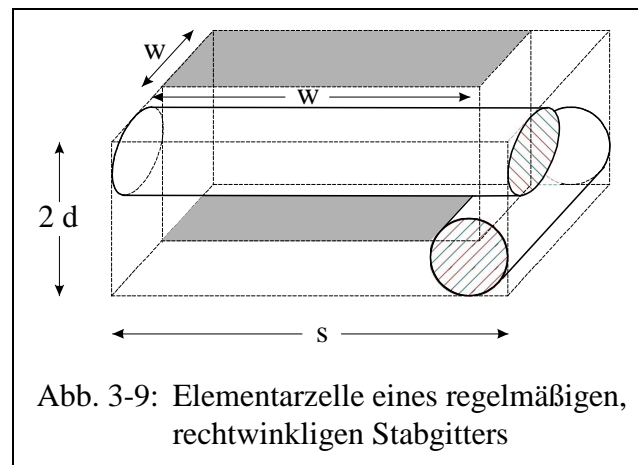


Abb. 3-9: Elementarzelle eines regelmäßigen, rechtwinkligen Stabgitters

$$A_{\min} = A_q \left( \frac{w}{s} \right)^2 = A_q \left( 1 - \frac{d}{s} \right)^2 \quad (3-39).$$

Darin lässt sich der Quotient aus Faserdurchmesser und Gitterteilung als Funktion der Porosität ausdrücken, da die Höhe der Elementarzelle gleich dem doppelten Faserdurchmesser ist:

$$\frac{d}{s} = \frac{4}{\pi} (1 - \epsilon) \quad (3-40)$$

Diese Gleichung kann näherungsweise auch für Drahtnetze angewandt werden, sofern die Porosität relativ hoch und somit der Neigungswinkel der verwobenen Drähte gering ist. Auf die Verwendung der genaueren, diesen Winkel berücksichtigenden Gleichung

$$\frac{d}{s} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left[ \frac{4}{\pi} (1 - \epsilon) \right]^2} - \frac{1}{2} \quad (3-41)$$

wurde im vorliegenden Fall verzichtet, da sich keine signifikante Verbesserung der Wiedergabegenauigkeit ergab. Stattdessen wurde Gl. 3-40 auch für den Fall regelloser Vliese angewandt, um so charakteristische Werte für die anders nicht unmittelbar definierbare Gitterteilung und die hiervon abhängige freie Maschenweite festzulegen.

Mit diesen abweichenden Definitionen allein ist jedoch eine befriedigende Wiedergabe der von HEMPEL UND BÖHM (1997) festgestellten Porositätsabhängigkeit der Messwerte noch nicht möglich, d. h. es tritt insbesondere bei sehr niedrigen Porositäten – der geringste vermessene Wert  $\varepsilon = 0,75$  muss als solcher bezeichnet werden, da er nur durch sehr hohe Presskräfte zu erzielen war<sup>3</sup> – weiterhin ein systematischer Einfluss dieses Parameters auf. Aus diesem Grunde wird zusätzlich die Verlängerung des Strömungsweges berücksichtigt, die dadurch entsteht, dass die Stromlinien bei abnehmender Porosität nicht mehr geradlinig, sondern zunehmend mäandrierend verlaufen. Verlängert sich der Strömungsweg auf diese Weise um einen Faktor  $f$ , so verringern sich bei gleichbleibendem freiem Volumen alle Querschnitte senkrecht zur Stromlinie entsprechend, denn das freie Volumen ergibt sich näherungsweise als Wegintegral dieser Querschnitte entlang der Stromlinie. Somit ist auch der minimale Querschnitt  $A_{\min}$  um  $f$  zu reduzieren und konsequenterweise für die charakteristische Länge der Wert  $w/\sqrt{f}$  einzusetzen.

Über den Zusammenhang  $f(\varepsilon)$  sind weder für Drahtnetzpackungen noch für regellose Vliese experimentelle oder theoretische Informationen verfügbar. Lediglich bei Kugelschüttungen, die sich nicht nur hinsichtlich ihrer Struktur, sondern auch wegen ihrer typischen Porosität  $\varepsilon_K \approx 0,4$  vom betrachteten Fall deutlich unterscheiden, ist für die Verlängerung des Strömungsweges als typischer Wert  $f_K \approx 1,5$  in der Literatur dokumentiert (z. B. WEN UND FAN 1975). Ansonsten ist selbstverständlich  $f \rightarrow 1$  im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 1$  zu fordern. Mangels sonstiger verwendbarer Erkenntnisse wurde nun von KÜHL ET AL. (1998) vereinfachend angenommen, dass der Zusammenhang  $f(\varepsilon)$  auch für Materialien unterschiedlicher Struktur einen ähnlichen Verlauf aufweist, d. h. dass die prinzipiellen Unterschiede z. B. in der Partikelform sich lediglich mittelbar über die hierdurch bedingten, unterschiedlichen typischen Porositäten auswirken. Es wird daher ein empirischer Zusammenhang der Form

$$f = f_K \left( \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon_K} \right) = 1,5 \left( \frac{1-\varepsilon}{0,6} \right) \quad (3-42)$$

angenommen. Damit ergeben sich schließlich die folgenden, modifizierten Definitionen für die Reynolds-Zahl und den Druckverlustbeiwert, die im Hinblick auf die beiden wesentlichen zugrunde liegenden Annahmen mit den Indices  $w$  und  $f$  gekennzeichnet sind:

$$\text{Re}_{wf} = \frac{\dot{m} \frac{w}{\sqrt{f}}}{\eta \cdot A_q \left(1 - \frac{d}{s}\right)^2 \cdot \frac{1}{f}} = \frac{\dot{m} \cdot d}{\eta \cdot A_q} \cdot \frac{1,5 \left( \frac{1-\varepsilon}{1,2} \right)}{\frac{4}{\pi} (1-\varepsilon) \left[1 - \frac{4}{\pi} (1-\varepsilon)\right]} \quad (3-43)$$

$$\xi_{wf} = \frac{\Delta p}{\frac{\ell}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \left[ \frac{\dot{m} \cdot f}{\rho A_q \left(1 - \frac{d}{s}\right)^2} \right]^2} = \frac{2 \Delta p \rho d}{\ell} \cdot \left( \frac{A_q}{\dot{m}} \right)^2 \cdot \frac{\left[1 - \frac{4}{\pi} (1-\varepsilon)\right]^4}{1,5 \left( \frac{1-\varepsilon}{0,3} \right)} \quad (3-44)$$

<sup>3</sup> O. Hempel, ILK Dresden, persönliche Mitteilung

Zu beachten ist hier zunächst, dass die freie Maschenweite  $w$  als den Strömungszustand charakterisierende Längenabmessung zwar in die Definition der Reynolds-Zahl eingeht, nicht jedoch in die des Druckverlustbeiwertes. Der Grund hierfür ist, dass der Gesamtdruckverlust einer Matrix der Länge  $\ell$  sich aus der Verkettung aller von einer Stromlinie passierten Verengungen ergibt. Deren Zahl ist in jedem Fall proportional zu dem Quotienten  $\ell/d$ .

Weiterhin sei hier darauf hingewiesen, dass die Berücksichtigung des verlängerten Strömungsweges allein ebenso wenig zu einer befriedigenden Wiedergabe der Porositätsabhängigkeit der Messwerte führt wie die zuerst dargelegte Verwendung des minimalen Strömungsquerschnittes als Bezugsgröße. Auf eine detaillierte Darstellung der jeweils noch verbleibenden systematischen Porositätseinflüsse wird hier aus Platzgründen verzichtet.

Die Kombination beider Annahmen führt jedoch zu der in Abb. 3-10 wiedergegebenen Darstellung der Messwerte, in der offensichtlich keine systematischen Einflüsse der Porosität mehr zu erkennen sind. Die Gesamtheit der Punkte lässt sich durch die ebenfalls eingezeichnete Ausgleichskurve im Rahmen der statistischen Streuung gut wiedergeben. Die Kurve wurde durch Minimierung der relativen Fehlerquadratsumme von KÜHL ET AL. (1998) ermittelt und entspricht der Korrelationsgleichung

$$\xi_{wf} = \frac{a}{Re_{wf}} + b \quad (3-45)$$

mit den angepassten Koeffizienten  $a = 20$  ;  $b = 0,2216$   
und dem Geltungsbereich  $0,75 \leq \varepsilon \leq 0,88$  ;  $3 \leq Re_{wf} \leq 400$  .

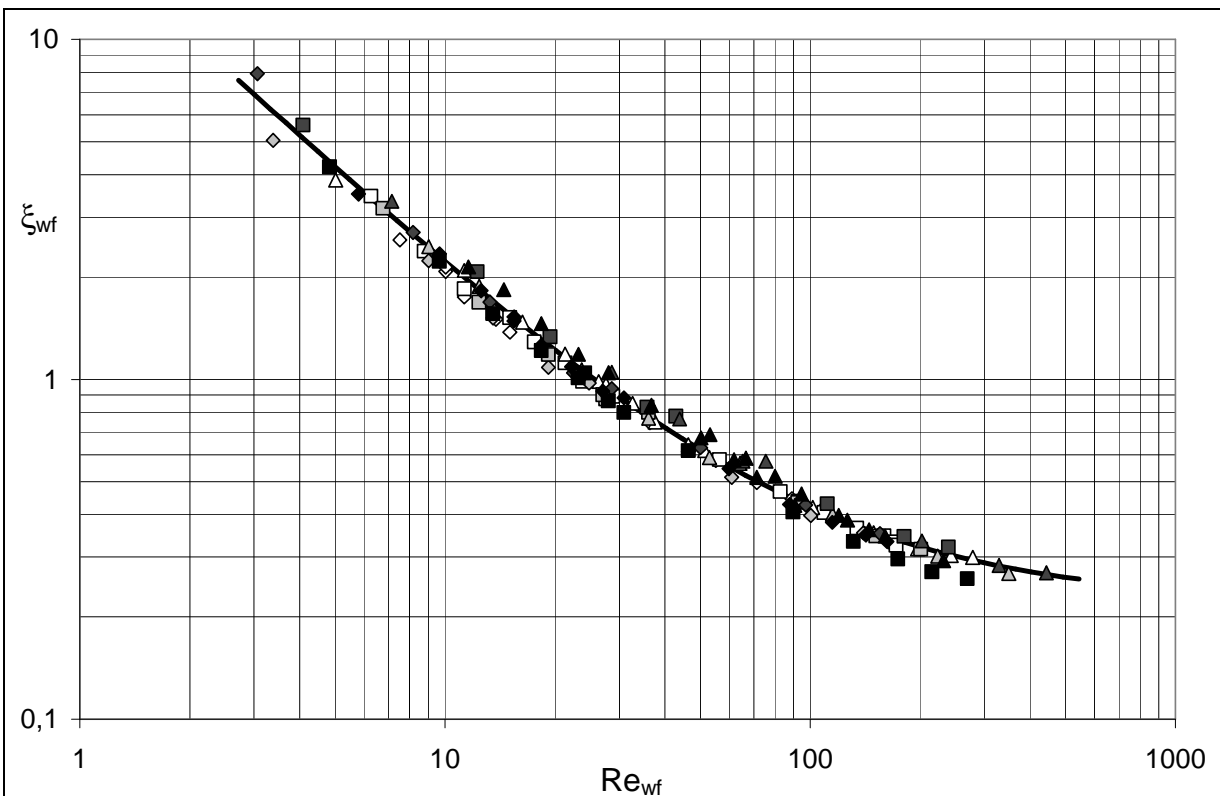


Abb. 3-10: Auftragung der experimentellen Druckverlust-Daten nach HEMPEL UND BÖHM (1997) als Druckverlustbeiwert  $\xi_{wf}$  nach Gl. 3-44 über  $Re_{wf}$  nach Gl. 3-43

### 3.4.3 Neuer Ansatz zur Beschreibung des Wärmeübergangs

Wärmeübergänge sind stets ein reines Grenzschichtphänomen. Daher kann eine Analogie zwischen Wärme- und Impulsaustausch nur dort erwartet werden, wo letzterer ebenfalls nur auf Wandreibungs-, d. h. auf Grenzschichtmechanismen zurückzuführen ist. Die gute Wiedergabe der Messwerte im vorhergehenden Kapitel stützt jedoch die dem verwendeten Ansatz zugrundeliegende Hypothese, dass in regellosen Faservliesmaterialien vorwiegend Formdruckverluste auftreten. Somit ist eine Analogie zur Wärmeübertragung in diesem Fall nicht zu erwarten, und es gibt keinen Grund, die modifizierte Definition der Reynolds-Zahl nach Gl. 3-43 hierfür zu übernehmen. Vielmehr sind die auf dem hydraulischen Radius basierenden Definitionen nach Gl. 3-33 und 3-36 zur Beschreibung von Grenzschichtphänomenen durchaus bewährt und werden daher auch hier zugrundegelegt.

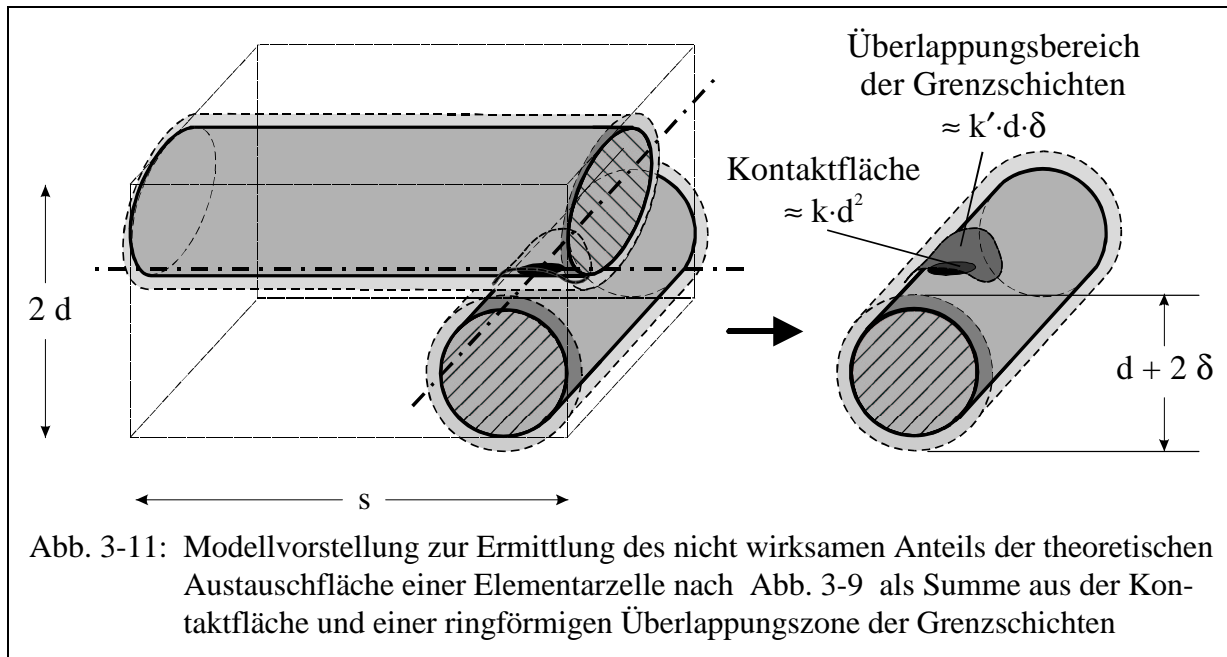
Der in Abb. 3-8 erkennbare Einfluss der Porosität wird stattdessen nach KÜHL ET AL. (1998) darauf zurückgeführt, dass der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  auf die theoretische Austauschfläche, d. h. auf die Gesamtoberfläche aller Fasern, bezogen ist, während tatsächlich gewisse Teile dieser Oberfläche im Bereich der Berührungspunkte zwischen den Fasern weitgehend abgedeckt sind und kaum zum Wärmeübergang beitragen. Nähme man jedoch an, dass es sich hier lediglich um einen geometrisch bedingten und somit vom Strömungszustand unabhängigen Anteil handelte, so ergäbe sich ein ausschließlich porositätsabhängiger Korrekturfaktor für die Nusselt-Zahl, der sich in Abb. 3-8 als reine Parallelverschiebung der entsprechenden Datenpunkte und Ausgleichskurven widerspiegeln würde. Die dort erkennbare Wechselwirkung zwischen Porosität und Reynolds-Zahl, d. h. der mit sinkender Reynoldszahl zunehmende Einfluss der Porosität, wäre auf diese Weise nicht zu erklären.

Allerdings erscheint es fragwürdig, hier strikt zwischen vollständig durch unmittelbare Berührung abgedeckten Oberflächenanteilen einerseits und uneingeschränkt „aktiven“, am Wärmeaustausch beteiligten Bereichen andererseits zu unterscheiden, ohne dabei die Strömungsverhältnisse zu berücksichtigen. Tatsächlich ist eher ein fließender Übergang zwischen den theoretisch nur punktuellen und praktisch stark vom Grad der Verpressung sowie von der plastischen Verformbarkeit des Fasermaterials abhängigen unmittelbaren Kontaktstellen und den sie umgebenden Zwickelbereichen anzunehmen, in denen das Fluid durch die unmittelbar benachbarten Oberflächen aufgrund von viskosen Effekten weitgehend festgehalten wird. Da hier praktisch kein stofflicher Austausch stattfindet und die Wärmeleitungswege durch das ruhende Fluid relativ lang sind, tragen auch diese Oberflächenbereiche kaum zum Wärmeübergang bei. Es liegt auf der Hand, dass die Ausdehnung dieser nicht durchströmten Zwickelzonen vom Strömungszustand anhängig ist und bei sinkender Reynolds-Zahl wächst.

KÜHL ET AL. (1998) entwickelten auf der Grundlage der Analogie zu dem Stabgittermodell nach Abb. 3-9 eine vereinfachte Modellvorstellung, in der die die Fasern umgebende Grenzschicht qualitativ als ein sie umgebender Mantel aus ruhendem Fluid aufgefasst wird. Dessen Dicke  $\delta$  wird dabei anhand des „wahren“, auf die aktive Austauschfläche  $A_{\text{wahr}}$  bezogenen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_{\text{wahr}}$  abgeschätzt, d. h. es gilt

$$\delta = \lambda / \alpha_{\text{wahr}} \quad (3-46).$$

Es wird nun weiter angenommen, dass die Ausdehnung der Zwickelzonen mit ihren nicht aktiven Oberflächenanteilen identisch ist mit den Bereichen, in denen die durch Gl. 3-46 definierten Grenzschichten zweier sich kreuzender Fasern miteinander verschmelzen. Damit lassen sich die nicht aktiven Oberflächenbereiche gemäß Abb. 3-11 näherungsweise als eine zentrale, kreisförmige Fläche der unmittelbaren Berührung darstellen, die von einem durch die Zwickelzone begrenzten Kreisring umgeben ist. Aufgrund einfacher geometrischer Überle-



gungen ist nun anzunehmen, das erstere zum Quadrat des Faserdurchmessers  $d$  und letztere zum Produkt aus  $d$  und  $\delta$  proportional ist. Die Proportionalitätsfaktoren, die hier mit  $k$  und  $k'$  bezeichnet seien, sind nicht ohne weiteres genau zu bestimmen und werden daher als anpassbare Koeffizienten der gesuchten Korrelation betrachtet.

Grundsätzlich wäre es möglich, an dieser Stelle weitere zu vermutende Abhängigkeiten aufzunehmen und z. B. den Einfluss der Porosität explizit zu berücksichtigen. Andererseits ist die Zahl der sinnvoll simultan an die verfügbaren Daten anpassbaren Koeffizienten beschränkt, und es besteht stets die Gefahr einer Überinterpretation, zumal die Messungen des Wärmeübergangs von HEMPEL UND BÖHM (1997) nur an einem Teil der in Tabelle 3-1 aufgeführten Materialproben (Proben Nr. 5, 6, 8, 9, 10, 12) durchgeführt wurden. Der Wert eines in dieser Weise aus theoretisch begründeten Modellvorstellungen abgeleiteten Ansatzes ist sicherlich auch an der Zahl der empirisch zu bestimmenden Koeffizienten zu messen, die möglichst gering sein sollte. Aus diesem Grunde wird das Modell an dieser Stelle nicht weiter verfeinert.

Während sich nun die theoretische Austauschfläche  $A_{\text{theo}}$  einer Elementarzelle nach Abb. 3-9 bzw. Abb. 3-11 aus der Beziehung

$$A_{\text{theo}} = 2 \cdot \pi \cdot d \cdot s \quad (3-47)$$

ergibt, erhält man die „wahre“, aktive Fläche, indem man von dieser die beiden zuvor genannten Flächenanteile subtrahiert. Für den aktiven Flächenanteil erhält man dann mit Gl. 3-46

$$\frac{A_{\text{wahr}}}{A_{\text{theo}}} = \frac{2\pi \cdot d \cdot s - k \cdot d^2 - k' \cdot d \cdot \delta}{2\pi \cdot d \cdot s} = 1 - \frac{\frac{k}{2\pi} \cdot d + \frac{k'}{2\pi} \cdot \lambda / \alpha_{\text{wahr}}}{s} \quad (3-48).$$

Diese Quotient entspricht wegen der Konstanz des übertragenen Wärmestromes andererseits auch dem Verhältnis der Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  und  $\alpha_{\text{wahr}}$ ,

$$\frac{A_{\text{wahr}}}{A_{\text{theo}}} = \frac{\alpha}{\alpha_{\text{wahr}}} \quad (3-49),$$

und durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke erhält man somit

$$\alpha = \alpha_{\text{wahr}} \cdot \left(1 - \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{d}{s}\right) - \frac{k'}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{s} \quad (3-50)$$

als Zusammenhang zwischen  $\alpha$  und  $\alpha_{\text{wahr}}$ . Mit  $r_h$  nach Gl. 3-31 lässt er sich in dimensionsloser Form auch als Beziehung zwischen der Nusselt-Zahl nach Gl. 3-36 und einer „wahren“, mit  $\alpha_{\text{wahr}}$  gebildeten Nusselt-Zahl  $Nu_{\text{wahr}}$  formulieren, die sich schließlich durch Einsetzen von Gl. 3-40 zu einer ausschließlich von der Porosität abhängigen, nichtlinearen Verknüpfung beider Nusselt-Zahlen zusammenfassen lässt:

$$Nu_{\text{wahr}} = \frac{4r_h \alpha_{\text{wahr}}}{\lambda} = \frac{Nu + \frac{k'}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{d}{s}}{1 - \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{d}{s}} = \frac{Nu + \frac{k'}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi}}{1 - \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{4}{\pi} (1-\varepsilon)} = \frac{Nu + q' \varepsilon}{1 - q(1-\varepsilon)} \quad (3-51)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung sollte es möglich sein, den in Abb. 3-8 erkennbaren systematischen Einfluss der Porosität zu beschreiben, sofern die anpassbaren Koeffizienten  $k$  und  $k'$  (bzw.  $q$  und  $q'$  nach Zusammenfassung mit den konstanten Faktoren) entsprechend gewählt werden. Werden also die als Nusselt-Zahlen gegebenen experimentellen Daten nach Abb. 3-8 entsprechend umgerechnet, so sollte keine systematische, durch die speziellen geometrischen Verhältnisse in Fasermaterialien bedingte Porositätsabhängigkeit mehr auftreten.

Da die Verwendung des hydraulischen Radius eine Analogie zu Rohr- bzw. Kanalströmungen impliziert, ist stattdessen für die „wahre“ Nusselt-Zahl nach Gl. 3-51 zumindest qualitativ eine Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl zu erwarten, wie sie von solchen Strömungen bekannt ist. Im Bereich schleichender Strömung, also für  $Re \rightarrow 0$ , sollte daher ein endlicher Grenzwert auftreten, und im Bereich hoher Reynolds-Zahlen, also bei überwiegend turbulenter Strömung, sollte der Zusammenhang durch ein Potenzgesetz mit einem Exponenten im Bereich von ca. 0,75 bis 0,8 beschreibbar sein. Da ein definierter Umschlagspunkt zwischen laminarer und turbulenter Strömung natürlich nicht erwartet werden kann, ist somit

$$Nu_{\text{wahr}} = a + b \cdot Re^c \cdot Pr^{1/3} \quad (3-52)$$

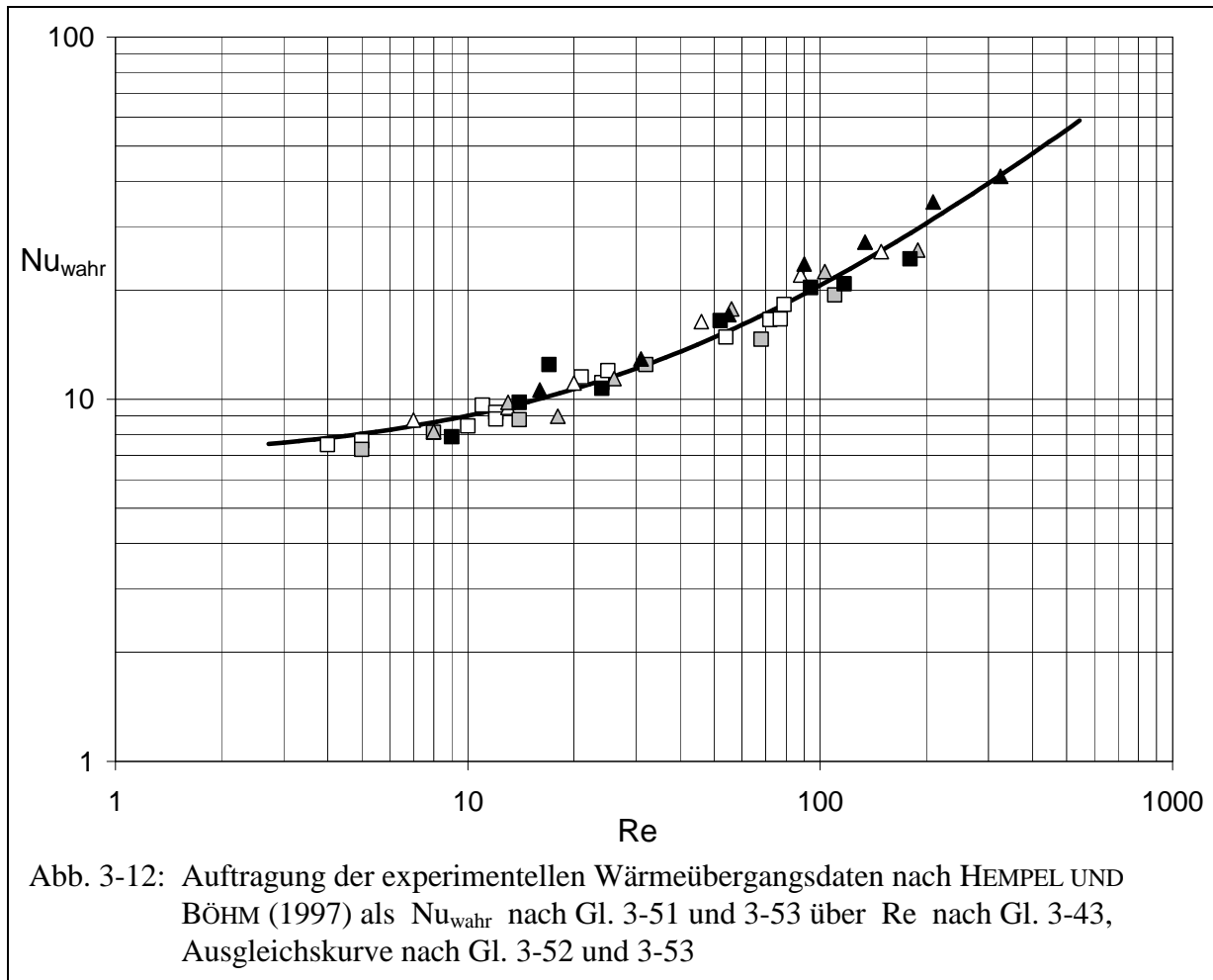
mit  $a, b > 0$  und  $c \approx 0,75 \dots 0,8$  zu vermuten. Damit erhält man ein Optimierungsproblem mit den fünf anpassbaren Parametern  $a, b, c, q$  und  $q'$  und mit dem Ziel, die Streuung der Messpunkte um eine Ausgleichskurve gemäß Gl. 3-52 zu minimieren. Zu beachten ist dabei, dass nicht der Absolutwert dieser Streuung, sondern dessen Relation zu der gesamten Varianz der Messwerte (in der Auftragung als  $Nu_{\text{wahr}}$  über  $Re$ ) zu minimieren ist. Andernfalls entartet die Darstellung mit  $a, q' \rightarrow \infty, q \rightarrow 1$  und  $c \rightarrow 0$  zu einer horizontalen Linie, d. h. die Streuung wird deshalb minimal, weil die Porositätsabhängigkeit herausfällt und die in den ursprünglichen Messwerten enthaltene Information verloren geht.

Wird die Anpassung jedoch in der zuvor beschriebenen Form durchgeführt, so erhält man als Ergebnis die folgenden, aus theoretischer Sicht plausiblen Werte:

$$a = 6,677 \quad b = 0,44 \quad c = 0,7775 \quad q = 1,979 \quad q' = 4,38 \quad (3-53)$$

Die grafische Auftragung der Messwerte als  $Nu_{\text{wahr}}$  nach Gl. 3-51 über der Reynolds-Zahl in Abb. 3-12 zeigt, dass kein systematischer Einfluss der Porosität mehr erkennbar ist. Weiterhin liegen insbesondere der laminare Grenzwert  $a$  sowie der Exponent  $c$  der Reynolds-Zahl in Gl. 3-52 in den theoretisch zu erwartenden Bereichen. Dass ersterer etwa um einen Faktor 1,8 höher liegt als der für ausgebildete Laminarströmungen in kreisförmigen Rohren gültige Wert  $Nu_1 = 3,66$ , ist nicht überraschend, wenn man bedenkt, dass sich die geometrischen Verhält-





nisse deutlich unterscheiden und dass der hydraulische Radius im Bereich laminarer Strömungen nur unter Berücksichtigung geometrieabhängiger Korrekturfaktoren anwendbar ist.

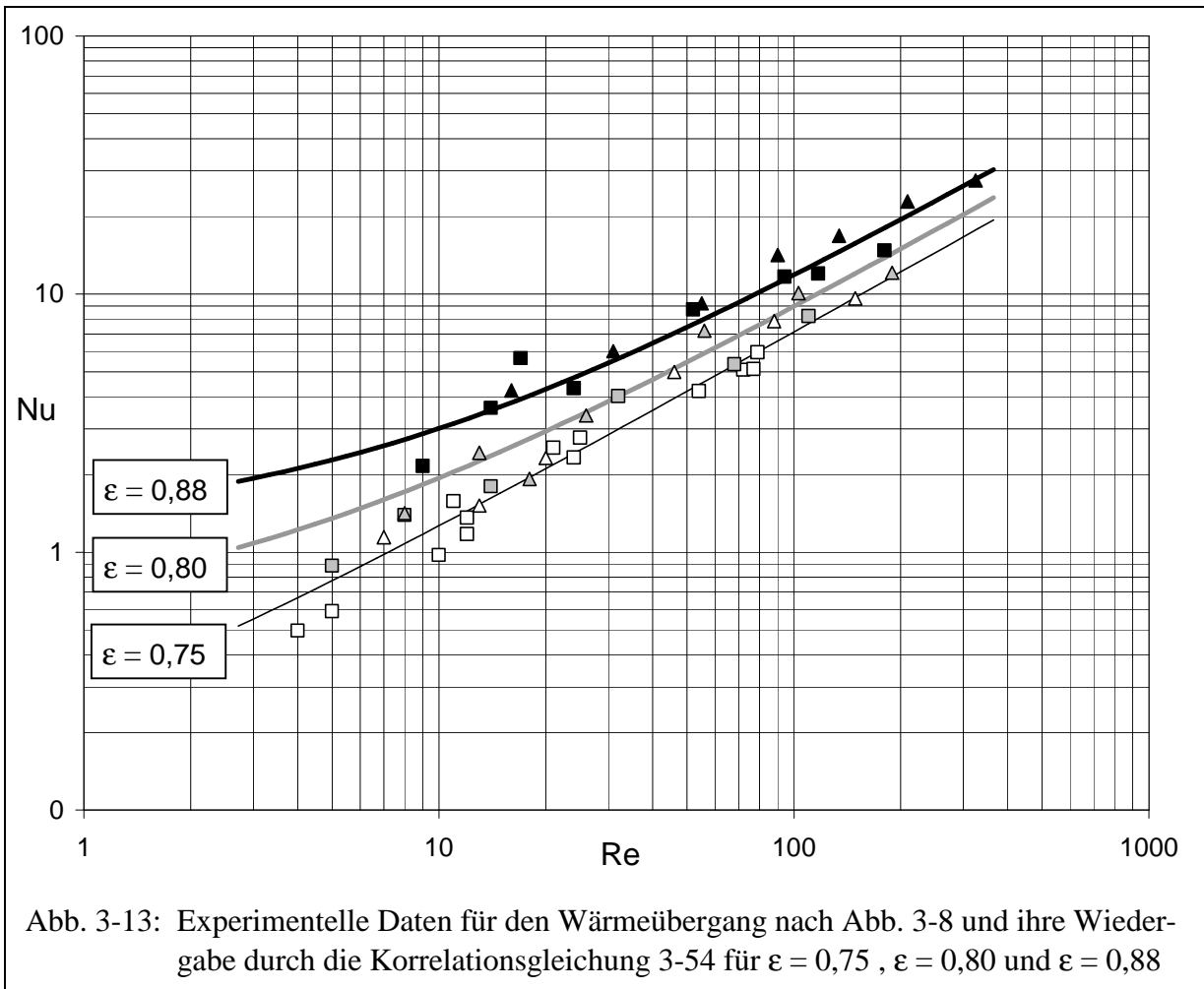
Die Größenordnung der Werte für  $q$  und  $q'$  lässt darauf schließen, dass die nicht wirksamen Flächenanteile deutlich größer sind als die Betrachtung des Idealfalls zweier sich rechtwinklig kreuzender Stäbe gemäß Abb. 3-9 vermuten lässt. Hält man sich jedoch vor Augen, dass jeder andere Kreuzungswinkel – bis hin zum Extremfall zweier parallel nebeneinander verlaufender Fasern – zu einer Vergrößerung der Kontaktzonenbereiche führt und dass speziell in den Wert für  $q'$  auch diejenigen Fälle eingehen, wo kein unmittelbarer Kontakt, sondern lediglich eine Überlappung der Grenzschichten vorliegt, so sind auch diese Ergebnisse plausibel.

Für die praktische Anwendung ist die angegebene Korrelation für  $Nu_{\text{wahr}}$  jedoch unzureichend, weil stets zusätzlich der aktive Anteil der Austauschfläche gemäß Gl. 3-48 ermittelt oder alternativ der erhaltene Wert für  $\alpha_{\text{wahr}}$  gemäß Gl. 3-50 in  $\alpha$  umgerechnet werden müsste. Stattdessen bietet es sich an, Gl. 3-51 unter Einsetzen von Gl. 3-52 nach  $Nu$  aufzulösen. Auf diese Weise erhält man zwar wiederum eine Beziehung mit expliziter Porositätsabhängigkeit, die jedoch im Gegensatz zu dem Polynomansatz in Gl. 3-38 theoretisch begründet ist:

$$Nu = \left(6,677 + 0,44 \cdot Re^{0,7775} \cdot Pr^{1/3}\right) \cdot [1 - 1,979 \cdot (1 - \epsilon)] - 4,38 \cdot \epsilon \quad (3-54)$$

$$\text{für } 0,75 \leq \epsilon \leq 0,88 \quad ; \quad 4 \leq Re \leq 300$$

Die Wiedergabe der Messpunkte durch die drei Ausgleichskurven in Abb. 3-13 erscheint grundsätzlich ebenso plausibel wie die in Abb. 3-8. Die Frage der Extrapolierbarkeit von Gl. 3-54 muss allerdings trotz des theoretisch begründeten Ansatzes zumindest für kleinere



Porositäten verneint werden, denn bei Verwendung der Koeffizienten nach Gl. 3-53 tritt für  $\varepsilon < 0,74$  der unrealistische Fall ein, dass die Kurven im Bereich schleichender Strömung nach unten abknicken, was zu negativen Werten der Nusselt-Zahl bei endlichen, wenn auch geringen Reynolds-Zahlen führt. Offensichtlich sind hier die Grenzen des verwendeten Modells erreicht, in dem die Grenzschicht vereinfachend als Mantel aus ruhendem, hinsichtlich des Wärmeübergangs inaktivem Fluid angenommen wird. Andererseits ist es bemerkenswert, dass die genannte Untergrenze relativ genau mit der experimentell festgestellten Grenze der Verdichtbarkeit der Materialproben zusammenfällt.

Eine weitere Verfeinerung des Modells, die grundsätzlich möglich erscheint, setzt umfangreicheres experimentelles Datenmaterial voraus, wobei auch alternative Herstellungsverfahren zu berücksichtigen wären. So ist z. B. bemerkenswert, dass von CARLSEN (1990) nach einem eigen entwickelten Verfahren Regeneratoren mit regelloser Fasermatrix und Porositäten bis hinab zu  $\varepsilon = 0,72$  hergestellt wurden. Möglicherweise sind unterschiedliche statistische Verteilungen der Kreuzungswinkel zwischen den Fasern die Ursache für diese Unterschiede, die ggf. als zusätzliche, materialspezifische Einflussgröße in das Modell mit aufzunehmen wären.

Grundsätzlich bleibt festzuhalten, dass es mit den dargestellten, theoretisch begründeten Modellvorstellungen möglich ist, den experimentell festgestellten Einfluss der Porosität sowohl auf den Strömungsdruckverlust als auch auf den Wärmeübergang der untersuchten Metallfaservliese zufriedenstellend wiederzugeben. Die Ansätze erscheinen damit auch zur Korrelation anderer Messwerte für ähnlich strukturierte Materialien geeignet, wobei – je nach Breite der Datenbasis – ggf. weitere Verfeinerungen möglich bzw. erforderlich sind.

## 3.5 Beschreibung oszillierender Strömungen

### 3.5.1 Strömungsmodellierung und Druckverlust

#### 3.5.1.1 Grundlagen

In Kap. 3.1.6 wurde bereits darauf hingewiesen, dass alle örtlich eindimensionalen Prozessmodelle zur Beschreibung von Strömungsdruckverlusten und Wärmeübergängen auf empirische Korrelationen angewiesen sind und dass dort die Verwendung von Gleichungen, die für stationäre Strömungsverhältnisse gelten, eine grundsätzlich sehr problematische Vereinfachung darstellt. Dennoch geschieht dies in den meisten in Kap. 3.1 zitierten Arbeiten, i. d. R. aus Mangel an gesicherten, praktisch verwertbaren Erkenntnissen über die tatsächlichen Verhältnisse bei instationären, periodisch oszillierenden Strömungen. In der allgemein zugänglichen Literatur existiert zwar eine größere Zahl von theoretischen und experimentellen Arbeiten zum Themenkomplex der instationären, insbesondere der pulsierenden und auch der periodisch oszillierenden Strömung, jedoch befassen sich die meisten dieser Arbeiten mit Strömungsbedingungen, die in regenerativen Kreisprozessen kaum anzutreffen sind.

Zum einen muss hier zwischen der theoretisch relativ leicht zu behandelnden Laminarströmung und der in realen Prozessen fast ausschließlich vorliegenden turbulenten Strömung unterschieden werden. Letztere ist erst durch die fortschreitende Leistungssteigerung der verfügbaren EDV-Anlagen sowie durch die neueren Entwicklungen auf dem Gebiet der numerischen Strömungssimulation beschreibbar geworden, wobei insbesondere einige modernere, für instationäre Strömungen anwendbare  $k, \epsilon$ -Modelle zu erwähnen sind.

Zum anderen ist zu unterscheiden zwischen der hydrodynamisch und – im Falle des Wärmeüberganges – thermisch ausgebildeten Strömung, die als relativ leicht handhabbarer Grenzfall bereits in gewissem Umfang untersucht wurde, und der nicht ausgebildeten, durch Einlaufeffekte beeinflussten Strömung, die speziell in den Wärmeübertragern regenerativer Kreisprozesse stets vorliegt. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, dass deren Länge in Strömungsrichtung stets kürzer sein muss als der oszillatorische Verschiebungsweg der hindurchströmenden Fluidelemente, der unter Annahme einer sinusförmigen Bewegung gemäß

$$\Delta x_m(\omega t) = \hat{x}_m \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad (3-55)$$

durch dessen zweifache Amplitude,  $2 \hat{x}_m$ , ausgedrückt werden kann<sup>4</sup>. Andernfalls würde – zumindest bei Annahme einer idealen Kolbenströmung – ein gewisser Teil des Fluides den Wärmeübertrager nie verlassen, folglich im zeitlichen Mittel dessen Wandtemperatur annehmen und somit keinen Beitrag zum Netto-Wärmeaustausch leisten. Es würde lediglich als unnötiges Totvolumen die Druckamplitude reduzieren und wäre als eindeutiges Indiz für eine mangelhafte Prozessauslegung zu werten. Von ORGAN (1975) wurde hier der Begriff des „critical length ratio“ geprägt, in späteren Publikationen (ORGAN 1994, DE MONTE UND GALLI 1997) findet sich stattdessen die Bezeichnung „flushing ratio“, die dem gelegentlich anzutreffenden deutschen Begriff „Gaswechselzahl“ entspricht. Aufgrund des zuvor Gesagten sollte diese Kennzahl stets größer als eins sein. Einem Vorschlag von WATHER, KÜHL ET AL. (1998) folgend wird hier stattdessen der Kehrwert dieser Größe, die bezogene Strömungslänge

$$\Lambda = \frac{\ell}{2\hat{x}_m} = \frac{V_T}{2\hat{V}} \quad (3-56)$$

<sup>4</sup> Der Index  $m$  steht hier für eine Mittelwertbildung über den Strömungsquerschnitt.

verwendet, die mit dem von KÜHL ET AL. (1997, 1997a) im Rahmen ähnlichkeitstheoretischer Untersuchungen zur Prozessoptimierung eingeführten, auf die Gas–Volumenverschiebung  $2\hat{V}$  bezogenen Totvolumen identisch ist. Die Bedeutung dieser Größe wird in Kap. 4 noch eingehender diskutiert werden.

Die am schwierigsten zu modellierende Kombination der beiden genannten Unterscheidungskriterien ist zweifellos der Fall der oszillierenden, nicht ausgebildeten und turbulenten Strömung. Er ist andererseits auch der einzige, der im Rahmen der numerischen Simulation regenerativer Kreisprozesse von praktischer Bedeutung ist. Gerade hierfür lagen in der Vergangenheit kaum gesicherte Erkenntnisse vor, wodurch sich die überwiegende Verwendung von Korrelationen für stationäre Strömungen in den in Kap. 3.1 behandelten Prozessmodellen begründet. Eine theoretisch-numerische Modellierung dieses Falles unter den für diese Prozesse typischen Randbedingungen, die zu praktisch verwendbaren Korrelationen zur Beschreibung des Wärmeüberganges führte wurde erstmals von WALTHER (1999) durchgeführt. Die Ergebnisse wurden von WALTHER, KÜHL ET AL. (1998, 2000) zusammengefasst und bilden auch die Grundlage der Darstellungen in Kap. 3.5.2. Zuvor werden die Ergebnisse einiger früherer Arbeiten zur laminaren wie auch zur ausgebildeten turbulenten Strömung wiedergegeben und diskutiert, da sich auch hieraus einige grundsätzliche Erkenntnisse ableiten lassen.

Die Modellierung der Wärmeübertragung ist zwangsläufig mit der Simulation des Strömungsfeldes verbunden. Umgekehrt übt im allgemeinen Fall temperaturabhängiger Stoffdaten auch das Temperaturfeld einen Einfluss auf die Strömung aus. Hier ist im wesentlichen die Temperaturabhängigkeit der Viskosität und der Dichte zu beachten. Letztere wird darüber hinaus auch durch die überlagerten Schwankungen des Prozessdruckes beeinflusst.

Der Einfluss der Kompressibilität des Arbeitsmediums wurde von WALTHER (1999) am Beispiel der nicht ausgebildeten laminaren Strömung eingehend untersucht und selbst unter Annahme der größten, bei hochverdichtenden Stirlingmotoren auftretenden Druckverhältnisse als vernachlässigbar befunden, d. h. es ist zulässig, die Strömung vereinfachend als inkompressibel zu behandeln, was die mathematische Behandlung wesentlich vereinfacht. Damit wird zugleich auch die Temperaturabhängigkeit der Dichte vernachlässigt, die angesichts der meist nur im Bereich weniger Kelvin liegenden Temperaturdifferenzen zwischen Wand und Fluid ohnehin von weitaus geringerer Bedeutung ist als die Druckabhängigkeit.

Die Temperaturabhängigkeit weiterer Stoffdaten, insbesondere der Viskosität, wird auch unter stationären Bedingungen bei der Beschreibung des Druckverlustes meist vernachlässigt. Bei der Wärmeübertragung wird sie i. d. R. über die Temperaturabhängigkeit der Prandtl-Zahl erfasst, die jedoch bei den hier als Medium in Betracht kommenden Gasen konstant bei  $Pr \approx 0,7$  liegt. Wenn somit unter diesen Bedingungen kein signifikanter Einfluss der Wärmestromrichtung zu erwarten ist, ist die Annahme eines konstanten, temperaturunabhängigen Wertes auch im Falle der Viskosität (und ebenso auch in dem der Wärme- bzw. Temperaturleitfähigkeit, wenn es um die Modellierung der Wärmeübertragung geht) gerechtfertigt.

Die generelle Annahme temperaturunabhängiger Stoffwerte hat wiederum zur Folge, dass das Temperaturprofil keinen Einfluss auf die Strömungsmodellierung ausübt. Seine Berechnung kann daher von ihr entkoppelt werden und anschließend, d. h. nach der Bestimmung des Strömungsprofils, erfolgen. Aus diesem Grunde wird in diesem Kapitel zunächst nur die Problematik der Strömungsmodellierung behandelt, d. h. die Lösung des aus der Massen- und Impulsbilanz hervorgehenden, gekoppelten Differentialgleichungssystems, während die anschließende Integration der Energiebilanzgleichung zur Berechnung des Temperaturfeldes und der Wärmeübertragung Gegenstand des nächsten Kapitels (Kap. 3.5.2) ist.

### 3.5.1.2 Die ausgebildete laminare Strömung

Die frühesten Arbeiten zur oszillierenden Strömung (RICHARDSON UND TYLER 1929, SEXL 1930) befassten sich aus naheliegenden Gründen zunächst mit dem Sonderfall der ausgebildeten laminaren Strömung, dem einzigen, in dem eine geschlossene analytische Lösung zumindest für das kreisförmige Rohr (UCHIDA 1956) und den ebenen Spalt (GEDEON 1986a) existiert. Im Fall der Strömung durch ein Rohr des Radius  $R$  ist dabei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3-57)$$

mit den (komplexen) Randbedingungen

$$\left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\sim} = \left( \frac{dp}{dx} \right)^{\wedge} \cdot e^{i\omega t} \quad ; \quad u(r=R, t) = 0 \quad ; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (3-58)$$

zu lösen. Als Lösung findet man in komplexer Schreibweise

$$\tilde{u}(r, t) = -\frac{d^2}{\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right)^{\wedge} \cdot \frac{1}{i \operatorname{Re}_{\omega}} \left( 1 - \frac{I_0\left(\frac{1}{2} \sqrt{i \operatorname{Re}_{\omega}} \frac{r}{R}\right)}{I_0\left(\frac{1}{2} \sqrt{i \operatorname{Re}_{\omega}}\right)} \right) \cdot e^{i\omega t} \quad (3-59)$$

mit der (in der Literatur auch als Valensi-Zahl bezeichneten) kinetischen Reynolds-Zahl

$$\operatorname{Re}_{\omega} = \frac{\omega d^2}{\nu} \quad (3-60).$$

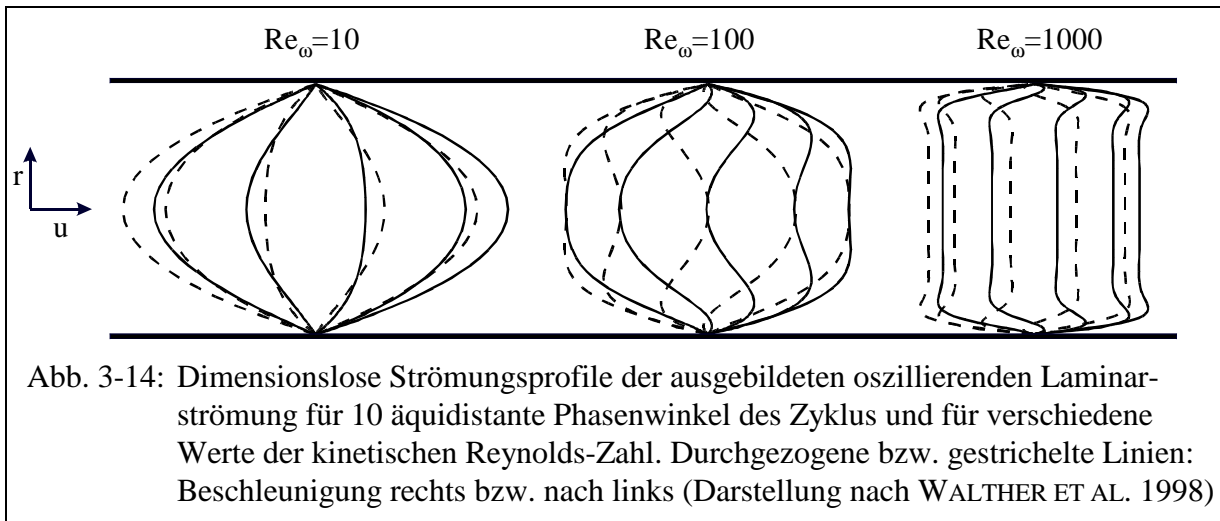
Durch Reihenentwicklung der modifizierten Besselfunktion erster Art nullter Ordnung  $I_0$  lässt sich zeigen, dass sich im Grenzfall  $\operatorname{Re}_{\omega} \rightarrow 0$  das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz der stationären, laminaren Rohrströmung ergibt. Offensichtlich tritt dieser Fall nicht nur für  $\omega \rightarrow 0$ , sondern auch für kleine Rohrdurchmesser ein. Die Abweichungen im Strömungsprofil und -verlauf der ausgebildeten, oszillierenden Laminarströmung vom stationären Fall hängen also ausschließlich von  $\operatorname{Re}_{\omega}$  ab und sind bei kleinen Werten dieser Größe vernachlässigbar. Zu ihrer anschaulichen Darstellung wurde von WALTHER ET AL. (1998) die Strömungsgeschwindigkeit auf den Amplitudenwert  $\hat{u}_m$  der querschnittsgemittelten Geschwindigkeit

$$u_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r \, dr \quad (3-61).$$

bezogen, wobei sich – wiederum in komplexer Schreibweise – die folgende Funktion ergibt:

$$\frac{\tilde{u}(r, t)}{\hat{u}_m} = \frac{I_0\left(\frac{1}{2} \sqrt{i \operatorname{Re}_{\omega}}\right) - I_0\left(\frac{1}{2} \sqrt{i \operatorname{Re}_{\omega}} \frac{r}{R}\right)}{I_2\left(\frac{1}{2} \sqrt{i \operatorname{Re}_{\omega}}\right)} \cdot e^{i\omega t} \quad (3-62)$$

Sie ist in Abb. 3-14 für verschiedene Werte von  $\operatorname{Re}_{\omega}$  grafisch dargestellt. Für  $\operatorname{Re}_{\omega} = 10$  treten offenbar nur geringe Abweichungen vom stationären, parabolischen Strömungsprofil auf. Es ist jedoch bereits zu erkennen, dass die Geschwindigkeit in der Kernzone zeitlich hinter der in Wandnähe zurückbleibt. Dies ist durch die zur Wand hin zunehmenden Schergradienten



und die hierdurch bestimmten Schubspannungskräfte zu erklären. Durch sie wird das Fluid in Wandnähe stärker abgebremst als in der Kernzone, wo Trägheitskräfte dominieren und daher trotz Umkehrung des Druckgradienten die Strömung in die „alte“ Richtung noch länger erhalten bleibt. Das wandnahe Fluid wird somit auch früher in die „neue“ Richtung beschleunigt und eilt deshalb während des gesamten Zyklus den Bereichen in Rohrmitte voraus.

Dieser Effekt wird mit steigender kinetischer Reynolds-Zahl zunehmend deutlicher. Bei sehr hohen Werten, z. B. in dem in Abb. 3-14 dargestellten Fall  $Re_\omega = 1000$ , geht dies so weit, dass der Bereich mit nennenswerten Schergradienten stark in Wandnähe zusammengedrängt wird, während sich in der Kernzone eine von der viskosen Fluidreibung weitgehend unbeeinflusste und daher nahezu kolbenförmige Strömung entwickelt. Deren Verlauf wird überwiegend durch Trägheitskräfte bestimmt, und demzufolge stellt sich hier eine Phasenverschiebung von annähernd  $90^\circ$  gegenüber dem Verlauf des Druckgradienten ein.

Dies legt die Frage nahe, inwieweit der gegenüber der stationären Strömung veränderte Zusammenhang zwischen Druckgradient und mittlerer Strömungsgeschwindigkeit  $u_m$  bereits dadurch beschrieben werden kann, dass man die stationäre Hagen–Poiseuille–Gleichung lediglich um einen zusätzlichen Trägheitsterm erweitert. Setzt man hier ebenfalls einen zeitlichen Verlauf des Druckgradienten gemäß Gl. 3-58 voraus, so wird auf diese Weise eine quasi-stationäre Näherungslösung  $u_m'$  für die Geschwindigkeit definiert:

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)^\wedge \cdot e^{i\omega t} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\rho}{2} u_m' |u_m'| + \rho \frac{du_m}{dt} = 32 \frac{\eta}{d^2} \left( u_m' + \frac{Re_\omega}{32} \frac{du_m'}{d(\omega t)} \right) \quad (3-63).$$

Für  $u_m'$  gilt unter den gegebenen Randbedingungen ebenso wie für  $u_m$  grundsätzlich

$$\tilde{u}_m(\omega t) = \hat{u}_m \cdot e^{i(\omega t + \theta)} \Rightarrow \frac{d\tilde{u}_m}{d(\omega t)} = i \cdot \tilde{u}_m(\omega t) \quad (3-64),$$

und somit folgt aus Gl. 3-63

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)^\wedge \cdot e^{i\omega t} = 32 \frac{\eta}{d^2} \left( 1 + i \frac{Re_\omega}{32} \right) \cdot \hat{u}_m' \cdot e^{i(\omega t + \theta)} \quad (3-65)$$

und damit für die quasi-stationäre Näherungslösung

$$\hat{u}'_m = \frac{d^2}{32\eta} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{Re_\omega}{32} \right)^2}} = \frac{\hat{u}'_{m,stat}}{\sqrt{1 + \left( \frac{Re_\omega}{32} \right)^2}} ; \quad \tan \theta = -\frac{Re_\omega}{32} \quad (3-66).$$

Von SCHWENDIG (1991) wurde die Abweichung dieser Näherungslösung von der exakten, durch Mittelung von Gl. 3-59 gemäß Gl. 3-61 erhaltenen hinsichtlich Betrag und Argument untersucht. Er stellte fest, dass der relative Fehler des Betrages zunächst mit  $Re_\omega$  steigt, ein Maximum von ca. 27% bei  $Re_\omega \approx 100$  durchläuft und danach wieder asymptotisch gegen Null fällt. Der Fehler im Argument durchläuft im gleichen Bereich ein Maximum von ca.  $7^\circ$ , wechselt dann das Vorzeichen und fällt für große Werte von  $Re_\omega$  ebenfalls gegen Null ab. Aufgrund dieser Resultate sieht SCHWENDIG (1991) den Fehler, der durch Anwendung von Gl. 3-63 entsteht, als in vielen Fällen akzeptabel an. Er weist zurecht darauf hin, dass in ausgeführten regenerativen Kreisprozessen die Strömungsdruckverluste der Regeneratoren i. d. R. deutlich größer sind als die der mit ihnen in Serie geschalteten Wärmeübertrager. In ersteren liegt die kinetische Reynolds-Zahl jedoch wegen der geringen hydraulischen Durchmesser maximal in der Größenordnung von Eins, so dass die Annahme einer quasi-stationären Strömung hier stets berechtigt ist. Damit werden die vergleichsweise geringen Fehler bei der Berechnung der Druckverluste in den Wärmeübertragern nach Gl. 3-63 weiter relativiert.

Es sollte hier jedoch berücksichtigt werden, dass der von SCHWENDIG (1991) angegebene relative Fehler des Betrages nur deshalb mit steigender kinetischer Reynolds-Zahl wieder abfällt, weil die gesamte, aus Wandreibungs- und Trägheitsanteil zusammengesetzte Druckdifferenz betrachtet wird und letzterer relativ zu ersterem mit steigender Frequenz zunehmendes Gewicht erlangt. Für die im Rahmen einer Prozesssimulation entscheidende Ermittlung der dissipativen Verluste ist jedoch nur der Reibungsanteil von Bedeutung. Hier nehmen die Abweichungen vom stationären Fall mit  $Re_\omega$  kontinuierlich zu, was qualitativ an den wachsenden wandnahen Geschwindigkeitsgradienten in Abb. 3-14 zu erkennen ist.

Dies kommt auch in dem von SCHWENDIG (1991) zur Beschreibung der Abweichungen entwickelten empirischen Ansatz zum Ausdruck, der auf Gl. 3-65 aufbaut und die Real- und Imaginärteile des Klammerausdruckes durch zwei empirisch für  $Re_\omega < 1000$  korrelierte Faktoren  $K_{re}$  und  $K_{im}$  korrigiert. In leicht abgeänderter Formulierung gilt damit für den Druckgradienten

$$-\left( \frac{dp}{dx} \right) \sim 32 \frac{\eta}{d^2} \left( K_{re}(Re_\omega) + i \frac{Re_\omega}{32} K_{im}(Re_\omega) \right) \cdot \hat{u}_m \cdot e^{i\omega t} \quad (3-67)$$

mit

$$\begin{aligned} K_{re}(Re_\omega) &= 1 + 0,0017 \cdot Re_\omega^{1,3} - 4,075 \cdot 10^{-4} \cdot Re_\omega^{1,5} + 1,642 \cdot 10^{-6} \cdot Re_\omega^2 ; \\ K_{im}(Re_\omega) &= 1 + \frac{1/3}{1 + 0,003070 \cdot Re_\omega - 3,689 \cdot 10^{-7} \cdot Re_\omega^2} \end{aligned} \quad (3-68).$$

Während  $K_{re}(Re_\omega)$  kontinuierlich steigt, nähert sich  $K_{im}(Re_\omega)$  mit wachsender kinetischer Reynolds-Zahl dem Grenzwert Eins. Die Beschreibung der Trägheitseffekte durch Gl. 3-63 wird also umso genauer, je mehr sich das Strömungsprofil der Kolbenströmung annähert. Umgekehrt lässt sich der Grenzwert  $K_{im}(Re_\omega=0) = 4/3$  durch Anwendung des Impulssatzes auf das parabolische Profil der stationären Hagen–Poiseuille-Strömung herleiten. Hier kommt zum Ausdruck, dass die Verwendung des Mittelwertes  $u_m$  im Trägheitsterm der Gl. 3-63 streng genommen nicht korrekt ist, denn die Form des Strömungsprofils übt einen zusätzlichen, durch  $K_{im}(Re_\omega)$  nach Gl. 3-68 beschriebenen Einfluss auf die Trägheitskräfte aus.

### 3.5.1.3 Die nicht ausgebildete laminare Strömung

Da auch die stationäre laminare Strömung bei höheren Reynolds-Zahlen zur Ausbildung ihres Profils eine erhebliche Einlaufänge von bis zu ca. 100 Rohrdurchmessern benötigt, stellt die bislang betrachtete ausgebildete oszillierende Laminarströmung unter den für regenerative Kreisprozesse typischen Bedingungen lediglich einen Grenzfall dar, an dessen analytischer Lösung grundsätzliche Effekte wie die Verschiebung des Verhältnisses zwischen Reibungs- und Trägheitsanteilen und die hiervon abhängige Phasenverschiebung zum Druckgradienten untersucht werden können. Die mathematische Behandlung des praxisnäheren Problems einer nicht ausgebildeten Strömung mit der Randbedingung eines kolbenförmigen Eintrittsprofils ist erheblich schwieriger. Zuvor existierte lediglich eine von der radialen Koordinate abhängige axiale Geschwindigkeit  $u(r,t)$  und somit ließ sich die Navier-Stokes-Gleichung unter impliziter Erfüllung der Massenbilanz bis hin zu Gl. 3-57 vereinfachen. Jetzt erhält man wegen der radialen Ausgleichsströmungen, die bei der allmählichen Ausbildung des Strömungsprofils auftreten, ein nichtlineares Gleichungssystem für die axiale sowie die radiale Geschwindigkeitskomponente  $u(r, x, t)$  bzw.  $v(r, x, t)$ . Mit der maximalen Reynolds-Zahl

$$\hat{Re} = \frac{\hat{u}_m \cdot d}{\nu} \tag{3-69}$$

lässt es sich in dimensionsloser Form nach WALTHER ET AL. (1998) wie folgt formulieren:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial x^*} (r^* v^*) = 0 \tag{3-70}$$

$$\frac{Re_\omega}{\hat{Re}} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x^*} (u^{*2}) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* u^* v^*) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\hat{Re}} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \right] ;$$

$$\begin{aligned} \frac{Re_\omega}{\hat{Re}} \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x^*} (u^* v^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^{*2}) = \\ = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{\hat{Re}} \left[ \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) - \frac{v^*}{r^{*2}} \right] \end{aligned} \tag{3-71}$$

mit

$$r^* = \frac{r}{d} ; \quad x^* = \frac{x}{d} ; \quad \varphi = \omega t ; \quad u^* = \frac{u}{\hat{u}_m} ; \quad v^* = \frac{v}{\hat{u}_m} ; \quad p^* = \frac{p}{\rho \hat{u}_m^2}$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi < \pi : \quad u^* \Big|_{x^*=0} = \hat{u}_m \sin \omega t ; \quad v^* \Big|_{x^*=0} = 0 ; \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=\frac{\ell}{d}} = 0 ; \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=\frac{\ell}{d}} = 0 \\ \pi \leq \varphi < 2\pi : \quad u^* \Big|_{x^*=\frac{\ell}{d}} = \hat{u}_m \sin \omega t ; \quad v^* \Big|_{x^*=\frac{\ell}{d}} = 0 ; \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = 0 ; \quad \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = 0 \end{aligned} \tag{3-72}$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem ist nur numerisch integrierbar. Dabei ergibt sich die Schwierigkeit, dass die Kontinuitätsgleichung (Gl. 3-70) durch die Annahme einer konstanten Dichte entartet ist und keinen Einfluss des Druckes mehr enthält. Führt man nun ausgehend vom Strömungs- und Druckgradientenfeld zu einem Zeitpunkt  $t$  (bzw. einem Phasenwinkel



$\varphi$ ), das als bekannt angenommen sei, mit Gl. 3-71 einen expliziten Integrationsschritt in der Zeit aus, so wird das Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  Gl. 3-70 i. a. nicht erfüllen, da die in ihr enthaltene Verknüpfung der Feldgrößen  $u$  und  $v$  nicht berücksichtigt wurde.

Im Falle einer kompressiblen Strömung könnte die Kontinuitätsgleichung zur simultanen Integration des Druckfeldes als der dritten Feldgröße neben  $u$  und  $v$  verwendet werden. Das Problem besteht also darin, dass sich bei inkompressiblen Strömungen die Zeitableitung des Druckfeldes nicht explizit formulieren lässt. WALTHER (1999) verwendet zu seiner Lösung die ursprünglich von HARLOW UND WELCH (1965) für derartige Fälle entwickelte und bewährte „Marker and Cell“-Methode, die lediglich bezüglich des Geschwindigkeitsfeldes explizit, bezüglich des Druckfeldes jedoch implizit ist. Dabei wird das zunächst unbekannte Druckfeld zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  in den Ortskoordinaten diskretisiert, und nach Einsetzen in Gl. 3-71 werden Näherungslösungen für  $u$  und  $v$  zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  mit Hilfe einseitig vorwärts-gewandter Differenzenquotienten in der Zeit formuliert. Werden diese wiederum in Gl. 3-70 eingesetzt, so ergibt sich eine diskrete Poisson-Gleichung für das Druckfeld, das nun unter Berücksichtigung der Randbedingungen mit Hilfe üblicher iterativer Gleichungslöser bestimmt werden kann. Damit erhält man schließlich eine mit Gl. 3-70 konsistente (d. h. divergenzfreie) Lösung für das Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$ , die dann als Basis für den nächsten Integrationsschritt dienen kann.

Bezüglich weiterer Einzelheiten, z. B: hinsichtlich der Berücksichtigung der Randbedingungen, der Diskretisierung der konvektiven Terme oder der u. a. hiermit im Zusammenhang stehenden Stabilitätsprobleme, sei an dieser Stelle auf die Arbeit von WALTHER (1999) verwiesen. Dies gilt ebenso auch für die analoge Simulation der Strömung in ebenen Spalten, die hier aus Platzgründen nicht dargestellt wird.

Die auf diese Weise erhaltenen Lösungen für das Druck- und Geschwindigkeitsfeld hängen nur von drei dimensionslosen Parametern ab, nämlich der maximalen Reynolds-Zahl, der kinetischen Reynolds-Zahl und dem in den Randbedingungen enthaltenen Verhältnis von Länge zu Rohrdurchmesser  $\ell / d$ . Letzteres lässt sich auch mit Hilfe der bereits durch Gl. 3-56 definierten bezogenen Wärmetauscherlänge ausdrücken, den es gilt

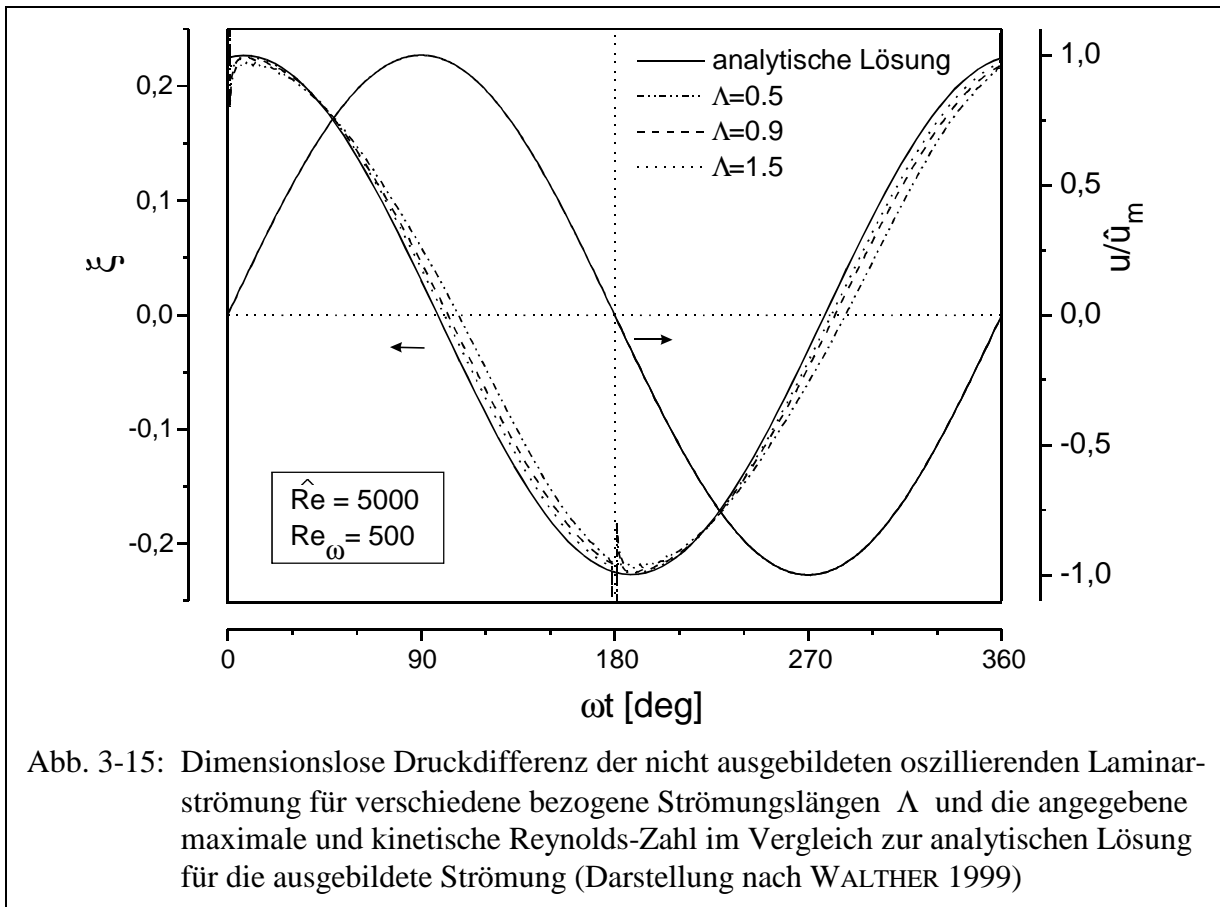
$$\frac{\ell}{d} = 2\Lambda \cdot \frac{\hat{Re}}{Re_{\omega}} \quad (3-73).$$

Von WALTHER (1999) wurden derartige Strömungsfeldberechnungen für die in regenerativen Kreisprozessen typischerweise zu erwartenden Bedingungen durchgeführt, um eine Datenbasis zur Entwicklung von Korrelationen zu schaffen. Im einzelnen wurden die Bereiche

$$1000 \leq \hat{Re} \leq Re_{krit}(Re_{\omega}) ; \quad 50 \leq Re_{\omega} \leq 900 ; \quad 0,2 \leq \Lambda \leq 0,9 \quad (3-74)$$

untersucht. Dabei stand allerdings die in Kap. 3.5.2 behandelte Modellierung des Wärmeübergangs im Mittelpunkt, da die Abweichungen von den Verhältnissen bei stationärer Strömung sich hier am deutlichsten auf die Ergebnisse numerischer Prozesssimulationen auswirken. Hinsichtlich des Druckverlustes ist die zuvor zitierte Argumentation von SCHWENDIG (1991) anzuführen, dass der Strömungsdruckverlust in den Wärmeübertragern i. d. R. klein ist im Verhältnis zu dem des angrenzenden Regenerators. Dessen Druckverlust ist jedoch wegen der dort sehr kleinen Werte von  $Re_{\omega}$  problemlos unter Annahme einer quasi-stationären Strömung zu modellieren.

Dennoch ist in den Simulationsergebnissen von WALTHER (1999) die Information über den Strömungsdruckverlust unmittelbar enthalten, so dass sich die Frage nach den Abweichungen



vom Grenzfall der ausgebildeten Strömung beantworten lässt. In Abb. 3-15 ist für einen Fall relativ hoher maximaler und kinetischer Reynolds-Zahl und für verschiedene Werte von  $\Lambda$  die berechnete Druckdifferenz der nicht ausgebildeten Strömung – einschließlich Trägheitsanteilen – in der dimensionslosen Form eines über die Länge gemittelten Druckverlustbeiwertes

$$\xi = -\frac{d}{\frac{\rho}{2} \hat{u}_m^2} \cdot \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_m = -\frac{\Delta p}{\frac{\ell}{d} \frac{\rho}{2} \hat{u}_m^2} \tag{3-75}$$

im Vergleich zur analytischen Lösung für die ausgebildete Strömung nach Gl. 3-59 dargestellt. Zum einen ist hier die bereits dicht am Grenzwert von  $90^\circ$  liegende Phasenverschiebung zu erkennen, die auf das Dominieren der Trägheitseffekte zurückzuführen ist. Zum anderen erkennt man – wie nicht anders zu erwarten – eine mit abnehmender Strömungslänge wachsende Abweichung von der analytischen Lösung. Allerdings ist auch im Falle  $\Lambda = 0,5$  noch als relativ gering zu bewerten, besonders vor dem Hintergrund der Relation zu den Regenerator-Druckverlusten. Die analytische Lösung bzw. die auf ihr basierenden empirischen Korrelationen nach Gl. 3-68 stellen daher eine in den meisten Fällen ausreichende genaue Grundlage zur Beschreibung des Druckverlustes in vollständig laminar durchströmten Wärmeübertragern dar.

Abschließend ist zur oszillierenden laminaren Strömung allgemein anzumerken, dass insbesondere die Fälle höherer kinetischer Reynolds-Zahlen kaum praxisrelevant sind, da die Strömung dann unter typischen Randbedingungen bereits turbulent ist. Allerdings treten auch dann jeweils nach Umkehr der Strömungsrichtung Phasen mit laminarer Strömung auf.

### 3.5.1.4 Der laminar-turbulente Übergang bei oszillierender Strömung

Wegen der deutlich abweichenden Randbedingungen kann man nicht davon ausgehen, dass der laminar-turbulente Übergang im Falle oszillierender Strömungen von den gleichen Kriterien bestimmt wird wie im stationären Fall. Experimentelle Untersuchungen verschiedener Autoren (HINO ET AL. 1976 und 1983, SEUME UND SIMON 1986, AKHAVAN ET AL. 1991, ECKMANN UND GROTBORG 1991) zeigen übereinstimmend, dass die Beschleunigung des Fluides nach der Richtungsumkehr stabilisierend auf die Strömung wirkt, während eine Verzögerung einen destabilisierenden Effekt hat. Je nach Höhe der maximalen Reynolds-Zahl kommt es daher bereits am Ende der Beschleunigungsphase, spätestens jedoch zu Beginn der Verzögerungsphase, zu einem Umschlag in den turbulenten Strömungszustand, sofern die momentane Reynolds-Zahl einen von  $Re_\omega$  abhängigen kritischen Wert überschreitet. Die Turbulenz bleibt dann während der gesamten Verzögerungsphase erhalten, eine Relaminarisierung tritt erst bei neuerlicher Richtungsumkehr ein.

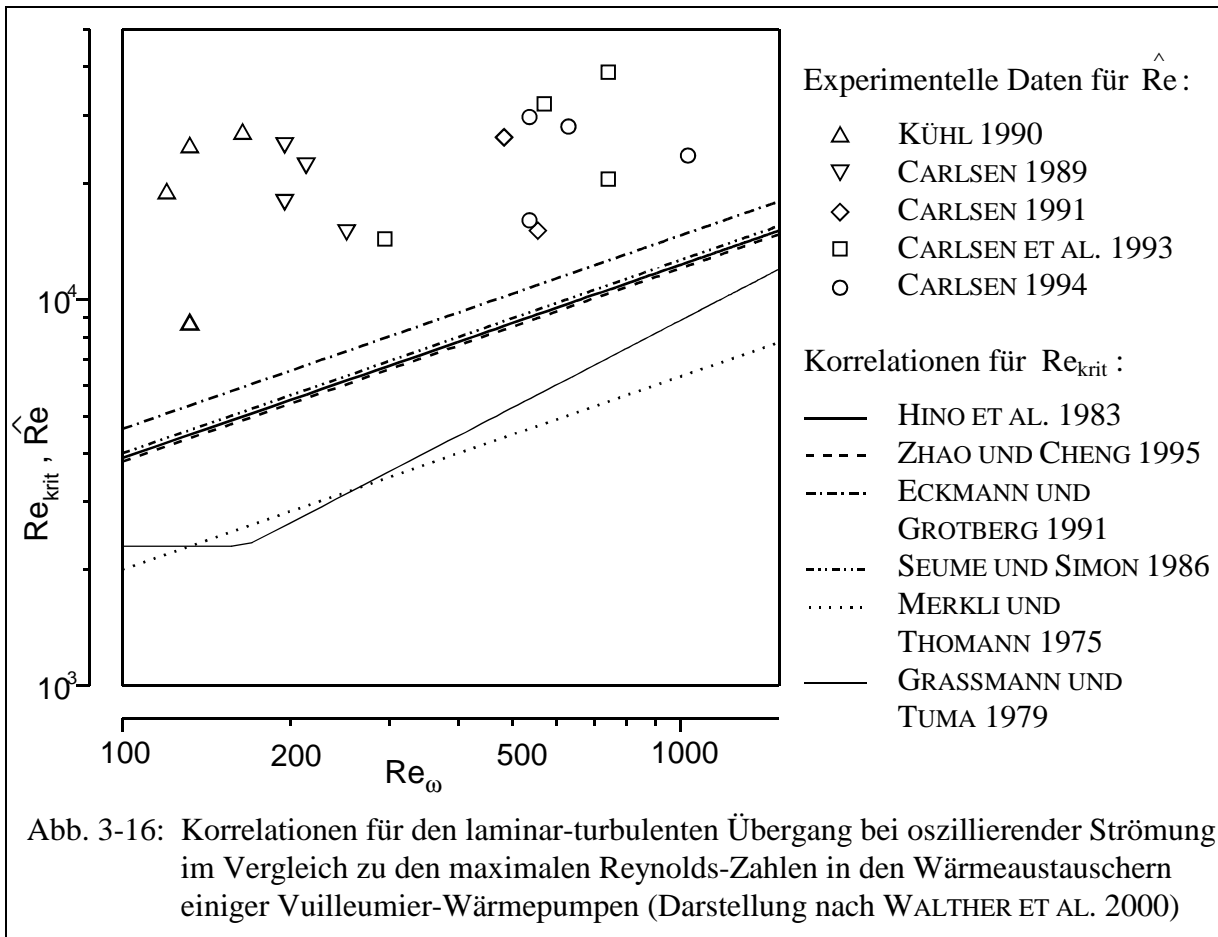
Da bis zu diesem Zeitpunkt das für turbulente Strömungen typische, nahezu kolbenförmige Strömungsprofil vorliegt, entwickelt sich die laminare Strömung in der anschließenden Beschleunigungsphase nicht wie in Abb. 3-14 dargestellt. Vielmehr muss sie nicht nur am Rohreintritt, sondern über die gesamte Länge hinweg als nicht ausgebildet bezeichnet werden. Nach den Beobachtungen von HINO ET AL. (1983) und AKHAVAN ET AL. (1991) ist die laminare Phase mit ihrer Länge von maximal einem Viertel des Zyklus so kurz, dass sich keine nennenswerten Phasenverschiebungen zwischen der Kernströmung und derjenigen in Wandnähe entwickeln können.

Theoretische Arbeiten (AKHAVAN ET AL. 1991a, ZHAO UND CHENG 1995) lassen erkennen, dass die unterschiedliche Ausbreitung von Instabilitäten der Stoke'schen Grenzschicht, die bei beschleunigter Strömung behindert, bei verzögerter Strömung dagegen verstärkt ist, Ursache für dieses Verhalten ist. Mit einer Ausnahme (GRASSMANN UND TUMA 1979) geben alle Autoren als Abhängigkeit der kritischen Reynoldszahl von  $Re_\omega$  einen Zusammenhang der Form

$$Re_{\text{krit}} = K \cdot \sqrt{Re_\omega} \quad (3-76)$$

an, wobei die Konstante  $K$  unterschiedliche Werte annimmt, jedoch meist etwa  $K \approx 400$  beträgt. Lediglich MERKLI UND THOMANN (1975) weichen mit  $K = 200$  deutlich hiervon ab, da sie sich an beginnenden Instabilitäten im Grenzschichtbereich orientieren und damit ein wesentlich schärferes Kriterium für den Umschlagspunkt verwenden als die übrigen Autoren, die stattdessen den Zustand der Kernströmung beobachten. Zusätzlich sollte die kritische Reynoldszahl der stationären Strömung, im Falle der Rohrströmung also  $Re_{\text{krit}} = 2300$ , sicherlich als zusätzliche Untergrenze beibehalten werden, obwohl sie nur von GRASSMANN UND TUMA (1979) ausdrücklich genannt wird. Die von diesen Autoren ebenfalls angegebene Obergrenze für hohe Frequenzen bei einem Wert  $Re_{\text{krit}} = 15300$  wurde durch andere Untersuchungen offenbar bislang nicht bestätigt. Sie wird allerdings auch erst für  $Re_\omega > 2000$  erreicht, was in den meisten Fällen außerhalb des experimentell untersuchten Bereiches liegt.

Nach SEUME UND SIMON (1986) liegen die Betriebsbedingungen in den Wärmeaustauschern ausgeführter Stirlingmaschinen bezüglich des Maximalwertes der Reynolds-Zahl stets deutlich oberhalb dieser Grenzen. Eine entsprechende Untersuchung von WALTHER ET AL. (2000), deren Ergebnisse im Vergleich zu den Korrelationsgleichungen der zitierten Autoren in Abb. 3-16 dargestellt sind, bestätigt dies auch für eine Reihe experimenteller Vuilleumier-Wärmepumpen. Damit wird deutlich, dass eine hinreichend genaue Modellierung der turbulenten Strömung für die Simulation regenerativer Kreisprozesse von weitaus größerer Bedeutung ist als die des ausschließlich laminaren Falles.



### 3.5.1.5 Die Modellierung der oszillierenden turbulenten Strömung

Grundsätzlich sind die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes'sche Differentialgleichung in ihrer allgemeinen (dreidimensionalen) Formulierung auch zur Beschreibung turbulenter Strömungszustände geeignet. Die Lösung ist jedoch nur numerisch möglich und erfordert eine so hohe Gitterauflösung, dass die turbulenten Schwankungsbewegungen in hinreichender Genauigkeit mit erfasst werden. Da deren Größe mit zunehmender Reynolds-Zahl geringer wird, erfordern diese „direkten numerischen Simulationen“ sehr hohe Rechen- und Speicherkapazitäten und wurden daher bislang nur in wenigen Fällen durchgeführt. Eine Vereinfachung stellen demgegenüber die sog. Large-Eddy-Simulationen dar, die sich auf die Auflösung der Grobstrukturen der turbulenten Strömung beschränken.

In jedem Falle wird jedoch auf diese Weise eine Fülle von Information über Details der turbulenten Strömung produziert und verwaltet, die letztlich für die makroskopische Beschreibung der Strömung nicht erforderlich ist. Aus diesem Grunde werden zur phänomenologischen Beschreibung der Turbulenz, wie sie hier benötigt wird, statistische Turbulenzmodelle verwendet, die die Komponenten des Strömungsfeldes, in diesem Falle also  $p$ ,  $u$  und  $v$ , als Summen aus einem Mittelwert<sup>5</sup> und einer überlagerten, turbulenten Schwankungsgröße  $p'$ ,  $u'$  bzw.  $v'$  betrachtet, d. h. es gilt z. B.

$$u(r, x, \varphi) = \bar{u}(r, x, \varphi) + u'(r, x, \varphi) ; v(r, x, \varphi) = \bar{v}(r, x, \varphi) + v'(r, x, \varphi) \quad (3-77).$$

<sup>5</sup> Unter „Mittelwert“ ist hier nicht das zeitliche Mittel im üblichen Sinne zu verstehen, das im Falle einer periodischen Strömung natürlich Null wäre, sondern ein Durchschnittswert über eine große Zahl gleichartig durchlaufener Strömungszyklen, der sowohl vom Ort (d. h. von  $r$  und  $x$ ) als auch von Phasenwinkel  $\varphi$  abhängig ist.

Werden diese Größen in die Differentialgleichungen 3-70 und 3-71 eingesetzt und diese wiederum im Mittel für eine große Zahl von Prozesszyklen betrachtet, so heben sich die turbulenten Schwankungsanteile in allen linearen Gliedern selbstverständlich heraus, nicht jedoch in den nichtlinearen Termen von Gl. 3-71. So gilt (in dimensionsbehafteter Schreibweise) z. B.

$$\overline{\rho \cdot u^2} = \rho \cdot \overline{(\bar{u} + u')^2} = \rho \cdot \overline{\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2} = \rho \cdot \bar{u}^2 + \rho \cdot \overline{u'^2} \quad \text{mit } \rho \cdot \overline{u'^2} > 0 \quad (3-78).$$

Im dreidimensionalen Fall existieren sechs derartige Varianzen und Kovarianzen der Geschwindigkeitskomponenten, die im Produkt mit der Dichte als turbulente Scheinspannungen oder Reynoldsspannungen bezeichnet werden. Sie als Funktion der gemittelten Strömungsgrößen zu bestimmen, ist Aufgabe der statistischen Turbulenzmodelle. In der Praxis am besten bewährt sind hier die sog.  $k, \varepsilon$ -Modelle, die die Reynoldsspannungen zunächst mit Hilfe der turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t$  ausdrücken. Diese ist wiederum eine Funktion der turbulenten Energiedichte  $k$  und deren Dissipationsrate  $\varepsilon$ , für die sich zwei zusätzliche, in ihrer Grundstruktur allen  $k, \varepsilon$ -Modellen gemeinsame Differentialgleichungen formulieren lassen. Sie müssen gemeinsam mit Gl. 3-70 und 3-71 integriert werden, so dass sich als Lösung des Gesamtsystems im Falle turbulenter Strömungen nicht nur die Feldgrößen  $u, v$  und  $p$ , sondern zusätzlich auch  $k, \varepsilon$  und die von ihnen abhängige turbulente Viskosität  $\nu_t$  ergeben.

Da bei oszillierenden Strömungen ein ständiger Wechsel zwischen laminaren und turbulenten Strömungszuständen auftritt, muss die Auswahl des einzusetzenden  $k, \varepsilon$ -Modells unter dem Aspekt erfolgen, wie zuverlässig es derartige Übergänge beschreiben kann. Hier kommen insbesondere die sog. Low-Reynolds-Number-Modelle in Frage, da sie neben der turbulenten auch die molekulare Viskosität  $\nu$  berücksichtigen. Da die Wandschubspannung bei oszillierenden Strömungen durch Null geht, scheiden von diesen Modellen zunächst diejenigen aus, die diese Größe als Bezugsgröße in der Wandabstandscoordinate verwenden. Unter den verbleibenden liefert nach einer vergleichenden Bewertung von HRENYA ET AL. (1995, 1998) dasjenige von FAN ET AL. (1993) die besten Ergebnisse. Es wurde daher von WALTHER (1999), auf dessen Arbeit an dieser Stelle bezüglich weiterer Einzelheiten – z. B. hinsichtlich der Randbedingungen für  $k$  und  $\varepsilon$  – verwiesen sei, für die Strömungsmodellierung verwendet.

Als Beispiel für die von WALTHER durchgeführten Strömungsfeldberechnungen ist die dimensionslose Druckdifferenz nach Gl. 3-75 in Abb. 3-17 dargestellt. Zusätzlich ist zum Vergleich die analytische Lösung für die ausgebildete Laminarströmung sowie die Differenz beider Verläufe eingezeichnet. Es wird deutlich, dass das berechnete Umschlagverhalten gut mit den in Kap. 3.5.1.4 beschriebenen experimentellen Befunden übereinstimmt. Offensichtlich klingt die Turbulenz im Bereich des Nulldurchganges der mittleren Strömungsgeschwindigkeit weitgehend ab, so dass in der anschließenden Bescheunigungsphase zunächst eine laminare Strömung vorliegt. Auch sie ist also durch das gewählte Turbulenzmodell gut beschreibbar.

Der Umschlagspunkt, d. h. das plötzliche Auftreten von Turbulenz bei Überschreiten einer kritischen Reynolds-Zahl, wird ebenfalls gut wiedergegeben. Allerdings stimmt er nicht genau mit den in Abb. 3-16 dargestellten experimentellen Befunden überein, sondern liegt bei allen von WALTHER durchgeführten Simulationen um einen Faktor von ca. 1,5 bis 3 darüber. Die genaue Reproduktion experimentell beobachteter Umschlagskriterien mit statistischen Turbulenzmodellen ist jedoch allgemein schwierig, da die Stabilität einer Strömungsform stark von den Randbedingungen des Einzelfalles abhängt. Dies gilt auch für stationäre Strömungen, wo die Umschlagspunkte bekanntlich ebenfalls nur ungenau vorhersagbar sind. Durch  $k, \varepsilon$ -Modelle werden laminar-turbulente Übergänge nur dann zuverlässig vorhergesagt, wenn deren empirische Konstanten an entsprechende experimentelle Daten angepasst wurden. FAN ET AL. (1993) haben sich nach den Untersuchungen von WALTHER (1999) dabei offenbar vorrangig

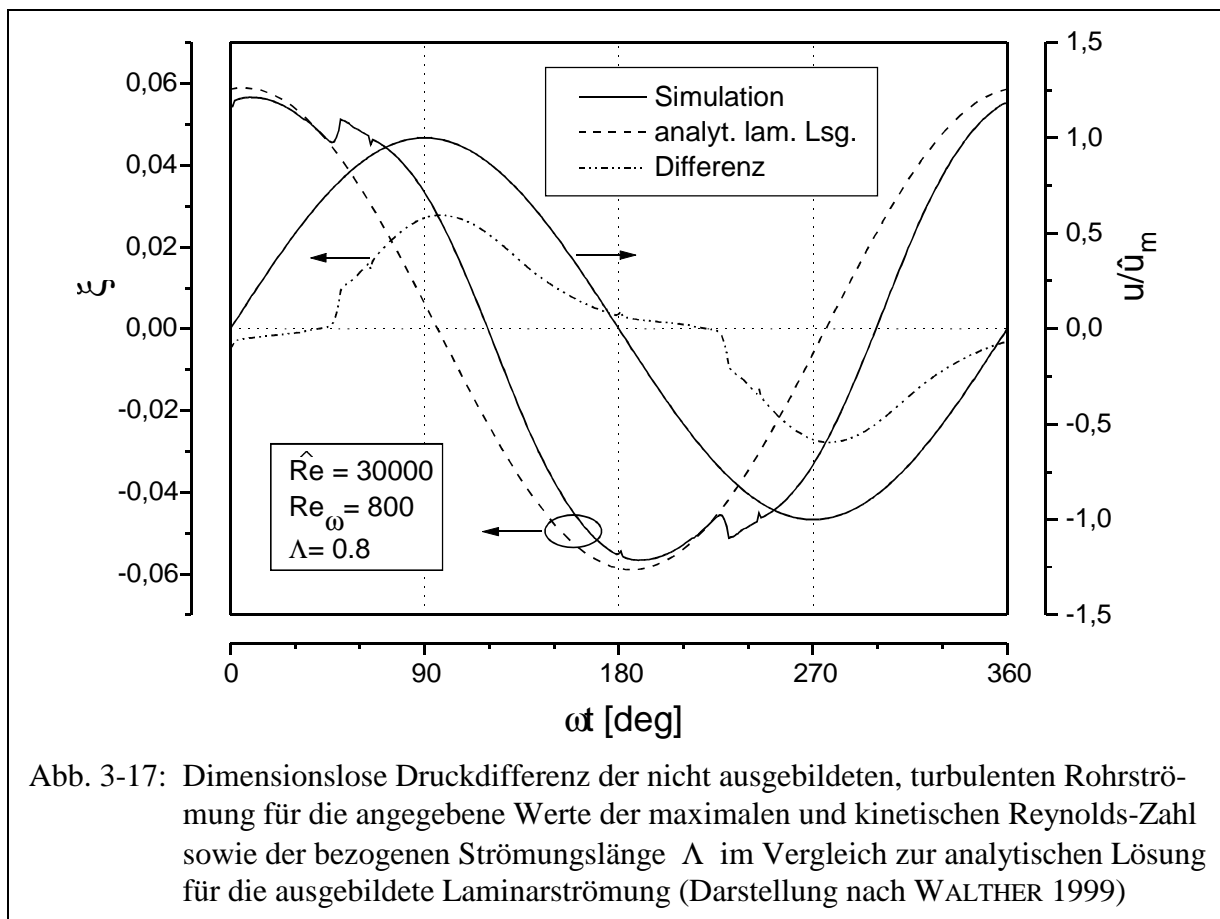


Abb. 3-17: Dimensionslose Druckdifferenz der nicht ausgebildeten, turbulenten Rohrströmung für die angegebene Werte der maximalen und kinetischen Reynolds-Zahl sowie der bezogenen Strömungslänge  $\Lambda$  im Vergleich zur analytischen Lösung für die ausgebildete Laminarströmung (Darstellung nach WALTHER 1999)

an der stationären Rohrströmung orientiert. Turbulenzmodelle, deren Parameter anhand von Daten für oszillierende Strömungen (Abb. 3-16) korreliert wurden, existieren jedoch nach den vorliegenden Erkenntnissen in der allgemein zugänglichen Literatur bislang nicht, so dass diese Unzulänglichkeit der Simulation bis auf weiteres in Kauf genommen werden muss. Sie wirkt sich nur unmittelbar im Bereich des Umschlagpunktes aus, beeinflusst aber nicht die ansonsten korrekte Wiedergabe des Strömungsverlaufes über den gesamten Zyklus und ist somit als eher geringfügig zu bewerten.

## 3.5.2 Modellierung des Wärmeübergangs

### 3.5.2.1 Grundlagen

Die Wärmeübertragung zwischen einem strömenden Fluid und festen Wänden ist ebenso wie der Impulsaustausch ein zwei- bzw. dreidimensionales Phänomen, das physikalisch nur durch Bestimmung des Temperaturfeldes, d. h. durch Lösung der Energieerhaltungsgleichung, zu beschreiben ist. Unter Beibehaltung der bisherigen Annahme konstanter Stoffwerte und für die hier stets vorliegenden kleinen Werte der Eckert-Zahl  $Ec = u^2/c_p \Delta T$ , bei denen die viskose Dissipationsleistung vernachlässigbar ist, lässt sie sich als partielle Differentialgleichung

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T - \rho c_p \nabla(\vec{u} \cdot T) \quad (3-79)$$

formulieren. Sie ist in der Temperatur linear und lässt sich auch für den hier vorliegenden Fall oszillierender Strömungen verhältnismäßig leicht lösen, wenn zuvor das Strömungsfeld nach dem im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Verfahren bestimmt wurde. Wird das Tempe-

raturfeld unter Verwendung des gleichen Gitters örtlich diskretisiert, so kann Gl. 3-79 ausgehend von einer (möglicherweise nur groben) Anfangswertschätzung als gewöhnliche Differentialgleichung in der Zeit integriert werden, wobei gängige explizite Verfahren –WALTHER (1999) verwendet z. B. ein Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung mit Schrittweitensteuerung nach ENGELN-MÜLLGES UND REUTTER (1986) –ausreichend sind. Die Konvergenz zur stationären, periodischen Lösung ist i. d. R. nach weniger als einem Strömungszyklus erreicht.

Ziel muss es jedoch letztlich sein, die so erhaltenen Ergebnisse für die Verwendung in örtlich eindimensionalen Simulationsverfahren aufzubereiten. Dort wird ebenso wie bei der Behandlung stationärer Wärmeübergangsprobleme mit Gl. 3-79 eine Mittelung über den Strömungsquerschnitt durchgeführt, und man erhält für den hier betrachteten Fall der Rohrströmung

$$\rho c_v \frac{\partial T_m}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \lambda \frac{4}{d} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} - \rho c_p \frac{\partial}{\partial x} (u_m \cdot T_b) \quad (3-80).$$

Dabei bezeichnet  $T_m$  den Querschnittsmittelwert der Temperatur, der z. B. für die Bestimmung der Energie oder lokaler Stoffdaten in einem in axialer Richtung differentiellen Volumens relevant ist, und  $T_b$  die adiabate Mischungstemperatur, die zur Bestimmung des durch den Strömungsquerschnitt transportierten Enthalpiestromes benötigt wird. Sie wird auch als Strömungsmittelwert der Temperatur oder mittlere Strömungstemperatur bezeichnet (engl.: „cup mixing temperature“ oder „bulk temperature“). Beide Werte unterscheiden sich dementsprechend in ihrer Definition. Mit  $u_m$  nach Gl. 3-61 gilt für die Rohrströmung

$$T_m = \frac{1}{A} \int_A T dA = \frac{2}{R^2} \int_0^R r T dr ; \quad T_b = \frac{1}{u_m A} \int_A u T dA = \frac{2}{u_m R^2} \int_0^R r u T dr \quad (3-81).$$

Beide Werte sind lediglich im Falle einer Kolbenströmung identisch, bei turbulenter Strömung treten geringe, bei ausgebildeter laminarer Strömung merkliche Abweichungen auf.

In technischen Anwendungsfällen mit stationärer Strömung wird bekanntlich  $T_b$  verwendet, zumal die Bestimmung der Enthalpieströme von vorrangigem Interesse ist. Darüber hinaus sind die Terme in Gl. 3-80, die  $T_m$  explizit enthalten, gleich Null bzw. vernachlässigbar, und der durch Verwendung von  $T_b$  statt  $T_m$  verursachte Fehler bei der Stoffdatenermittlung ist angesichts der begrenzten Genauigkeit der verwendeten empirischen Korrelationen irrelevant und z. T. durch die Korrekturen zur Berücksichtigung der Wärmestromrichtung kompensiert.

Dennoch tritt bei der Mittelung von Gl. 3-79 über den Strömungsquerschnitt ein Informationsverlust ein, der nicht nur den Zusammenhang zwischen  $T_m$  und  $T_b$  betrifft, sondern vor allem auch den Temperaturgradienten an der Wand, der zur Ermittlung des übergelassenen Wärmestroms  $\dot{Q}_W$  bzw. der Wärmestromdichte  $\dot{q}_W$  erforderlich ist. Er muss daher durch einen empirischen Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  bzw. in dimensionsloser Form durch die Nusselt-Zahl ausgedrückt werden. Dabei wird als Bezugsgröße üblicherweise wiederum die Differenz aus Wand- und mittlerer Strömungstemperatur verwendet, d. h. es gilt

$$Nu_b = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{d}{T_W - T_b} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (3-82).$$

Daneben ist auf Basis der Querschnittsmitteltemperatur  $T_m$  auch die alternative Definition

$$Nu_m = \frac{\alpha' d}{\lambda} = \frac{d}{T_W - T_m} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (3-83)$$

möglich, die zu abweichenden Werten der Nusselt-Zahl bzw. des Wärmeübergangskoeffizienten führt. Beide sind durch den ebenfalls unbekanntem Quotienten

$$\tau = \frac{T_b - T_W}{T_m - T_W} \quad (3-84)$$

miteinander verknüpft. Die Information über diese Größe muss bei der Behandlung instationärer Strömungen, bei der sich  $T_m$  aus der Integration von Gl. 3-80 ergibt, ebenso auf geeignete Weise bereitgestellt werden wie die Nusselt-Zahl, da die Umrechnung von  $T_m$  auf  $T_b$  andernfalls nicht möglich ist. Beide Werte sind von den jeweiligen Randbedingungen abhängig, wobei für stationäre Strömungen in der Literatur meist die zwei Standardfälle einer konstanten Wandtemperatur  $T_W$  sowie einer konstanten Wärmestromdichte  $\dot{q}_W$  unterschieden werden. Tabelle 3-2 gibt eine Übersicht über die theoretischen Literaturwerte für  $Nu_b$ ,  $Nu_m$  und  $\tau$  für die ausgebildete, stationäre Laminarströmung und die Kolbenströmung im Rohr und im ebenen Spalt und verdeutlicht so den Einfluss der Geometrie und die erheblichen Unterschiede zwischen den einzelnen Werten im Falle der laminaren Strömung.

Tabelle 3-2: Theoretische Werte der Nusselt-Zahlen  $Nu_b$  und  $Nu_m$  nach Gl. 3-82 und 3-83 sowie des Quotienten  $\tau$  nach Gl. 3-84 für die ausgebildete, stationäre Laminarströmung und die Kolbenströmung unter den Randbedingungen einer konstanten Wandtemperatur und einer konstanten Wärmestromdichte

		Rohr			Spalt		
		$Nu_b$	$Nu_m$	$\tau$	$Nu_b$	$Nu_m$	$\tau$
laminare Strömung	$T_W = \text{const.}$	3,657	5,154	1,409	7,541	9,230	1,224
	$\dot{q}_W = \text{const.}$	4,364	6	1,375	8,235	10	1,214
Kolbenströmung	$T_W = \text{const.}$	5,782		1	9,870		1
	$\dot{q}_W = \text{const.}$	8		1	12		1

Im Falle ausgebildeter oszillierender Strömungen stößt man bei der Verwendung der obigen Definitionen und Randbedingungen z. T. auf begriffliche Schwierigkeiten.

Zum einen ist die Definition der mittleren Strömungstemperatur  $T_b$  nach Gl. 3-81 und damit auch der auf sie bezogenen Größen  $\alpha$  und  $Nu_b$  nicht ohne weiteres verwendbar, da die Nulldurchgänge der querschnittsgemittelten Geschwindigkeit  $u_m$  im allgemeinen Fall eines nicht kolbenförmigen Geschwindigkeitsprofils und eines von  $r$  abhängigen Temperaturfeldes – dies ist der Normalfall – nicht mit denen des Enthalpiestromes zusammenfallen und die Funktion somit eine nicht ohne weiteres behebbare Singularität aufweist.

Zum anderen ist das Fehlen von Einlaufeffekten im Falle oszillierender Strömungen unter den oben genannten Randbedingungen gleichbedeutend mit einem in axialer Richtung unveränderlichen Temperaturfeld. Damit spielt das Strömungsprofil für den radialen Wärmetransport keine Rolle, lediglich die im Falle turbulenter Strömung erhöhte effektive Wärmeleitfähigkeit wäre ggf. zu berücksichtigen. Daher ergeben sich jetzt auch für die ausgebildete Laminarströmung die gleichen Werte für  $Nu_m$  wie bei der Kolbenströmung. Die Randbedingung einer konstanten Wandtemperatur wäre überdies gleichbedeutend mit einer sich dieser asymptotisch



annähernden mittleren Querschnittstemperatur, die einer konstanten Wärmestromdichte mit der eines konstanten zeitlichen Gradienten aller Temperaturen. Beide Fälle sind somit unrealistisch und lediglich als theoretische Vergleichsfälle von Interesse. Bemerkenswert ist jedoch, dass sich die Phasenverschiebung des ebenfalls sinusförmigen Enthalpiestromes zum Massenstrom auch hier vorteilhaft durch komplexe Größen ausdrücken lässt:

$$\tilde{H}(\omega t) = \rho A \tilde{u}_m \left[ h(T_W) + c_p \tilde{\tau} (T_m - T_W) \right] = \hat{H}_W e^{i\omega t} + \hat{m} c_p |\tilde{\tau}| (T_m - T_W) e^{i(\omega t + \theta)} \quad (3-85)$$

mit  $\tilde{u}_m(\omega t) = \hat{u}_m e^{i\omega t}$ ,  $\hat{m} = \rho A \hat{u}_m$ ,  $\hat{H}_W = \hat{m} \cdot h(T_W)$  und  $\theta = \angle \tilde{\tau}$

Sieht man von dem in Energiebilanzen irrelevanten, vom Nullpunkt der Enthalpie abhängigen und mit  $u_m(\omega t)$  phasengleichen Anteil ab, so lässt sich der Enthalpiestrom auf den jetzt komplexen Quotienten  $\tilde{\tau}$  zurückführen. WALTHER ET AL. (1998) geben z. B. für den Fall der ausgebildeten laminaren Rohrströmung bei konstanter Wandtemperatur die analytische Lösung

$$\tilde{\tau}(\text{Re}_\omega) = \frac{1}{1 - \frac{4i \text{Nu}_m}{\text{Re}_\omega}} \frac{I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{i \text{Re}_\omega}\right)}{I_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{i \text{Re}_\omega}\right)} \quad (3-86)$$

an. Offensichtlich handelt es sich um eine komplexe, nur von  $\text{Re}_\omega$  abhängige Konstante, die die Phasenverschiebung zwischen Enthalpie- und Massenstrom beschreibt. Diese Vorgehensweise ist grundsätzlich auch dann anwendbar, wenn die mittlere Querschnittstemperatur  $T_m$  nicht wie hier eine monotone Funktion der Zeit ist, sondern auch periodische, durch komplexe Funktionen darstellbare Anteile enthält. Insofern ist dieser Ansatz auch für die nachfolgend behandelte Beschreibung nicht ausgebildeter Strömungen geeignet, wo das zeitliche Mittel des Enthalpiestromes nicht wie im vorliegenden Fall verschwindet.

Eine weitere mögliche Randbedingung, die im Falle ausgebildeter oszillierender Strömungen von Interesse ist, ist die eines konstanten axialen Gradienten der Wandtemperatur. In diesem Falle erhält man stationär-periodische Lösungen für den übertragenen Wärmestrom sowie für die Querschnitts- und Strömungsmitteltemperatur. Da die momentane Wärmestromdichte in erster Linie vom Schergradienten in Wandnähe abhängt, während die Querschnittsmitteltemperatur vom gesamten Strömungsprofil beeinflusst wird, ist i. a. auch hier eine Phasenverschiebung von  $\dot{q}_W$  gegenüber der treibenden Temperaturdifferenz  $T_W - T_m$  zu erwarten. Sie kann nach einem auf PFRIEM (1940) zurückgehenden Ansatz durch eine komplexe Formulierung der Newton'schen Abkühlungsgleichung ausgedrückt werden:

$$\tilde{q} = \frac{\lambda}{d} \tilde{\text{Nu}}_m (T_W - \tilde{T}_m) \quad (3-87)$$

Für den Realteil der komplexen Wärmestromdichte erhält man schließlich mit

$$\begin{aligned} \tilde{T}_m(\omega t) = T_W + \hat{T}_m e^{i\omega t} &\Rightarrow \frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial(\omega t)} = -i \cdot (T_W - \tilde{T}_m(\omega t)) \\ \Re(\tilde{q}) &= \frac{\lambda}{d} \left[ -\Re(\tilde{\text{Nu}}_m) \cdot \hat{T}_m \cos \omega t + \Im(\tilde{\text{Nu}}_m) \cdot \hat{T}_m \sin \omega t \right] = \\ &= \frac{\lambda}{d} \left[ \Re(\tilde{\text{Nu}}_m) \cdot (T_W - T_m(\omega t)) - \Im(\tilde{\text{Nu}}_m) \cdot \frac{\partial T_m}{\partial(\omega t)} \right] \end{aligned} \quad (3-88).$$

WALTHER (1999) erhält für die beschriebene Randbedingung als analytische Lösung

$$\tilde{Nu}_m(Re_\omega, Pr) = -\frac{i Re_\omega Pr}{4} \cdot \frac{1 - F(Re_\omega, Pr)}{1 - Pr \cdot F(Re_\omega, Pr)} \tag{3-89}$$

wobei im Falle der Rohrströmung

$$F(Re_\omega, Pr) = \frac{I_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{i Re_\omega}\right) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{i Re_\omega Pr}\right)}{I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{i Re_\omega}\right) I_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{i Re_\omega Pr}\right)} \tag{3-89a}$$

und für den ebenen Spalt mit  $d = d_h = 2 h$

$$F(Re_\omega, Pr) = \frac{1 - \tanh\left(\frac{1}{4}\sqrt{i Re_\omega}\right) / \frac{1}{4}\sqrt{i Re_\omega}}{1 - \tanh\left(\frac{1}{4}\sqrt{i Re_\omega Pr}\right) / \frac{1}{4}\sqrt{i Re_\omega Pr}} \tag{3-89b}$$

gilt. In Abb. 3-18 ist der Verlauf nach Gl. 3-89 in der komplexen Ebene für beide Fälle dargestellt. Offenbar ist zunächst für steigende Werte von  $Re_\omega$  vor allem eine Veränderung im Argument zu erkennen, während der Betrag annähernd auf dem jeweiligen Wert für die stationäre laminare Strömung bei konstanter Wärmestromdichte  $\dot{q}_W$  ( $Nu_m = 6$  bzw.  $Nu_m = 10$ , Tabelle 3-2) verharrt und sogar leicht fällt. Erst für höhere Werte der kinetischen Reynolds-Zahl ( $Re_\omega > 100$  bzw.  $Re_\omega > 300$ ) ist ein deutlicher Anstieg des Betrages zu verzeichnen, während sich das Argument asymptotisch dem Grenzwert von  $45^\circ$  nähert. Wie schon erwähnt treten derartige Strömungszustände in der Praxis allerdings kaum auf, so dass als wesentliches Ergebnis vor allem die Phasenverschiebung des Wärmestromes im Vergleich zum stationären Fall festzuhalten ist.

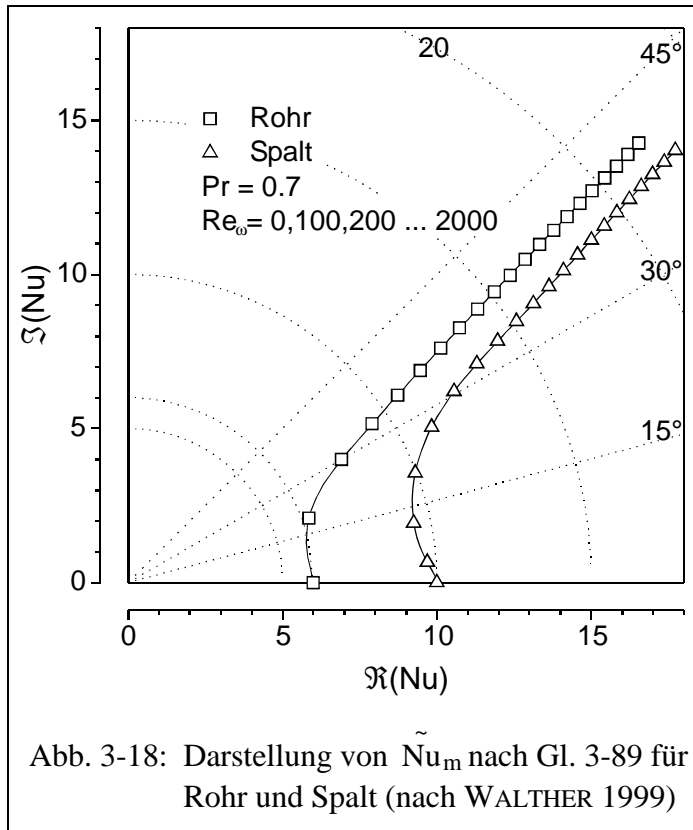


Abb. 3-18: Darstellung von  $\tilde{Nu}_m$  nach Gl. 3-89 für Rohr und Spalt (nach WALTHER 1999)

### 3.5.2.2 Wärmeübergang bei nicht ausgebildeter, laminarer Strömung

Die Betrachtung der ausgebildeten Strömung unter angegebenen Randbedingungen kann zwar wertvolle Hinweise auf die prinzipiellen Phänomene und Ansätze zu ihrer Beschreibung liefern. Für die praktische Verwendung in örtlich eindimensionalen Simulationsmodellen für regenerative Kreisprozesse ist jedoch nur der Fall einer konstanten Wandtemperatur in Verbindung mit einer nicht ausgebildeten, sowohl hydrodynamisch als auch thermisch durch die Eintrittsbedingungen geprägten Strömung relevant. Seine Modellierung ist auf der Basis der zuvor gemäß Kap. 3.5.1.3 berechneten Strömungsfelder möglich und erfordert unter der Vor-

aussetzung konstanter Stoffdaten lediglich die anschließende Integration von Gl. 3-79, die sich für den Fall der Rohrströmung in dimensionsloser Form als

$$\frac{\text{Re}_\omega}{\hat{\text{Re}}} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left( u^* \vartheta \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* v^* \vartheta \right) = \frac{1}{\hat{\text{Re Pr}}} \left[ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \vartheta}{\partial r^*} \right) \right] \quad (3-90)$$

formulieren lässt. Die dimensionslose Temperatur

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_W - T_0} \quad (3-91)$$

ist dabei mit der Eintrittstemperatur des Fluides  $T_0$  zu bilden, und die übrigen Größen sind wie in Gl. 3-70 und 3-71 definiert.

Von WALTHER (1999) wurden derartige Rechnungen auf der Basis der zuvor ermittelten Strömungsfelder für die in Gl. 3-74 angegebenen Bereiche durchgeführt und zur Ermittlung der lokalen wie auch der integralen, über die bezogene Strömungslänge  $\Lambda$  gemittelten Wärmestromdichte in Abhängigkeit von der mittleren Querschnittstemperatur  $T_m$  ausgewertet.

Es ist dabei festzustellen, dass die lokale Wärmestromdichte unmittelbar am Eintritt sehr hohe Werte annimmt und im Grenzfall  $x \rightarrow 0$  bzw.  $x \rightarrow \ell$  wegen der verschwindenden Grenzschicht unendlich wird, so wie es auch von der stationären Einlaufströmung bekannt ist. Weiterhin ist während der jeweiligen Strömungsphase – bedingt durch das mit  $T_0$  eintretende Fluid – ein in Strömungsrichtung fortschreitender Temperatursprung zu beobachten, der allerdings wegen des sich allmählich ausbildenden laminaren Strömungsprofils zunehmend abgeflacht erscheint. Dieser Sprung findet sich qualitativ auch bei der lokalen Wärmestromdichte wieder, jedoch ist grundsätzlich – wie schon zuvor bei der ausgebildeten Strömung (s. o.) – keine unmittelbare Proportionalität festzustellen. Vielmehr treten auch hier Phasenverschiebungen zwischen Wärmestromdichte und treibender Temperaturdifferenz auf. Aus diesem Grunde wurde der streng nur für sinusförmige Temperaturverläufe gültige, komplexe Ansatz nach Gl. 3-88 von WALTHER (1999) auch hier zur Korrelation der erhaltenen Resultate verwendet, da er grundsätzlich zur Wiedergabe der Phasenverschiebungen geeignet ist. Für die lokale Wärmestromdichte gilt danach

$$\left| \tilde{\text{Nu}}_m \right| = 5,154 + 8,17 \cdot 10^{-3} \text{Re}_\omega^{0,966} \cdot \lambda^{-0,237} + 0,0194 \left| \frac{\text{Re}}{\hat{\text{Re}}} \right|^{0,815} \lambda^{-1,06} \text{Re}_\omega^{0,519} \quad ;$$

$$\angle \tilde{\text{Nu}}_m = 1,09 \lambda^{0,144} \text{Re}_\omega^{0,318} \quad [\text{deg}] \quad (3-92)$$

mit der analog zur bezogenen Strömungslänge  $\Lambda$  (Gl. 3-56) definierten, jeweils vom Strömungseintritt aus zu zählenden, dimensionslosen Längenkoordinate

$$\lambda = \frac{x}{2\hat{x}_m} \quad ; \quad 0 \leq \lambda \leq \Lambda \quad (3-93).$$

Da es sich sowohl bei der Nusselt-Zahl als auch bei der treibenden Temperaturdifferenz in Gl. 3-87 um komplexe Größen handelt, ist die entsprechende Korrelation für die integrale Wärmestromdichte nicht ohne weiteres durch Integration von Gl. 3-92 zu ermitteln. Vielmehr ist es hier zweckmäßig, zur Verknüpfung der über die Länge gemittelten Größen

$$\bar{q}_W = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \dot{q}_W(\lambda) d\lambda \quad \text{und} \quad \overline{T_W - T_m} = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda (T_W - T_m(\lambda)) d\lambda$$

die folgende, unabhängig von Gl. 3-92 angepasste Korrelation anzugeben (WALTHER 1999):

$$\left| \bar{Nu}_m \right| = 5,154 + 0,0325 Re_\omega^{0,787} \Lambda^{-0,358} + 0,3267 \left| \frac{Re}{\hat{Re}} \right|^{0,952} \left( \frac{Re_\omega}{\Lambda} \right)^{0,490} (1 + \Lambda)^{-0,592} ;$$

$$\angle \bar{Nu}_m = 0,0745 Re_\omega^{0,844} \quad [\text{deg}] \quad (3-94)$$

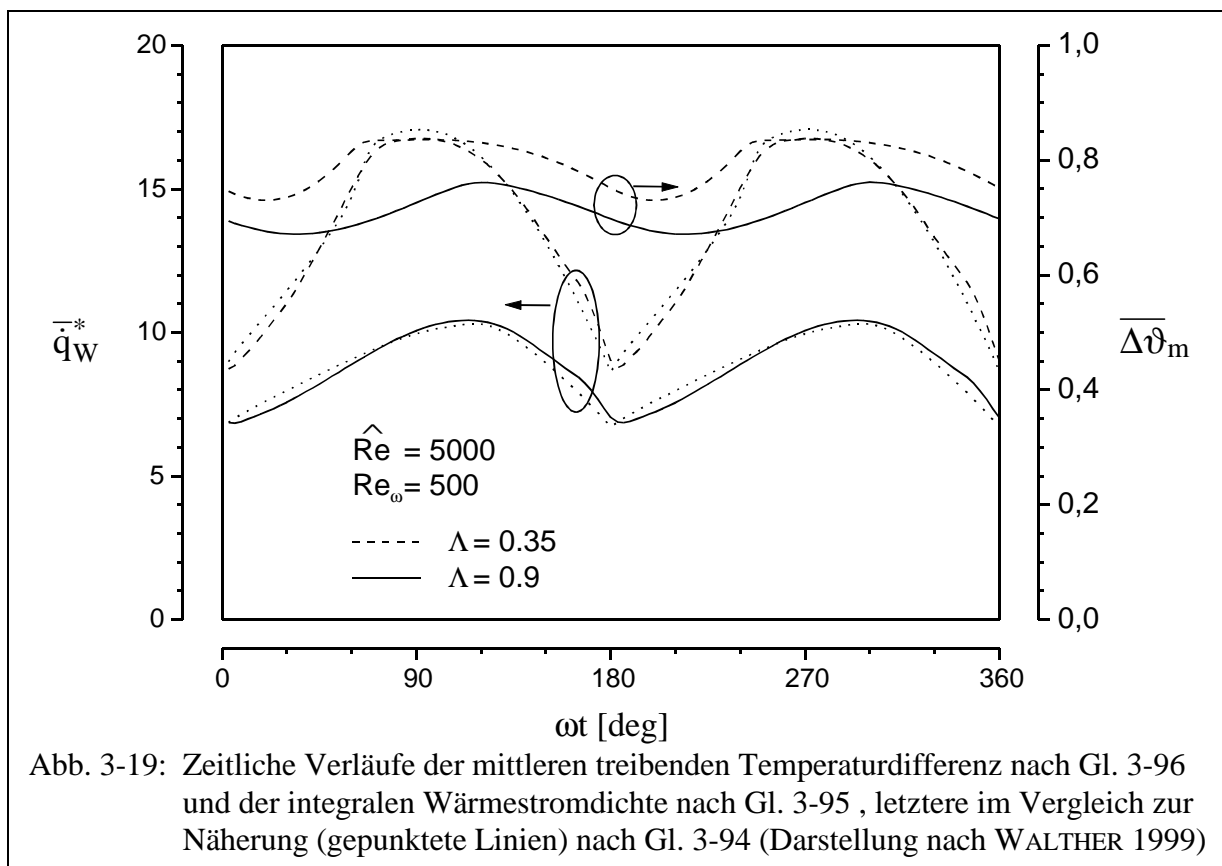
Zur Darstellung bietet sich die dimensionslose Formulierung der Wärmestromdichte als

$$\bar{q}_W^* = \frac{\bar{q}_W \cdot d}{\lambda(T_W - T_0)} \quad (3-95)$$

und der mittleren treibenden Temperaturdifferenz als

$$\overline{\Delta\vartheta_m} = \frac{\overline{T_W - T_m}}{T_0 - T_m} = 1 - \bar{\vartheta}_m = 1 - \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \vartheta_m(\lambda) d\lambda \quad (3-96)$$

an. Abb. 3-19 zeigt als Beispiel eine Darstellung der aus dem Temperaturfeld ermittelten integralen Wärmestromdichte im Vergleich zu den mit Gl. 3-94 berechneten Verläufen für zwei verschiedene bezogene Strömungslängen. Da die treibende Temperaturdifferenz nicht genau sinusförmig verläuft, ist zur Auswertung von Gl. 3-94 (ebenso wie auch von Gl. 3-92) die die Zeit- bzw. Winkelableitung von  $T_m$  enthaltende Umformung gemäß Gl. 3-88 zu verwenden.



Offensichtlich gibt die Korrelation die ursprünglichen Verläufe mit befriedigender Genauigkeit wieder. Im Grenzfall  $Re_\omega \rightarrow 0$  nimmt sie den in Tabelle 3-2 angegebenen Wert für  $Nu_m$  bei stationärer Strömung und konstanter Wandtemperatur an. Hält man sich weiterhin vor Augen, dass der Quotient aus  $\bar{q}_W^*$  und der ebenfalls dimensionslosen treibenden Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta_m$  im stationären Fall der Nusselt-Zahl entspräche, so wird deutlich, dass neben der Phasenverschiebung demgegenüber auch eine deutliche betragsmäßige Steigerung des übertragenen Wärmestroms zu verzeichnen ist.

Um in eindimensionalen Simulationsmodellen die Energiebilanz gemäß Gl. 3-80 auswerten zu können, ist neben der Bestimmung des übertragenen Wärmestromes die Ermittlung des Enthalpiestromes auf der Basis der querschnittsgemittelten Temperatur  $T_m$  erforderlich. Im Falle der ausgebildeten oszillierenden Strömung war dies mit Hilfe der komplexen Gleichung 3-85 möglich, wobei der Quotient  $\tilde{\tau}$  für konstante Wandtemperatur analytisch gemäß Gl. 3-86 bestimmbar war. Zur Beschreibung des Enthalpiestromes bei nicht ausgebildeter Strömung wurde dieser Ansatz von WALTHER ET AL. (1998) durch empirische Korrekturfaktoren gemäß

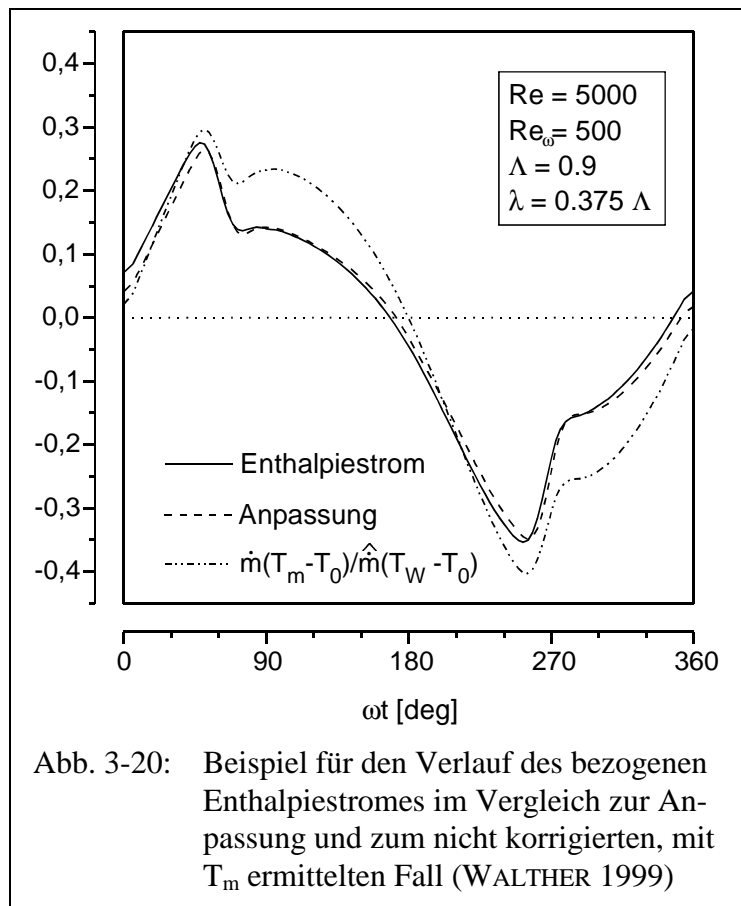
$$\begin{aligned} \dot{H}(\omega t) = & \rho A u_m(\omega t) h(T_W) + \\ & + \rho c_p A \cdot \zeta_1 \cdot \Re(\tilde{\tau}(Re_\omega)) \cdot u_m(\omega t)(T_m(\omega t) - T_W) + \\ & + \rho c_p A \cdot \zeta_2 \cdot \Im(\tilde{\tau}(Re_\omega)) \cdot \frac{\partial}{\partial(\omega t)} [u_m(\omega t)(T_m(\omega t) - T_W)] \end{aligned} \quad (3-97)$$

mit  $\zeta_1 = 1 + \frac{1}{(9,025 \lambda + 1)^2} \frac{1 - \Re(\tilde{\tau})}{\Re(\tilde{\tau})}$  ;  $\zeta_2 = \tanh(0,764 \lambda^{0,603})$

erweitert. Dabei wurde wiederum der Imaginärteil des komplexen Produktes aus mittlerer Strömungsgeschwindigkeit und Temperaturdifferenz durch dessen Zeitableitung ersetzt, um die Anwendung der angegebenen Beziehung auch für nicht genau sinusförmige Verläufe zu ermöglichen. Abb. 3-20 zeigt ein Beispiel für den ursprünglich berechneten Verlauf des Enthalpiestromes im Vergleich zur Anpassung (Gl. 3-97) und zum nicht korrigierten Fall, jeweils in dimensionsloser Form als

$$\dot{H}^* = \frac{\dot{H}(\omega t) - \dot{m} \cdot h(T_0)}{\hat{m} \cdot [h(T_W) - h(T_0)]}$$

Offensichtlich würde bei Berechnung des Enthalpiestromes auf der Basis von  $h(T_m)$  ein nennenswerter Fehler entstehen, der durch Anwendung von Gl. 3-97 weitgehend vermieden werden kann.



### 3.5.2.3 Wärmeübergang bei nicht ausgebildeter, turbulenter Strömung

Die Behandlung des Wärmeübergangs bei nicht ausgebildeter, turbulenter Strömung ist grundsätzlich auf der Basis der zuvor berechneten Geschwindigkeitsfelder ebenso durch Integration von Gl. 3-90 möglich wie im laminaren Fall. Allerdings ist im turbulenten Fall auch das Temperaturfeld als Summe eines über eine Vielzahl von Zyklen gemittelten Verlaufes und einer additiv überlagerten Schwankungsgröße  $T'$  aufzufassen. Wird Gl. 3-90 also für den turbulenten Fall unter Berücksichtigung der Schwankungsgrößen  $u'$ ,  $v'$  und  $T'$  formuliert und anschließend wiederum eine Phasenmittelung für die Gleichung durchgeführt, so verbleiben in Analogie zu den Reynolds-Spannungen aufgrund der Produktterme aus Geschwindigkeit und Temperatur die sog. turbulenten Wärmestromdichten  $\rho c_p \overline{u'T'}$  und  $\rho c_p \overline{v'T'}$ , die ebenso wie erstere mit Hilfe des verwendeten Turbulenzmodells bestimmt werden müssen.

Ähnlich wie dabei die Reynolds-Spannungen durch die turbulente Viskosität  $\nu_t$  ausgedrückt werden, wird zu diesem Zweck hier die turbulente Temperaturleitfähigkeit  $a_t$  verwendet. Das Verhältnis beider Größen wird als turbulente Prandtl-Zahl bezeichnet, für die verschiedene, z. T. relativ aufwändige Hypothesen entwickelt wurden (z. B. KAYS UND CRAWFORD 1993). Nach den Untersuchungen verschiedener Autoren (MYONG ET AL. 1989, MCELIGOT UND TAYLOR 1996) sind auf diese Weise jedoch bei der Bestimmung der Nusselt-Zahl keine signifikanten Verbesserungen gegenüber der einfachen Reynolds-Analogie

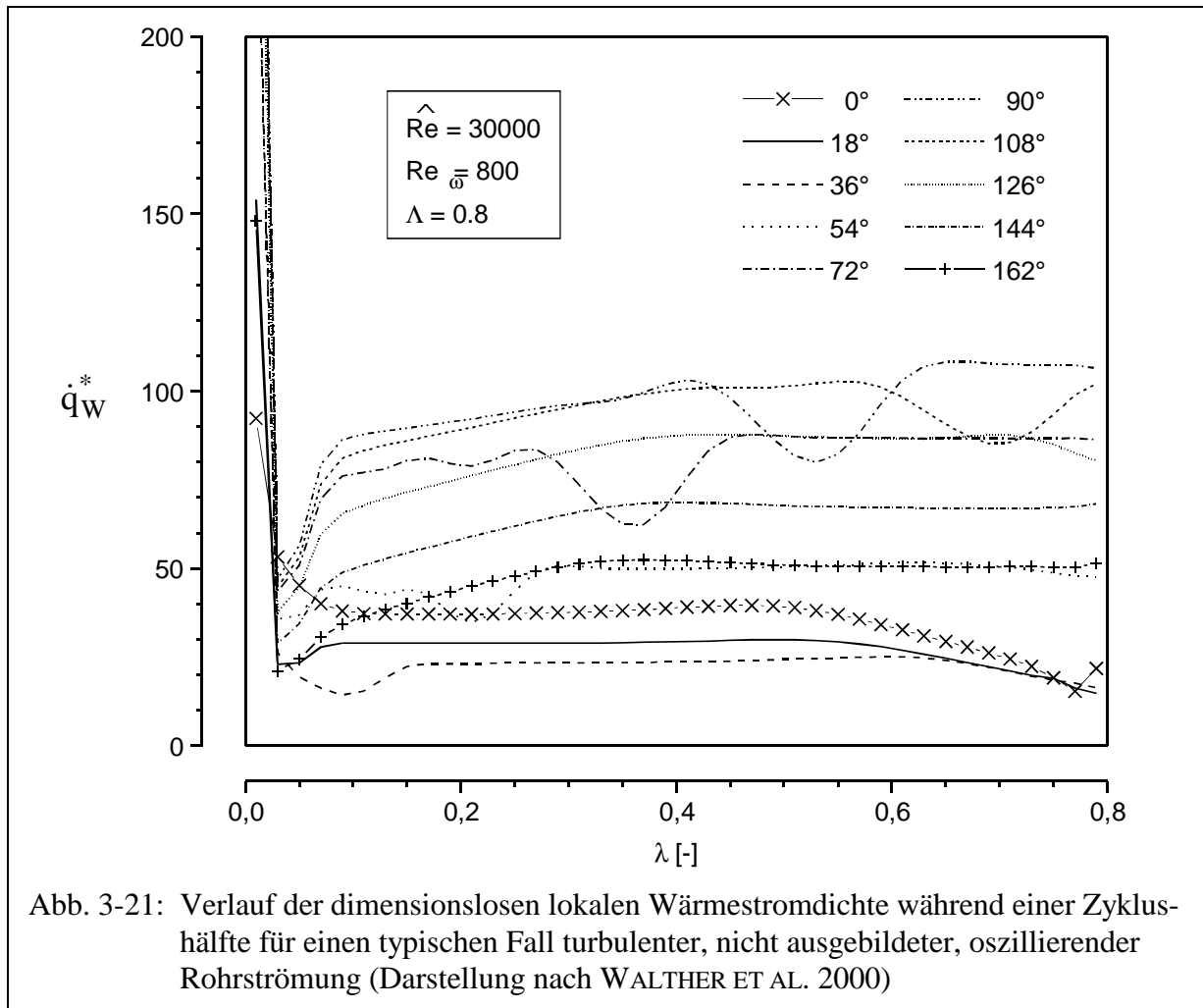
$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{a_t} = 1 \quad (3-98)$$

zu erzielen. Aus diesem Grunde ging WALTHER bei der Bestimmung der Temperaturfelder für turbulente Strömungen von dieser einfachen Hypothese aus.

Wegen der jeweils nach dem Richtungswechsel der Strömung auftretenden Phasen mit laminarer Strömung ist das Temperaturfeld und der hiervon abhängige Wärmeübergang in seinem örtlichen und zeitlichen Verlauf jetzt wesentlich komplexer als im Fall ausschließlich laminarer Strömung. Abb. 3-21 zeigt den Verlauf der lokalen, auf die treibende Temperaturdifferenz bezogenen Wärmestromdichte in dimensionsloser, analog zu Gl. 3-95 definierter Form. Sie entspräche somit im stationären Fall einer auf  $T_m$  bezogenen lokalen Nusselt-Zahl.

Die extrem hohen, gegen unendlich strebenden Werte unmittelbar am Eintritt sind auch von stationären Einlaufströmungen bekannt und ebenso wie auch bei der laminaren Strömung auf die zunächst verschwindend geringe Grenzschichtdicke zurückzuführen. Während der Verlauf bei  $0^\circ$  noch von der abklingenden Turbulenz aus der vorhergehenden Halbphase bestimmt wird, stellt man bei den nachfolgenden Verläufen ( $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $54^\circ$ ) geringe durch die jetzt laminare Strömung bedingte Werte fest. Das mit dem einlaufbedingten Temperatursprung durch das Rohr laufende Minimum ist dabei – wie auch in der Folge – durch den auch hier auftretenden Phasenversatz zwischen der treibenden Temperaturdifferenz und der dieser vorauseilenden Wärmestromdichte bedingt.

Nach dem erneuten Umschlag in den turbulenten Strömungszustand, der sich im vorliegenden Fall bereits bei  $54^\circ$  ankündigt und bei  $72^\circ$  erfolgt ist, steigt der bezogene Wärmestrom – wie nicht anders zu erwarten – deutlich an und erreicht etwa bei  $108^\circ$  sein Maximum. Für die nachfolgend dargestellten Phasenwinkel ergeben sich wegen der sinkenden Strömungsgeschwindigkeit und des damit rückläufigen Turbulenzgrades niedrigere Werte, wobei die Verläufe über der Länge ungestörter erscheinen, weil der von der Strömungsumkehr herrührende Temperatursprung inzwischen durch das Rohr hindurchgelaufen ist.



Auffällig ist das bei allen Kurven unmittelbar nach dem Eintritt auftretende Minimum. Es ist darauf zurückzuführen, dass sich die Turbulenz erst nach einer gewissen Einlaufänge voll entwickelt. Unmittelbar am Eintritt bildet sich daher in allen Fällen zunächst eine quasi laminare Grenzschicht aus, so dass sich die bezogene Wärmestromdichte zunächst auf den bei ausgebildeter laminarer Strömung zu erwartenden Grenzwert der Nusselt-Zahl hin entwickelt, bevor es wegen der sich ausbildenden Turbulenz zu einem erneuten Anstieg kommt.

WALTHER ET AL. (2000) geben sowohl für die hier dargestellte lokale als auch für die integrale Wärmestromdichte Korrelationen an, die jedoch nicht auf Gl. 3-88 basieren, sondern auf einer modifizierten, gegenüber der tatsächlichen Strömung phasenversetzten Reynolds-Zahl

$$Re' = Re \cdot \cos \theta + \frac{\partial Re}{\partial(\omega t)} \cdot \sin \theta \tag{3-99},$$

bei der der Imaginärteil analog zu Gl. 3-88 durch die Winkelableitung ersetzt wurde. Auf diese Weise kann der bei turbulenter Strömung auftretende Phasenversatz zwischen Wärmestrom und Strömungsgeschwindigkeit ebenfalls ausgedrückt werden. Zur Beschreibung der jeweils nach Richtungsumkehr auftretenden Phase laminarer Strömung ist zusätzlich eine von Re unabhängige, separate Korrelation erforderlich. Für die lokale Wärmestromdichte gilt damit

$$Nu_m = Nu_l \quad \text{für} \quad |Re| < 400 \sqrt{Re_\omega} \quad \text{und} \quad Re \cdot \frac{\partial Re}{\partial(\omega t)} > 0 \quad ,$$

d. h. für die laminare Strömung während der Beschleunigungsphase, und ansonsten

$$\text{Nu}_m = \max \left\{ 6,230 \cdot 10^{-6} \cdot |\text{Re}|^{1,191} \cdot \left( 1 + 42,33 \left( \frac{x}{d} \right)^{0,152} \right); \text{Nu}_1 \right\} \quad (3-100)$$

mit  $\text{Nu}_1 = 10,78 + 16,86 \cdot 10^{-6} \cdot \text{Re}_\omega^{0,557} \cdot \hat{\text{Re}}^{0,980}$

und  $\theta = 2,312 \left( \frac{\text{Re}_\omega}{\hat{\text{Re}}} \right)^{0,745} \left( \frac{x}{d} \right)^{0,219} \quad [\text{rad}] \quad (3-100a).$

Diese Korrelation gibt die im Grenzfall unendlich hohen Werte der lokalen Wärmestromdichte unmittelbar am Rohreintritt nicht wieder, sondern ist erst ab dem danach auftretenden Minimum anwendbar. Da der so nicht erfasste Bereich sehr kurz ist (im Falle von Abb. 3-21 nur ca. 1,5 d), ist sein Einfluss auf den integralen Gesamtärmestrom sehr gering. Daher kann diese Beschränkung der Anpassung aus praktischer Sicht in Kauf genommen werden.

Für die über die Rohrlänge gemittelte, analog zu Gl. 3-94 definierte Wärmestromdichte gilt

$$\overline{\text{Nu}}_m = \overline{\text{Nu}}_1 \quad \text{für} \quad |\text{Re}| < 400 \sqrt{\text{Re}_\omega} \quad \text{und} \quad \text{Re} \cdot \frac{\partial \text{Re}}{\partial(\omega t)} > 0$$

und ansonsten

$$\overline{\text{Nu}}_m = \max \left\{ 1,846 \cdot 10^{-6} \cdot |\text{Re}|^{1,236} \cdot \left( 1 + 104,7 \left( \frac{\ell}{d} \right)^{0,1} \right); \overline{\text{Nu}}_1 \right\} \quad (3-101)$$

mit  $\overline{\text{Nu}}_1 = 11,66 + 0,1117 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Re}_\omega^{0,562} \cdot \hat{\text{Re}}^{0,812}$

und  $\theta = 2,948 \left( \frac{\text{Re}_\omega}{\hat{\text{Re}}} \right)^{0,682} \quad [\text{rad}] \quad (3-101a).$

Beide Korrelationen gelten im Bereich

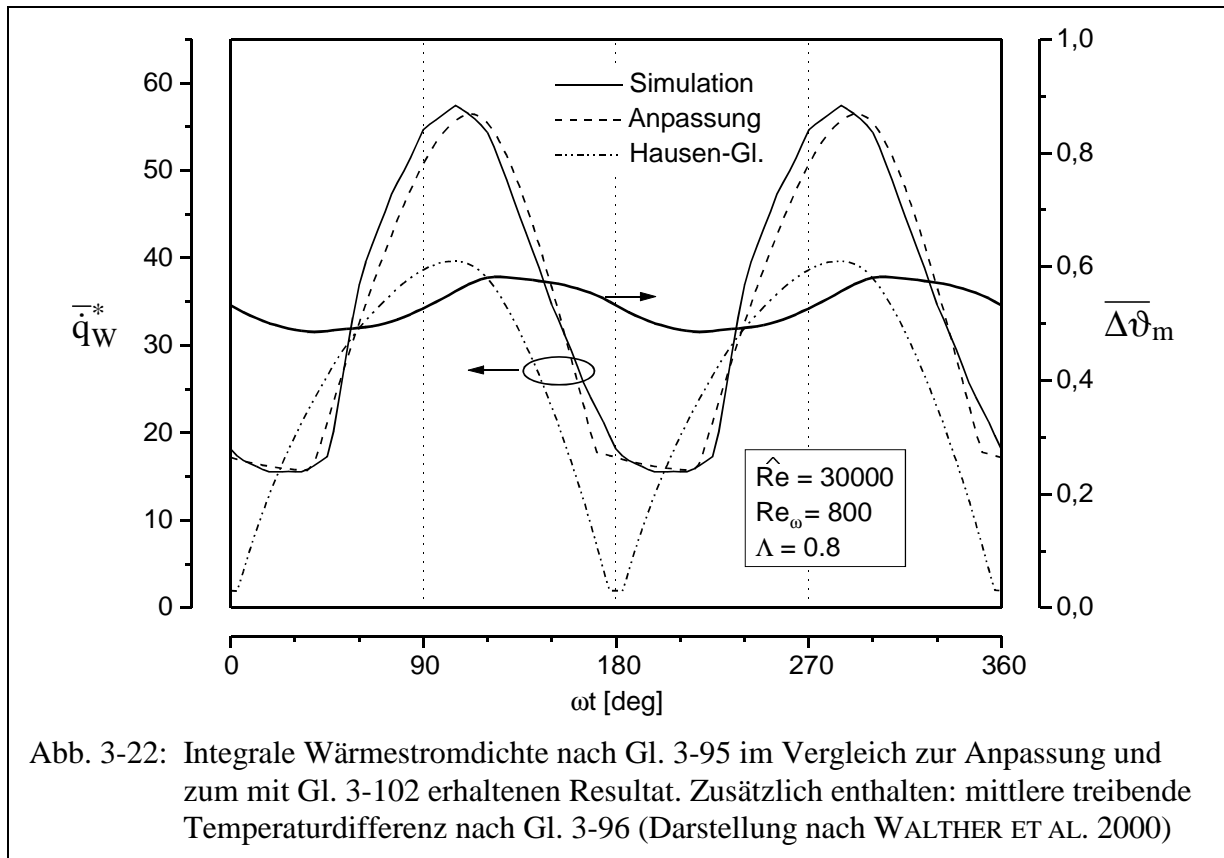
$$20000 \leq \hat{\text{Re}} \leq 50000 \quad ; \quad 50 \leq \text{Re}_\omega \leq 1000 \quad ; \quad 0,2 \leq \Lambda \leq 1,0 \quad (3-101b).$$

Abb. 3-22 zeigt an demselben Beispielfall wie in Abb. 3-21 den berechneten Verlauf der dimensionslosen integralen Wärmestromdichte nach Gl. 3-95 im Vergleich zur Anpassung nach Gl. 3-101, mit der offensichtlich eine zufriedenstellende Wiedergabe möglich ist. Weiterhin ist zur Verdeutlichung der durch die nicht ausgebildete, oszillierende Strömung verursachten Effekte der mit der für stationäre Strömungen gültigen, bekannten Gleichung nach HAUSEN,

$$\text{Nu} = 0,037 \left( \text{Re}^{0,75} - 180 \right) \text{Pr}^{0,42} \left[ 1 + \left( \frac{d}{\ell} \right)^{2/3} \right] \quad (3-102),$$

berechnete Verlauf eingezeichnet, der im wesentlichen vom Verlauf des Massenstromes und der hiervon abhängigen Reynolds-Zahl bestimmt wird. Offensichtlich kommt es zum einen zu einer deutlichen betragsmäßigen Steigerung des übertragenen Wärmestromes im Vergleich zur stationären Strömung, und zum anderen ist auch hier – wie schon im Fall der laminaren Strömung – ein Phasenversatz sowohl gegenüber dem Massenstrom als auch gegenüber der mittleren treibenden Temperaturdifferenz, die in dimensionsloser Form gemäß Gl. 3-96 ebenfalls in Abb. 3-22 aufgenommen wurde, zu verzeichnen. Weiterhin sind die Bereiche laminarer Strömung mit vom Massenstrom unabhängiger Wärmestromdichte zu erkennen. Die im





Vergleich zur stationären laminaren Strömung erhöhte Werte sind dabei durch die allmählich abklingende Turbulenz aus der vorhergehenden Halbphase bedingt. Die im laminaren Bereich gültige Nusselt-Zahl  $Nu_l$  in Gl. 3-101 hängt daher von der maximalen Reynolds-Zahl ab.

Nachdem nun Korrelationen zur Bestimmung des Wärmeüberganges bei nicht ausgebildeter, oszillierender, turbulenter Rohrströmung<sup>6</sup> vorliegen, verbleibt bei der Anwendung von Gl. 3-80 noch das Problem der Bestimmung des Enthalpiestromes auf der Basis der querschnittsgemittelten Temperatur  $T_m$ . Der hierzu benötigte Quotient  $\tau$  wurde im Falle der laminaren Strömung als komplexe Funktion nach Gl. 3-86 bzw. für die nicht ausgebildete Strömung als darauf aufbauende empirische Korrelation (Gl. 3-97) ausgedrückt. Im Fall turbulenter Strömung kann jedoch nach WALTHER ET AL. (2000) auf ein solches Vorgehen verzichtet werden, da sie generell durch ein im Vergleich zum laminaren Fall eher der Kolbenströmung ähnliches Geschwindigkeits- und Temperaturprofil gekennzeichnet ist. Im Bereich des Einlaufes gilt dies in zusätzlich verstärktem Maße, und die anfängliche Phase laminarer Strömung wird zum einen auch durch diese Einlaufeffekte beeinflusst und betrifft ansonsten das bereits im Rohr befindliche Fluid, dessen Temperatur sich während der vorangegangenen Halbphase bereits der Wandtemperatur angenähert hat und somit nur noch geringfügige radiale Temperaturunterschiede aufweist. Der Fehler bei der vereinfachenden Annahme  $\tau = 1$  im Falle der turbulenten Strömung ist daher generell sehr gering und im Rahmen der durch die Simulationen und die darauf aufbauenden Korrelationen erzielbaren Genauigkeit vernachlässigbar.

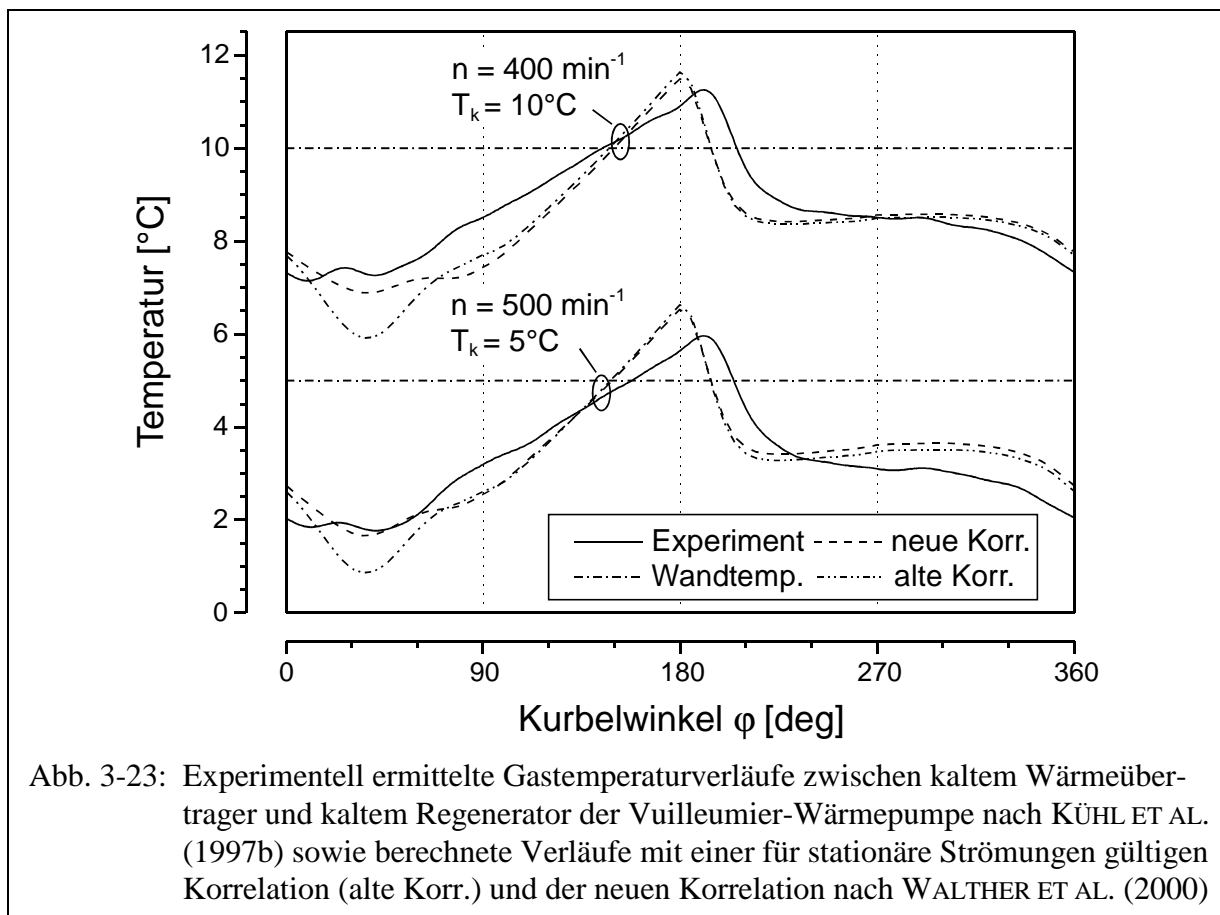
Die angegebenen Korrelationen wurden von WALTHER (1999) zu Testzwecken in das bereits zitierte, von KÜHL (1990) entwickelte Simulationsprogramm für regenerative Kreisprozesse integriert und dieses zur Reproduktion experimenteller Daten eingesetzt, die an der von

<sup>6</sup> Die hier für die turbulente Rohrströmung angegebenen Korrelationen sind – wie allgemein bei turbulenten Strömungen – mit Hilfe des hydraulischen Durchmessers auch auf andere geometrische Verhältnisse übertragbar. Gesichert gilt dies zumindest für die von WALTHER (1999) ebenfalls untersuchte ebene Spaltströmung.

RICHTER (1988) konstruierten und von KÜHL (1990) detailliert beschriebenen Vuilleumier-Wärmepumpe gewonnen wurden. Zu Vergleichszwecken besonders geeignet sind hier die Hochgeschwindigkeits-Gasttemperaturmessungen, die von KÜHL ET AL. (1997b) an dieser Versuchsmaschine durchgeführt wurden, da sie unmittelbare Rückschlüsse auf den zyklischen Verlauf von Strömung und Wärmeübergang zulassen.

Abb. 3-23 zeigt einen Vergleich der experimentellen und berechneten Temperaturverläufe für zwei Betriebszustände bei  $\bar{p} = 50 \text{ bar}$ ,  $T_h = 400^\circ\text{C}$  und  $T_w = 40^\circ\text{C}$ . Die Diskrepanzen zwischen Experiment und Simulation können mit dem neuen Ansatz offenbar in Teilbereichen vermindert werden. So tritt insbesondere der Temperaturabfall zu Beginn der Strömungsphase Wärmeübertrager – Regenerator bei ca.  $40^\circ\text{KW}$ , der mit der für stationäre Strömungen gültigen Korrelation erhalten wird, nicht mehr auf. Andere Abweichungen, insbesondere im Bereich der aus dem Regenerator austretenden Strömung ab ca.  $210^\circ\text{KW}$ , sind so nicht erklärbar, da dessen Simulation durch die neuen Korrelationen nicht direkt beeinflusst wird.

Da in der Versuchsmaschine acht parallelgeschaltete Regenerator-Wärmeübertrager-Einheiten vorlagen und die Massenströme nicht experimentell erfasst werden konnten, kann nicht ausgeschlossen werden, dass Ungleichmäßigkeiten bei deren Durchströmung Ursache für diese Abweichungen sind. Hier könnte sich erneut die These aus Kap. 3.1.7 bestätigen, dass die Ungenauigkeiten bei der Simulation regenerativer Kreisprozesse oft auf Abweichungen von der Annahme einer ideal eindimensionalen Durchströmung beruhen, die sowohl messtechnisch als auch theoretisch nur sehr schwer erfassbar sind und den Erfolg sonstiger Anstrengungen zur Verbesserung der Simulation relativieren. Dies trifft ungeachtet des zweifellos erheblichen Gewinns an theoretischer Erkenntnis und der z. B. in Abb. 3-22 erkennbaren deutlichen Abweichungen in Betrag und Verlauf der Wärmestromdichte auch auf die hier dargestellte Modellierung nicht ausgebildeter, oszillierender Strömungen zu.



## 4 Theoretische Ansätze und Methoden zur thermodynamischen Prozessoptimierung

### 4.1 Vorüberlegungen

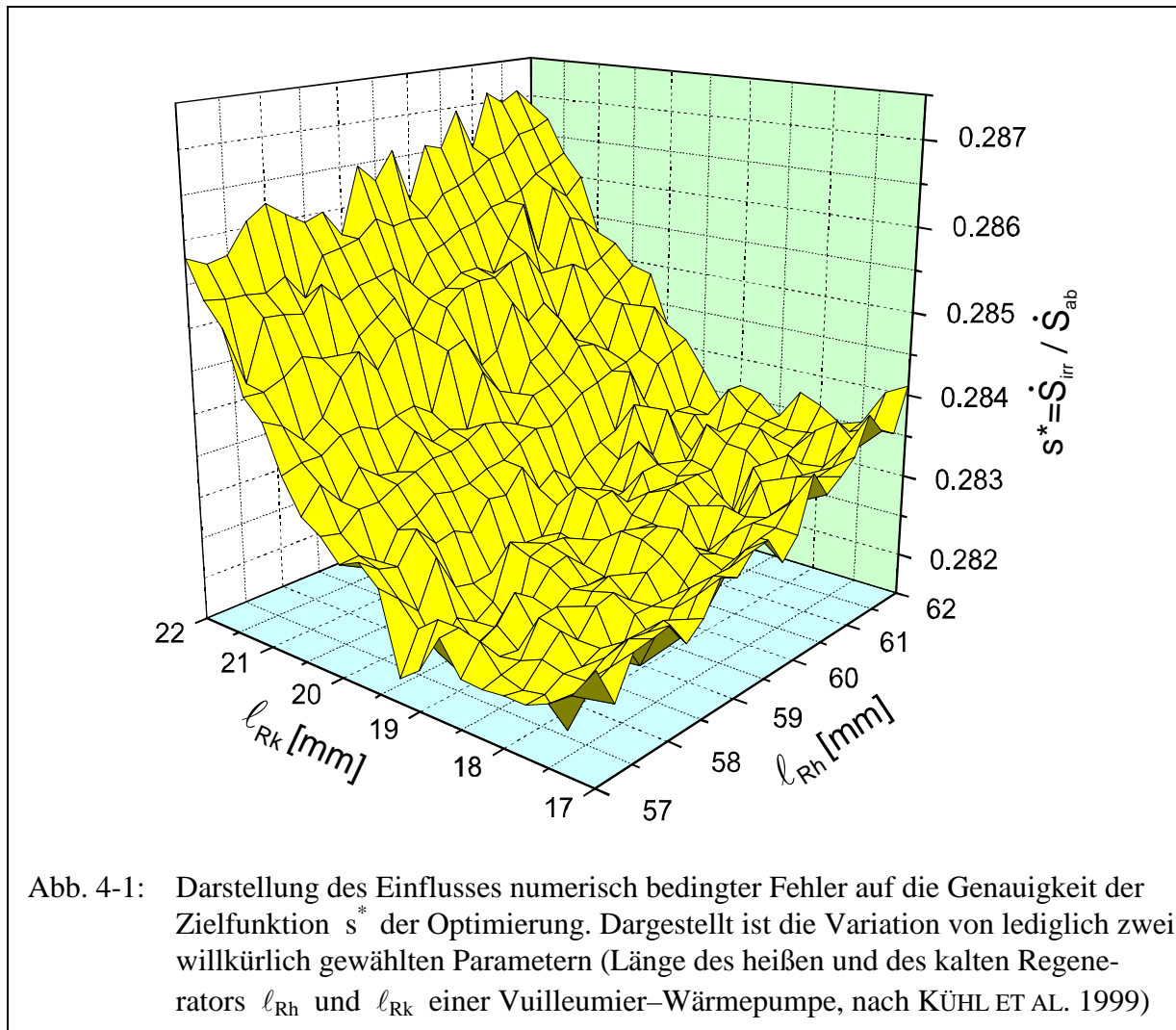
#### 4.1.1 Eigenschaften der Zielfunktion

Die im vorhergehenden Kapitel in ausgewählten Teilen dargestellten und ansonsten in der zitierten Literatur dokumentierten Verfahren zur mathematischen Modellierung regenerativer Kreisprozesse bieten trotz der aufgezeigten Grenzen der Vorhersage- bzw. Wiedergabegenauigkeit eine hinreichende Grundlage für die Formulierung einer Zielfunktion auf jeder Ebene der Komplexität. Dabei ist die bereits in Kap. 2 verdeutlichte wechselseitige Abhängigkeit von Leistungsdichte und thermodynamischer Güte zu berücksichtigen. Abhängig von den Randbedingungen des konkreten Anwendungsfalles wird daher entweder ein Gütekriterium als Zielfunktion dienen und eine Mindestanforderung an die Leistungsdichte als Nebenbedingung formuliert, oder es wird – in der Praxis eher selten – der umgekehrte Weg beschritten.

Die Gesamtzahl der zu optimierenden Parameter erscheint im Vergleich zu anderen, weitaus komplexeren Optimierungsproblemen, wie sie z. B. in der Anlagenplanung auftreten, eher gering. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass die für komplexe Optimierungen verfügbaren Algorithmen auf Gradienten- oder Newtonverfahren basieren und daher hohe Anforderungen an die numerische Stabilität der Zielfunktion und ihrer Ableitungen stellen. Diese Bedingung ist bei Optimierungsproblemen, die lediglich wegen der großen Zahl von Variablen und Nebenbedingungen komplex sind, jedoch analytisch vergleichsweise einfache und geschlossen formulierbare Zielfunktionen – z. B. Kostenmodelle – beinhalten, durchweg erfüllt. Im vorliegenden Falle, der Optimierung eines thermodynamischen Kreisprozesses, sind jedoch (zumindest in der Endphase) möglichst alle mathematisch beschreibbaren Verlustmechanismen einschließlich ihrer Wechselwirkungen zu berücksichtigen, was nur mit differentiellen, numerisch zu integrierenden Prozessmodellen dritter Ordnung möglich ist. Die Zielfunktion – wie immer sie auch definiert sein mag – ist daher stets mit verschiedenen, numerisch bedingten Fehlern behaftet. Diese sind zwar in ihrer Größenordnung begrenzt, streuen aber bei Variation der Eingangsparameter in unvorhersagbarer Weise und verhalten sich somit ähnlich wie statistisch verteilte Versuchsfehler bei experimentellen Messwerten.

Abb. 4-1 veranschaulicht dies am Beispiel einer Variation von zwei Parametern. Zu beachten ist dabei, dass die Funktionsfläche bei Wahl eines verkleinerten Ausschnittes keineswegs „glatter“ erscheint, sondern dass bei entsprechend höherer Auflösung (d. h. verkleinerter Variationsschrittweite) das Verhältnis von numerisch bedingtem „Rauschen“ zur Größe der physikalisch begründeten Parametereinflüsse sogar noch ungünstiger wird. Es zeigt sich, dass selbst minimale, physikalisch insignifikante Veränderungen eines Parameters – selbstverständlich im Rahmen der numerischen Auflösung einer Gleitkomma-Variablen – zu geringen, quantitativ nicht vorhersagbaren Veränderungen der Zielgröße führen. Das Verhalten im Bereich hoher Auflösung kann somit im systemtheoretischen Sinne als chaotisch bezeichnet werden.

Es liegt auf der Hand, dass die Anwendung von Optimierungsverfahren, in denen Ableitungen der Zielfunktion durch numerische Differentiation gewonnen werden, in solchen Fällen sehr problematisch ist und i. d. R. zur Divergenz bzw. zum Absturz des Verfahrens führt. Zur Lösung dieses Problems bieten sich nach KÜHL ET AL. (1999, 1999a) zwei Vorgehensweisen an, die an späterer Stelle (Kap. 4.6) eingehender diskutiert werden. Zum einen ist dies der Einsatz reiner Suchmethoden wie z. B. des Simplex-Verfahrens nach NELDER UND MEAD (1965) unter



Verzicht auf Gradienten- und Newtonverfahren, und zum anderen die Glättung der Zielfunktion durch eine lokal angepasste, numerisch stabil differenzierbare Ersatzfunktion.

In beiden Fällen ergibt sich dabei jedoch die Schwierigkeit, dass die Zahl der simultan optimierbaren Parameter auf Werte von ca. 10 im ersten und ca. 20 im zweiten Fall beschränkt ist, zumindest, wenn wie im vorliegenden Fall mit erheblichen Wechselwirkungen zwischen nahezu allen Parametern zu rechnen ist. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, die Struktur des Optimierungsproblems mit dem Ziel zu analysieren, diese Wechselwirkungen durch geeignete Wahl der unabhängigen Variablen zu minimieren und nach Möglichkeit sogar Untergruppen von separat optimierbaren Größen zu schaffen bzw. zu identifizieren.

Eine solche Vorgehensweise bietet nicht nur Vorteile bei der Prozessoptimierung mit komplexen numerischen Modellen, sondern sie eröffnet auch einen Weg zu einem besseren theoretischen Verständnis fundamentaler Abhängigkeiten. Es liegt auf der Hand, dass die qualitativen Auswirkungen der Variation eines bestimmten Parameters innerhalb einer begrenzten Teiloptimierung wesentlich leichter erkennbar und theoretisch nachvollziehbar sind als wenn das gesamte Optimierungsproblem mit beispielsweise 20 Parametern als Ganzes betrachtet wird. Insbesondere besteht auch die Möglichkeit, solche Abhängigkeiten in dimensionsloser Form quantitativ darzustellen. Aus diesem Grunde werden die Überlegungen zur Struktur des Optimierungsproblems bereits im Rahmen dieses Kapitels dargelegt, auch wenn die Konsequenzen der Ergebnisse in vollem Umfang erst bei der Anwendung im Rahmen der numerisch-differentiellen Prozessoptimierung (s. Kap. 4.6) erkennbar werden.

## 4.1.2 Auswahl von Werkstoffen und Arbeitsmedium

Soweit es sich bei den festzulegenden Parametern um die Werkstoffauswahl für die Maschinenbauteile handelt, üben erfahrungsgemäß wirtschaftliche und fertigungstechnische Aspekte den entscheidenden Einfluss aus, und es wird sich im folgenden herausstellen, dass im Rahmen dieser thermodynamischen Betrachtungen lediglich einige wenige physikalische Stoffdaten von Bedeutung sind, die oft auch bei Wechsel eines Werkstoffes nur in verhältnismäßig engen Grenzen veränderlich sind. Auch wenn sie die Lage eines Optimums im Einzelfall durchaus beeinflussen können, sind die im folgenden dargelegten grundsätzlichen Überlegungen hiervon unabhängig. Im übrigen sind Werkstoffeigenschaften bei Wechsel des Materials nicht stetig, sondern nur in diskreten Schritten veränderlich, so dass sie im Rahmen einer Optimierung ggf. nur über Integer-Variablen einbezogen werden könnten. Dies würde die Behandlung erheblich erschweren. Es bietet sich daher stattdessen an, bei Bedarf die nachfolgend dargestellte Optimierung für eine alternative Materialauswahl zu wiederholen.

Bezüglich der Auswahl des Arbeitsmediums gilt grundsätzlich das gleiche. Es ist jedoch bekannt, dass die Gase mit dem geringsten Molekulargewicht, also an erster Stelle Wasserstoff, gefolgt von dem sicherheitstechnisch und in Bezug auf die sonstige Werkstoffauswahl (Wasserstoffdiffusion, Versprödung) unproblematischeren und daher meist bevorzugten Helium, die beste Wahl darstellen. Luft oder Stickstoff kommen lediglich unter dem Aspekt der Verfügbarkeit und der konstruktiven Einfachheit der Maschinen (Verringerung des Aufwandes für die Abdichtung) in Betracht, wenn die damit einhergehenden höheren thermodynamischen Verluste bzw. die deutlich geringere Leistungsdichte in Kauf genommen werden können. Quantitative Aussagen zu dieser Thematik sind in Kap. 4.4 mit Hilfe ähnlichkeitstheoretischer Überlegungen unter Verwendung der in Kap. 4.2 eingeführten dimensionslosen Kennzahlen möglich und werden daher zunächst zurückgestellt.

## 4.1.3 Globale Parameter

### 4.1.3.1 Mittlerer Prozessdruck, Drehzahl und Summe des Hubvolumens

Bei den verbleibenden Abmessungen und Betriebsdaten ist nach KÜHL ET AL. (1997, 1997a) eine weitere Unterscheidung in „globale“, den gesamten Prozess betreffende Parameter und in lokale „Detailabmessungen“ einzelner Komponenten sinnvoll. Zur ersten Gruppe zählen dabei diejenigen Größen, die den Ablauf des isothermen Idealprozesses (insbesondere also Druckverlauf, Wärmeströme und Leistung) unmittelbar beeinflussen, während die Parameter der zweiten Gruppe so gewählt werden, dass der Idealprozess von ihnen unabhängig ist.

Damit sind zunächst der mittlere Prozessdruck und die Drehzahl als globale Parameter zu nennen. Für beide ist, wie im folgenden noch deutlich werden wird, eine allgemeine Aussage bezüglich „optimaler“ Werte nicht möglich. Vielmehr ist hier stets ein Kompromiss mit der Leistungsdichte sowie mit konstruktiven und wirtschaftlichen Randbedingungen zu suchen.

Weiterhin ist das gesamte für den Prozess verfügbare Zylinderhubvolumen als die Baugröße und die Kosten wesentlich bestimmende Größe zu dieser ersten Gruppe zu zählen. Wird der Begriff „Leistungsdichte“ wörtlich genommen und als das Verhältnis der jeweiligen Nutzleistung des Prozesses zum gesamten Bauvolumen der Maschine verstanden, so müssten hier zusätzlich auch die Abmessungen der übrigen Prozesskomponenten, insbesondere also der Regeneratoren und der Wärmeaustauscher, mit berücksichtigt werden. Zum einen erschwert eine solche Betrachtungsweise jedoch eine systematisch strukturierte Optimierung erheblich, und zum anderen ist hier zu bedenken, dass die Zylinderhubräume im Gegensatz zu den übrigen

Komponenten die Maschinenabmessungen nicht nur direkt, sondern auch indirekt über das Getriebe bzw. im Falle von Freikolbenmaschinen über die Abmessungen der erforderlichen Pufferräume, Gasfedern und mechanischen Federn massiv beeinflussen.

Hält man sich anhand ausgeführter Stirling-Maschinen – es sei hier beispielhaft auf den in der Literatur (TEW ET AL. 1979, URIELI UND BERCHOWITZ 1984) dokumentierten, von General Motors entwickelten Stirlingmotor GPU-3 hingewiesen – die relativen Abmessungen von aktivem Prozess- und Getrieberaum vor Augen, so erkennt man leicht, dass die tatsächlichen Gesamt-Abmessungen fast ausschließlich von den Hubvolumina abhängen, während sich umgekehrt leichte (optimierungsbedingte) Veränderungen bei den Regeneratoren oder Wärmeübertragern kaum auswirken würden. Darüber hinaus wird sich im folgenden herausstellen, dass die Dimensionierung dieser Prozesskomponenten indirekt über die Volumenströme und die zu übertragenden Wärmeströme ebenfalls durch die Hubvolumina bestimmt wird.

Die Festlegung des Hubvolumens sollte in Abstimmung mit der geforderten Nutzleistung (sei es mechanische Leistung, Heiz- oder Kälteleistung) erfolgen, da die Optimierung eines thermodynamischen Gütekriteriums andernfalls zu einem Prozess mit relativ großen Toträumen und somit geringer Druckamplitude und Leistungsdichte führen würde. Durch die Festlegung von Mitteldruck, Drehzahl und Hubvolumen wird zwar verhindert, dass die Optimierung vollständig in Richtung verschwindender Leistungsdichte „ausreißt“, da sich die Zielfunktion in diesem Fall wegen der baugrößenabhängigen Verluste zwangsläufig wieder verschlechtern würde. In der Praxis wird jedoch i. d. R. ein Kompromiss zwischen diesen beiden Kriterien gesucht, d. h. man wird eine geringe Einbuße bei der thermodynamischen Güte (ausgedrückt als thermischer Wirkungsgrad, Leistungszahl oder universell als dimensionslose Entropieproduktion  $s^*$  gemäß Gl. 2-15) in Kauf nehmen, wenn sich die Leistungsdichte dafür signifikant steigern lässt. Dies kann dadurch geschehen, dass die Güte unter der Nebenbedingung einer vorgegebenen (und ggf. auf oberster Ebene schrittweise zu variierenden) hubvolumenbezogenen Nutzleistung optimiert wird.

Eine Schätzung von realistischen Werten der Leistungsdichte kann dabei empirisch in Anlehnung an bewährte ausgeführte Maschinen oder über Methoden erster Ordnung erfolgen, z. B. bei Stirlingmotoren über die dimensionslose Beale-Zahl (Gl. 3-1). Analoge Kennzahlen sind grundsätzlich auch für andere regenerative Kreisprozesse definierbar und bei ausreichender experimenteller Datenbasis auch bestimmbar (s. z. B. THOMAS, KÜHL UND SCHULZ 1989).

#### 4.1.3.2 Die Summe des temperaturbezogenen Totvolumens

Der Grund für den zusätzlichen Einfluss des Totvolumens ist bereits bei Betrachtung der isothermen Idealprozesse leicht zu erkennen, denn die Prozessleistung hängt neben Drehzahl und Hubvolumen nicht vom Mittelwert  $\bar{p}$  des Prozessdruckes ab, wie die oberflächliche Betrachtung von Gl. A1-4 und A1-5 vermuten lässt, sondern, wie man an Gl. A1-9 und A1-10 deutlich erkennt, vielmehr von dessen Amplitude  $\hat{p}$ . Diese kann wiederum gemäß Gl. A1-7 sowohl über die Anhebung des Mittelwertes als auch über die Verringerung der Toträume relativ zu den Hubvolumina gesteigert werden. Geht man davon aus, dass zusätzliche Toträume in den Zylindern und den angrenzenden Überströmkanälen aus diesem Grunde so weit wie möglich vermieden werden, so erhält man mit  $\bar{V}_{Zi} \approx \hat{V}_{Zi} = V_{Zi} / 2$  aus Gl. A1-2

$$p(\varphi) = \frac{m_{\text{ges}} \cdot R}{\sum \frac{V_{Ti}}{T_{Ti}} + \sum \frac{V_{Zi}}{T_{Zi}} \frac{1 + \cos(\varphi + \theta_i)}{2}} \quad (4-1).$$

Man erkennt, dass die Druckamplitude zum einen über die Gasmasse (bzw. über den Mitteldruck) gesteigert werden kann, zum anderen aber auch (bei unverändertem Mitteldruck) durch Verringerung der Summe der auf ihre jeweiligen Temperaturen  $T_{Ti}$  bezogenen Totvolumina  $V_{Ti}$  des Prozesses, insbesondere also der der Wärmeübertrager und der Regeneratoren. Damit besteht die Möglichkeit, durch Festlegung dieses im folgenden auch kurz als „Totraumsumme“ bezeichneten Wertes die o. g. Nebenbedingung näherungsweise (als „ideale“ Leistungsdichte) in die Zielfunktion zu integrieren und so ein Optimierungsproblem ohne explizite Nebenbedingung (in Form einer Kuhn-Tucker-Bedingung oder – speziell bei Einsatz von Suchmethoden – in Form einer die Konvergenz verschlechternden Straffunktion) zu formulieren.

### 4.1.3.3 Hubraumverhältnisse und Phasenwinkel

Neben der Totraumsumme ist gemäß Gl. 4-1 auch die Verteilung des Hubvolumens auf die Zylinderräume des Prozesses sowie der bzw. die Phasenwinkel zwischen den – nach wie vor als näherungsweise sinusförmig angenommenen – Volumenänderungen für den Prozessdruckverlauf von Bedeutung. Diese Größen sind daher ebenfalls eindeutig zu den globalen Parametern zu zählen, und ihre Festlegung stellt prozessabhängig ein mehr oder weniger komplexes Problem dar. In jedem Fall ist sie jedoch bereits nach Wahl der übrigen, zuvor genannten fundamentalen Parameter möglich, d. h. es sind keine nennenswerten Wechselwirkungen mit der nachfolgend beschriebenen Optimierung der Totvolumenverteilung im Prozess oder den lokalen Unteroptimierungen der Komponenten zu erwarten.

Für den Stirlingprozess existieren hier umfassende Analysen in der einschlägigen Literatur. Beispielhaft sei hier auf ORGAN (1992) verwiesen, der sowohl den isothermen als auch den adiabatischen Vergleichsprozess entsprechend untersuchte, die Ergebnisse in Diagrammform darstellte und dabei auch die Unterschiede zwischen  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Konfiguration berücksichtigte. Der Vuilleumier- und der Duplex-Ericsson-Prozess wurden von THOMAS, KÜHL UND SCHULZ (1989) in analoger Weise untersucht, wobei sich bei den Phasenwinkeln nur unwesentliche Abweichungen von den in Kap. 2 begründeten, theoretischen Werten von  $\pm 90^\circ$  ergaben. Die Ergebnisse für die Hubraumverhältnisse sind als einfache Funktionen der Betriebstemperaturen darstellbar. So sind günstige Werte leicht festzulegen, sofern nicht andere (z. B. konstruktive) Überlegungen den entscheidenden Einfluss ausüben.

Hubraumverhältnisse und Phasenwinkel unterscheiden sich damit von den anderen, bereits genannten globalen Parametern (Druck, Drehzahl, Gesamthubvolumen, Betriebstemperaturen) dadurch, dass sie *nicht* aufgrund anwendungsabhängiger Überlegungen a priori festgelegt werden müssen. Vielmehr lassen sie sich bei Kenntnis der anderen als Ergebnis vergleichsweise einfacher, separater Optimierungen nach rein thermodynamischen Kriterien oder durch Anwendung von in der Literatur prozessspezifisch dokumentiertem Wissen ermitteln.

Grundsätzlich ist zur Wahl dieser Größen zu sagen, dass die möglichen Zielfunktionen hier sehr „flach“ verlaufen. Es ist damit durchaus möglich, z. B. aus konstruktiven Gründen von den theoretisch optimalen Werten um mehrere Prozentpunkte abzuweichen, ohne dass die thermodynamische Güte des Prozesses signifikant vermindert wird. Wenn also z. B. eine numerische Optimierung des Hubraumverhältnisses und des Phasenwinkels für den Vuilleumier-Prozess Werte von  $\hat{V}_{D,h} / \hat{V}_{D,k} = 1,1$  und  $\theta_h - \theta_k = 93^\circ$  liefert, so ist es sicherlich gerechtfertigt, zur Vereinfachung des Getriebes gleiche Hubvolumina und einen Phasenwinkel von  $90^\circ$  zu wählen, so wie es bei nahezu allen in der Literatur dokumentierten Vuilleumier-Wärmepumpen auch der Fall ist. Lediglich bei kryotechnischen Anwendungen weichen die theoretisch optimalen Hubraumverhältnisse so weit von Eins ab, dass dem in der konstruktiven Ausführung Rechnung getragen werden muss (vgl. z. B. WALKER 1983, 1983a, RENYER 1973).

## 4.1.4 Lokale Parameter der Prozesskomponenten

### 4.1.4.1 Kolbenspaltweiten und Hub-Durchmesser-Verhältnisse

Auch die Kolbenspaltweite und das Hub-Durchmesser-Verhältnis der Zylinder können durch einfache, separat durchführbare Optimierungen bestimmt werden. Im Gegensatz zu Hubraumverhältnissen und Phasenwinkeln handelt es sich hier jedoch nicht um globale, den isothermen Idealprozess betreffende Parameter. Sie bestimmen lediglich die thermischen Verluste, die im Bereich von Kolben-Zylindersystemen auftreten, wenn sich der betrachtete Kolben im Bereich eines axialen Temperaturgradienten bewegt. Dies trifft für Verdrängerkolben sowie – speziell bei  $\alpha$ -Konfigurationen – für diejenigen Verdichterkolben zu, deren Dichtungssystem zum Schutz vor hohen (oder auch sehr tiefen) Temperaturen durch einen wärmeisolierenden Dom vom Zylinderraum getrennt ist. Die rein konstruktive Gestaltung nicht wärmeisolierter Verdichterkolben im Bereich umgebungsnaher Temperaturen wird hier nicht näher behandelt.

Im zuvor genannten Fall kann der optimale Wert der Kolbenspaltweite mit vereinfachten Modellen nach URIELI UND BERCHOWITZ (1984) und BERCHOWITZ (1986) bestimmt werden. Danach gibt es im wesentlichen zwei von ihr abhängige Verlustmechanismen, den Shuttle-Verlust und den Enthalpiestrom-Verlust. Wie in den zitierten Quellen näher ausgeführt wird, beruht ersterer auf einem zwischen Kolben- und Zylinderwand positionsabhängig hin- und herfließenden Wärmestrom, der nur durch die Isolationswirkung des Gases im Spalt limitiert wird und daher zum Kehrwert der Spaltweite proportional ist. Der Enthalpiestrom-Verlust entsteht dagegen durch das am offenen Ende des Spaltes periodisch ein- und ausströmende Gas und hängt damit direkt von der Spaltweite ab. Wie im Anhang 2.2 erläutert wird, erhalten KÜHL ET AL. (1997a) für die optimale Spaltweite, bei der die Summe beider Verluste minimal wird, nach Vereinfachung der von BERCHOWITZ (1986) angegebenen Gleichungen

$$h_{\text{opt}} = \sqrt{\lambda \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{\bar{T}_{\text{ln}}}{n \cdot \bar{p} \cdot \left(2 - \ln\left(\frac{T_{\text{h}}}{T_{\text{k}}}\right)\right)}} \quad \text{mit} \quad \bar{T}_{\text{ln}} = \frac{T_{\text{h}} - T_{\text{k}}}{\ln\left(\frac{T_{\text{h}}}{T_{\text{k}}}\right)} \quad (4-2).$$

Da hier nur Stoffgrößen des Arbeitsmediums, die Betriebstemperaturen sowie Druck und Drehzahl eingehen, ist es offensichtlich von der weiteren Prozessoptimierung unabhängig.

Zur Optimierung der Kolbenhubamplitude  $\hat{x}$  müssen gemäß Anhang 2.2 zusätzlich die Wandwärmeleitungsverluste betrachtet werden, bei ringförmig um den Zylinder angeordneten Regeneratoren lediglich der auf den Zylinderquerschnitt entfallende Anteil gemäß Anhang 2.1. Da alle Verluste zum Temperaturgradienten proportional sind, ist der optimale Kolbenhub

$$\hat{x}_{\text{opt}} = \left[ \frac{2}{9\pi} \left( \frac{\lambda_{\text{W}}}{\sigma_{\text{zul}}} \right)^2 V_{\text{Hub}} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{p}}{n} \frac{\bar{T}_{\text{ln}}}{\lambda \left(2 - \ln\left(\frac{T_{\text{h}}}{T_{\text{k}}}\right)\right)} \right]^{-1/5} \quad (4-3)$$

in jedem Falle von der späteren Regeneratoroptimierung unabhängig. Allerdings müssen umgekehrt bei der Optimierung ringförmiger Regeneratoren die im Zylinder-Kolben-System auftretenden Verluste berücksichtigt werden, da der für sie relevante Temperaturgradient dann von der Regeneratorlänge bestimmt wird. Dazu sind dann die nach Gl. 4-2 und 4-3 (oder auch unter sonstigen, z. B. konstruktiven Gesichtspunkten) festgelegten Werte einzusetzen.



#### 4.1.4.2 Die Verteilung des temperaturbezogenen Totvolumens

Einer fortschreitenden Steigerung der Leistungsdichte durch Verringerung der dem Prozess zur Verfügung gestellten Summe des temperaturbezogenen Totvolumens steht natürlich die Forderung gegenüber, dass die einzelnen Prozesskomponenten dennoch ihre thermodynamische Funktion hinreichend erfüllen müssen. Ein wesentliches Teilziel der Optimierung muss es also sein, sie hinsichtlich ihrer lokalen Detailabmessungen so zu gestalten, dass sie bei möglichst geringem Totvolumen ihre Aufgabe im Prozess erfüllen, ohne dabei dessen thermodynamische Güte übermäßig zu vermindern, d. h. ohne die bezogene Entropieproduktion  $s^*$  in inakzeptablem Maße zu erhöhen (wobei in der Unschärfe der Formulierung die Problematik dieser Optimierung zum Ausdruck kommt). Es liegt auf der Hand, dass dies umso weniger gelingt, je höher die Anforderung an die Leistungsdichte ist, d. h. je geringer die Totraumsumme gemäß Kap. 4.1.3.2 gewählt wird.

Die einzelnen Prozesskomponenten stehen somit in einer „Konkurrenzsituation“ bezüglich der Verteilung des in seiner Summe begrenzten temperaturbezogenen Totvolumens, die im folgenden oft auch kurz als „Totraumverteilung“ bezeichnet werden wird. Auf oberer Ebene muss daher bei der Prozessauslegung und -optimierung dessen günstigste Verteilung auf die verschiedenen Komponenten gefunden werden. Für einen Prozess mit  $n$  Wärmeübertragern und Regeneratoren stellt dies ein Optimierungsproblem mit  $n - 1$  Freiheitsgraden dar, wobei die unabhängigen Parameter auf unterschiedliche Weise – z. B. als dimensionslose Bruchteile des Summenwertes, ggf. auch unter Berücksichtigung von Symmetrien im Prozess – festgelegt werden können. In jedem Fall sind sie nur insofern zu den „lokalen“ Parametern zu zählen als sie keinen Einfluss auf Druckverlauf und Leistung des isothermen Idealprozesses ausüben, nicht jedoch in dem Sinne, dass es sich um komponentenspezifische Größen handelte. Sie bewirken schließlich stets gegenläufige Veränderungen des Totvolumens von mindestens zwei (u. U. definitionsabhängig auch mehreren) Komponenten.

Beispielsweise bietet sich bei der Optimierung der Totvolumenverteilung einer Vuilleumier-Wärmepumpe mit zwei Regeneratoren und vier Wärmeübertragern nach KÜHL ET AL. (1999) folgende Definition der (in diesem Fall also fünf) unabhängigen Parameter an:

1. Ein Parameter definiert die Aufteilung des temperaturbezogenen Totvolumens auf die heiße und die kalte Prozesshälfte. Er gibt z. B. den Anteil an, der insgesamt auf den kalten Regenerator und die ihm benachbarten Rekuperatoren entfällt. Er steuert damit letztlich die Verteilung des Totvolumens zwischen den Wärme übertragenden Komponenten des heißen und des kalten thermischen Verdichters.
2. Zwei Parameter geben jeweils den Anteil des temperaturbezogenen Totvolumens an, der auf den heißen bzw. den kalten Regenerator entfällt. Die Veränderung dieser Volumina erfolgt dabei auf Kosten bzw. zugunsten der benachbarten Wärmeaustauscher.
3. Zwei weitere Parameter geben die relative Lage der Regeneratoren innerhalb des der betreffenden Prozesshälfte zugewiesenen Anteils an. Sie bewirken damit gegenläufige Volumenänderungen der dem jeweiligen Regenerator benachbarten Wärmeaustauscher.

Man erkennt, dass bei dieser Festlegung durch den ersten Parameter vier Komponenten, durch die beiden nächsten jeweils drei und durch die letztgenannten jeweils zwei Komponenten in ihrem Volumen gegenläufig verändert werden. Der Vorteil dieser Definition ist dabei, dass sich vier der fünf Parameter nur auf jeweils eine Prozesshälfte auswirken. Es sind jedoch auch andere Festlegungen denkbar, und die Frage, welche hinsichtlich der Wechselwirkungsfreiheit zu anderen Parametern und hinsichtlich der Konvergenz der Optimierung am vorteilhaftesten ist, ist bislang noch nicht abschließend beantwortet worden.

#### 4.1.4.3 Die geometrischen Abmessungen der Komponenten

Die zuvor beschriebene Optimierung der Totvolumenverteilung kann selbstverständlich nur zum Ziel führen, wenn jede betroffene Komponente das ihr jeweils zugewiesene temperaturbezogene Volumen (und damit also letztlich das Volumen an sich, denn die Betriebstemperatur ist i. d. R. durch die äußeren Randbedingungen festgelegt) optimal nutzt.

Diese Fragestellung definiert eine Reihe weitgehend voneinander unabhängiger Suboptimierungen auf unterer Ebene, die die günstigste Festlegung der lokalen, nur die jeweilige Komponente betreffenden Abmessungen (im Falle eines Wärmeübertragers in Rohrbündelbauart also z. B: Rohrzahl, -innendurchmesser und -länge) *unter der Nebenbedingung eines vorgegebenen Totvolumens* zum Gegenstand hat. In hinreichender Nähe des Gesamtoptimums, d. h. wenn keine Komponente übermäßige Verluste verursacht, kann man davon ausgehen, dass die Variation der Abmessungen unter dieser Nebenbedingung den restlichen Prozess nicht unmittelbar beeinflusst, denn die einzigen Größen, über die alle Komponenten des Prozesses direkt miteinander in Wechselwirkung stehen, sind der Prozessdruck und die Massenströme an den Schnittstellen, die nach Gl. 4-1 bzw. nach Gl. A1-17 zumindest bei idealisierter Betrachtung nur durch das Volumen und die Temperaturen der Komponenten beeinflusst werden.

Im realen Prozess ist dies sicherlich nur annähernd der Fall. Betrachtet man z. B. eine typische Anordnung von Prozesskomponenten, wie sie gemäß Kap. 2 in den thermischen Verdichtern aller sinnvollen regenerativen Kreisprozesse auftritt, nämlich die eines zwischen zwei Wärmeübertragern eingebetteten Regenerators, so werden dessen thermische Verluste die zu übertragenden Netto-Wärmeströme verändern. Damit hat also die Unteroptimierung des Regenerators, die diese Verluste bestimmt, einen Einfluss auf die Optimierung der Wärmeübertrager. Umgekehrt hat jedoch deren Auslegung (sofern sie ihre Aufgabe grundsätzlich erfüllen, d. h. sofern man sich in hinreichender Nähe des Gesamtoptimums befindet) nur einen geringen Einfluss auf die des Regenerators. Führt man also die Unteroptimierungen aller im Prozess vorhandenen Regeneratoren vor denen der Wärmeübertrager aus, so kann eine weitgehende Unabhängigkeit der Suboptima auch im realen Prozess angenommen werden.

Die Frage, welche Parameter im Rahmen einer Unteroptimierung unabhängig voneinander angepasst werden können, hängt selbstverständlich von der gewählten Bauform ab. Im Falle eines Wärmeübertragers kommt aufgrund des i. d. R. hohen Prozessdruckes zunächst die Rohrbündel-Bauweise in Frage, die bei der großen Mehrzahl bislang ausgeführter Maschinen ungeachtet der relativ hohen Herstellungskosten und der bei einer potentiellen Serienfertigung zu erwartenden hohen Ausschussrate zu finden ist. Daneben kommen unter Kosten- und Qualitätssicherungsaspekten verschiedene Rippenbauarten in Betracht, die insbesondere im Rahmen der von HEIKRODT UND HECKT (1999) dargestellten Arbeiten näher untersucht wurden. Da jedoch unter realistischen Randbedingungen stets eindeutig turbulente Strömungen vorliegen, kann die Zahl der prozesseitig relevanten Parameter in allen diesen Fällen auf den hydraulischen Durchmesser  $d_h$ , den freien Strömungsquerschnitt (bzw. die hierzu äquivalente Zahl  $n$  der Rohre oder Kanäle) und die Länge  $\ell$  in Strömungsrichtung reduziert und das Problem so auf die Rohrbündel-Bauart zurückgeführt werden. Mit der Nebenbedingung des vorgegebenen Volumens sind von diesen nur noch zwei, also z. B.  $d$  und  $\ell$ , frei wählbar.

Im Falle eines Regenerators kommen nach den Untersuchungen von PFEFFER (1998) unter thermodynamischen und Kostengesichtspunkten in erster Linie die bereits in Kap. 3-2 und 3-4 erwähnten Bauarten mit regelloser Fasermatrix in Frage. In diesen Fällen ist eine Beschreibung durch Angabe von Querschnitt  $A$ , Länge  $\ell_R$ , Porosität  $\varepsilon$  und Faser- bzw. Drahtdurchmesser  $d$  möglich. Alternativ zu letzterem kann auch der hydraulische Radius  $r_h$  nach Gl. 3-31 als unabhängige Größe gewählt werden. Mit der Nebenbedingung eines konstanten

Volumens sind die drei erstgenannten Größen zusätzlich voneinander abhängig, so dass sich die Unteroptimierung eines Regenerators mit regelloser Fasermatrix als Problem mit drei Freiheitsgraden (also z. B.  $\ell_R$ ,  $\varepsilon$ ,  $r_h$ ) darstellt.

### 4.1.5 Hierarchisch strukturierte Optimierung

Die bisherigen Überlegungen lassen sich zu der folgenden, in mehrere hierarchisch aufeinander aufbauende Ebenen gegliederten Vorgehensweise zur Optimierung regenerativer Gaskreisprozesse zusammenfassen:

1. Abhängig von den Randbedingungen der Anwendung sind der mittlere Betriebsdruck, die Auslegungsdrehzahl, das insgesamt verfügbare Hubvolumen, die typischen Betriebstemperaturen, das Arbeitsmedium, die die Wärmeleitungsverluste bestimmenden Materialkennwerte sowie i. d. R. als Nebenbedingung die geforderte Nutzleistung (thermisch oder mechanisch) festzulegen. Dabei kann diese Nebenbedingung explizit formuliert werden oder auch implizit durch Vorgabe der Summe des temperaturbezogenen Totvolumens in die Zielfunktion integriert werden. Sofern bezüglich dieser Festlegungen Zweifel bestehen, muss hier auf oberster Ebene eine Variation durchgeführt werden, ohne dass man dabei ein rein thermodynamisch begründetes Optimum erwarten kann.
2. Einige weitere Größen können nach diesen Festlegungen durch weitgehend voneinander unabhängige bzw. aufeinander aufbauende Unteroptimierungen ermittelt werden, sofern hier nicht ebenfalls konstruktive Überlegungen, Kostenaspekte o. ä. bestimmend sind. Hierzu zählen die Verteilung des Hubraumes auf die einzelnen Zylinder oder Kolben, die nicht prozessbedingt festliegenden Phasenwinkel, die Kolbenspaltweiten und -hübe.
3. Die i. d. R. als Nebenbedingung vorgegebene Nutzleistung (s. o.) ist nach diesen Festlegungen nur mit einer bestimmten Summe des temperaturbezogenen Totvolumens sicherzustellen, da sie nur noch über die gemäß Gl. 4-1 hiervon abhängige Druckamplitude eingestellt werden kann. Da die Nutzleistung auch von den verschiedenen Verlusten im Prozess beeinflusst wird und diese sich im Zuge der Optimierung verringern, muss dieser Summenwert ggf. leicht nachgeführt werden, liegt jedoch im wesentlichen fest. Hauptgegenstand der Optimierung ist an dieser Stelle also die *Verteilung* des temperaturbezogenen Totvolumens auf die einzelnen Komponenten des Prozesses.
4. Zur Optimierung dieser Verteilung muss für jede gewählte Aufteilung des temperaturbezogenen Totvolumens auf die Komponenten die Zielfunktion (i. d. R. also ein thermodynamisches Gütekriterium) ausgewertet werden. Dies setzt voraus, dass jede einzelne Komponente das ihr zugewiesene Volumen optimal nutzt. Es müssen also deren lokale Detailabmessungen jeweils unter der Nebenbedingung des zugewiesenen und somit konstanten Volumens optimiert werden. Nach den im vorhergehenden Kapitel dargelegten Überlegungen sind diese Unteroptimierungen bei geeigneter Abfolge weitestgehend unabhängig voneinander durchführbar, da die die Leistungsdichte bestimmende Druckamplitude sowie die Volumenströme und damit auch die Anforderungen an die übrigen Komponenten durch die jeweilige Unteroptimierung nicht beeinflusst werden.

Die nachfolgenden Überlegungen im Rahmen dieses Kapitels erfolgen unter der Annahme, dass sich Wärmeübertrager und Regeneratoren jeweils durch die in Kap. 4.1.4.3 genannten Größen beschreiben lassen. Unter dieser Voraussetzung lässt sich das beschriebene Optimierungsverfahren in Form des in Abb. 4-2 wiedergegebenen schematischen Fließbildes zusammenfassen. Es lässt sich grundsätzlich auch dort anwenden, wo im Einzelfall wegen abweichender Geometrie oder Bauart andere unabhängige Variablen für die Unteroptimierung ge-

wählt werden müssen. Die Zahl der Freiheitsgrade erhöht sich dabei u. U., bleibt jedoch in allen praktisch denkbaren Fällen so gering, dass eine Optimierung mit einfachen Verfahren (insbesondere auch mit Suchmethoden) möglich ist.

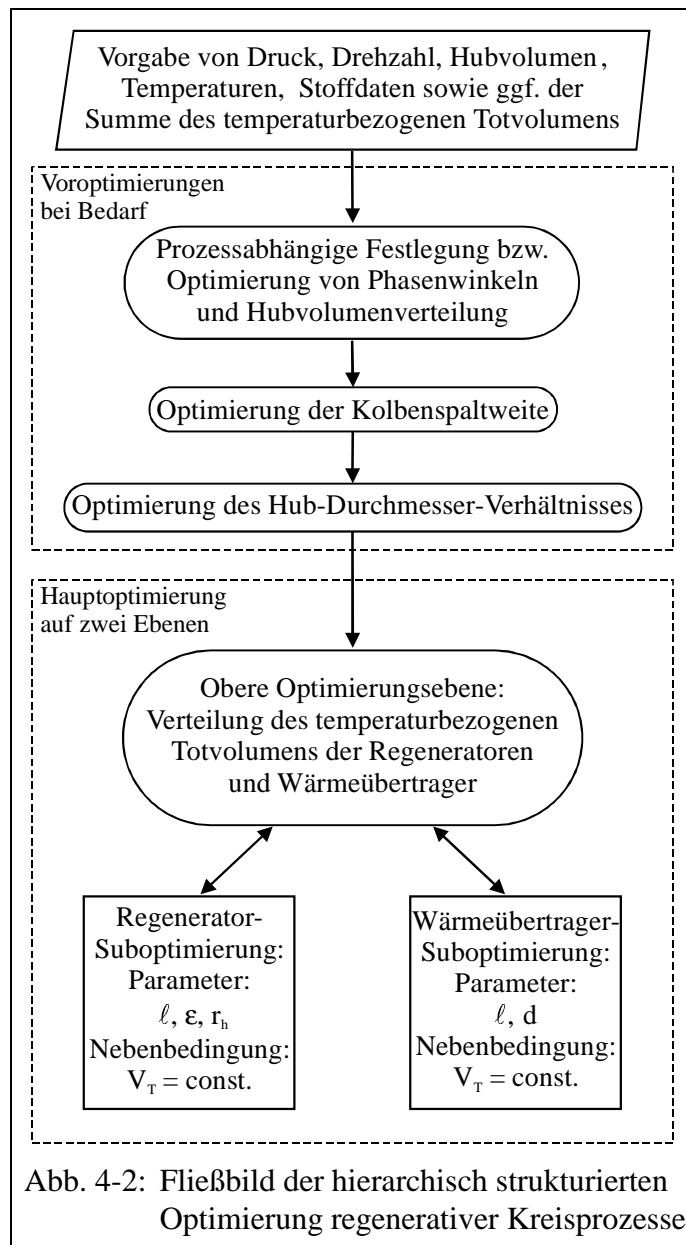
Die im Block „Voroptimierungen“ enthaltenen, bereits oben beschriebenen Schritte stellen lediglich einen geringen Teil des Optimierungsaufwandes dar, da es sich jeweils um isoliert behandelbare Anpassungen weniger Parameter (oft nur eines einzigen) handelt, die meist nur einmal durchlaufen werden müssen oder sogar ganz entfallen können (wenn die betreffenden Größen bereits aufgrund anderer Überlegungen festgelegt wurden).

Der anschließende Block „Hauptoptimierung“ ist dagegen als aufwändig einzustufen, da die Bestimmung jedes einzelnen Funktionswertes auf der oberen Optimierungsebene (d. h. für eine gewählte Totraumverteilung) ein vollständiges Durchlaufen aller Unteroptimierungen für die verschiedenen Prozesskomponenten erfordert.

Speziell bei Einsatz von Suchmethoden, wo sich die Werte der unabhängigen Variablen von Funktionsaufruf zu Funktionsaufruf i. d. R. nur geringfügig verändern, reduziert sich der Aufwand für die Unteroptimierungen allerdings dadurch, dass die Ergebnisse der jeweils vorhergehenden Auswertung stets sehr gute Startwerte für die folgende sind. Daher beschränken sich die Unteroptimierungen meist auf wenige Iterationsschritte.

Wird stattdessen der zweite mögliche Weg, die Anpassung einer lokalen, numerisch stabil differenzierbaren Näherungsfunktion (z. B. nach KÜHL ET AL. 1999) beschritten, so ist es nicht zwingend erforderlich, die hierarchische Abfolge von Einzeloptimierungen beizubehalten, da die Gesamtzahl zu optimierender Parameter mit den dann problemlos einsetzbaren Newton- oder Gradientenverfahren ohne weiteres auf einer Ebene behandelt werden kann.

Dennoch bietet es sich auch hier an, die gewählten Größen als unabhängige Variablen beizubehalten, da so eine weitgehende Wechselwirkungsfreiheit zumindest zwischen den lokalen Parametern verschiedener Komponenten angenommen werden kann. Dies erleichtert die Anpassung der Ersatzfunktion, die hier den zeitaufwändigsten Rechenschritt darstellt, erheblich, denn das Verhalten der wahren Zielfunktion kann so durch einen verhältnismäßig einfachen und dementsprechend leicht anpassbaren Funktionstyp hinreichend genau wiedergegeben werden.



## 4.2 Dimensionslose Kennzahlen zur Beschreibung regenerativer Kreisprozesse

### 4.2.1 Allgemeine Kennzahlen für den Gesamtprozess

Um die Auslegung und Optimierung regenerativer Kreisprozesse in allgemeingültiger Form behandeln zu können, ist die Einführung dimensionsloser Größen sinnvoll. Entsprechend der Vorgehensweise von ORGAN (1992) werden hier zunächst die fundamentalen Größen Mittel-  
druck  $\bar{p}$  und Drehzahl  $n$  als dimensionslose Druck-Kennzahl

$$N_p = \frac{\bar{p} \cdot \ell_{\text{ref}}}{\eta_{\text{ref}} \cdot \sqrt{RT_{\text{ref}}}} \quad (4-4)$$

sowie als Mach-Zahl

$$\text{Ma} = \frac{n \cdot \ell_{\text{ref}}}{\sqrt{RT_{\text{ref}}}} \quad (4-5)$$

ausgedrückt. Die letztgenannte Kennzahl stellt wegen der Verwendung einer allgemein für den Prozess zu definierenden Referenzlänge  $\ell_{\text{ref}}$  nicht das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit (entsprechend der ursprünglichen physikalischen Bedeutung der Mach-Zahl) dar, sondern sollte vielmehr als dimensionslose Drehzahl verstanden werden, wie auch ORGAN selbst in späteren Veröffentlichungen vorschlägt (ORGAN 1993).

Als Referenzlänge  $\ell_{\text{ref}}$  verwendet ORGAN die dritte Wurzel aus einem charakteristischen Hubvolumen. Dabei ergibt sich jedoch bei komplexeren Prozessen die Schwierigkeit, dass hier mehrere verschiedene Volumina in Frage kommen, und außerdem bereitet diese Festlegung Probleme im Zusammenhang mit den verschiedenen Möglichkeiten der Skalierung, die im folgenden Kapitel erläutert werden. Letztlich ist die Wahl von  $\ell_{\text{ref}}$  jedoch nur für die Zahlenwerte der dimensionslosen Kennzahlen von Bedeutung, nicht jedoch für die grundsätzlichen Abhängigkeiten und Zusammenhänge. Insbesondere wird sich – wie nicht anders zu erwarten – herausstellen, dass die optimalen Werte für bestimmte globale oder lokale Auslegungsparameter unabhängig von der stets willkürlichen Wahl von  $\ell_{\text{ref}}$  sind, und dass darüber hinaus in vielen Fällen nicht einmal die absoluten Werte von  $\text{Ma}$  und  $N_p$ , sondern lediglich deren Quotient, die von ORGAN (1992) als „Stirling-Zahl“ eingeführte Kennzahl

$$S_g = \frac{N_p}{\text{Ma}} = \frac{\bar{p}}{n \cdot \eta_{\text{ref}}} \quad (4-6)$$

den entscheidenden Einfluss ausübt. Auch diese Größe, die letztlich nur ein dimensionsloses Verhältnis von Druck und Drehzahl darstellt, ist offensichtlich unabhängig von  $\ell_{\text{ref}}$ .

Weiterhin ist der Isentropenexponent des Arbeitsmediums,  $\kappa = c_p / c_v$ , zu den allgemeinen Kennzahlen des Prozesses zu zählen. Sein Einfluss kommt z. B. darin zum Ausdruck, dass die vom isothermen Idealprozess ausgetauschten Energieströme von der Prozessdruckamplitude und damit gemäß Gl. A1-3 von der Gaskonstante  $R$  bestimmt werden, während andererseits die zu regenerierenden Wärmeströme von der isobaren Wärmekapazität  $c_p$  abhängig sind. Ebenso sind eine Reihe von Verlustmechanismen, insbesondere auch der in Kap. 2.3 diskutierte adiabatische Verlust, von  $\kappa$  abhängig. Bei einem Wechsel zwischen einem einatomigen und einem zweiatomigen Arbeitsgas (also z. B. zwischen Helium und Wasserstoff) kann da-

her keine vollständige Ähnlichkeit erwartet werden. Für die sonstigen, nachfolgend dargelegten Ähnlichkeitstheoretischen Überlegungen zur Optimierung einzelner Prozesskomponenten ist diese Kennzahl jedoch von untergeordneter Bedeutung, zumal die Auswahl des Arbeitsgases dann i. d. R. bereits erfolgt ist.

Schließlich sind als allgemeine Kennzahlen des Prozesses auch alle thermodynamischen Gütekriterien, wie der thermische Wirkungsgrad  $\eta$  einer Wärmekraftmaschine, die Leistungszahl  $\zeta$  einer Wärmepumpe oder Kältemaschine oder auch die bezogene Entropieproduktion  $s^*$  nach Gl. 2-15 zu nennen. Sie lassen sich im Gegensatz zu den anderen allerdings nicht als einfache Funktionen der vorgegebenen, den Prozess beschreibenden Größen formulieren, sondern stellen die Zielfunktion der Optimierung dar. Wird jedoch die vollständige Ähnlichkeit zweier thermodynamischer Prozesse durch gleiche Werte aller relevanten Kennzahlen, die sich aus den vorgegebenen Größen bilden lassen, nachgewiesen, so kann man davon ausgehen, dass auch die Werte dieser Gütekriterien gleich sind. Dies ist der Grundgedanke der in Kap. 4.3 entwickelten Skalierungsregeln, mit denen das Ziel verfolgt wird, Prozesse in Maßstab und Größe so zu verändern, dass die thermodynamische Güte erhalten bleibt.

## 4.2.2 Kennzahlen für einzelne Prozesskomponenten

### 4.2.2.1 Komponentenspezifische Druck-Kennzahl und Machzahl

Eine universelle Definition von  $N_p$  und  $Ma$  für den gesamten betrachteten Prozess erfordert weiterhin die Festlegung von Referenzwerten  $T_{ref}$  und  $\eta_{ref}$  für die Gastemperatur  $T$  und die im wesentlichen von dieser abhängige dynamische Viskosität  $\eta$ . In den nachfolgenden Betrachtungen, die sich auf die Optimierung der lokalen Abmessungen einzelner Prozesskomponenten konzentrieren, müssen daher entsprechende Korrekturfaktoren  $T^* = T / T_{ref}$  bzw.  $\eta^* = \eta / \eta_{ref}$  hinzugefügt werden. Weiterhin wird sich bei den folgenden Ableitungen zeigen, dass die Mach-Zahl stets in Verbindung mit der charakteristischen Strömungslänge  $\ell_i$  und die Druck-Kennzahl  $N_p$  stets in Verbindung mit dem charakteristischen Durchmesser  $d_i$  der betrachteten Prozesskomponente  $i$  auftritt. Offensichtlich handelt es sich hier um die jeweils „natürlichen“ charakteristischen Längen dieser dimensionslosen Größen. Im Falle der Mach-Zahl ist dies physikalisch unmittelbar einsichtig, denn es tritt als weitere, komponentenspezifische Kennzahl noch die bereits in Kap. 3.5 eingeführte bezogene Strömungslänge (Gl. 3-56) hinzu, die sich ebenso als auf den Volumendurchsatz bezogenes Totvolumen auffassen lässt:

$$\Lambda_i = \frac{\ell_i}{2\hat{x}_{m,i}} = \frac{V_{T,i}}{2\hat{V}_i} \quad (4-7)$$

Der gesamte Ausdruck repräsentiert damit die Mach-Zahl in ihrer ursprünglichen Bedeutung als Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit.

Aus diesem Grunde liegt es nahe, „komponentenspezifische“ Definitionen der Form

$$N_{p,i} = \frac{\bar{p} \cdot d_i}{\eta \cdot \sqrt{RT}} = N_p \cdot \frac{d_i^*}{\eta^* \sqrt{T^*}} \quad (4-8)$$

bzw.

$$Ma_i = \frac{2\hat{V}_i \cdot n}{A_{frei}} \cdot \frac{1}{\sqrt{RT}} = \frac{n \cdot \ell_i}{\sqrt{RT}} \cdot \frac{2\hat{V}_i}{V_{T,i}} = Ma \cdot \ell_i^* \cdot \frac{1}{\Lambda_i \sqrt{T^*}} \quad (4-9)$$

mit dem dimensionslosen Durchmesser  $d_i^*$  und der dimensionslosen Länge  $l_i^*$  gemäß

$$d_i^* = \frac{d_i}{l_{\text{ref}}} \quad ; \quad l_i^* = \frac{l_i}{l_{\text{ref}}} \quad (4-10)$$

zu verwenden. Der theoretische Vorteil dieser Darstellung ist, dass die Referenzlänge  $l_{\text{ref}}$  nicht mehr benötigt wird, der Nachteil aus praktischer Sicht ist jedoch der, dass die nachfolgend abgeleiteten Beziehungen in diesem Falle nur schwer nach den jeweils optimalen Werten von  $l_i$  bzw.  $d_i$  aufgelöst werden können, denn es gelingt nicht, das explizite Auftreten dieser Größen (bzw. der dimensionslosen Äquivalente nach Gl. 4-10) durch Verwendung der komponentenspezifischen Definitionen von  $N_{p,i}$  und  $Ma_i$  nach Gl. 4-8 und 4-9 vollständig zu vermeiden. Aus diesem Grunde ist letztlich stets eine Rücksubstitution unter Verwendung von  $N_p$  und  $Ma$  gemäß Gl. 4-4 und 4-5 erforderlich.

#### 4.2.2.2 Das bezogene Totvolumen und seine Bedeutung

Der in Gl. 4-7 verwendete Volumendurchsatz ergibt sich aus dem Amplitudenwert des als sinusförmig angenommenen Volumenstromes durch die Prozesskomponente  $i$ ,

$$\dot{V}_i = \omega \cdot \hat{V}_i \cdot \sin(\omega t) \quad (4-11),$$

und lässt sich auch durch das Produkt aus der in Gl. 3-55 eingeführten oszillatorischen Verschiebungslänge  $2\hat{x}_i$  und dem freien Strömungsquerschnitt  $A_{\text{frei}}$  ausdrücken. In vielen Fällen, insbesondere bei direkt an einen Zylinderraum angrenzenden Wärmeübertragern, die zugleich dessen einzige Schnittstelle zum Prozess bilden, kann dieser Amplitudenwert in guter Näherung gleich dem des Zylindervolumens gemäß Gl. 2-1 gesetzt werden. Im allgemeinen Fall – also z. B. auch für Regeneratoren – lässt er sich über den Massendurchsatz  $\Delta m_i$  unter Annahme einer mittleren Dichte ermitteln. Da  $\Delta m_i$  wegen der Pufferwirkung des Totvolumens der betrachteten Prozesskomponente auch ortsabhängig ist, wird hier zweckmäßig der arithmetische Mittelwert aus den Werten für die beiden angrenzenden Schnittstellen  $j_1$  und  $j_2$  verwendet, die sich mit Hilfe des verallgemeinerten isothermen Prozessmodells nach den von KÜHL ET AL. (1995) angegebenen und im Anhang 1.2 wiedergegebenen Beziehungen für jeden beliebigen regenerativen Kreisprozess in guter Näherung berechnen lassen:

$$\hat{V}_i = \frac{\frac{1}{2}(\Delta m_{j_1} + \Delta m_{j_2})}{2\bar{\rho}} \quad \text{mit} \quad \bar{\rho} = \frac{\bar{p}}{R \cdot T_m} \quad (4-12)$$

Die Verwendung der mittleren Dichte bzw. des Mitteldruckes und einer mittleren Temperatur  $T_m$  (im Falle eines Regenerators also zweckmäßig des arithmetischen Mittels der Matrixtemperaturen an den Enden) stellen zwar zusätzliche Näherungen dar, die jedoch die Genauigkeit der hier angestellten, ohnehin vereinfachten Betrachtungen nicht wesentlich beeinträchtigen.

Die Bedeutung der bezogenen Strömungslänge bzw. des bezogenen Totvolumens  $\Lambda_i$  nach Gl. 4-7 für den Betrieb eines Wärmeübertragers mit örtlich konstanter Wandtemperatur – insbesondere die bei der Prozessauslegung zu beachtende Grenzbedingung  $\Lambda_i < 1$  – wurde bereits in Kap. 3.5.1.1 diskutiert. Tatsächlich liegen die Werte von  $\Lambda_i$  für Wärmeübertrager auch in allen in der Literatur dokumentierten, ausgeführten Maschinen stets deutlich darunter.

Für Regeneratoren trifft die zugrunde liegende Überlegung nicht in gleicher Weise zu, da hier wegen des aufgeprägten axialen Temperaturgradienten stets alle Teile des Gasvolumens einen sinnvollen thermodynamischen Prozess durchlaufen. Betrachtet man dazu nochmals den iso-

lierten thermischen Verdichter (Kap. 2.1.2), so führt jede differentielle Bewegung  $dx$  des Verdrängerkolbens zu einer entsprechenden Druckänderung  $dp$ , die (bei Vernachlässigung des Puffereffektes des Totvolumens) durch Verlagerung eines Teils  $dm$  des Arbeitsgases von einem der beteiligten Zylinderräume zum anderen bewirkt wird. Anfangs- und Endzustand unterscheiden sich also bei pauschaler Betrachtung lediglich dadurch, dass das Temperaturniveau der Masse  $dm$  von  $T_1$  auf  $T_2$  verändert wurde. Tatsächlich geschieht dies durch Verschiebung *aller* Massenelemente im Regenerator um eine differentiell kleine Strecke, wobei sich deren Temperatur jeweils um  $dT$  entlang des Temperaturprofils der Matrix ändert.

Offensichtlich ist es also für den thermischen Kompressionseffekt grundsätzlich unwesentlich, dass der weitaus größte Teil der im Regenerator enthaltenen Gasmasse während der betrachteten Verschiebung dort verbleibt (wenngleich natürlich das Totvolumen der Matrix genau wie jedes weitere möglicherweise angeschlossene Totvolumen einen schädlichen Einfluss auf die erzielbare Druckamplitude ausübt). Bezeichnenderweise war es für die angestellte Überlegung auch nicht erforderlich, für den insgesamt verfügbaren Hubweg des Verdrängerkolbens eine Annahme zu treffen, d. h. es ist zunächst völlig offen, ob der noch vorhandene weitere Raum in den Zylindern als Hub- oder als zusätzliches Totvolumen zu betrachten ist. Die Situation entspricht damit der eines thermischen Verdichters in einem harmonischen Freikolbensystem, bei dem die tatsächliche Hubamplitude des Verdrängerkolbens innerhalb der konstruktiv vorgegebenen Grenzen vom Betriebszustand abhängig ist. Einschränkend ist hier allerdings hinzuzufügen, dass diese Überlegungen zunächst nur für den verlustfreien Prozess mit idealen Regeneratoren gelten. Inwieweit die Verhältnisse sich bei Berücksichtigung von Verlusten ändern, wird an späterer Stelle (Kap. 4.5.1) diskutiert.

### 4.2.2.3 Strömungs- und wärmetechnische Kennzahlen

Neben den bislang für die einzelnen Prozesskomponenten  $i$  eingeführten geometrischen bzw. volumetrischen Kennzahlen  $d^*$ ,  $\ell^*$  und  $\Lambda$ , die bereits bei Vorliegen rein *geometrischer* Ähnlichkeit zwischen zwei Maschinen und bei festgelegten Betriebstemperaturen zwangsläufig jeweils gleiche Werte aufweisen, muss zur Überprüfung der *strömungstechnischen* Ähnlichkeit zusätzlich die Reynolds-Zahl  $Re$  betrachtet werden, die wegen der periodisch oszillierenden Strömung zeitabhängig ist. Wird analog zu den bereits zuvor eingeführten Vereinfachungen auch hier ein sinusförmiger Verlauf angenommen, so gilt

$$Re(t) = \frac{|u| \cdot d \cdot \rho}{\eta} = \frac{\omega \cdot \ell \cdot d \cdot \rho}{2\Lambda \cdot \eta} \cdot |\sin(\omega t)| \quad (4-13),$$

und nach linearer Mittelwertbildung folgt für die mittlere Reynolds-Zahl

$$\overline{Re} = 2 \cdot \frac{Ma}{\Lambda} \cdot N_p \cdot \frac{\ell^* \cdot d^*}{\eta^* \cdot T^*} = 2 \cdot Ma_i \cdot N_{p,i} \quad (4-14).$$

Bei gleichen Mittelwerten sind auch die Verläufe  $Re(t)$  und die Maximalwerte  $\hat{Re}_i$  identisch. Für eine vollständige strömungstechnische Ähnlichkeit reicht dies jedoch wegen der oszillierenden Strömung nicht aus, sondern es ist gemäß Kap. 3-5 zusätzlich die kinetische Reynolds-Zahl  $Re_\omega$  als charakteristische Größe zu betrachten. Auch sie ist jedoch – ebenso wie die mittlere Reynolds-Zahl nach Gl. 4-14 – von den zuvor definierten Größen abhängig:

$$Re_\omega = 2\pi \cdot Ma \cdot N_p \cdot \frac{d^{*2}}{\eta^* \cdot T^*} \quad (4-15).$$



In Kap. 3-5 wurde dargelegt, dass sich auch nicht ausgebildete, oszillierende Strömungen sowohl im rein laminaren Fall als auch bei teilweise turbulenter Strömung durch die maximale Reynolds-Zahl, die kinetische Reynoldszahl und die bezogene Strömungslänge hinreichend charakterisieren lassen. Damit wäre bei gleichen Werten von  $Ma$  und  $N_P$  und bei geometrischer Ähnlichkeit zugleich auch die strömungstechnische Ähnlichkeit sogar unter Berücksichtigung der nicht ausgebildeten, oszillierenden Strömung implizit gegeben. Allerdings ist die quantitative Beschreibung von Wärmeübergängen und Strömungsdruckverlusten unter diesen Umständen erheblich schwieriger als bei Annahme einer stationären Strömung (vgl. z. B. Gl. 3-100 und 3-101). Da überdies festgestellt wurde, dass die Auswirkungen auf die integralen Ergebnisgrößen numerischer Prozesssimulationen trotz der sehr deutlichen, u. a. in Abb. 3-14 und 3-22 erkennbaren Unterschiede relativ gering sind, wird im Rahmen der folgenden Betrachtungen zur Optimierung auf der Grundlage dimensionsloser Kennzahlen die vereinfachende Annahme quasi-stationärer Strömungszustände getroffen.

Die wärmetechnische Ähnlichkeit wäre aus den gleichen Gründen ebenfalls unabhängig von dieser Annahme sichergestellt. Bei Verwendung von für stationäre Strömungen gültigen Gleichungen wie z. B. Gl. 3-102 ist die hier maßgebliche Nusselt-Zahl (Gl. 3-36, Gl. 3-82) nur von der Reynolds-Zahl, von  $\Lambda$  und von der Prandtl-Zahl abhängig, wobei für letztere – wie schon erwähnt – der Wert  $Pr \approx 0,7$  angenommen werden kann. Damit hängt der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  bei gegebener Geometrie nur noch von der spezifischen Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Arbeitsmediums ab, die ähnlich wie die dynamische Viskosität  $\eta$  als im wesentlichen nur temperaturabhängige und damit vorgegebene Größe betrachtet werden kann.

#### 4.2.2.4 Dimensionslose Entropieproduktion und Wärmebelastung

Ebenso wie die thermodynamische Güte des Gesamtprozesses in universeller Form durch die dimensionslose Entropieproduktion  $s^*$  nach Gl. 2-15 bewertet werden kann, bietet es sich auch bei der Optimierung einzelner Prozesskomponenten an, die durch sie produzierte Entropie als zu minimierende Zielgröße zu verwenden. Allerdings sollte hier nicht der Absolutwert, sondern eine auf den jeweiligen Nutzen der Komponente bezogene, dimensionslose Größe verwendet werden, denn andernfalls besteht die Gefahr, dass die Entropieproduktion nur deshalb minimiert wird, weil die Komponente ihre Aufgabe im Prozess nicht mehr erfüllt.

Im Falle von Wärmeübertragern und Regeneratoren ist somit der Austausch eines Wärmestroms zwischen dem Arbeitsgas und festen Wand- bzw. Matrixoberflächen die scheinbar nächstliegende Aufgabe. Allerdings sind Wärmeströme im Verlauf der Gesamtoptimierung u. U. veränderlich, wenn z. B. die Güte des Gesamtprozesses sich deutlich verbessert oder sich die Lastverteilung zwischen mehreren auf gleichem Temperaturniveau betriebenen Wärmeübertragern verlagert. Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, zu Bezugszwecken eine noch elementarere Anforderung heranzuziehen, die jede Prozesskomponente erfüllen muss, nämlich, dass sie den vom Gesamtprozess vorgegebenen Volumendurchsatz ohne nennenswerte Druckverluste zulassen muss. Letztere müssen in jedem Fall so gering sein, dass sie den Volumendurchsatz nicht signifikant verändern, denn wie schon in Kap. 3.1.6 ausgeführt wurde, würden sie andernfalls den Prozess thermodynamisch bis zur Unbrauchbarkeit verschlechtern.

Es bietet sich also an, jede während eines Prozesszyklus auftretende Entropieproduktion  $\Delta S_{\text{irr}}$  – sei sie durch Strömungsdruckverluste, Wärmeübergänge oder thermische Regeneratorverluste verursacht – auf den bereits in Gl. 4-7 verwendeten Volumendurchsatz zu beziehen, wobei zusätzlich noch der mittlere Prozessdruck und die ebenfalls bereits verwendete Referenztemperatur benötigt werden, um so die Entropieproduktion als dimensionslose Größe

$$\Phi^* = \frac{\Delta S_{\text{irr}} \cdot T}{\bar{p} \cdot 2 \hat{V}} \quad (4-16)$$

zu definieren. Ebenso erhält man im Falle von Wärmeübertragern für die zweite, möglicherweise variable Anforderung, die pro Zyklus zu übertragende Wärmemenge oder auch die daraus unter Berücksichtigung zeitlicher und örtlicher Ungleichmäßigkeiten ableitbare effektive Belastung  $Q_{\text{eff}}$  eine weitere dimensionslose Größe, die Wärmebelastung

$$\Gamma = \frac{Q_{\text{eff}}}{\bar{p} \cdot 2 \hat{V}} \quad (4-17).$$

#### 4.2.2.5 Weitere Kennzahlen

Neben den bislang definierten dimensionslosen Kennzahlen existieren noch einige weitere, deren Konstanz für die vollständige Ähnlichkeit zweier regenerativer Prozesse erforderlich ist. Sie betreffen die Schnittstellen des von Arbeitsmedium durchlaufenen Kreisprozessen zu den angrenzenden Festkörpern, wie z. B. den Druckbehälterwänden oder der Regeneratormatrix. Es zeigt sich, dass an diesen Stellen stets Probleme auftreten, wenn die vollständige Ähnlichkeit sichergestellt werden soll, denn die hierzu erforderlichen Änderungen der relevanten Stoffgrößen sind oft durch kein existierendes, geeignetes Material zu realisieren.

Typische Fälle sind hier das Verhältnis des zulässigen Festigkeitskennwertes  $\sigma_{\text{zul}}$  der drucktragenden Behälterwände zum mittleren Prozessdruck,

$$\sigma^* = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\bar{p}} \quad (4-18),$$

und das Verhältnis der spezifischen Wärmeleitfähigkeiten von Wand und Arbeitsmedium,

$$\lambda_{\text{W}}^* = \frac{\lambda_{\text{W}}}{\lambda} \quad (4-19).$$

Beide sind für den Einfluss des Wandwärmeverlustes (vgl. Kap. 3.2.2 und Anhang 2.1) von Bedeutung. Insbesondere ist bei Steigerung des Prozessdruckes gemäß den in Kap. 4.3 angegebenen Skalierungsregeln eine Ähnlichkeit bezüglich dieses Verlustes im strengen Sinne nur zu gewährleisten, wenn beide Verhältnisse konstant bleiben, d. h. wenn es gelingt, einen Werkstoff mit entsprechend höherer Festigkeit zu finden, der zudem auch noch die gleiche spezifische Wärmeleitfähigkeit aufweist. Es braucht nicht besonders betont zu werden, dass derartige Versuche i. d. R. wenig aussichtsreich sind, es sei denn, dass im Ausgangsfall z. B. aus Kostengründen ein Material mit schlechten Kennwerten verwendet wurde.

Die zugrundeliegenden Herleitungen im Anhang 2.1 gelten allerdings nur für den Fall dünnwandiger Behälter, d. h. für  $\sigma^* \gg 1$ . Unter dieser Voraussetzung kann die rein geometrische Ähnlichkeit bezüglich des Wandstärkenverhältnisses in gewissen Grenzen verletzt werden, ohne dass dies unmittelbare Auswirkungen auf die thermodynamische Prozessauslegung hat. In diesem Fall lässt sich die Bedingung für die thermische Ähnlichkeit so weit verallgemeinern, dass gemäß Gl. A2-4 lediglich das Verhältnis aus Wärmeleitfähigkeit und Festigkeitskennwert dem veränderten Prozessdruck nachgeführt werden muss. Dies ist zwar ebenfalls problematisch, eröffnet aber doch zumindest einen zusätzlichen Freiheitsgrad bei der Materialauswahl. Es bietet sich daher an, dieses Verhältnis in dimensionsloser Form als

$$k_W = \frac{\lambda_W}{\sigma_{\text{zul}} \ell_{\text{ref}}} \sqrt{\frac{T_{\text{ref}}}{R}} \quad (4-20)$$

auszudrücken. Mit Gl. 4-3 erhält man dann für den dimensionslosen optimalen Kolbenhub

$$\hat{x}_{\text{opt}}^* = \frac{\hat{x}_{\text{opt}}}{\ell_{\text{ref}}} = \left[ \frac{2}{9\pi} k_W^2 \text{Pr Sg} \frac{V_{\text{Hub}}^*}{\eta^*} \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\bar{T}_{\text{In}}^*}{2 - \ln(T_{\text{h}}/T_{\text{k}})} \right]^{1/5} \quad (4-21)$$

mit  $\bar{T}_{\text{In}}^* = \bar{T}_{\text{In}}/T_{\text{ref}}$  und  $V_{\text{Hub}}^* = V_{\text{Hub}}/\ell_{\text{ref}}^3$ . Gl. 4-21 gilt nur nach vorheriger Bestimmung der optimalen Kolbenspaltebreite nach Gl. 4-2. Hierfür ergibt sich analog in dimensionsloser Form

$$h_{\text{opt}}^* = \frac{h_{\text{opt}}}{\ell_{\text{ref}}} = \sqrt{\frac{\bar{T}_{\text{In}}^*}{\text{Ma N}_p \eta^* \text{Pr} [2 - \ln(T_{\text{h}}/T_{\text{k}})]}} \quad (4-22).$$

Weiterhin ist für die Auslegung der Regeneratoren der (meist unveränderliche) Quotient

$$\lambda_M^* = \frac{\lambda_M}{\lambda} \quad (4-23),$$

der u. a. gemäß Gl. 3-12 den Wärmeleitungsverlust der Regeneratormatrix charakterisiert, sowie der Quotient der volumenspezifischen Wärmekapazitäten von Matrix und Gas,

$$C_M^* = \frac{\rho_M \cdot c_M}{\bar{\rho} \cdot c_p} \quad (4-24),$$

von Bedeutung. Letzterer bestimmt neben der Porosität  $\varepsilon$  und dem bezogenen Totvolumen  $\Lambda$  nach Gl. 4-7, die bei Wahrung der geometrischen Ähnlichkeit beide konstant bleiben, das Verhältnis der integralen Wärmekapazitäten von periodisch hindurchströmender Gasmenge und Speichermatrix und damit den Temperaturschwingungsverlust des Regenerators. Nach der ersten in Kap. 3.2.3 dargestellten, vereinfachten Modellvorstellung (Gl. 3-15) gilt

$$\xi_{\text{TS}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m c_p}{m_M c_M} \approx \frac{1}{2} \frac{\bar{\rho} \cdot 2\hat{V} \cdot c_p}{\rho_M \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} V_{\text{frei}} \cdot c_M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*} \quad (4-25),$$

und auch der Verkürzungsfaktor  $f$  für die wirksame Regeneratorlänge gemäß Abb. 3-2 b lässt sich auf den gleichen dimensionslosen Ausdruck zurückführen, denn nach Gl. 3-16 gilt

$$f = \frac{1}{1 - \frac{\Delta m c_p}{m_M c_M}} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \quad (4-26).$$

Auch  $C_M^*$  ist insbesondere bei Erhöhung des mittleren Prozessdruckes nur schwer konstant zu halten, da die Gasmasse  $\Delta m$  mit der Dichte  $\rho$  relativ zum freien Volumen des Regenerators wächst und die volumenspezifische Wärmekapazität bei den praktisch für die Speichermatrix in Frage kommenden Materialien nur unwesentlich steigerbar ist.

## 4.3 Skalierungsregeln

### 4.3.1 Skalierung bei vollständiger Ähnlichkeit der Gas-Prozesse

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass eine vollständige thermodynamische, strömungs- und wärmetechnische Ähnlichkeit der *vom Arbeitsgas durchlaufenen* Kreisprozesse unter der (trivialen) Voraussetzung der geometrischen Ähnlichkeit allein durch gleiche Werte von  $N_P$  und  $Ma$  gewährleistet werden kann, was die fundamentale Bedeutung von Druck und Drehzahl für die Auslegung regenerativer Kreisprozesse nochmals unterstreicht.

Da dies auch für den Quotienten dieser Kennzahlen, die Stirling-Zahl (Gl. 4-6) gelten muss, ist Ähnlichkeit nur zu erzielen, wenn der Prozessdruck und die Drehzahl in gleicher Weise variiert werden, es sei denn, dass das Arbeitsmedium durch eines mit abweichender dynamischer Viskosität  $\eta_{\text{ref}}$  ersetzt wird. Diese Möglichkeit und ihre Auswirkungen auf die Prozessauslegung werden in Kap. 4.4 untersucht. An dieser Stelle wird dagegen zunächst angenommen, dass die Stoffdaten des Arbeitsmediums unveränderlich sind. Werden nun Prozessdruck und Drehzahl um einen beliebigen Faktor  $\chi$  gemäß

$$n' = \chi \cdot n \quad ; \quad \bar{p}' = \chi \cdot \bar{p} \quad (4-27)$$

verändert, so muss zur Wahrung der Ähnlichkeit bezüglich der Mach-Zahl und der Druck-Kennzahl  $N_P$  zunächst die Referenzlänge  $l_{\text{ref}}$  um den Faktor  $\chi^{-1}$  korrigiert werden. Um nun auch die geometrische Ähnlichkeit weiterhin zu gewährleisten, müssen *alle* geometrischen Abmessungen  $l$ , also nicht nur diejenigen in Strömungsrichtung, sondern z. B. auch alle Abmessungen der Zylinder, alle Durchmesser oder Breiten der Strömungskanäle, die Faserdurchmesser der Regeneratoren usw. analog zu  $l_{\text{ref}}$  verändert werden, d. h. es muss

$$l' = \chi^{-1} \cdot l \quad (4-28)$$

gelten. Werden also z. B. Druck und Drehzahl um einen Faktor  $\chi > 1$  erhöht, so verringern sich demnach alle Volumina gemäß

$$V_i' = \chi^{-3} \cdot V_i \quad (4-29).$$

Die Leistung  $P$  und Wärmeströme  $\dot{Q}_i$  des isothermen Idealprozesses hängen unmittelbar von Mitteldruck, Drehzahl und Volumen ab (vgl. Gl. A1-4 und 5). Bei Wahrung der vollständigen Ähnlichkeit werden auch alle Verluste maßstäblich skaliert, und so gilt, wie schon die Definition der Beale-Zahl (Gl. 3-1) erkennen lässt, in guter Näherung auch für reale Prozesse

$$\dot{Q}_i \sim n \cdot \bar{p} \cdot V_i \quad ; \quad P \sim n \cdot \bar{p} \cdot V_i \quad (4-30).$$

Dabei kann wegen der Wahrung der geometrischen Ähnlichkeit offen bleiben, welches  $V_i$  jeweils einzusetzen ist. Für den veränderten, thermodynamisch ähnlichen Prozess folgt damit

$$\dot{Q}' = \chi^{-1} \cdot \dot{Q} \quad \text{bzw.} \quad P' = \chi^{-1} \cdot P \quad (4-31).$$

Während demnach die Absolutwerte linear mit dem Faktor  $\chi$  sinken, steigt wegen Gl. 4-29 die auf das Volumen bezogene Leistung, d. h. die Leistungsdichte, quadratisch an:

$$\left( \frac{\dot{Q}}{V} \right)' = \chi^2 \cdot \left( \frac{\dot{Q}}{V} \right) \quad \text{bzw.} \quad \left( \frac{P}{V} \right)' = \chi^2 \cdot \left( \frac{P}{V} \right) \quad (4-32)$$

Damit bietet sich also theoretisch die Möglichkeit, die Leistungsdichte eines regenerativen Kreisprozesses bei *gleichbleibender* thermodynamischer Güte beliebig zu steigern, was die bisherigen Differenzierungen zwischen Prozessen mit prinzipiell höherer oder niedrigerer Leistungsdichte fragwürdig erscheinen lässt. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass bislang stets die Steigerungsmöglichkeiten über die *Druckamplitude* unter der Nebenbedingung konstanter Mitteldruck- und Drehzahlwerte diskutiert wurden. Dass die Prozessleistung (zumindest bei idealisierter Betrachtung) zu den beiden letztgenannten Werten proportional ist, ist an den entsprechenden Gleichungen (A1-4 und 5) unmittelbar abzulesen.

Die Möglichkeit, die Leistungsdichte auf diesem Wege zu steigern, wurde bei den bisherigen Überlegungen zur Optimierung bewusst durch Annahme vorgegebener Werte ausgeschlossen. An dieser Stelle wird nun deutlich, weshalb dies geschah, denn man erkennt, dass der thermodynamisch ähnliche Prozess bei erhöhten Druck- und Drehzahlwerten nur mit in jeder Hinsicht verkleinerten geometrischen Abmessungen realisierbar ist, was offensichtlich an einigen entscheidenden Stellen, insbesondere bei den Rohrdurchmessern oder Kanalquerschnitten der Wärmeübertrager und den charakteristischen, den hydraulischen Radius bestimmenden Abmessungen des Regeneratormaterials, an technische oder wirtschaftliche Grenzen stößt. Geht man davon aus, dass diese Grenzen (im Sinne eines vernünftigen Kompromisses) bereits bei der ursprünglichen Prozessauslegung erreicht waren, so wäre eine Steigerung der Leistungsdichte über Druck und Drehzahl somit nur noch bei *konstanten* hydraulischen Durchmessern bzw. Radien der Komponenten möglich, was dann zwangsläufig zu Einbußen bei der thermodynamischen Güte führt.

Der Grund, weshalb ein größerer als der zur Wahrung der Ähnlichkeit erforderliche Durchmesser stets zu einer verminderten Güte führt, besteht darin, dass bei einer Steigerung der Leistungsdichte gemäß Gl. 4-32 auch der in einer Komponente – sei es ein Wärmeübertrager oder ein Regenerator – (tot-)volumenspezifisch zu übertragende Wärmestrom mit  $\chi^2$  wächst. Bei theoretisch korrekter Skalierung des charakteristischen Durchmessers mit  $\chi^{-1}$  würde dies dadurch ermöglicht, dass sich sowohl die volumenspezifische Austauschfläche, die durch den Kehrwert des hydraulischen Radius gegeben ist, als auch der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  jeweils linear mit  $\chi$  vergrößern (letzterer wegen der Konstanz der Nusselt-Zahl).

Bei konstantem hydraulischen Durchmesser wäre diese Steigerung des volumenbezogenen Produktes  $\alpha \cdot A$  praktisch nicht zu erzielen, denn die volumenspezifische Fläche bliebe konstant, und somit müsste  $\alpha$  über die Nusselt-Zahl um  $\chi^2$  vergrößert werden, was selbst bei Annahme einer vollständig turbulenten Strömung nur mit einer noch größeren Steigerung der Reynolds-Zahl möglich wäre (z. B. um  $\chi^{2,5}$ , wenn  $Nu \sim Re^{0,8}$  gilt). Bei der ähnlichkeits-theoretisch korrekten Skalierung des Strömungsquerschnittes mit  $\chi^{-2}$  würde  $Re$  jedoch wegen der gleichbleibenden mittleren Strömungsgeschwindigkeit ( $Ma_i = \text{const.}!$ ) lediglich über die Dichte linear mit  $\chi$  steigen. Eine weitere Erhöhung wäre nur über die Strömungsgeschwindigkeit, d. h. durch eine Verengung und Verlängerung der Komponente unter Verletzung der geometrischen Ähnlichkeit, zu erzielen. Dies jedoch würde zu einem völlig inakzeptablen Anstieg der Strömungsdruckverluste führen.

Damit bestätigt sich schließlich die bereits in Kap. 4.1.3.1 formulierte Aussage, dass es für Mitteldruck und Drehzahl keine thermodynamisch „optimalen“ Werte gibt, sondern dass jede Wahl einen Kompromiss zwischen Leistungsdichte und thermodynamischer Güte unter der praktischen Randbedingung nach unten limitierter hydraulischer Durchmesser darstellt. Zusätzlich ist dabei noch zu berücksichtigen, dass die Steigerung des mittleren Prozessdruckes zwar die volumetrische *Leistungsdichte* des Prozesses erhöht, nicht aber das *Leistungsgewicht*, das oft – insbesondere auch hinsichtlich der Herstellungskosten – von ähnlich großer Bedeutung ist, reduziert. Bei der Dimensionierung der drucktragenden Behälterwände nach

den allgemeinen Regeln der Technik ergeben sich unter der Annahme eines unveränderlichen Festigkeitskennwertes des Wandmaterials zunehmend dickwandige Konstruktionen, die festigkeitstechnisch schwerer zu beherrschen sind, insbesondere dort, wo zusätzlich zur Beanspruchung durch den Innendruck auch noch Wärmespannungen sowie die Materialermüdung durch wiederholte An- und Abfahrzyklen zu berücksichtigen sind.

Aus Ähnlichkeitstheoretischer Sicht ist die Ursache für die mit steigendem Prozessdruck auftretenden Probleme in einer Verletzung der geometrischen Ähnlichkeit bezüglich des Wandstärken-Durchmesser-Verhältnisses zu sehen, was nur über einen proportional zum Druck erhöhten Festigkeitskennwert, d. h. durch Konstanthalten der Kennzahl  $\sigma^*$  nach Gl. 4-18, zu vermeiden wäre. Da dies in der Praxis i. d. R. nicht möglich ist, kommt es in der Folge zu einer weiteren Verletzung des Ähnlichkeitsprinzips, denn bei Anwendung der üblichen Dimensionierungsregeln für zylindrische Druckbehälter folgt nach den im Anhang A2-1 dargelegten Umformungen für die Wärmeleitungsverluste in den drucktragenden und zugleich mit axialen Temperaturgradienten beaufschlagten Regenerator- und Zylinderwänden näherungsweise

$$\dot{Q}_{\text{WWL}} \sim p \cdot \frac{A}{\ell} \quad (4-33),$$

wobei  $A$  die vom Gehäuse *eingeschlossene*, innere Querschnittsfläche und  $\ell$  die den axialen Temperaturgradienten bestimmende Länge bezeichnet. Werden nun alle Größen nach den obigen Regeln skaliert, so erhält man als Ergebnis

$$\dot{Q}'_{\text{WWL}} = \dot{Q}_{\text{WWL}} \quad (4-34).$$

Während also die Nutzleistung des Prozesses gemäß Gl. 4-31 um den Faktor  $\chi$  reduziert wird, bleibt der Wandwärmeleitungsverlust in seiner absoluten Größe konstant und gewinnt so relativ an Einfluss. Hier liegt somit ein weiterer Grund vor, weshalb einer Steigerung der Leistungsdichte nach der beschriebenen Methode praktische Grenzen gesetzt sind. Wie schon in Kap. 4.2.2.5 am Beispiel des Temperaturschwingungsverlustes der Regeneratoren gezeigt wurde, stößt man grundsätzlich überall dort an solche Grenzen, wo der Bereich des vom Arbeitsgas durchlaufenen Prozesses verlassen wird und die physikalischen Eigenschaften der angrenzenden Festkörper von Bedeutung sind.

Wie in Kap. 4.2.2.5 erwähnt besteht allerdings noch die Möglichkeit, lediglich die wärmetechnische Ähnlichkeit unter Verletzung der geometrischen zu wahren, da das Wandstärken-Durchmesser-Verhältnis der Druckbehälterwände sich i. d. R. nicht unmittelbar auf den Prozess auswirkt. Dazu müsste lediglich der bezogene, dimensionslose Wandwärmeleitungsverlust bzw. die hierdurch verursachte, in diesem Fall nach Gl. 4-16 sinnvoll mit dem Hubvolumen zu bildende dimensionslose Entropieproduktion

$$\Phi^*_{\text{WWL}} = \frac{\Delta S_{\text{WWL}} T_{\text{ref}}}{\bar{p} V_{\text{Hub}}} = \frac{k_{\text{W}} \Delta \vartheta^2}{\text{Ma} \hat{x}^* \ell^*} \quad \text{mit} \quad \Delta \vartheta = \frac{T_{\text{h}} - T_{\text{k}}}{\sqrt{T_{\text{h}} T_{\text{k}}}} \quad (4-35)$$

konstant bleiben. Zu beachten ist dabei, dass  $k_{\text{W}}$  gemäß Gl. 4-20 von der Referenzlänge  $\ell_{\text{ref}}$  abhängt und daher bei der beschriebenen Skalierung nur dann konstant bleibt, wenn der Festigkeitskennwert  $\sigma_{\text{zul}}$  und/oder die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  entsprechend nachgeführt werden.

### 4.3.2 Skalierung der Querschnitte

Unabhängig von den bisher dargestellten Überlegungen kann eine bestimmte, gewünschte Prozessleistung jederzeit durch paralleles Betreiben mehrerer Maschinen gleicher Bauart erzielt werden, oder aber auch durch eine entsprechende Vervielfachung aller Kolben- und Strömungsquerschnitte unter Beibehaltung der übrigen Größen, insbesondere der Drehzahl und des Prozessdruckes, der Längen in Strömungsrichtung, der Kolbenhöhe, der Durchmesser der Wärmetauscherrohre, der hydraulischen Radien und der Porositäten der Regeneratoren. Mit den Querschnitten ändern sich folglich alle Volumina, die Gasmasse und natürlich auch Leistung und Wärmeströme des Prozesses, während die Strömungsgeschwindigkeiten und – mit den Reynolds- und Nusselt-Zahlen – auch die von diesen bestimmten Strömungs- und Wärmeübertragungsbedingungen unverändert bleiben.

Da die Drehzahl und insbesondere auch der im zuvor behandelten Fall – der Skalierung bei vollständiger Ähnlichkeit – problematische Druck jetzt konstant bleiben, treten auch bei den Materialeigenschaften der beteiligten Festkörper keine Probleme auf. Die Wärmeleitungsverluste in den drucktragenden Wänden oder auch der Temperaturschwingungsverlust der Regeneratoren bleiben relativ zur Nutzleistung des Prozesses unverändert.

Eine unmittelbare geometrische Ähnlichkeit ist jedoch offensichtlich nicht gegeben, denn es ändern sich z. B. die Hub-Durchmesser-Verhältnisse der Zylinder u. ä., was sich grundsätzlich dort bemerkbar macht, wo Verluste nicht querschnitts- sondern z. B. längenproportional sind. Im Falle regenerativer Kreisprozesse sind hier die quantitativ schwer beschreibbaren Randgängigkeitsverluste in Regeneratoren sowie die bereits erwähnten Kolbenspaltverluste zu nennen. Die optimale Kolbenspaltweite hängt gemäß Gl. 4-2 im wesentlichen nur von Druck und Drehzahl ab und bleibt daher bei einer Querschnittsskalierung konstant. Unter dieser Bedingung sind die Kolbenspaltverluste direkt zum Kolbenumfang proportional (Gl. A2-9) und ändern sich somit lediglich um  $\sqrt{\chi}$ , wenn die Querschnitte mit dem Faktor  $\chi$  skaliert werden. Eine Vergrößerung der Maschine wirkt sich also hinsichtlich dieser Verluste positiv aus. Dass die Ähnlichkeit an dieser Stelle gestört ist, erkennt man an dem Optimum des Kolbenhubes nach Gl. 4-3, das – wenn auch nur schwach – vom Hubvolumen und damit von  $\chi$  abhängig ist. Durch Konstanthalten der Höhe gemäß obiger Annahme entfernt man sich also leicht vom Optimum. Dies kann jedoch i. d. R. in Kauf genommen werden, da die Kolbenspaltverluste relativ zur Prozessleistung meist nur von geringerer Bedeutung sind. Andererseits wäre ein leicht vergrößerter Hub bei  $\chi > 1$  auch in konstruktiver Hinsicht vorteilhaft.

Sieht man von dieser Einschränkung ab, so kann die absolute Leistung eines Prozesses durch diese Möglichkeit der Querschnittsskalierung grundsätzlich beliebig eingestellt werden, so dass auf diesem Wege auch die Veränderung der Absolutleistung ausgeglichen werden kann, die durch eine vorangegangene Skalierung nach dem Prinzip der vollständigen Ähnlichkeit des Gas-Prozesses (Kap. 4.3.1) verursacht wurde. Werden also nach diesen Regeln z. B. Druck und Drehzahl verdoppelt und zugleich alle Längenabmessungen halbiert, so könnte durch anschließendes Verdoppeln aller Querschnitte die im ersten Schritt halbierte Prozessleistung wieder erreicht werden. Das Ergebnis wäre dann gemäß Gl. 4-30 eine Maschine mit gleicher Leistung, jedoch vierfacher Leistungsdichte, bei der alle Längen in Strömungsrichtung, also z. B. auch die Kolbenhöhe, und alle hydraulischen Durchmesser halbiert wären, während die Durchmesser der Bauteile (Zylinder, Regeneratoren, Rohrbündeldurchmesser der Wärmeübertrager) lediglich um den Faktor  $\sqrt{2}$  reduziert wären. Das Ergebnis wäre also eine wesentlich kompaktere Maschine mit deutlich kleineren Längen-Durchmesser-Verhältnissen, d. h. die Maschine „geht in die Breite“ – ein Phänomen, das insbesondere in Verbindung mit einer Drehzahlsteigerung auch von anderen Kolbenmaschinen bekannt ist.

Zu beachten sind bei einer derartigen kombinierten Skalierung natürlich die zuvor bereits genannten Einschränkungen, d. h. es sind erhöhte Wärmeleitungs- und Regeneratorverluste in Kauf zu nehmen. Zugleich würden im Gegenzug die Kolbenspaltverluste leicht reduziert (was allerdings zur Kompensation der zuvor genannten Nachteile i. d. R. nicht ausreicht).

### 4.3.3 Variation der Stirling-Zahl

Eine weitere Möglichkeit, den Prozess zu beeinflussen, besteht in der Variation der Stirling-Zahl  $Sg$  nach Gl. 4-6, d. h. in einer Veränderung von Druck und/oder Drehzahl, während die geometrischen Größen unverändert bleiben. Da die Stirling-Zahl eine charakteristische dimensionslose Kennzahl des Prozesses ist, wird hierbei gegen das Prinzip der vollständigen Ähnlichkeit verstoßen. Wird diese Variation jedoch unter der Nebenbedingung eines konstanten Produktes von Drehzahl und Prozessdruck durchgeführt, so werden zwar auch die Mach-Zahl  $Ma$  und die Druck-Kennzahl  $N_P$  gegenläufig verändert; jedoch bleiben mit dem Produkt dieser Zahlen gemäß Gl. 4-14 auch alle Reynolds-Zahlen und somit auch die Nusselt-Zahlen und die Druckverlust-Beiwerte  $\xi$  konstant.

Damit sind die Auswirkungen auf den Prozess leicht vorherzusagen, und es kann im Einzelfall geprüft werden, ob sie in gewissen Grenzen akzeptiert oder auch durch weitere, nachfolgende Veränderungen der Detailauslegung kompensiert werden können.

Zunächst ist festzustellen, dass bei einer solchen gegenläufigen Veränderung von Druck und Drehzahl um einen Faktor  $\chi$  gemäß

$$p' = \chi \cdot p \quad ; \quad n' = \chi^{-1} \cdot n \quad \Rightarrow \quad Sg' = \chi^2 \cdot Sg \quad (4-36)$$

die Prozessleistung wegen Gl. 4-30 konstant bleibt. Ebenso gilt dies bei gleicher Nusselt-Zahl und unveränderter Geometrie auch für die Wärmeübergangsbedingungen sowie für die Kolbenspaltverluste, sofern die Näherung nach Gl. A2-9 und Gl. 4-22 angewendet wird.

Veränderungen ergeben sich jedoch zum einen bei den Strömungsdruckverlusten, die allgemein aus Gleichungen der Form

$$\Delta p = \left( \xi(\text{Re}) \cdot \frac{\ell}{d_h} + f_C \right) \cdot \frac{\rho}{2} u^2 \quad (4-37)$$

zu berechnen sind. Zwar bleibt hier wegen der Konstanz der Reynolds-Zahl der Druckverlustbeiwert  $\xi$  unverändert, und das gleiche gilt auch für den geometrieabhängigen Faktor  $f_C$ , durch den hier (wie auch im folgenden) der bei der Ausströmung auftretende Carnot'sche Stoßverlust sowie zugleich auch alle zusätzlichen Einlaufdruckverluste pauschal beschrieben werden. Während jedoch die Dichte  $\rho$  mit dem Druck um  $\chi$  steigt, sinkt die in Gl. 4-37 quadratisch eingehende, zur Drehzahl proportionale Geschwindigkeit  $u$  mit  $\chi$  ab, so dass sich letztlich für die Strömungsdruckverluste insgesamt eine lineare Abnahme mit  $\chi$  ergibt.

Zum anderen wirkt sich eine Steigerung des Prozessdruckes um den Faktor  $\chi$  genau so auf die Wandwärmeleitungs- und die Regeneratorverluste aus, wie bereits in Kap. 4.3.1 beschrieben. Zusammenfassend kann man daher sagen, dass die beschriebene Variation der Stirlingzahl zu einer Verschiebung der relativen Bedeutung von thermischen Wandwärmeleitungs- und Regeneratorverlusten einerseits und Strömungsdruckverlusten andererseits führt. Dies kann z. B. dort von Interesse sein, wo ein Prozess häufig im Teillastbereich betrieben werden und deshalb der thermodynamisch optimale Betriebszustand in diesen Bereich verschoben



werden soll. Teillastzustände werden bei kinematisch gesteuerten Maschinen i. d. R. über eine Drehzahlabenkung, bei Freikolbenmaschinen dagegen über eine Verringerung der Kolbenhöhe herbeigeführt. In beiden Fällen sinkt dabei die Strömungsgeschwindigkeit  $u$ , so dass die Leistungsdissipation durch Druckverluste rasch an Bedeutung verliert. Dagegen sind viele thermische Verluste, insbesondere auch die durch Wandwärmeleitung, hiervon völlig unabhängig und gewinnen somit im Teillastbereich an relativer Bedeutung.

Aus diesem Grunde kann durch eine Veränderung der Stirling-Zahl gemäß Gl. 4-36 mit einem Faktor  $\chi < 1$  der bezüglich der thermodynamischen Güte optimale Betriebspunkt vom Volllast- in den Teillastbereich verschoben werden, während im umgekehrten Fall zusätzliche Leistungsreserven erschlossen werden können, da die Drehzahl dann über den bisherigen Nennlastpunkt hinaus gesteigert werden könnte, ohne dass die Strömungsdruckverluste inakzeptabel würden. Die Verschlechterung von Wirkungsgrad bzw. Leistungszahl kann auf diese Weise zwar geringer gehalten, jedoch nicht völlig vermieden werden.

Kombiniert man nun die Variation der Stirling-Zahl mit den beiden zuvor beschriebenen Skalierungsmethoden, so ergibt sich theoretisch die Möglichkeit, neben der Prozessleistung zusätzlich eine der beiden Einflussgrößen Druck und Drehzahl gegenüber der Ausgangskonfiguration unverändert zu lassen. Greift man hierzu das am Ende von Kap. 4.3.2 angeführte Beispiel einer Verdoppelung von Druck und Drehzahl nochmals auf, so kann zum einen bei einer weiteren Verdoppelung des Druckes nun die Drehzahl wieder auf ihren ursprünglichen Wert zurückgeführt werden, während umgekehrt bei einer weiteren Verdoppelung der Drehzahl der Druck wieder seinen Ausgangswert erreichen würde. Im ersten Fall wäre eine starke Zunahme der Wandwärmeleitungs- und der Regenerator-Temperaturschwingungsverluste die Folge, im zweiten dagegen die der Strömungsdruckverluste. Es zeigt sich damit die Assoziation dieser beiden fundamentalen Auslegungsparameter mit den jeweils genannten Verlusten, die offensichtlich auch dann noch auftritt, wenn man sich bemüht, die Geometrie des Prozesses nach den genannten Regeln den Veränderungen dieser Größen nachzuführen.

Grundsätzlich führt eine Steigerung einer dieser beiden Größen um  $\chi^2$  bei Konstanz des jeweils anderen Parameters und bei unveränderter Prozessleistung zu einer Abnahme der Längen in Strömungsrichtung und der hydraulischen Durchmesser um den Faktor  $\chi$ , jedoch bezüglich der Durchmesser der Zylinder und Strömungsquerschnitte lediglich zu einer Abnahme um  $\sqrt{\chi}$ . Somit folgt, dass das Volumen insgesamt abnimmt und auch die inneren Strukturen des Prozesses, wie z.B. Rohrdurchmesser oder die charakteristischen Materialabmessungen der Regeneratormatrix, verkleinert werden, während die Maschine zugleich relativ zur Länge breiter wird und somit eine „gedrungene“ Form annimmt. Die höhere Leistungsdichte wird in jedem Fall mit einem Verlust an thermodynamischer Güte erkauft, und der optimale Betriebspunkt verlagert sich in den Teillastbereich.

Entsprechend bewirkt eine Druck- bzw. Drehzahlabenkung bei Konstanz des jeweils anderen Parameters umgekehrt, dass die Maschine stärker hinsichtlich der Längen wächst als bezüglich der Strömungsquerschnitte wächst; d.h. sie wird "schlanker", die inneren Strukturen werden größer und zugleich sinkt die Leistungsdichte des Prozesses. Zudem wird sich – bedingt durch die Variation der Stirling-Zahl und die dadurch bedingte Verletzung des Ähnlichkeitsprinzips – mit dem Verhältnis aus Wandwärmeleitungs- und Strömungsdruckverlusten auch die Lage des optimalen Betriebszustandes auf der Drehzahl- bzw. (im Fall von Freikolbenmaschinen) auf der Hubskala zu höheren Werten hin verschieben.

## 4.4 Die Auswahl des Arbeitsmediums

In Kap. 4.1.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass Wasserstoff und Helium die vorteilhaftesten Arbeitsgase für regenerative Kreisprozesse sind. Dies ist qualitativ allein dadurch erklärbar, dass alle Prozesskomponenten gemäß Kap. 4.2.2.4 den beiden konkurrierenden Anforderungen eines möglichst geringen Strömungsdruckverlustes einerseits und einer möglichst verlustfreien Wärmeübertragung andererseits gerecht werden müssen. Im Bereich der praktisch durchweg vorliegenden turbulenten Strömung ist für einen bestimmten Strömungszustand – ausgedrückt durch den Wert der Reynolds-Zahl und die von ihr abhängige Nusselt- und Druckverlust-Kennzahl – der Druckverlust gemäß Gl. 4-37 im wesentlichen von der Dichte des Arbeitsmediums abhängig, während der Wärmeübergangskoeffizient gemäß der Definition der Nusselt-Zahl durch dessen Wärmeleitfähigkeit bestimmt wird. Nun fällt letztere bekanntlich bei idealen Gasen mit der Molmasse  $M$ , während andererseits die Dichte linear von ihr abhängt. Es liegt damit auf der Hand, dass obige Anforderungen umso besser erfüllt werden, je geringer die Molmasse des Arbeitsmediums ist.

Da die genannten leichten Gase jedoch hohe, bei bewegten Kolbenstangen- oder Wellenabdichtungen nur sehr schwer erfüllbare Anforderungen an die Dichtigkeit der Maschine stellen, wird dennoch häufig die Möglichkeit untersucht, alternativ Luft oder Stickstoff als Arbeitsmedium einzusetzen. WALKER ET AL. (1994) zeigen an einer Beispielrechnung, dass bei Verwendung von Luft statt Helium der Druckverlust bei gleicher Wärmeübertragung ca. 7,5 mal höher wäre. Nach ORGAN (1992) ist eine unmittelbare Skalierung nach Ähnlichkeitstheoretischen Prinzipien in diesem Fall nicht möglich, da der Isentropenexponent als charakteristische Kennzahl bei diesen Gasen nicht gleich ist. Ein Wechsel des Arbeitsmediums ist deshalb unter Wahrung der vollständigen Ähnlichkeit des Gasprozesses gemäß Kap. 4.3.1 nur innerhalb der Gruppen der ein- bzw. zweiatomigen Gase möglich.

Die Wahrung der vollständigen Ähnlichkeit erfordert nach Kap. 4.3.1 konstante Werte der Mach-Zahl  $Ma$ , der Druckkennzahl  $N_p$  (und damit der Stirling-Zahl  $S_g$ ), der dimensionslosen Geometriegrößen  $l_i / l_{ref}$  sowie des Isentropenexponenten  $\kappa$ . Ändern sich nun bei einem Wechsel des Arbeitsmediums die Stoffdaten – relevant sind hier die direkt von der Molmasse abhängige spezifische Gaskonstante  $R$  und die dynamische Viskosität  $\eta$  –, so existieren mit der Drehzahl  $n$ , dem Druck  $p$  und – bei geometrischer Ähnlichkeit stellvertretend für alle Längenabmessungen – der Referenzlänge  $l_{ref}$  drei Freiheitsgrade. Sie können zur Erhaltung der thermodynamischen Ähnlichkeit im Sinne konstanter Werte von  $Ma$  und  $N_p$  sowie der Nutzleistung nach Gl. 4-30 als weiterer, aus praktischer Sicht sinnvoller Randbedingung genutzt werden. Die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems ergibt

$$n' = \frac{\eta'}{\eta} \left( \frac{R'}{R} \right)^{3/2} n \quad ; \quad p' = \left( \frac{\eta'}{\eta} \right)^2 \left( \frac{R'}{R} \right)^{3/2} p \quad , \quad l'_{ref} = \frac{\eta}{\eta'} \frac{R}{R'} l_{ref} \quad (4-38).$$

Auch hier wird allerdings nur die Ähnlichkeit des Gasprozesses gewährleistet, während dort, wo die Stoffeigenschaften der beteiligten Festkörper eingehen, zusätzlich die Konstanz der jeweils relevanten, in Kap. 4.2.2.5 genannten Kennzahlen gefordert werden muss.

In Tabelle 4-1 sind die Ergebnisse einiger Beispielrechnungen nach HEIKRODT ET AL. (1996) wiedergegeben, die die Auswirkungen des Wechsels zwischen Helium und Argon sowie zwischen Wasserstoff und Stickstoff auf die Auslegung einer Vuilleumier-Wärmepumpe demonstrieren. Man erkennt, dass in beiden Fällen die Ausgangswerte für Druck und Drehzahl, die einer von CARLSEN (1994) entwickelten Maschine entsprechen, bis in einen aus praktischer Sicht unsinnigen Bereich abgesenkt werden müssten, während die Hubvolumina im ers-

**Tabelle 4-1:** Auswirkungen des Wechsels des Arbeitsmediums auf die Auslegung einer Vuilleumier-Wärmepumpe bei Wahrung der vollständigen Ähnlichkeit des Gasprozesses sowie bei konstanter Referenzlänge und Querschnittsskalierung, jeweils für konstante Prozessleistung (nach HEIKRODT ET AL. 1996)

Stoffdaten		Helium	Argon		Wasserstoff	Stickstoff
M	[g/mol]	4,00	39,95		2,02	28,01
R	[J/kg/K]	2077,2	208		4157	296,8
$\eta$	[Pa s]	2,0E-05	2,4E-05		9,2E-06	2,3E-05
$\kappa$	[-]	1,667	1,667		1,4	1,4
vollständige Ähnlichkeit des Gasprozesses						
Drehzahl	[min <sup>-1</sup> ]	960	36,48		960	46,26
Druck	[bar]	120	5,475		120	14,621
Länge	[mm]	1	8,322		1	5,542
Querschnittsskalierung bei konstanter Referenzlänge						
Drehzahl	[min <sup>-1</sup> ]	960	303,8		960	256,5
Druck	[bar]	120	45,567		120	81,032
Querschnitt	[cm <sup>2</sup> ]	1	8,322		1	5,542

ten Fall auf das ca. 580-fache und im zweiten auf das ca. 170-fache vergrößert werden müssten. Die Leistungsdichte nach Gl. 4-32 würde sich entsprechend um diese Faktoren reduzieren und wäre damit nicht mehr akzeptabel.

Um das mit dieser Skalierung verbundene, aus praktischer Sicht unnötige Anwachsen der hydraulischen Durchmesser zu vermeiden, bietet sich als Alternative die Anpassung von Druck und Drehzahl bei konstanter Referenzlänge an, wobei die Nutzleistung jetzt über die in Kap. 4.3.2 beschriebene Querschnittsskalierung auf ihrem ursprünglichen Wert gehalten wird. In diesem Fall ergibt sich als Lösung des entsprechenden Gleichungssystems

$$n' = \left(\frac{R'}{R}\right)^{1/2} n \quad p' = \frac{\eta'}{\eta} \left(\frac{R'}{R}\right)^{1/2} p \quad A' = \frac{\eta}{\eta'} \frac{R}{R'} A \quad (4-39)$$

Die Ergebnisse dieser Skalierung sind ebenfalls in Tabelle 4-1 wiedergegeben. Es zeigt sich auch hier – wenn auch nicht so extrem wie im ersten Fall –, dass mit steigender Molmasse des Gases die Drehzahl und der Druck (und somit auch die Leistungsdichte des Prozesses) abgesenkt werden müssen, um Ähnlichkeit und damit auch die Konstanz der thermodynamischen Güte bzw. der Leistungszahl zu gewährleisten. Jetzt bleiben alle Längen in Strömungsrichtung, die Kolbenhöhe sowie die hydraulischen Radien und die Faserdurchmesser der Regeneratormatrix konstant. Alle Strömungsquerschnitte müssen zur Beibehaltung der Prozessleistung deutlich vergrößert werden, und die Leistungsdichte sinkt auch hier entsprechend. Problematisch ist dabei aus praktischer Sicht vor allem das Anwachsen der Rohrzahl der Wärmeübertrager, das den Aufwand und die Ausschussrate bei der Fertigung in die Höhe treibt.

Während die bisherigen Darstellungen auf der Annahme beruhten, dass das Arbeitsmedium sich zumindest näherungsweise als ideales Gas behandeln lässt, gibt es auch Überlegungen,

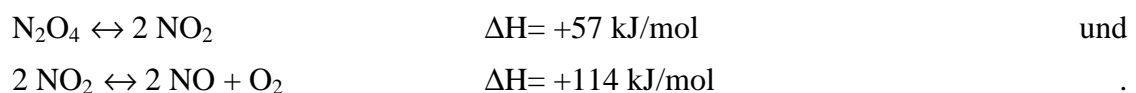
das hiervon abweichende Zustandsverhalten realer Stoffe gezielt auszunutzen. Während sich das oft bevorzugte Helium auch bei den in regenerativen Kreisprozessen typischen Betriebsdrücken noch in guter Näherung als ideales Gas verhält, treten bei Wasserstoff und noch mehr bei Luft bzw. Stickstoff merkliche Abweichungen auf. DANEY (1982) weist darauf hin, dass reale Gase mit positivem Joule-Thomson-Koeffizienten die differentiellen Prozesswärmen vergrößern können. RICHTER (1988) zeigt, dass insbesondere in der Nähe des kritischen Punktes realer Gase Effekte von mehr als einer Verdoppelung der Prozesswärmen auftreten können. Zur Ausnutzung dieses Effektes sollte die kritische Temperatur des Arbeitsmediums nur wenig unterhalb der niedrigsten im Prozess auftretenden Temperatur liegen. Unter den nicht brennbaren Gasen zeigt jedoch nach RICHTER (1988) nur Kohlendioxid, das wegen seiner hohen kritischen Temperatur ( $T_{kr} = 31^\circ\text{C}$ ) nur bedingt verwendbar ist, den gewünschten Effekt. In diesem Falle stünden einem eventuellen Gewinn bei der Leistungsdichte höhere Verluste wegen der ungünstigen Werte von Dichte und Wärmeleitfähigkeit gegenüber.

Weiterhin wurden von verschiedenen Autoren (WALKER 1980, 1980a, 1994, RENFROE 1983, WEST 1983, HIRATA ET AL. 1984) zweiphasige 2-Komponenten-Gemische vorgeschlagen, z. B. ein Gemisch aus einem Gas und Wasser (oder einer anderen flüssigen Komponente). Im Betrieb läge dann auf kaltem Temperaturniveau ein Gas-Flüssigkeits-Gemisch vor, auf heißem Temperaturniveau hingegen ein Gas-Dampf-Gemisch. Durch abwechselnde Kondensation im kalten und Verdampfung im heißen Prozessteil wäre so eine zusätzliche Steigerung der Druckamplitude, ein verbesserter Wärmeübergang sowie eine Annäherung an die im Idealprozess geforderten isothermen Zustandsänderungen zu erzielen.

Befriedigende experimentelle Ergebnisse liegen hier allerdings bislang nicht vor, zumal es schwierig erscheint, das diesen Prozessen zugrundeliegende Prinzip eines verlustarmen regenerativen Wärmeaustausches zu realisieren. Die bislang bekannten Regeneratorbauformen würden zum einen die Flüssigphasen aufgrund von Kapillarkräften förmlich aufsaugen und wären damit für die Gasphase praktisch undurchlässig, und gröbere Strukturen würden dagegen ein hohes Totvolumen oder eine zu geringe Speicherkapazität und Austauschfläche bedingen. Zum anderen ist die Siedetemperatur der kondensierbaren Komponente druckabhängig, und es ist daher fraglich, ob der regenerative Wärmeaustausch in beiden Strömungsphasen entlang des gleichen Temperaturprofils möglich ist.

Weiterhin sollte man bei derartigen Überlegungen grundsätzlich bedenken, dass man sich hier in das Grenzgebiet zum klassischen Dampfkraftprozess begibt und den eigentlichen Vorteil der hier behandelten Prozesse, nämlich die Möglichkeit, Betriebsdruck und -temperaturen unabhängig voneinander festlegen zu können, aus der Hand gibt. Hierdurch wird in vielen Fällen eine vorteilhafte Temperatur-Leistungscharakteristik ermöglicht, im Falle von Heizungswärmepumpen z. B. eine mit dem Temperaturhub bedarfsgerecht steigende Heizleistung.

Ein ähnlicher Effekt wie bei einer rein physikalischen Phasenumwandlung kann nach (WALKER 1980) auch durch Einsatz chemisch reagierender, dissoziierender und zusätzlich auch kondensierbarer Substanzen erzielt werden, so z. B. mit Stickstofftetroxid ( $\text{N}_2\text{O}_4$ ), das allein oder auch zusammen mit einer zweiten gasförmigen (Träger-)Komponente eingesetzt werden könnte. Bei tiefen Temperaturen liegt es flüssig vor, verdampft jedoch bei relativ geringer Wärmezufuhr. Bei weiterer Temperaturerhöhung kommt es zu einem zusätzlichen Druckanstieg wegen der Dissoziation der Moleküle entsprechend den Gleichungen



Beide Reaktionen sind endotherm, und eine Temperaturerhöhung verschiebt somit das Gleichgewicht nach rechts. Die Reaktionskinetik ist dabei nach WALKER (1980) hinreichend schnell, so dass keine Hystereseffekte wegen verzögerter Gleichgewichtseinstellung zu befürchten sind. Allerdings ist  $\text{N}_2\text{O}_4$  hoch korrosiv und sehr giftig, so dass es aus praktischen und sicherheitstechnischen Überlegungen für die meisten Anwendungen ungeeignet ist.

Nur wenig untersucht ist bisher eine weitere, zunächst von MALONE (1931) vorgeschlagene Variante, bei der eine Flüssigkeit als Arbeitsmittel eingesetzt wird. Hierbei sind Flüssigkeiten insbesondere in einem Temperaturbereich von  $0.7 T_{\text{krit}} < T < T_{\text{krit}}$  einsetzbar, da sie in diesem Bereich einen großen thermischen Ausdehnungskoeffizienten (vergleichbar zu Gasen) besitzen (SWIFT 1989). Vorteile bietet die Verwendung einer Flüssigkeit insofern, als sie eine gegenüber Gasen wesentlich größere volumenspezifische Wärmekapazität aufweisen und einen deutlich besseren Wärmeübergang in den Wärmeaustauschern ermöglichen, so dass diese kompakter gestaltet werden können. Experimentell wurde hier bislang nur der Stirling-Prozess als Wärmekraftmaschine untersucht (SWIFT 1989a), wenngleich auch die Realisierung von Kältemaschinen und Wärmepumpen möglich erscheint (SWIFT 1993).

Grundsätzlich treten bei Einsatz einer Flüssigkeit als Arbeitsmittel während der Kompression extreme Drücke auf, so dass starke Wandquerschnitte erforderlich sind, die wiederum hohe Wärmeleitungsverluste verursachen. Weiterhin wäre ein Betrieb mit hohen Drehzahlen ausgeschlossen. Eine Maschine mit konkurrenzfähiger Leistungsdichte wiese somit ein großes Bauvolumen und wegen der hohen Drücke sehr dicke Zylinderwände auf (WALKER 1980a).

Aufgrund dieser oder ähnlicher Abwägungen sind in der Vergangenheit nahezu alle Entwickler von Maschinen zur Realisierung regenerativer Kreisprozesse zu dem Ergebnis gelangt, dass es zu den zu Beginn dieses Kapitels genannten gasförmigen Arbeitsmedien keine praktisch vorteilhaftere Alternative gibt. Stirlingmaschinen hoher Leistungsdichte und Güte werden durchweg mit Wasserstoff oder Helium betrieben, wobei das erstgenannte Medium vorwiegend dort zum Einsatz kommt, wo extrem hohe Anforderungen an die Leistungsdichte gestellt werden und die sicherheitstechnischen Aspekte relativ zu anderen Betriebsrisiken in den Hintergrund treten, also z. B. in mobilen Anwendungsfällen.

Im Bereich stationärer Anwendungen, also z. B. bei der dezentralen Kraft-Wärme-Kopplung oder im Falle von Heizungswärmepumpen, ist eine leicht verminderte Leistungsdichte hingegen akzeptabel. Daher kommen auch HEIKRODT ET AL. (1996) zu dem Ergebnis, dass für den praktischen Anwendungsfall einer Vuilleumier-Wärmepumpe zur Gebäudeheizung nur Helium in Frage kommt. Die sicherheits- und werkstofftechnischen Probleme beim Einsatz von Wasserstoff (s. Kap. 4.1.2) sind zwar de facto beherrschbar, wie u. a. der Einsatz von Stirlingmotoren mit Wasserstofffüllung an Bord von U-Booten der schwedischen Marine beweist (BRATT UND NELVING 2000, BRATT UND IVARSSON 2001). Dies ist jedoch zumindest mit zusätzlichen Kosten verbunden, und damit ist allein aus marktpolitischen Gründen Helium in stationären, zivilen Anwendungen zu bevorzugen – nicht zuletzt auch im Hinblick auf die bessere emotionale Akzeptanz beim Endnutzer.

## 4.5 Ähnlichkeitstheoretische Ansätze zur Optimierung

### 4.5.1 Vereinfachte Optimierung der Regeneratoren

Die optimale Totraumverteilung kann gemäß Kap. 4.1.4.3 nur bestimmt werden, wenn jede Komponente das ihr zugewiesene Totvolumen bestmöglich nutzt. Wie dort weiter ausgeführt wurde, ist die optimale Auslegung der Wärmeübertrager i. d. R. von der des jeweils angrenzenden Regenerators abhängig. Aus diesem Grunde wird hier zunächst das Teilproblem der Regeneratorauslegung unter der Nebenbedingung eines vorgegebenen Totvolumens  $V_T$  behandelt. Um die grundsätzlichen Abhängigkeiten zu verdeutlichen, wird dabei exemplarisch nur der Fall einer Drahtgewebematrix unter Verwendung relativ einfacher Druckverlust- und Wärmeübergangskorrelationen nach ORGAN (1992, S. 114),

$$\xi = \frac{a}{\text{Re}} + b \quad ; \quad a = 160 ; b = 1,2 \quad (4-40)$$

$$\text{und} \quad \text{St} = c \cdot \text{Re}^{-1/2} \cdot \text{Pr}^{-2/3} \quad ; \quad c = 1,25 \quad (4-41),$$

behandelt<sup>1</sup>. Da die Leistungsdichte des Prozesses durch die im Rahmen dieser Unteroptimierung als konstant anzunehmenden globalen Prozessparameter bestimmt wird, kommt als Zielfunktion hier lediglich die Entropieproduktion durch die verschiedenen Verluste, d. h. durch die Strömungsdruckverluste einerseits und die in Kap. 3.2 behandelten thermischen Regeneratorverluste andererseits in Frage. Ist der Regenerator ringförmig um einen Zylinder angeordnet, so sind gemäß Kap. 4.1.4.1 zusätzlich die letzterem zuzuordnenden thermischen Verluste zu berücksichtigen. Nach KÜHL ET AL. (1997a) erhält man in dimensionsloser Form gemäß Gl. 4-16 für die Entropieproduktion durch Strömungsdruckverluste

$$\Phi_{\Delta p}^* = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{\text{Sg}} \cdot \frac{\eta^*}{\Lambda} \cdot \left(\frac{\ell}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \left(a + \frac{4}{3} b \cdot \overline{\text{Re}}\right) \quad (4-42).$$

Bei den thermischen Verlusten ist der Einfluss der begrenzten Wärmekapazität der Matrix gemäß der Modellvorstellung nach Abb. 3-2 b durch einen um den Faktor  $f$  nach Gl. 4-26 erhöhten effektiven Temperaturgradienten zu berücksichtigen. Ausgenommen sind hier lediglich die Wandwärmeverluste, da sich die zeitliche Verlagerung des Temperaturprofils hier wegen der hohen thermischen Trägheit nicht bemerkbar macht. Damit erhält man für die dimensionslose Entropieproduktion durch den Wärmeübergangsverlust

$$\Phi_{\text{WÜ}}^* \approx 0,4381 \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \text{Pr}^{2/3} \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \overline{\text{Re}}^{1/2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \cdot \Delta\vartheta^2 \quad (4-43),$$

für diejenige durch den Wärmeleitungsverlust in der Matrix (Gl. 3-12)

$$\Phi_{\text{Wl}}^* = 2\lambda_M^* \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{\varepsilon}{1+11\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \cdot \Delta\vartheta^2 \quad (4-44),$$

für diejenige durch den Wärmeleitungsverlust in der Wand (Gl. A2-4)

<sup>1</sup> ORGAN (1992; S. 114) verwendet den „fanning friction factor“ und daher die Konstanten  $a' = 40$  und  $b' = 0,3$ .

$$\Phi_{\text{WWI}}^* = \frac{4 k_W N_p}{\eta^* (1-\varepsilon) \text{Re}} \cdot \frac{d}{\ell} \Delta\vartheta^2 \quad (4-45),$$

im Falle von Regeneratoren, die ringförmig um einen Zylinder angeordnet sind, für die Entropieproduktion durch die zwar ursächlich letzterem zuzuordnenden, in ihrer Größe jedoch dann ebenfalls durch die Matrixlänge  $\ell$  bestimmten Wandwärmeleitungs- und Kolbenspaltverluste

$$\Phi_{\text{V,Z}}^* = \frac{5 k_W}{3 \hat{x}_{\text{opt}}^*} \frac{V_{\text{Hub}}}{2\hat{V}} \Delta\vartheta^2 \sqrt{\frac{2 T_m^* \text{Sg}}{\Lambda \eta^* \text{Re}}} \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon \ell} \quad (4-46)$$

und für diejenige durch den Dispersionsverlust nach Gl. 3-17 unter der praktisch stets gegebenen Voraussetzung einer hinreichend großen Reynolds-Zahl schließlich

$$\Phi_{\text{Disp}}^* \approx 2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{d}{\ell} \cdot \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \cdot \Delta\vartheta^2 \quad (4-47).$$

Die Herleitungen dieser Gleichungen sind im Anhang 3.1 näher erläutert.

Für die im Rahmen der Unteroptimierung zu minimierende Zielfunktion erhält man somit

$$\begin{aligned} \sum \Phi^* &= f(\text{Re}, d/\ell, \varepsilon) = \Phi_{\Delta p}^* + \Phi_{\text{WÜ}}^* + \Phi_{\text{WI}}^* + \Phi_{\text{Disp}}^* + \Phi_{\text{WWI}}^* + \Phi_{\text{V,Z}}^* = \\ &= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{\text{Sg}} \cdot \frac{\eta^*}{\Lambda} \cdot \left(\frac{\ell}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \cdot (160 + 1,6 \overline{\text{Re}}) + \\ &\quad \left[ \left\{ 0,4381 \text{Pr}^{2/3} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \overline{\text{Re}}^{-1/2} + \frac{2\lambda_M^*}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{\varepsilon}{1+11\varepsilon^2} + 2 \right\} \cdot \frac{\kappa/(\kappa-1)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{1}{\Lambda C_M^*}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 k_W N_p}{\eta^* (1-\varepsilon) \text{Re}} + \frac{5 k_W}{3 \hat{x}_{\text{opt}}^*} \frac{V_{\text{Hub}}}{2\hat{V}} \sqrt{\frac{2 T_m^* \text{Sg}}{\Lambda \eta^* \text{Re}}} \frac{\varepsilon \ell}{1-\varepsilon d} \right] \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \Delta\vartheta^2 \end{aligned} \quad (4-48),$$

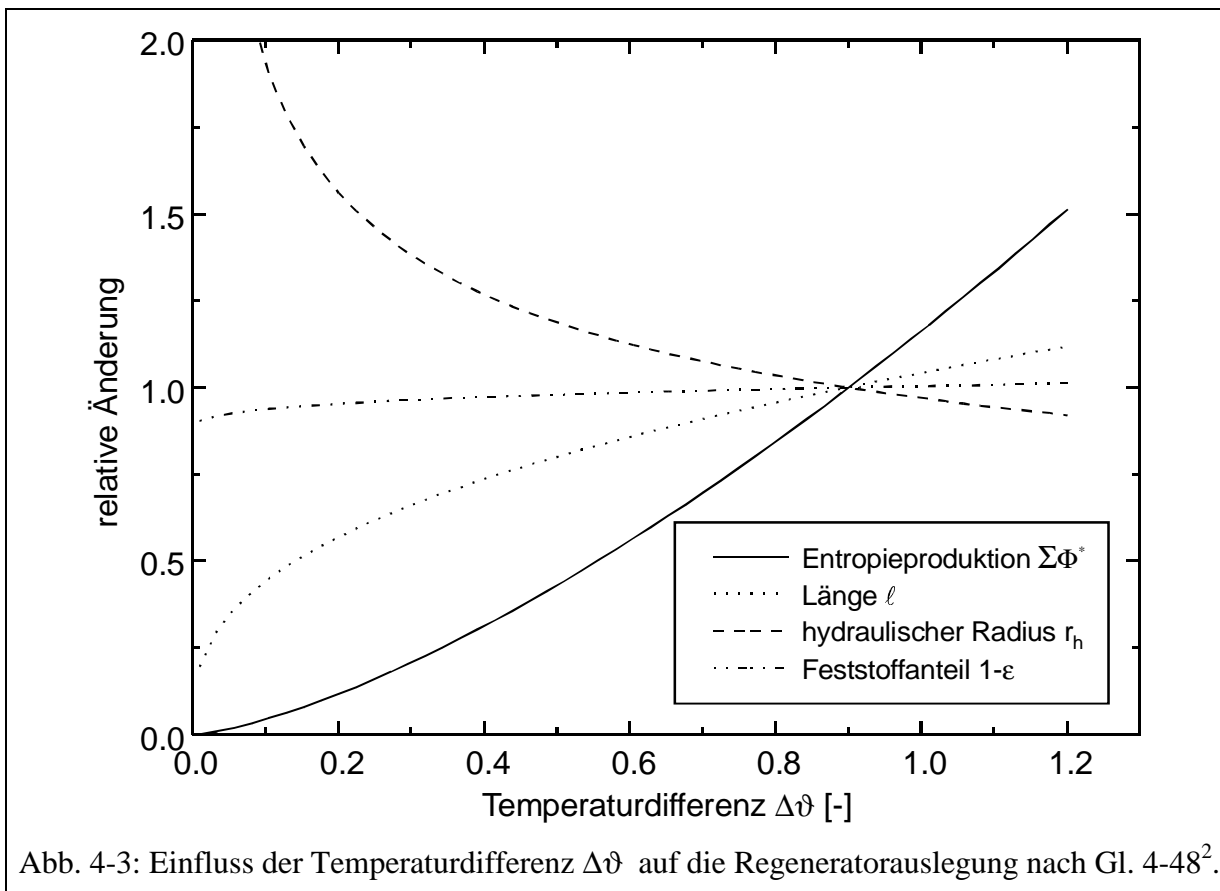
wobei der von  $V_{\text{Hub}}$  abhängige Term nur bei ringförmigen Regeneratoren zu berücksichtigen ist. Die notwendige Bedingung, das Verschwinden des Gradienten, führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem für die drei angegebenen Variablen, das nur numerisch lösbar ist und für  $V_{\text{Hub}} = 0$  im Anhang 3.3 zu finden ist. Die allgemeine Form wurde von KÜHL ET AL. (1997a) unter Verwendung von  $r_h$  statt  $d$  angegeben. Die grundsätzlichen Abhängigkeiten und Einflussgrößen sind jedoch bereits bei Betrachtung von Gl. 4-48 zu erkennen.

Die allgemeine Lösung für den optimalen Regenerator – ausgedrückt durch die den Strömungszustand kennzeichnende mittlere Reynolds-Zahl  $\text{Re}$  und die geometrischen Verhältnisse  $d/\ell$  und  $\varepsilon$  – ist offenbar im wesentlichen nur von der Stirling-Zahl  $\text{Sg}$ ; der dimensionslosen Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta$  sowie vom bezogenen Volumen  $\Lambda$ , das durch die übergeordnete Optimierung der Totraumverteilung vorgegeben wird, abhängig. Ansonsten liegen noch Einflüsse der Stoffdaten des Arbeitsmediums vor, die als konstant angenommen werden können. Das gleiche gilt für das Verhältnis des Zylinder-Hubvolumens zum Volumendurchsatz bei ringförmigen Regeneratoren, das in den meisten Fällen nahezu Eins sein wird.

Die Lösungen für im Sinne von Kap. 4.3.1 vollständig ähnliche Maschinen werden demnach nahezu identisch sein, da die zuvor genannten Größen dann ebenso wie auch  $Ma$  und  $N_P$  konstant sind. Störungen werden – wie bereits zuvor mehrfach festgestellt werden konnte – stets durch die Eigenschaften von Festkörpern verursacht, also hier über die Konstante  $k_W$ , die mit der Referenzlänge veränderlich ist und ggf. durch Veränderung von  $\lambda_W$  und  $\sigma_{zul}$  korrigiert werden müsste, sowie über das Wärmekapazitätsverhältnis  $C_M^*$ , das den Temperaturschwingungsverlust bestimmt und gemäß Gl. 4-24 druckabhängig ist.

Bei einer Querschnittsskalierung gemäß Kap. 4.3.2 wäre die Lösung ebenfalls nahezu invariant, da nur im Falle ringförmiger Regeneratoren ein schwacher Einfluss des Hubvolumens über  $\hat{x}_{opt}$  nach Gl. 4-21 aufträte. Die Variation der Stirling-Zahl gemäß Kap. 4.3.3, eine bewusste Verletzung des Ähnlichkeitsprinzips, übt dagegen einen deutlichen Einfluss aus, da sie die relative Gewichtung zwischen den Strömungsdruckverlusten und den thermischen Verlusten verschiebt. Das System wird darauf vorwiegend mit einem veränderten Verhältnis  $d/\ell$  reagieren, da diese Größe in beiden Verlustgruppen mit Exponenten unterschiedlichen Vorzeichens (1 bzw. -2) auftritt. Eine grundsätzlich ähnliche Wirkung übt die Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta$  aus, da sie ebenfalls das relative Gewicht beider Verlustgruppen verändert.

Für den Fall nicht ringförmiger Regeneratoren lässt das im Anhang 3.3 angegebene Gleichungssystem weitere Schlüsse zu: Lediglich der Prozessdruck in Verbindung mit den Eigenschaften des Wand- und Matrixmaterials – ausgedrückt durch  $k_W \cdot N_P$ ,  $\Lambda \cdot C_M^*$  bzw.  $\lambda_M^*$  – wirkt sich auf alle drei Auslegungsgrößen aus, während die gasseitigen Prozessbedingungen nur den Wert von  $d/\ell$  über das Produkt  $\Lambda \cdot S_g \cdot \Delta\vartheta^2 / \eta^*$  beeinflussen. Dies gilt näherungsweise auch für ringförmige Regeneratoren, wie Abb. 4-3 am Beispiel einer Variation von  $\Delta\vartheta$



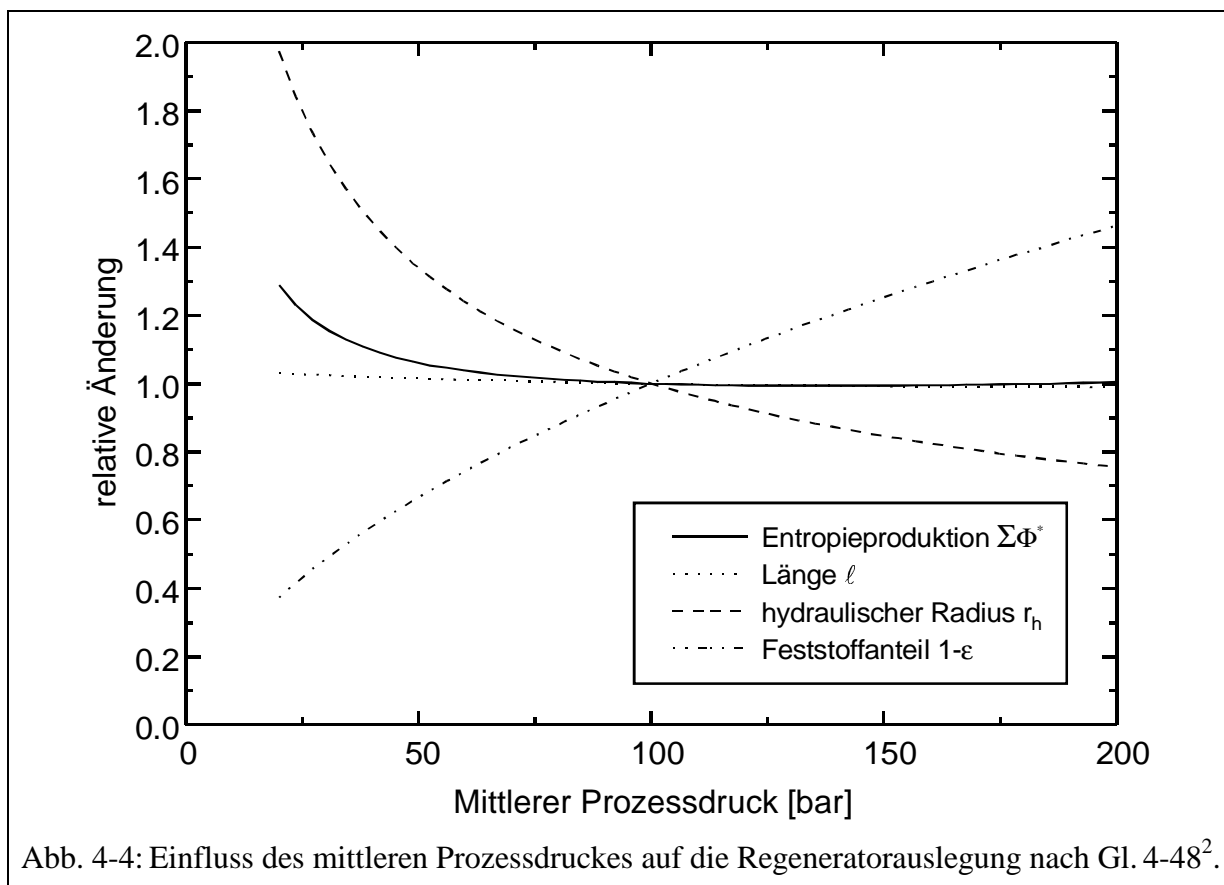
<sup>2</sup> CH. WALTHER: Einsatz ähnlichkeitstheoretischer Methoden bei der Auslegung regenerativer Gaskreisprozesse. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Thermodynamik, Universität Dortmund 1995



zeigt. Auch hier reagiert das System in erster Linie durch gegenläufige Veränderung von  $d$  und  $\ell$ , während der Feststoffanteil bzw. die Porosität  $\varepsilon$  nahezu unverändert bleibt. Ähnliches gilt auch für die in Abb. 4-3 nicht dargestellte optimale Reynolds-Zahl, die bei konstanten Werten von  $Ma$ ,  $N_p$  und  $\Lambda$  gemäß Gl. 4-14 nur vom Produkt aus (hydraulischem) Durchmesser und Länge abhängig ist. Dass die spezifische Entropieproduktion mit abnehmendem  $\Delta\vartheta$  bis auf Null sinkt, ist nicht überraschend, da das System dann zunehmend die Möglichkeit hat, durch größere Faserdurchmesser und Längenverkürzung (bzw. Querschnittserweiterung) auch die Entropieproduktion durch Strömungsdruckverluste zu reduzieren.

Wird statt der bezogenen Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta$  die Stirling-Zahl variiert, so treten grundsätzlich die gleichen Abhängigkeiten bezüglich der optimalen Werte von  $Re$ ,  $\varepsilon$  und  $d/\ell$  auf, sofern die Veränderung von  $S_g$  über die Drehzahl erfolgt. Hinsichtlich der spezifischen Entropieproduktion ist die Abhängigkeit jedoch nicht vergleichbar, denn hier muss Gl. 4-48 selbst betrachtet werden, nicht ihre partiellen Ableitungen. Da dort  $S_g$  im Nenner steht, lässt sich die Entropieproduktion offenbar durch Drehzahlabsenkung beliebig verringern, denn man gibt dem System die Möglichkeit, durch fortschreitende Vergrößerung der Längen und Verengung der Querschnitte auch die thermischen Regeneratorverluste mehr und mehr zu reduzieren. So bestätigt sich auch hier die Aussage, dass es „die“ optimale Prozessdrehzahl nicht gibt.

Wird hingegen der Druck verändert, so wirkt sich dies in Gl. 4-48 zusätzlich über die oben erwähnten, druckabhängigen Terme aus, und als Folge hiervon reagiert das System auf Druckerhöhungen auch mit einer merklichen Steigerung des Feststoffanteils in der Regeneratormatrix, um so den Anstieg des Temperaturschwingungsverlustes zu vermeiden (Abb. 4-4). Auf diese Weise kann die spezifische (und damit also auch druck- und leistungsbezogene) Entropieproduktion offenbar über weite Druckbereiche nahezu konstant gehalten werden. Eine Aussage bezüglich eines „optimalen“ Prozessdruckes ist somit auf dieser Basis ebenfalls nicht möglich, wenn auch aus anderen Gründen als im Fall der Drehzahl.



## 4.5.2 Vereinfachte Optimierung der Wärmeübertrager

Die Entropieproduktion in Wärmeübertragern setzt sich im wesentlichen nur aus den zwei durch den Strömungsdruckverlust und durch die eigentliche Wärmeübertragung bedingten Anteilen zusammen. Da für die Wandtemperatur i. d. R. ein konstanter Wert angenommen werden kann, treten hier im Gegensatz zu Regeneratoren keine durch Temperaturgradienten bedingten, prozessinternen Verlustwärmeströme auf.

Wie allgemein im Rahmen der vereinfachten dimensionsanalytischen Betrachtungen wird auch hier eine quasi-stationäre Strömung angenommen, d. h. die durch die Oszillation bedingten, in Kap. 3.5 dargestellten Effekte werden hier vernachlässigt. Vielmehr werden zur Verdeutlichung der prinzipiellen Unterschiede lediglich die beiden Grenzfälle vollständig laminarer und vollständig turbulenter Strömung betrachtet. Letzterer wird wegen der in Kap. 3.5.1.4 erläuterten, nach der Richtungsumkehr stets auftretenden laminaren Beschleunigungsphasen nur für sehr große Reynolds-Zahlen annähernd erreicht. Allerdings werden sowohl der Wärmeübergang als auch die Strömungsdruckverluste durch die Phasen mit turbulenter Strömung bestimmt, da sie sich über den größten Teil des Prozesszyklus erstrecken. Somit erscheint die vereinfachende Annahme einer vollständig turbulenten Strömung hier vertretbar.

Wie im Anhang 3.2 näher erläutert wird, erhält man für die Entropieproduktion durch Strömungsdruckverluste im Falle ausschließlich laminarer Strömung

$$\Phi_{\Delta p,l}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr},\Delta p} T}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{T^*} \left( \frac{\text{Ma } \ell}{\Lambda} \right)^2 \left( \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d} + \frac{4}{3} f_C \right) \quad (4-49)$$

und analog für den Fall der turbulenten Strömung in hydraulisch glatten Rohren

$$\Phi_{\Delta p,t}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr},\Delta p} T}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{T^*} \left( \frac{\text{Ma } \ell}{\Lambda} \right)^2 \left( \frac{0,2257}{\text{Re}^{0,2}} \frac{\ell}{d} + \frac{4}{3} f_C \right) \quad (4-50)$$

Bei der Berechnung der Entropieproduktion durch den Wärmeübergang ist zu beachten, dass im Gegensatz zum Regenerator die in den beiden Strömungsphasen übertragenen Wärmemengen nicht gleich sind. Wegen des nichtlinearen Einflusses der Wärmestromdichte gemäß Gl. A3-7 sollten örtliche und zeitliche Ungleichmäßigkeiten hier grundsätzlich berücksichtigt werden. Nach KÜHL ET AL. (1997) sollte dies insbesondere hinsichtlich der genannten ungleichmäßigen Verteilung auf die beiden Phasen geschehen.

Sie ist bei den normalerweise zwischen einem Zylinderraum und einem Regenerator angeordneten Wärmeübertragern dadurch begründet, dass sich deren Gesamtbelastung aus einer indizierten, über das p,V-Integral für das angrenzende Zylindervolumen zu berechnenden Wärmemenge und aus einem durch die thermischen Regeneratorverluste bedingten Anteil additiv zusammensetzt. Nun ist bei üblichen Auslegungen die Zahl der Übertragungseinheiten NTU i. d. R. größer als Eins. Bereits ab  $\text{NTU} \approx 1,5$  kann man näherungsweise annehmen, dass die am Eintritt vorhandene treibende Temperaturdifferenz über die Strömungslänge größtenteils (> 75%) abgebaut wird, und dass somit der auf die indizierte Wärmemenge  $Q_{\text{ind}}$  zurückzuführende Anteil der Belastung weitgehend während der Phase mit zylinderseitiger Einströmung, der durch die Regeneratorverluste  $\Delta H_{\text{RV}}$  bedingte Anteil dagegen vorwiegend während der Phase mit umgekehrter Strömungsrichtung übertragen wird.

Betrachtet man nun einen Stirlingmotor oder den heißen thermischen Verdichter einer Vuilleumier- oder Duplex-Ericsson-Wärmepumpe, so stellt man fest, dass indizierte Wärmemengen

gen und Regeneratorverluste die Wärmeübertragungsflächen im gleichen Sinne belasten, d. h. bei der höheren Temperatur bedingen beide eine Wärmezufuhr und bei der tieferen eine Wärmeabfuhr. Im Gegensatz dazu weisen bei Stirling-Kältemaschinen oder auch in den kalten thermischen Verdichtern der genannten Wärmepumpenprozesse, d. h. überall dort, wo Wärme unter Exergieaufwand von einem tieferem auf ein höheres Temperaturniveau gehoben wird,  $Q_{\text{ind}}$  und  $\Delta H_{\text{RV}}$  unterschiedliche Vorzeichen auf. Dies kommt in der Beziehung

$$Q_{\text{eff}} = \sqrt{(Q_{\text{ind}} + \Delta H_{\text{RV}})^2 + \left[ (Q_{\text{ind}} - \Delta H_{\text{RV}}) \tanh \frac{\text{NTU}}{2} \right]^2} \quad (4-51)$$

zum Ausdruck, deren Herleitung im Anhang 3.2 näher erläutert wird. In Abb. 4-5 ist sie graphisch dargestellt. Offenbar wirken sich ungleiche Beträge der beiden Anteile bei gleichem Vorzeichen nur wenig aus, auch wenn NTU große Werte annimmt. In dem (durchaus realistischen) Sonderfall gleicher Beträge gilt sogar unabhängig von NTU exakt  $Q_{\text{eff}} = Q_{\text{ind}} + \Delta H_{\text{RV}}$ .

Ebenso sind auch bei niedrigen NTU-Werten die Auswirkungen gering, da sich in diesem Fall wegen der Speicherwirkung des Regenerators wie auch des Zylinderraumes die Übertragung beider Anteile ohnehin über mehrere Zyk-

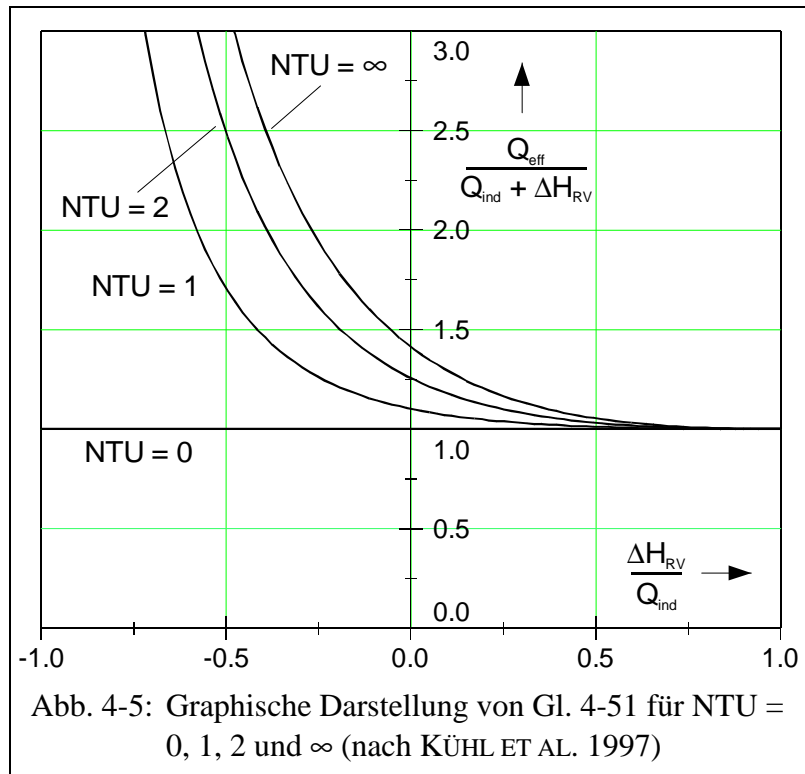


Abb. 4-5: Graphische Darstellung von Gl. 4-51 für  $\text{NTU} = 0, 1, 2$  und  $\infty$  (nach KÜHL ET AL. 1997)

len verteilt. Im umgekehrten Extremfall,  $Q_{\text{ind}} = -\Delta H_{\text{RV}}$ , kann dagegen die Belastung bis zum Doppelten der indizierten Wärmemenge steigen, obwohl die Kälteleistung gleich Null ist.

In dimensionsloser Form kann  $Q_{\text{eff}}$  durch die Größe  $\Gamma$  nach Gl. 4-17 ausgedrückt werden. Damit erhält man gemäß den Herleitungen in Anhang 3.1 für die dimensionslose Entropieproduktion durch Wärmeübergang im Fall ausschließlich laminarer Strömung

$$\Phi_{\alpha,l}^* = \frac{1}{8} \frac{\text{Pr}}{\text{Nu}_1} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{d}{\ell} \overline{\text{Re}} \Gamma^2 \quad (4-52)$$

sowie für den Fall vollständig turbulenter Strömung

$$\Phi_{\alpha,t}^* = \frac{\text{Pr}^{2/3}}{0,184} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{d}{\ell} \overline{\text{Re}}^{0,2} \Gamma^2 \quad (4-53).$$

Für die gesamte bezogene (im Rahmen der Regenerator-Unteroptimierung zu minimierende) Entropieproduktion folgt somit für den laminaren und den turbulenten Fall

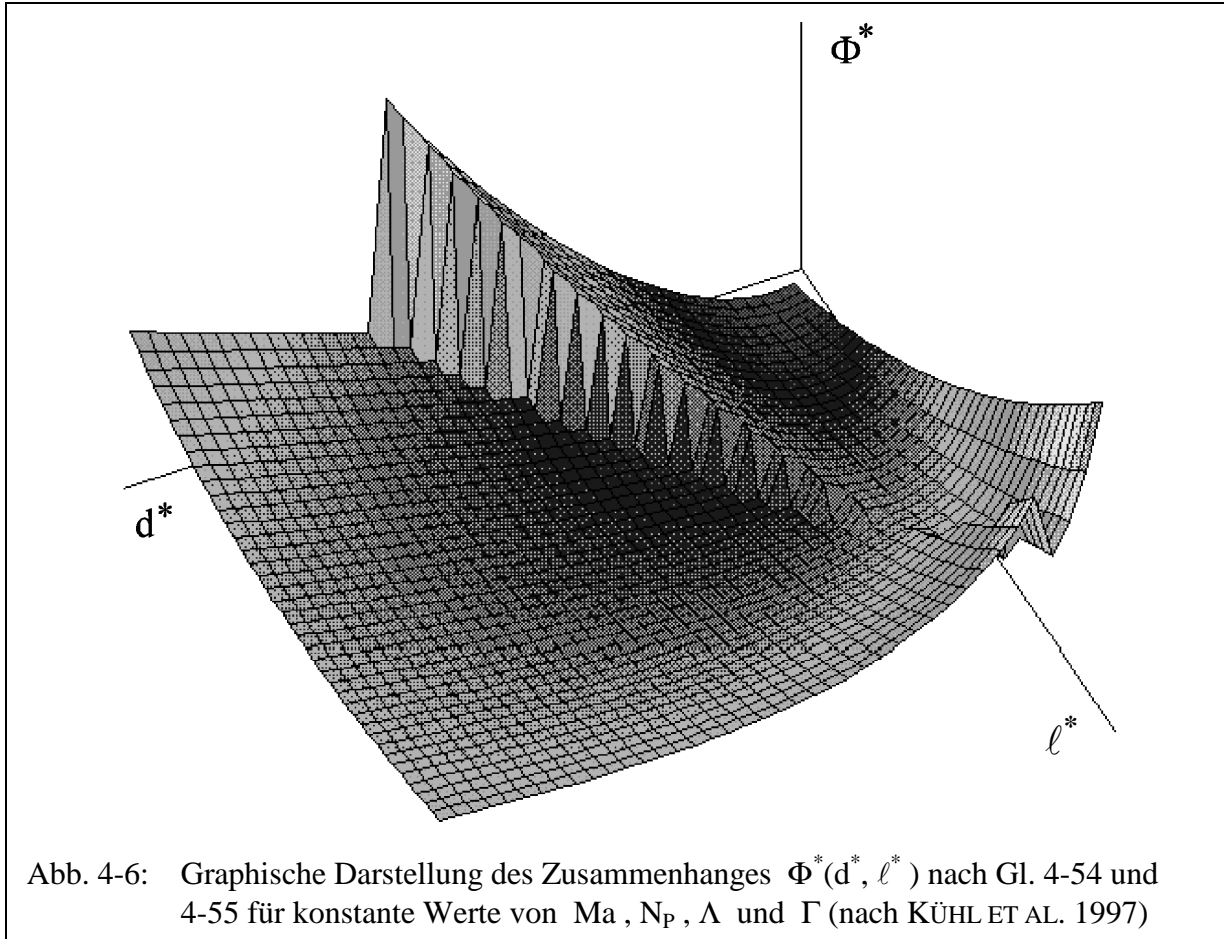
$$\Phi_1^* = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{T^*} \left( \frac{\text{Ma} \ell^*}{\Lambda} \right)^2 \left( \frac{64 \ell^*}{\text{Re} d^*} + \frac{4}{3} f_C \right) + \frac{1}{8} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{\text{Pr}}{\text{Nu}_1} \cdot \frac{d^*}{\ell^*} \overline{\text{Re}} \Gamma^2 \quad (4-54)$$

bzw.

$$\Phi_t^* = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{T^*} \left( \frac{\text{Ma} \ell^*}{\Lambda} \right)^2 \left( \frac{0,2257 \ell^*}{\text{Re}^{0,2} d^*} + \frac{4}{3} f_C \right) + \frac{\text{Pr}^{2/3}}{0,184} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{d^*}{\ell^*} \overline{\text{Re}}^{0,2} \Gamma^2 \quad (4-55).$$

Die Belastung des Wärmeaustauschers durch den periodischen Gasdurchsatz wird hier über den Ausdruck  $\text{Ma} \cdot \ell / \Lambda$  erfasst. Offensichtlich wirkt sich die Drehzahl sehr deutlich aus und erhöht das anteilige Gewicht der Strömungsdruckverluste. Umgekehrt hängt das Gewicht der Verluste durch Wärmeübergang unmittelbar vom Quadrat der thermischen Belastung  $\Gamma$  ab. Bedenkt man, dass im Rahmen der Unteroptimierung die Werte von  $\text{Ma}$ ,  $N_P$ ,  $\Lambda$  und  $\Gamma$  vorgegeben sind und dass die mittlere Reynolds-Zahl gemäß Gl. 4-14 ansonsten nur noch von  $\ell^*$  und  $d^*$  im Produkt abhängt, so ist die bezogene Entropieproduktion gemäß Gl. 4-54 bzw. 4-55 lediglich eine Funktion dieser beiden Größen.

Sie ist für typische Werte der vorgegebenen Größen in Abb. 4-6 dargestellt. Dabei wurde zur besseren Verdeutlichung die – als Hyperbel in der  $d^*$ ,  $\ell^*$ -Ebene verlaufende – Grenze zwischen dem laminaren und dem turbulenten Gebiet scharf bei  $\overline{\text{Re}} = 1500$  (entsprechend einem Maximalwert von ca. 2300) gezogen. Dies ist qualitativ dadurch gerechtfertigt, dass auch nach den Ausführungen in Kap. 3.5.1.4 die Turbulenz nach dem Überschreiten der – allerdings von  $\text{Re}_\omega$  abhängigen – Grenze abrupt einsetzt und sofort für mindestens den halben Prozesszyklus bestehen bleibt. Die zunächst auch hier noch vorhandenen, mit steigender Reynolds-Zahl zunehmend verkürzten Phasen laminarer Strömung bleiben somit unberücksichtigt.



Unabhängig hiervon wird jedoch deutlich, dass der Bereich vollständig laminarer Strömung unmittelbar unterhalb der kritischen Reynoldszahl vermieden werden sollte, da die Entropieproduktion hier – offenbar wegen des schlechteren Wärmeüberganges – im Vergleich zum turbulenten Gebiet deutlich erhöht ist. Erst bei wesentlich geringeren Werten von  $d^*$  und  $\ell^*$  werden wieder ähnlich niedrige, dann aber auch noch niedrigere Werte erreicht. Bei praxisnahen Vorgaben von  $Ma$ ,  $N_P$ ,  $\Lambda$  und  $\Gamma$  sind hierzu allerdings unrealistisch kleine Abmessungen erforderlich, z. B. Durchmesser im Bereich unter 0,1 mm und so geringe Längen, dass sich Rohrzahlen von mehr als 10000 ergeben und die Querschnitte konstruktive Probleme bereiten und nicht einmal annähernd denen der angrenzenden Regeneratoren entsprechen.

Aus der Bedingung des Verschwindens der partiellen Ableitungen von Gl. 4-54 bzw. 4-55 erhält man Gleichungssysteme für die jeweils optimalen Werte von  $d^*$  und  $\ell^*$ . Allerdings existiert – wie schon Abb. 4-6 vermuten lässt – im Falle von Gl. 4-54 kein endliches Optimum, da die Länge  $\ell$  in dieser Gleichung nach Substitution von  $Re$  nur mit positivem Exponenten auftritt. Für eine „optimale“ Länge von Null erhält man dann ebenso auch  $d = 0$ .

Dieses Ergebnis lässt sich leicht begründen, da die Nusselt-Zahl bei ausgebildeter laminarer Strömung als konstant angenommen werden kann. Also ist bei gegebenem  $d$  auch der Wärmeübergangskoeffizient unabhängig vom Strömungszustand konstant. Somit gelangt man stets zu einer Verbesserung, wenn man gedanklich die Rohrlänge eines gegebenen Wärmeaustauschers verkürzt und stattdessen die Anzahl der parallelgeschalteten Rohre entsprechend erhöht. Das Volumen und das Produkt  $\alpha \cdot A$  bleiben konstant, während der Druckverlust deutlich vermindert wird. Dies eröffnet die Möglichkeit, den Durchmesser bei konstantem Querschnitt zu verringern, was dann eine weitere Verbesserung des Wärmeüberganges bewirkt.

Offensichtlich kann man diese Vorgehensweise beliebig weit führen. Die Berücksichtigung von Einlaufeffekten ändert grundsätzlich nichts am Ergebnis dieser Betrachtung, denn sie würde eine zusätzliche Verbesserung des Wärmeüberganges bewirken, während der durch  $f_c$  beschreibbare Einfluss auf den Druckverlust beim Differenzieren herausfällt.

Unter praktischen Gesichtspunkten ist somit eine untere Begrenzung der Länge sinnvoll. Dies gilt in vielen Fällen auch für den Bereich turbulenter Strömung. Für beide Strömungsformen ist der optimale Durchmesser unter der Nebenbedingung  $\ell = \text{const.}$  analytisch bestimmbar:

$$d_{\text{opt},l}^* = \sqrt{8\pi} \left( T^* \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{Nu_l}{Pr} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{\eta^* \ell^*}{N_P \Gamma}} \quad (4-56);$$

$$d_{\text{opt},t}^* = \frac{0,46}{(T^*)^{1/4}} \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{Pr^{2/3}} \right)^{5/12} \left( \frac{Ma}{\Lambda} \right)^{2/3} \left( \frac{\eta^*}{N_P} \right)^{1/6} \frac{(\ell^*)^{3/2}}{\Gamma^{5/6}} \quad (4-57)$$

Zur Überprüfung der Anwendbarkeit dieser unter vereinfachenden Annahmen abgeleiteten Beziehungen wurden von KÜHL ET AL. (1997) mit Hilfe eines Simulationsverfahrens 3. Ordnung die jeweils optimalen Rohrdurchmesser der Wärmeübertrager für eine größere Zahl unterschiedlicher Maschinen und Betriebsbedingungen sowie unter Variation von Länge und Volumen der betreffenden Komponenten durch numerische Optimierung bestimmt. Trägt man die so bestimmten Werte als dimensionslose Größe  $X = d_{\text{opt}} / d_{\text{opt},l}$  über dem Quotienten

$$X = \left( \frac{d_{\text{opt},t}}{d_{\text{opt},l}} \right)^{3/2} = \left( \frac{0,46}{\sqrt{8\pi} Nu_l^{1/4}} \right)^{3/2} \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} \right)^{1/4} \frac{1}{Pr^{1/24} (T^*)^{3/8}} \cdot \frac{Ma}{\Lambda} \cdot \sqrt{\frac{N_P}{\eta^* \Gamma}} \quad (4-58)$$

auf, so ist theoretisch für Auslegungen im rein laminaren Bereich, die unter Vorgabe unrealistischer Randbedingungen mit einbezogen wurden, unabhängig von  $X$  der Wert  $Y = 1$  zu erwarten, während bei turbulenter Strömung eine Abhängigkeit der Form  $Y = k \cdot X^{2/3}$  ergeben sollte. Abb. 4-7 zeigt eine entsprechende Auftragung, die diese Abhängigkeiten grundsätzlich bestätigt. Die Grenze zwischen laminaren und turbulenten Fällen wurde dabei wie in Abb. 4-6 bei  $Re = 1500$  gezogen. Die speziell im laminaren Bereich erkennbare Abweichung von ca. 30% ist ebenso wie die Streuung der Einzelwerte auf die Vereinfachungen bei der Herleitung von Gl. 4-56 und 4-57 zurückzuführen, die den prozessabhängigen Betriebsbedingungen der Wärmeaustauscher, insbesondere hinsichtlich der Abweichungen von den angenommenen Massen- und Wärmestromverläufen, nicht Rechnung tragen können. Die Gleichungen eignen sich jedoch für grobe Vorab-Auslegungen neuer Maschinen, die dann als Ausgangspunkt aufwändigerer, nur noch numerisch durchführbarer Optimierungen dienen können.

Ähnlich wie zuvor im Fall der Unteroptimierung von Regeneratoren sind auch hier weitere grundsätzliche Aussagen zu den relevanten Einflussgrößen und der Lage etwaiger Optima möglich. Unter Beachtung von Gl. 4-14 lassen sich die Gleichungen – ähnlich wie für Regeneratoren Gl. 4-48 – auch als Funktion von  $Re$  und  $d/\ell$  formulieren. Man erhält

$$\Phi_1^* = \frac{\pi^2}{4} \frac{\eta^*}{\Lambda \cdot Sg} \frac{\ell}{d} \left( 64 \frac{\ell}{d} + \frac{4}{3} f_C \overline{Re} \right) + \frac{1}{8} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{Pr}{Nu_1} \cdot \frac{d}{\ell} \overline{Re} \Gamma^2 \quad (4-59)$$

bzw. 
$$\Phi_t^* = \frac{\pi^2}{4} \frac{\eta^*}{\Lambda \cdot Sg} \frac{\ell}{d} \left( 0,2257 \frac{\ell}{d} \overline{Re}^{0,8} + \frac{4}{3} f_C \overline{Re} \right) + \frac{Pr^{2/3}}{0,184} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{d}{\ell} \overline{Re}^{0,2} \Gamma^2 \quad (4-60).$$

Im Gegensatz zu Regeneratoren existieren hier keine Optima der Reynolds-Zahl, da sie nur mit positiven Exponenten auftritt. Wie schon Abb. 4-6 erkennen lässt, wird  $\Phi^*$  im laminaren Fall für  $Re \rightarrow 0$  minimal, und im turbulenten Fall ergibt sich die geringste Reynolds-Zahl, bei der noch turbulente Strömung angenommen werden kann. Bei der praktischen Prozessauslegung sollte dabei der Einfluss von  $Re_\omega$  gemäß Abb. 3-16 berücksichtigt werden.

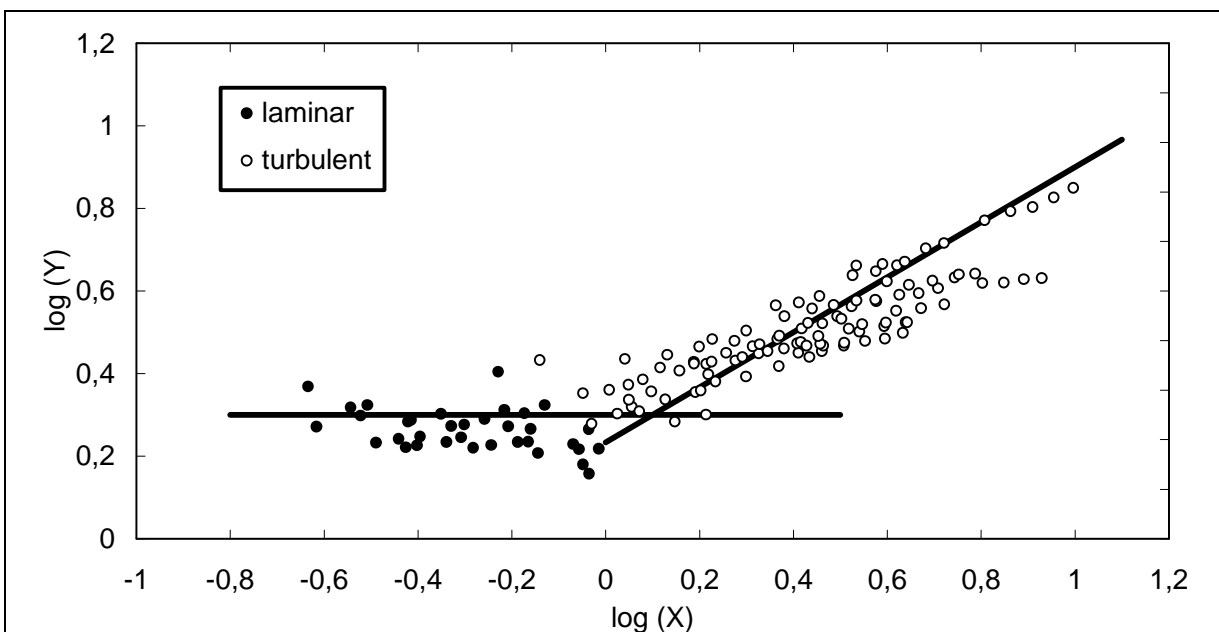


Abb. 4-7: Vergleich von numerisch mit einem Simulationsverfahren 3. Ordnung bestimmten optimalen Durchmesserwerten mit den Resultaten der vereinfachten Bestimmungsgleichungen 4-56 und 4-57 (Darstellung nach KÜHL ET AL. 1997)

Unter der Nebenbedingung einer auf dieser Grundlage festgelegten Reynolds-Zahl erhält man dann kubische Bestimmungsgleichungen für das optimale Durchmesser-Längen-Verhältnis. Für den praktisch wichtigeren Fall turbulenter Strömung erhält man z. B.

$$\frac{\Lambda \text{Sg} \Gamma^2}{\eta^*} \cdot \left(\frac{d}{\ell}\right)^3 - \frac{0,023 \cdot 2\pi^2}{\text{Pr}^{2/3}} \frac{\kappa}{\kappa-1} \overline{\text{Re}}^{-0,8} \left( \frac{0,4514}{\overline{\text{Re}}^{0,2}} + \frac{4}{3} f_C \frac{d}{\ell} \right) = 0 \quad (4-61).$$

Ähnlich wie schon im Fall des Regenerators wirken sich die Kennzahlen des Prozesses hier lediglich in einer charakteristischen Kombination,  $\Lambda \cdot \text{Sg} \cdot \Gamma^2 / \eta^*$ , auf das Ergebnis aus, die als Verhältnis der thermischen und der strömungsbedingten Belastung aufgefasst werden kann. Ansonsten übt nur noch der Faktor  $f_C$  einen Einfluss aus. Wird er vernachlässigt, so ist die Lösung unmittelbar analytisch, andernfalls numerisch oder mit Hilfe der Cardanischen Formel möglich. Gleiches gilt auch für den laminaren Fall, der hier nicht näher betrachtet wird.

Auch im Falle turbulent durchströmter Wärmeübertrager liefert die beschriebene Vorgehensweise oft noch Ergebnisse, die praktisch nicht realisierbar sind. So erhält man z. B. für einen auf mittlerer Temperatur ( $T_W \approx 40^\circ\text{C}$ ) betriebenen Wärmeübertrager der von KÜHL (1990) dokumentierten Vuilleumier-Wärmepumpe mit  $\bar{p}=100$  bar und  $n=400$  min<sup>-1</sup> zunächst als charakteristische Prozesskennzahlen  $\Lambda=0,3$ ,  $\text{Sg}=75 \cdot 10^9$ ,  $\Gamma \approx 0,06$  sowie  $\text{Re}_\omega \approx 128$ . Mit Abb. 3-16 ergibt sich damit eine kritische Reynolds-Zahl von ca. 4200, so dass ein Mittelwert von ca. 2700 eine zumindest überwiegend turbulente Strömung sicherstellen würde. Für  $f_C=0$  erhält man mit Gl. 4-61  $d/\ell \approx 0,01$  und mit Hilfe von Gl. 4-14 daraus schließlich  $\ell \approx 90$  mm und  $d \approx 0,87$  mm. Der erhaltene Durchmesserwert ist praktisch kaum realisierbar, zumal die für den Strömungsquerschnitt erforderliche Rohrzahl ca. 3000 betrüge.

Die tatsächliche Auslegung weist bei  $d=2$  mm und  $\ell=140$  mm 296 Rohre auf, die mittlere Reynolds-Zahl beträgt ca. 9300, und die Entropieproduktion nach Gl. 4-60 liegt etwa um einen Faktor 1,7 höher als im Falle der optimalen Auslegung. Die optimalen Durchmesser- und Längenwerte lägen für diese Reynolds-Zahl mit  $d=1,23$  mm bzw.  $\ell=99$  mm bereits deutlich näher an den ausgeführten Maßen. Dennoch verdeutlicht dieses Beispiel, dass die praktische Auslegung von Wärmeübertragern stets einen Kompromiss mit den fertigungstechnischen und wirtschaftlichen Grenzen des konkreten Anwendungsfalles beinhaltet.

Da diese Grenzen offenbar eher im Falle des Durchmessers als in dem der Länge erreicht werden, liegt die Frage nach der optimalen Länge bei vorgegebenem (minimalem) Durchmesser nahe. Anders als im Falle der laminaren Strömung weist die Ableitung der im turbulenten Falle gültigen Gl. 4-55 nach Substitution der Reynolds-Zahl eine Nullstelle auf. Die optimale Länge erhält man schließlich nach KÜHL ET AL. (1997) als Lösung der Gleichung

$$X^9 + b \cdot X^7 - 1 = 0 \quad (4-62)$$

mit 
$$X = 1,09 \cdot \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)^{1/9} \cdot \frac{(\ell^*)^{2/5}}{\text{Pr}^{2/27} \cdot (T^*)^{1/15} \cdot \Gamma^{2/9} \cdot (d^*)^{4/15}} \cdot \left(\frac{\text{Ma}}{\Lambda}\right)^{8/45} \cdot \left(\frac{\eta^*}{N_P}\right)^{2/45} \quad (4-63)$$

und 
$$b = 5,7605 \cdot f_C \cdot \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\right)^{2/9} \cdot \frac{(d^*)^{2/3}}{\text{Pr}^{4/27} \cdot (T^*)^{1/3} \cdot \Gamma^{4/9}} \cdot \left(\frac{\text{Ma}}{\Lambda}\right)^{5/9} \cdot \left(\frac{N_P}{\eta^*}\right)^{1/9} \quad (4-64).$$

Für  $0 \leq b \leq 3$  wird eine Näherungslösung mit einem relativen Fehler unter 0,1% angegeben:

$$X(b) = 1 - 0,105 b + 0,0245 b^2 - 0,0028 b^3 \quad (4-65)$$

### 4.5.3 Ergebnisse für den Gesamtprozess

Mit den in Kap. 4.5.1 und 4.5.2 erhaltenen Ergebnissen können die Teilprobleme der Regenerator- und Wärmeübertrager-Suboptimierung bei vorgegebenem Totvolumen (bzw. bei vorgegebenem  $\Lambda$ ) zumindest für die hier behandelten Beispielfälle und unter den getroffenen vereinfachenden Annahmen als gelöst betrachtet werden. Damit ist die Voraussetzung für die Behandlung der oberen Optimierungsebene gemäß Abb. 4-2, d. h. die Ermittlung der günstigsten Verteilung des temperaturbezogenen Totvolumens auf die Prozesskomponenten, erfüllt.

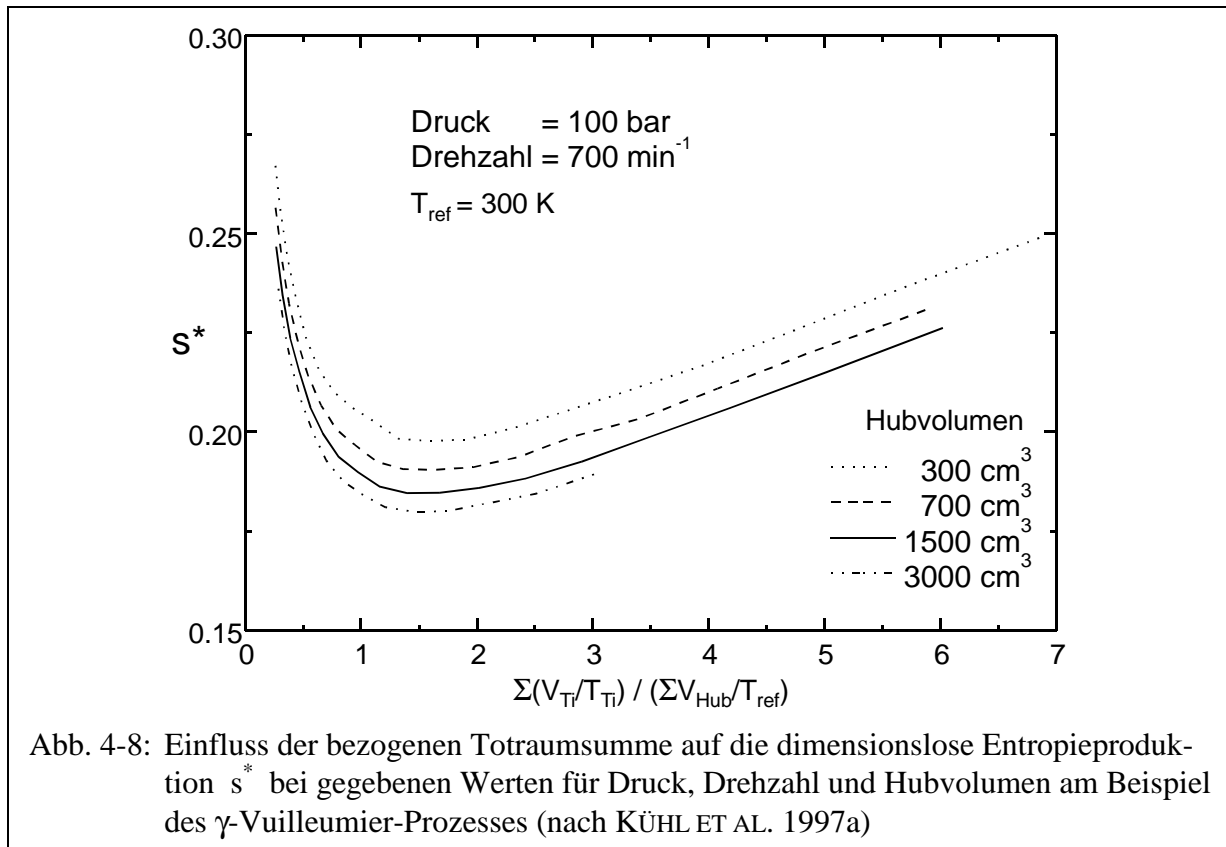
Entsprechend den in Kap. 4.1 angestellten Überlegungen ist dabei von vorgegebenen Werten für Druck und Drehzahl, die charakteristischen Temperaturniveaus sowie die Hubvolumina und Phasenwinkel auszugehen. Das in jedem Falle numerisch leicht bestimmbare Optimum von Gl. 4-48 ergibt dann die thermischen Verluste und die Entropieproduktion der Regeneratoren als Funktion von  $\Lambda$ , so dass in der Folge auch die der Wärmeübertrager gemäß Gl. 4-54 oder 4-55 bestimmbar ist. Wie in Kap. 4.5.2 deutlich wurde, ist hierzu allerdings eine zusätzliche Randbedingung in Form einer unteren Schranke für den Rohrdurchmesser  $d$ , die Rohrlänge  $\ell$  oder die mittlere Reynolds-Zahl  $Re$  erforderlich.

Um zu allgemeingültigen, in dimensionsloser Form darstellbaren Aussagen für den Gesamtprozess zu gelangen, ist die Festlegung eines dimensionsbehafteten Grenzwertes ungeachtet der aus praktischer Sicht bestehenden Beschränkungen unzweckmäßig. Die folgenden Untersuchungen werden daher unter Vorgabe konstanter Werte der Reynolds-Zahl im mäßig turbulenten Bereich durchgeführt, so dass die Variation von  $\Lambda$  gemäß Gl. 4-61 zu entsprechend angepassten Werten von  $d/\ell$  führt. Durch geeignete Werte (z. B.  $Re = 2 \cdot 10^4$ ) können dabei realistische Ergebnisse für  $d$  und  $\ell$  sichergestellt werden, ohne dass sich dies prinzipiell auf die nachfolgend dargestellten Abhängigkeiten auswirkt.

Als Zielfunktion sollte bei der Optimierung der Totraumverteilung nicht wie bei den zuvor behandelten Unteroptimierungen der einzelnen Komponenten die dimensionslose Entropieproduktion  $\Phi^*$  gemäß Gl. 4-16 verwendet werden, da der Volumendurchsatz und die Bezugstemperatur bei den verschiedenen Komponenten jeweils unterschiedlich sind. Vielmehr bietet es sich hier an, die bereits in Kap. 2.3 (Gl. 2-15) eingeführte Größe  $s^*$  zu verwenden. Damit wird also auch hier die thermodynamische Güte des Prozesses optimiert, wobei durch die vorherige Festlegung der erwähnten globalen Parameter sichergestellt wird, dass die Leistungsdichte dabei nicht gegen Null geht. Wie bereits in Kap. 4.1.3.2 ausgeführt wurde, kann die Leistungsdichte auch bei festliegenden Druck-, Drehzahl-, Hubraum- und Phasenwinkelwerten noch zusätzlich über die Totraumsumme gesteuert werden. Es liegt somit nahe, zunächst den Einfluss dieser Größe zu untersuchen.

Um hier zu baugrößen-unabhängigen Ergebnissen zu gelangen, wird sie auf die Summe der vorhandenen Hubvolumina sowie eine grundsätzlich beliebig festlegbare, hier im umgebungsnahen Bereich gewählte Referenztemperatur  $T_{\text{ref}} = 300 \text{ K}$  bezogen. Da die Entropieproduktion mit Hilfe der zuvor angegebenen Gleichungen für Regeneratoren und Wärmeübertrager als Funktion von  $\Lambda$  leicht bestimmbar ist, ist die Optimierung der Totraumverteilung mit Hilfe üblicher Gradienten- oder Newton-Verfahren oder auch mit Suchmethoden möglich, denn die in Kap. 4.1.1 beschriebenen Stabilitätsprobleme treten bei derart einfachen Funktionen noch nicht in nennenswertem Maße auf. Abb. 4-8 zeigt die Ergebnisse am Beispiel eines Vuilleumier-Prozesses in  $\gamma$ -Konfiguration (Abb. 2-7) bei Annahme ringförmiger Regeneratoren. Man erkennt, dass ein eindeutiges Optimum bei einem Abszissenwert von ca. 1,5 vorliegt. Damit bestätigen sich die in Kap. 4.1.3.1 angestellten Überlegungen, wonach allein die Vorgabe des Hubvolumens (neben Druck, Drehzahl und Phasenwinkeln) bereits ausreicht, um die Leistungsdichte des Prozesses nach unten zu beschränken.

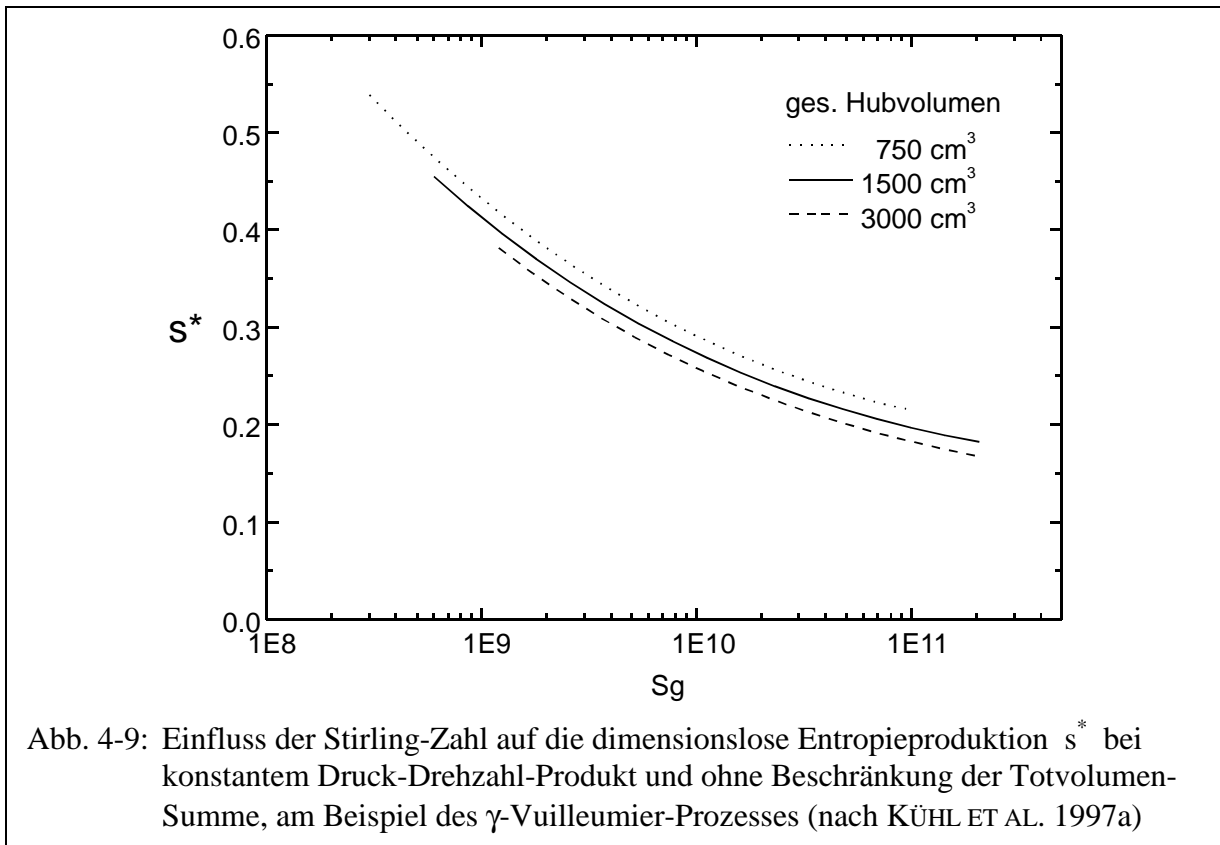




Zu beachten ist in Abb. 4-8, dass bei Variation von  $\Sigma V_{Ti}/T_{Ti}$  unter den gegebenen Randbedingungen auch die Leistungsdichte verändert wird. Soll die Leistung konstant gehalten werden, so muss man die Baugröße der Maschine nachführen, z. B. durch Skalierung der Querschnitte gemäß Kap. 4.3.2. Dies führt dann zu einer leichten Verlagerung der Minima zu größeren Abszissenwerten, da sich gemäß Abb. 4-8 eine geringe Verbesserung mit steigendem Hubvolumen ergibt. Sie ist, wie in Kap. 4.3.2 erläutert wurde, auf den abnehmenden Einfluss der nicht querschnitts-, sondern umfangsabhängigen Kolbenspaltverluste zurückzuführen.

Aus praktischer Sicht wird es in den meisten Fällen sinnvoll sein, sich durch Vorgabe eines festen Wertes für die Totraumsumme geringfügig von dem in Abb. 4-8 erkennbaren Optimum in Richtung niedrigerer Abszissenwerte zu entfernen, denn hier stünde einem minimalen Verlust an thermodynamischer Güte ein merklicher Gewinn an Leistungsdichte gegenüber. Dieser Aspekt wird im folgenden noch weiter diskutiert. Für die Untersuchung weiterer grundsätzlicher Abhängigkeiten kann man jedoch offenbar von einer solchen zusätzlichen, die Allgemeingültigkeit der Aussagen möglicherweise beschränkenden Nebenbedingung absehen. Die nachfolgenden dargestellten Abhängigkeiten der Entropieproduktion von Druck und Drehzahl wurden daher ohne Beschränkung von  $\Sigma V_{Ti}/T_{Ti}$  ermittelt.

In Abb. 4-9 ist zunächst das Ergebnis einer Variation der Stirling-Zahl bei konstantem Produkt aus Druck und Drehzahl dargestellt. Bei unveränderter Maschinengeometrie und somit konstanten Reynolds-Zahlen wäre hier gemäß Kap. 4.3.3 bei steigender Stirling-Zahl mit einem Anwachsen der thermischen Verluste, bei sinkenden Werten dagegen mit zunehmenden Strömungsdruckverlusten zu rechnen, so dass in diesem Fall ein Minimum zu erwarten wäre. Gibt man dem System jedoch die Möglichkeit, sich gemäß Gl. 4-48 bzw. Gl. 4-61 durch Veränderung der Detailauslegung der Komponenten auf die neuen Bedingungen einzustellen, so ergibt sich offenbar eine monoton fallende Abhängigkeit von  $S_g$ , d. h. es ist in jedem Fall thermodynamisch vorteilhafter, die Leistungsdichte über den Druck zu steigern als über die Drehzahl. Konkret stellt man fest, dass man bei einer Erhöhung der Stirling-Zahl zunehmende

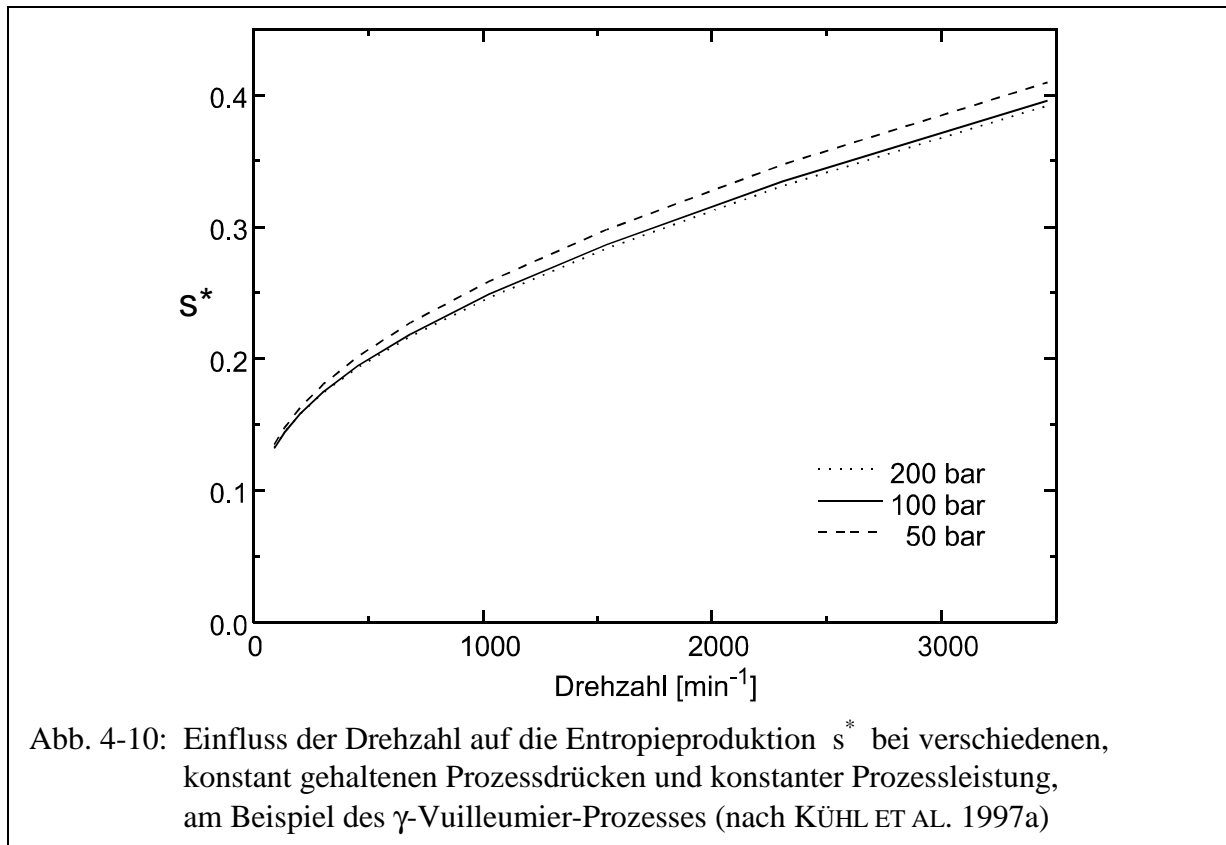


Längen in Strömungsrichtung bei zugleich abnehmenden Querschnitten und charakteristischen Durchmessern erhält. Dies ist möglich, weil mit sinkender Drehzahl die Bedeutung der Strömungsdruckverluste nachlässt. Umgekehrt wird auf diese Weise erreicht, dass die thermischen Verluste in den Regeneratoren trotz druckbedingt anwachsender Wandstärken-Durchmesser-Verhältnisse relativ zur Prozessleistung nicht nur gleich bleiben, sondern sogar zurückgehen. Wie bereits in Kap. 4.3.1 erwähnt wurde, sind der Steigerung des Prozessdruckes jedoch praktische Grenzen gesetzt, da bei dickwandigen Bauteilen die Dimensionierung nicht mehr nach den einfachen, in Anhang 2.1 vorausgesetzten Beziehungen möglich ist und durch zunehmende Wärmespannungen und Ermüdungsphänomene weitere Probleme auftreten.

Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, den Einfluss von Druck und Drehzahl separat zu untersuchen. Abb. 4-10 zeigt eine Auftragung der Entropieproduktion über der Drehzahl bei konstant gehaltenen mittleren Prozessdrücken und bei konstanter Leistung, ebenfalls dargestellt am Beispiel des Vuilleumier-Prozesses. Es bestätigt sich hier der eindeutig die Entropieproduktion erhöhende Einfluss der Drehzahl, der bereits bei Unteroptimierung der Regeneratoren und Wärmeübertrager am negativen Exponenten der Stirling-Zahl in Gl. 4-48 bzw. Gl. 4-60 erkennbar war. Da dieser Einfluss in beiden Fällen der gleiche ist, ändert auch die Optimierung der Totraumverteilung nichts an dieser grundsätzlichen Abhängigkeit.

Dieses auf den ersten Blick überraschende Ergebnis besagt, dass eine extrem langsam laufende Maschine, die die geforderte Leistung nur bei zugleich stark wachsenden Hub- und Totvolumina erbringen kann, das größte Potential zur Erzielung hoher thermodynamischer Gütegrade besitzt. Im Grenzfall verschwindender Drehzahl – allerdings auch bei zugleich ins Unendliche wachsendem Bauvolumen – erreicht sie den reversiblen Grenzwert der Leistungszahl bzw. des thermischen Wirkungsgrades, entsprechend dem Wert  $s^* = 0$ .

Neben den Volumina nehmen dabei auch die Längen-Querschnittsverhältnisse der Regeneratoren absurde Werte an, da wie erwähnt die Druckverluste unbedeutend werden und die Auslegung nur noch dem Ziel der Minimierung der thermischen Regenerator-, Wandwärmelei-

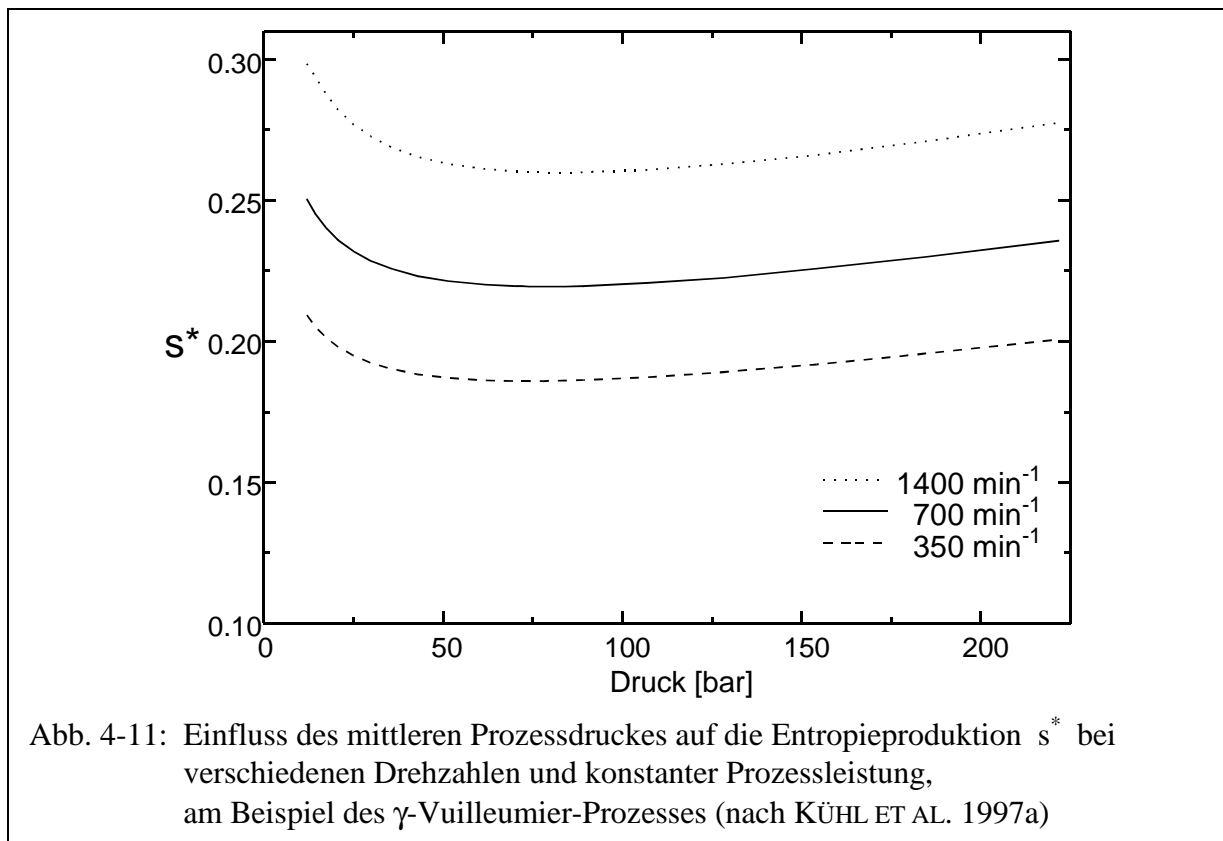


tungs- und Wärmeübertragungsverluste folgt. Auch die Auslegung der Wärmeaustauscher ist hier zunehmend verlustarm möglich, da für die Übertragung des gleichen Netto-Wärmestromes ein parallel zu den Hubvolumina stark wachsendes Totvolumen zur Verfügung steht.

An dieser Stelle kann damit abschließend festgehalten werden, dass die Wahl der Drehzahl keinesfalls Gegenstand einer Prozessoptimierung unter dem (alleinigen) Kriterium der thermodynamischen Güte sein kann, sondern dass sie in jedem Fall einen Kompromiss mit dem Leistungsgewicht der Maschine darstellt. Mit der Erhöhung des mittleren Prozessdruckes bietet sich zwar eine weitere Möglichkeit, die für eine bestimmte Nutzleistung erforderliche Baugröße zu reduzieren. Wegen des damit einhergehenden Anwachsens der Wandstärken führt dies jedoch zu keiner Gewichts- und Materialersparnis, sondern bei Überschreitung gewisser Grenzen vielmehr zu den bereits zuvor erwähnten, zusätzlichen konstruktiven Problemen.

Bei der Darstellung des Druckeinflusses in Abb. 4-10 bzw. in den ihr zugrunde liegenden, in Kap. 4.5.1 und 4.5.2 abgeleiteten Gleichungen wurden derartige Probleme bekanntlich vernachlässigt. Unter diesen Umständen ist der Einfluss des Prozessdruckes auf die Entropieproduktion offenbar nur schwach ausgeprägt. Dies verdeutlicht auch Abb. 4-11, wo  $s^*$  für verschiedene Drehzahlen über dem Prozessdruck aufgetragen wurde. Auch wenn sich hier wegen der – ohne Beschränkung des Totvolumens – zur Konstanthaltung der Leistung erforderlichen, von Abb. 4-10 abweichenden Skalierungen leicht abweichende Abhängigkeiten ergeben, so bleibt doch festzuhalten, dass der Einfluss des Druckes weitaus geringer als der der Drehzahl ist und dass der Prozessdruck daher vorwiegend unter konstruktiven Gesichtspunkten und im Hinblick auf die geforderte Kompaktheit der Maschine gewählt werden sollte.

Mit diesen Ergebnissen soll abschließend nochmals die Möglichkeit der Steigerung der Leistungsdichte durch Vorgabe von  $\Sigma V_{Ti}/T_{Ti}$  diskutiert werden. Wird hier ein geringerer als der in Abb. 4-8 erkennbare optimale Wert gewählt, so kommt es zwar einerseits zu einem Anwachsen der Entropieproduktion, andererseits steigt aber gemäß Gl. 4-1 auch die Leistungsdichte. Dies könnte man nun zwar für einer weitere Verkleinerung der Maschine auf dem We-



ge der Querschnittskalierung nutzen. Geht man jedoch davon aus, dass mit der Festlegung von Druck und Hubvolumen bereits ein Kompromiss mit den Anforderungen an Gewicht und Baugröße gefunden wurde, und berücksichtigt man, dass die Verringerung der Totvolumina für sich betrachtet bereits eine – wenn auch geringe – Ersparnis bei der Baugröße mit sich bringt, so liegt es angesichts der in Abb. 4-10 dargestellten Abhängigkeit wesentlich näher, hier im Gegenzug die Auslegungsdrehzahl nachträglich abzusenken.

Dem Anstieg der Entropieproduktion gemäß Abb. 4-8 stünde dann ein entsprechender Abfall gemäß Abb. 4-10 gegenüber, wobei die Leistung konstant bliebe und die Baugröße leicht abnähme. Hält man sich zudem vor Augen, dass die Auslegungsdrehzahl auch für die Lebensdauer von Lagern und Dichtungen eine bestimmende Größe ist, so führt dieser abschließende Optimierungsschritt in jedem Fall zu einer weiteren Verbesserung. Aus diesem Grunde weisen z. B. die im Rahmen der von HEIKRODT ET AL. (1996, 1999) dokumentierten Projekte entwickelten Vuilleumier-Wärmepumpen, bei denen diese Überlegungen berücksichtigt wurden, im Vergleich zu früheren Auslegungen deutlich geringere Werte der bezogenen Totraumsumme auf, wie die Zusammenstellung in Tabelle 4-2 zeigt.

Tabelle 4-2: Bezogene Totvolumen-Summen für verschiedene Vuilleumier-Wärmepumpen

Quelle	$\frac{\sum V_{Ti}/T_{Ti}}{\sum V_{Hub}/T_{ref}}$
CARLSEN (1989)	1,40
Kühl (1990; S. 155ff)	1,35
CARLSEN ET AL. (1993)	1,31
CARLSEN (1994)	1,42
PFEFFER (1998; S. 155ff)	1,41
HEIKRODT UND HECKT (1999; S. 39ff)	0,91
HEIKRODT UND HECKT (1999; S. 219ff)	0,75

## 4.6 Numerische Optimierung

### 4.6.1 Hierarchisch strukturiertes Simplex-Verfahren

Die in Kap. 4.5 behandelte Optimierung auf der Grundlage dimensionsloser, charakteristischer Kennzahlen für den Gesamtprozess wie auch für seine einzelnen Komponenten ist wegen der verschiedenen vereinfachenden Annahmen und der Beschränkung auf bestimmte konstruktive Ausführungen (Regeneratoren mit Drahtnetz-Matrix bzw. Rohrbündel-Wärmeaus-tauscher) nur für erste Parameterschätzungen, nicht jedoch für eine endgültige Prozessauslegung geeignet. Vielmehr sollte sich an diese ersten Auslegungsschritte eine numerische Optimierung unter Verwendung eines genaueren, i. d. R. differentiellen Prozessmodells anschließen. Hier kommen in erster Linie die bereits in Kap. 3.1 diskutierten Methoden dritter Ordnung oder auch noch aufwändigere, möglicherweise mehrdimensionale Modelle in Frage.

Darüber hinaus führten die bisherigen Betrachtungen auch zu einer Reihe grundsätzlicher Erkenntnisse über die wechselseitigen Abhängigkeiten und die prinzipiellen Grenzen bei der Optimierung der einzelnen Auslegungsparameter, die auch auf die im folgenden behandelte numerische Optimierung übertragbar sind. Sie lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Eine bestimmte vorgegebene Nutzleistung des Prozesses kann grundsätzlich durch verschiedene Kombinationen der fundamentalen Parameter Druck, Drehzahl, Summe der Hubvolumina und Summe der temperaturbezogenen Totvolumina erzielt werden.
- Diese Größen müssen aufgrund konstruktiver und/oder wirtschaftlicher Überlegungen sowie unter Beachtung der für den jeweiligen Anwendungsfall geforderten Leistungsdichte bzw. des Leistungsgewichtes festgelegt werden. Eine allgemeine Optimierung nach einem thermodynamischen Gütekriterium ist nicht möglich, da nur Randoptima in unrealistischen Bereichen existieren. Lediglich bezüglich des Parameterpaares Drehzahl und bezogene Totvolumen-Summe ist für vorgegebene Werte der übrigen eine Optimierung auf oberster Ebene gemäß den in Kap. 4.5.3 abschließend angestellten Überlegungen möglich.
- Die Detailauslegungen der einzelnen Prozesskomponenten (Regeneratoren und Wärmeüber-träger) sind nach Festlegung der genannten Größen im wesentlichen nur noch Funktionen des bezogenen Totvolumens  $\Lambda$ .
- Die Auslegung der Wärmeübertrager ist nur mit einer zusätzlichen Nebenbedingung möglich. Dies kann ein unterer Grenzwert für den hydraulischen Durchmesser der Strömungs-kanäle, deren Länge oder für die mittlere Reynolds-Zahl sein, wobei letztere so gewählt werden sollte, dass eine überwiegend turbulente Strömung sichergestellt ist.
- Wechselwirkungen zwischen den Auslegungen der Komponenten bestehen nur insofern, als die Regeneratorauslegung die Belastung der benachbarten Wärmeübertrager – ausgedrückt durch die Größe  $\Gamma$  nach Gl. 4-17 – beeinflussen kann.
- Der umgekehrte Einfluss der Wärmeübertrager-Auslegung auf die für den Regenerator maßgebliche Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta$  ist dagegen praktisch vernachlässigbar, sofern man sich in hinreichender Nähe des Gesamtoptimums befindet, d. h. sofern die Wärmeüber-trager ihre Aufgabe bei einer im Verhältnis zu  $\Delta\vartheta$  geringen Grädigkeit erfüllen.
- Für eine gegebene Totraumverteilung können die Auslegungen der Komponenten somit als separate Unteroptimierungen bei jeweils gegebenen  $\Lambda_i$  erfolgen, wenn man die Rege-natoren vor den benachbarten Wärmeübertragern behandelt.

Auf dieser Basis ist die Optimierung der Totraumverteilung gemäß Abb. 4-2 möglich.

Wird nun die Zielfunktion der Optimierung durch ein differentielles Simulationsverfahren ermittelt, so tritt, wie schon in Kap. 4.1.1 erläutert und anhand von Abb. 4-1 beispielhaft demonstriert wurde, ein deterministisch nicht vorhersagbares „Rauschen“ auf, das durch numerische Integrationsfehler in Verbindung mit den von ihnen beeinflussten Steuerungsalgorithmen für die Schrittweite und für die Konvergenzbeschleunigung und den durch das Abbruchkriterium bedingten Fehler der (stationären) Energiebilanz verursacht werden. Im Bereich hoher Auflösungen der unabhängigen Variablen treten sie relativ zu den schwindenden Einflüssen des physikalisch begründeten Gradienten der Zielfunktion zunehmend in den Vordergrund und verleihen dieser einen im systemtheoretischen Sinne chaotischen Charakter.

Wie bereits erwähnt ist der unmittelbare Einsatz von Optimierungsalgorithmen, in denen partielle Ableitungen der Zielfunktion durch numerische Differentiation gebildet werden müssen, unter solchen Bedingungen nicht möglich. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, ist der Einsatz von reinen Suchmethoden. Wie von KÜHL ET AL. (1999a) ausgeführt wird, eignet sich hier insbesondere der seit langem bekannte und bewährte Simplex-Algorithmus nach NELDER UND MEAD (1965). Das vorgeschlagene, hierarchisch strukturierte Optimierungsverfahren gemäß Abb. 4-2 ist mit ihm insofern gut durchführbar, als die Zahl der simultan anzupassenden Parameter sowohl auf der oberen Ebene (der Optimierung der Totraumverteilung) als auch im Bereich der Unteroptimierungen der Komponenten i. d. R. im einstelligen Bereich liegt. Nur bei sehr komplexen Prozessen, etwa solchen mit mehrfacher Expansion (vgl. Kap. 2.1.2.4), kann diese Grenze auf der oberen Ebene möglicherweise erreicht werden, in dem hier vorwiegend verwendeten Beispielfall des Vuilleumier-Prozesses weist die Totraumverteilung hingegen normalerweise fünf Freiheitsgrade auf.

Dies ist insofern von Bedeutung als die simultane Optimierung aller relevanten Auslegungsparameter mit Hilfe des Simplex-Verfahrens nicht ohne weiteres möglich wäre, denn die Gesamtzahl dieser Variablen betrüge selbst nach vorheriger Festlegung der genannten fundamentalen Größen z. B. im Falle eines typischen Vuilleumier-Prozesses noch ca. 15. Wird z. B. im Falle von Drahtnetz-Regeneratoren noch die Maschenweite als weiterer Parameter aufgenommen oder werden Wärmeübertrager mit nicht rohrförmigen Strömungskanälen eingesetzt, so kann sich diese Zahl zusätzlich erhöhen. Man bewegt sich damit in jedem Fall in einem Bereich, in dem die spezifischen Nachteile der Suchmethoden, insbesondere ihr verhältnismäßig schlechtes Konvergenzverhalten, sehr deutlich zum Tragen kommen.

Ein noch entscheidenderer Nachteil der Simplex-Verfahren ist jedoch, dass sich mit steigender Zahl  $N$  der anzupassenden Variablen eine zunehmende Diskrepanz zwischen der in der Simplexstruktur, d. h. in dessen  $N+1$  Funktionswerten, gespeicherten Information über die Zielfunktion und deren tatsächlicher Komplexität entwickelt. Dies gilt insbesondere dann, wenn das Verhalten der Zielfunktion nicht allein durch die Hauptwirkungen der einzelnen Variablen beschrieben werden kann, sondern zusätzlich auch durch signifikante Wechselwirkungen zweiter oder sogar höherer Ordnung gekennzeichnet ist. Betrachtet man hierzu das – sicherlich sehr einfache, nicht einmal ein lokales Extremum zulassende – Beispiel einer als allgemeine lineare Funktion von  $N$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_N$  darstellbaren Zielfunktion,

$$\begin{aligned}
 Y = & a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_Nx_N + \\
 & + a_{1,2}x_1x_2 + a_{1,3}x_1x_3 + \dots + a_{N-1,N}x_{N-1}x_N + \\
 & + a_{1,2,3}x_1x_2x_3 + \dots + a_{N-2,N-1,N}x_{N-2}x_{N-1}x_N + \dots
 \end{aligned} \tag{4-66}$$

so wächst unter der Annahme, dass alle Wechselwirkungen, auch die höchster Ordnung, signifikant sind, die Komplexität der Funktion – ausgedrückt durch die Zahl ihrer Koeffizienten – offensichtlich mit  $2^N$ .

Demgegenüber wächst die Zahl der Simplex-Eckpunkte, in denen der Algorithmus seine Information über die Zielfunktion speichert, jedoch nur linear mit  $N$ . Auch wenn man den günstigeren Fall annimmt, dass lediglich die Wechselwirkungen zweiter Ordnung signifikant sind, so wächst die Komplexität der Funktion immer noch quadratisch mit  $N$ .

Im konkreten Fall kann nun z. B.  $a_i = a_j = 0$ , jedoch  $a_{i,j} \neq 0$  sein, d. h. die Variation von  $x_i$  oder  $x_j$  allein wirkt sich nicht auf die Zielfunktion aus, wohl aber die gleichzeitige Veränderung beider Variablen. Für den einfachen Fall  $N = 2$  oder  $N = 3$  ist es noch kaum möglich, eine derart ungünstige Orientierung des Simplex im Raum zu konstruieren, dass eine solche Optimierungsrichtung vom Algorithmus nicht erkannt wird. Für größere Werte von  $N$  steigt jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass dies geschieht, stark an, insbesondere dann, wenn auch Wechselwirkungen höherer Ordnung zwischen den Variablen existieren. Anschaulich formuliert könnte man sagen, dass der Simplex zunehmend „blind“ für derartige, auf Wechselwirkungen der Variablen beruhende Optimierungsrichtungen im  $\mathcal{R}^N$  wird.

Die Folge hiervon ist, dass das Verfahren das tatsächliche Optimum der Zielfunktion nicht zuverlässig findet und in den meisten Fällen – abhängig von den Startwerten und der Aufstellung des Start-Simplexes – vorzeitig das Abbruchkriterium erfüllt. Dies gilt auch dann, wenn die für das hierarchische Verfahren vorgeschlagenen Definitionen der Variablen beibehalten werden. Dann kann man zwar aufgrund der bisherigen Überlegungen weitgehende Wechselwirkungsfreiheit zwischen den lokalen Auslegungsparametern verschiedener Prozesskomponenten annehmen, jedoch existieren dafür sehr ausgeprägte Wechselwirkungen zwischen den lokalen Parametern derselben Komponente und ebenso auch zwischen diesen und den die Zuteilung des jeweiligen Totvolumens steuernden Variablen der vormals „oberen Ebene“. Diese stehen ihrerseits untereinander z. T. ebenfalls in starker Wechselwirkung.

Wendet man nun das hier vorgeschlagene, hierarchisch strukturierte Verfahren an, so kann man davon ausgehen, dass das Simplex-Verfahren sowohl auf der oberen als auch auf der unteren Ebene zuverlässig konvergiert. Schwierigkeiten ergeben sich allerdings u. U., wenn in der Nähe des Optimums der Gradient der Zielfunktion so gering ist, dass sich der Simplex in einem durch die beschriebenen numerisch bedingten Störungen verursachten, scheinbaren Optimum „verfängt“. Das ursprüngliche, von NELDER UND MEAD (1965) angegebene Verfahren gibt einen solchen, vermeintlich optimalen Punkt nur dann wieder auf, wenn noch bessere Funktionswerte gefunden werden. geschieht dies nicht, so werden zunächst Kontraktionsschritte und schließlich Verkleinerungen des gesamten Simplex unter Beibehaltung des optimalen Punktes durchgeführt, bis schließlich das Abbruchkriterium erfüllt ist.

Aus diesem Grunde wurde der Algorithmus durch die zusätzliche Regel erweitert, dass keine wiederholte Verkleinerung des Simplex auf denselben optimalen Punkt hin erfolgen darf. Statt einer zweiten Verkleinerung wird vielmehr ein Expansionsschritt unter Aufgabe des Optimums durchgeführt, wobei der bisherige optimale Punkt dann im Innern des neuen Simplex liegt. Falls es sich dabei um das wahre Optimum der Zielfunktion handelt, kehrt der Simplex dorthin zurück bzw. er verkleinert sich wiederum um diesen Punkt herum. Andernfalls erhält er so die Möglichkeit, sich in Richtung auf das wahre Optimum weiterzubewegen.

Wie man an der beschriebenen Problematik erkennen kann, ist die Anwendung von Suchverfahren hier grundsätzlich mit der Schwierigkeit verbunden, dass bei fortschreitender Annäherung an das Optimum schließlich nur noch diejenige Teilmenge der Funktionswerte zu weiteren Fortschritten führt, die durch das beschriebene, numerisch bedingte „Rauschen“ um einen gewissen Betrag verbessert erscheint. Je „besser“ die bereits gefundenen Werte sind, umso unwahrscheinlicher wird es, ähnlich „gute“ Werte in der Umgebung zu finden. Die Konvergenz wird dadurch verschlechtert, und ein gewisser, aus technisch-praktischer Sicht jedoch akzeptabler Abbruchfehler muss daher bei der Optimierung in Kauf genommen werden.

Durch den hierarchischen Aufbau des Verfahrens tritt der Hauptnachteil der Suchmethoden, ihre langsame Konvergenz, sehr deutlich in Erscheinung, denn es müssen bei jedem Optimierungsschritt der oberen Ebene alle Unteroptimierungen der Komponenten neu durchgeführt werden. Das Problem wird allerdings durch verschiedene günstige Aspekte relativiert.

Hier ist zunächst die i. d. R. geringe Zahl unabhängiger Variabler in den Unteroptimierungen zu nennen. So verbleibt z. B. im Falle von Rohrbündel-Wärmeübertragern nach Festlegung der zusätzlichen Nebenbedingung nur ein Freiheitsgrad. In diesem Fall wird statt des Simplex-Verfahrens ein wesentlich einfacheres, eindimensionales Verfahren angewendet, das nur wenige Funktionsaufrufe erfordert. Es gleicht die numerischen Fehler der Zielfunktion durch Polynominterpolation aus und wird hier nicht im einzelnen dargestellt.

Im Falle von typischen Regeneratoren mit Fasermatrix existieren lediglich drei Freiheitsgrade in der Unteroptimierung. Auch hier sind i. d. R. nur wenige Funktionsaufrufe ( $< 20$ ) erforderlich, um mit Hilfe des Simplexverfahrens das Optimum mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen. Dabei kann man die Tatsache ausnutzen, dass sich der Simplex auf der oberen Ebene der Totraumverteilung nur in verhältnismäßig kleinen Schritten bewegt. Die Änderungen des einer Komponente zugewiesenen Totvolumens betragen daher zwischen den Aufrufen der jeweiligen Unteroptimierungen nur wenige Prozent, so dass das bisherige Optimum jeweils einen sehr guten Startwert für die nachfolgende Optimierung darstellt.

Dennoch kommt die langsame Konvergenz des beschriebenen Verfahrens dadurch zum Ausdruck, dass z. B. für eine typische Optimierung einer Vuilleumier-Wärmepumpe – ausgehend von Startwerten, die nicht bereits das Ergebnis vorhergehender, ähnlicher Optimierungen sind – i. d. R. zwischen 2000 und 3000 Funktionsaufrufen benötigt werden. Das von KÜHL (1990) entwickelte Simulationsverfahren dritter Ordnung, das in einer weiterentwickelten Form für die Optimierung im Fall des nachfolgend dargestellten Beispiels eingesetzt wurde, benötigt auf einem Arbeitsplatzrechner heutiger Bauart ca. 5 - 10 s CPU-Zeit. Damit erfordert eine Optimierung in der beschriebenen Form auch im Falle des vergleichsweise komplexen Vuilleumier-Prozesses Rechenzeiten von deutlich unter einem Tag, und auch die abschließende Optimierung des fundamentalen Parameterpaares Drehzahl und Totraumsumme, die i. d. R. auf der Basis von drei Stützstellen erfolgen kann, ist mit akzeptablem Zeitaufwand möglich.

Grundsätzlich stellt sich hier die Frage, ob das erwähnte Parameterpaar zusätzlich in die obere Optimierungsebene aufgenommen werden könnte. Die Zahl der Freiheitsgrade würde sich dabei im Falle des Vuilleumier-Prozesses von fünf auf sieben erhöhen, was im Hinblick auf die zuvor aufgezeigten Grenzen des Simplexverfahrens noch akzeptabel wäre. Es ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, dass die Nebenbedingung einer konstanten Nutzleistung in diesem Falle nicht über die vorgegebene Totraumsumme implizit erfüllt werden kann.

Eine explizite, erst bei Kenntnis der Zielfunktion auswertbare Nebenbedingung lässt sich jedoch in Suchverfahren nur als Straffunktion formulieren, und dies führt stets zur zusätzlichen Verschlechterung des Konvergenzverhaltens. Aus diesem Grunde wird in dem nachfolgend dargestellten Beispiel der zuvor skizzierte Weg beschritten, d. h. es wird zunächst nur die Totraumverteilung bei vorgegebener Drehzahl optimiert und dann die gewählte Kombination von Drehzahl und Totraumsumme abschließend durch Variation überprüft. Aufgrund entsprechender Erfahrungen ist es jedoch möglich, hier von vornherein günstige Werte zu wählen.

Aus Platzgründen wird der Ablauf derart komplexer Optimierungen an dieser Stelle nicht im einzelnen dargestellt und als Beleg für die Leistungsfähigkeit des Verfahrens ein mit ihm ermitteltes Kennlinienfeld (Abb. 4-12) wiedergegeben, das zur Festlegung der wesentlichen Auslegungsparameter des bereits in Tabelle 4-2 zitierten und im Anhang 4.4 wiedergegebenen, im Rahmen des bereits zitierten Forschungsprojektes (HEIKRODT ET AL. 1996) entwickelten Baumusters einer Vuilleumier-Wärmepumpe mit 20 kW maximaler Heizleistung diente.



Da zu Beginn der Auslegung noch keine konstruktiven Details bekannt sind, wurden die von ihnen abhängigen Verlustmechanismen in der Simulation zunächst vernachlässigt, um so zu möglichst allgemeingültigen Aussagen zu gelangen. Als Folge hiervon sind die in Abb. 4-12 angegebenen Werte der Leistungszahl als zu optimistisch zu betrachten. Im Verlaufe der späteren Detailoptimierungen, in denen die zusätzlichen konstruktiven Randbedingungen in dem jeweils bekannt werdenden Umfang berücksichtigt wurden, sanken sie um ca. 0,25 ab. Diese für thermisch angetriebene Heizungswärmepumpen immer noch sehr guten Werte gelten dabei für den in Tabelle 4-3 mit „opt.“ bezeichneten Teillast-Betriebszustand.

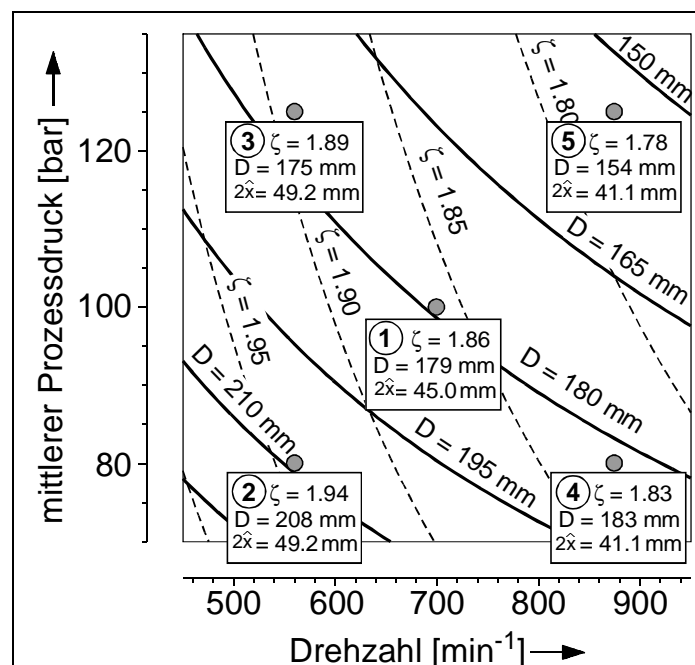
**Tabelle 4-3:** Auslegungsbetriebszustände der in Vuilleumier-Wärmepumpe nach Anhang 4.4 und zugehörige Optimierungskriterien (nach HEIKRODT ET AL. 1996; S. 117ff)

Betriebszustand	$T_k$	$T_w$	$T_h$	Anforderung
„max.“	-20,0 °C	50,0 °C	550 °C	Heizleistung 18 kW
„opt.“	-2,5 °C	35,7 °C	450 °C	Leistungszahl = max.

Er übt nach den von HEIKRODT ET AL. (1996) durchgeführten Untersuchungen zur statistischen Verteilung der Anforderungen an eine Heizungsanlage den größten Einfluss auf die durchschnittliche Jahresheizzahl aus und wurde daher als repräsentativer Betriebszustand für die Optimierung der Leistungszahl festgelegt. Da die Heizleistung vorrangig über die Drehzahl und diese wiederum über die Erhitzertertemperatur geregelt werden sollte, wurde hier ein entsprechend abgesenkter Wert von 450 °C angenommen.

Die geforderte maximale Heizleistung von 20 kW wird dagegen statistisch nur selten angefordert, so dass die unter diesen Bedingungen erreichte Leistungszahl für den Jahresmittelwert nur von untergeordneter Bedeutung ist. Unter Berücksichtigung der über den zusätzlichen Rauchgas-Wärmeaustauscher direkt in den Heizungskreislauf eingekoppelten Wärme ergibt sich daher eine erforderliche maximale Heizleistung der Wärmepumpe von ca. 18 kW unter den in Tabelle 4-3 mit „max.“ bezeichneten Betriebsbedingungen.

Diese Nebenbedingung gilt nicht für den der Optimierung zugrundegelegten Betriebszustand und kann somit nicht laufend unmittelbar überprüft werden. Zur Lösung dieses Problems kann man jedoch einen Erfahrungswert für die bezogene Totraumsumme vorgeben, mit dem die geforderte maximale Leistung zumindest annähernd erreicht wird. Nach Abschluss der Optimierung auftretende geringe Abweichungen können dann durch eine abschließende Querschnittsskalierung gemäß Kap. 4.3.2 korrigiert werden, ohne dass das erhaltene Ergebnis signifikant beeinflusst wird.



**Abb. 4-12:** Mit Hilfe des hierarchisch strukturierten Simplexverfahrens erstelltes Kennlinienfeld für die Auslegung der 20 kW-Vuilleumier-Wärmepumpe nach Anhang 4.4 (KÜHL ET AL. 1999a)

Dem in Abb. 4-12 dargestellten Diagramm liegen im einzelnen folgende Annahmen zugrunde:

- Es wird ein Vuilleumier-Prozess in  $\gamma$ -Konfiguration angenommen, d. h. die quantitativ noch nicht bekannte Möglichkeit der Überlappung der Kolbenhübe in der später realisierten  $\beta$ -Bauweise (s. Anhang 4.4) wurde zunächst außer Acht gelassen.
- Durchmesser und Hübe der Verdrängerkolben sind gleich, der Phasenwinkel beträgt  $90^\circ$
- Es wurden adiabate Zylinderräume angenommen, da die von der Form und Oberflächen-gestaltung abhängige Wärmeübertragung noch nicht zuverlässig modellierbar war.
- Zusätzliche, über den Carnot'schen Stoßverlust hinausgehende Strömungsdruckverluste durch unstetige Querschnittsänderungen, Strömungsumlenkungen o. ä. an den Schnittstellen zwischen den Komponenten wurden wegen fehlender Detailkenntnis vernachlässigt.
- Es wurden Regeneratoren mit Drahtgewebematrix angenommen.
- Für die Wärmeübertrager im kalten und warmen Temperaturbereich wurde eine Rohrbündelbauart mit einem Innendurchmesser von 1 mm angenommen. Dies entspricht dem in der später realisierten Ausführung erreichbaren minimalen hydraulischen Durchmesser.
- Für den heißen Wärmeübertrager wurde aufgrund analoger Überlegungen ebenfalls die Rohrbündel-Bauweise angenommen, jedoch mit einem Durchmesser von 2,5 mm.
- Für das Totvolumen der noch nicht im einzelnen bekannten Überströmkanäle wurde ein pauschaler Wert von jeweils 15 % des Zylinderhubvolumens veranschlagt.
- Für die bezogene Totraumsumme wurde zunächst ein Wert von 1,3 angenommen, der in Anlehnung an die bislang bekannten Auslegungen gemäß Tabelle 4-2 festgelegt wurde. Der Optimierungsspielraum durch Variation von Drehzahl und Totraumsumme wurde somit noch nicht ausgeschöpft.

Aufgrund von Erfahrungen mit früheren Maschinenauslegungen, insbesondere der in Anhang 4.1 und 4.2 dargestellten Maschinen nach PFEFFER (1998) bzw. nach HEIKRODT ET AL. (1996; S. 114ff) wurden für Druck und Drehzahl Ausgangswerte von 100 bar bzw.  $700 \text{ min}^{-1}$  im Fall maximaler Leistung festgelegt (Punkt 1 in Abb. 4-12). Diese Werte wurden dann in einem sternförmigen Versuchsplan um Faktoren von 0,8 bzw. 1,25 variiert (Punkte 2, 3, 4 und 5 in Abb. 4-12), so dass der Plan sowohl Punkte mit gleicher Stirling-Zahl (Punkte 1, 2 und 5) als auch solche mit gleicher idealer Leistungsdichte (Punkte 1, 3 und 4) umfasst.

Die in Abb. 4-12 eingezeichneten Ausgleichskurven wurden zur Verdeutlichung der grundsätzlichen Abhängigkeiten mit Hilfe empirischer Potenzansätze an die Optimierungsergebnisse angepasst. Man erkennt, dass sich die Ergebnisse der Ähnlichkeitstheoretischen Betrachtungen (Kap. 4.5.3), wonach die Drehzahl einen erheblichen, der Druck jedoch nur einen geringen Einfluss auf die erzielbare thermodynamische Güte ausübt, bestätigen. Bei konstanter Leistungsdichte ist eine Druckerhöhung bei gleichzeitiger Drehzahlab senkung als positiv zu bewerten, soweit die bereits diskutierten konstruktiven und werkstofftechnischen Randbedingungen dies zulassen. Eine Verringerung der Baugröße – ausgedrückt durch Hub und Zylinderdurchmesser – führt dagegen auch bei konstanter Stirling-Zahl zu einer Verschlechterung. Aus Ähnlichkeitstheoretischer Sicht ist dies dadurch zu erklären, dass aus den bereits in Kap. 4.3 diskutierten Gründen auch in diesem Fall keine vollständige Ähnlichkeit zu erreichen ist. Dies liegt zum einen an den zusätzlichen Einflüssen des Prozessdruckes über den Wandwärmeleitungsverlust und den Temperaturschwingungsverlust der Regeneratoren, der gemäß Gl. 4-48 auch bei konstantem Produkt  $\Lambda \cdot S_g \cdot \Delta \vartheta^2 / \eta^*$  die Entropieproduktion beeinflusst, und zum anderen an der praxisorientierten Beschränkung des Rohrdurchmessers der Wärmeübertrager, die ebenfalls keine Ähnlichkeitstheoretisch korrekte Skalierung zulässt.

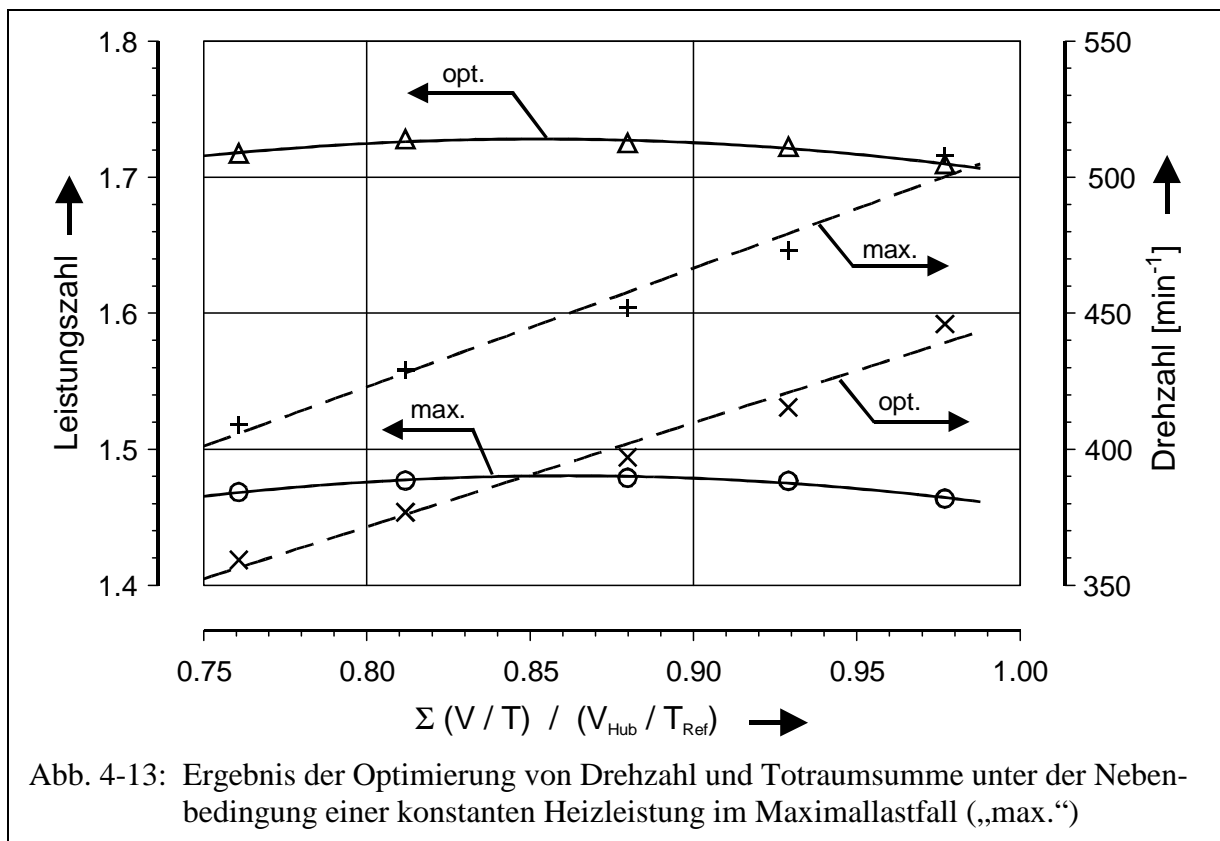
Bemerkenswert ist weiterhin, dass der optimale Kolbenhub offenbar nur von der Drehzahl, nicht jedoch von Druck und Hubvolumen abhängig ist. Dies ist eine Folge der Nebenbedingung einer konstanten Leistung, die dazu führt, dass das Hubvolumen bei einer Druck- oder Drehzahlvariation stets gegenläufig verändert wird. An Gl. 4-3 ist zu erkennen, dass eine Änderung des Druckes und die zugehörige Volumenänderung sich dann gegenseitig kompensieren, während die Auswirkungen einer Drehzahländerung entsprechend verstärkt werden.

Die Festlegung der fundamentalen Auslegungsgrößen erfolgte im Fall dieses Beispiels schließlich aufgrund einer Reihe konstruktiver, wirtschaftlicher und praktischer Überlegungen. Die bereits genannte Anforderung an die maximale Heizleistung ist z. B. dadurch begründet, dass die Entwicklung der Vuilleumier-Heizungswärmepumpe vorrangig auf den Ersatzgerätemarkt – das im Hinblick auf den erzielbaren Umsatz zweifellos bedeutendste Marktsegment – zielte, wo z. Z. im Ein- bis Zweifamilienhausbereich vorwiegend Heizungsanlagen dieser Leistungsklasse zu finden sind. Dabei steht weniger der Heizwärmebedarf der Gebäude im Hintergrund als vielmehr die Anforderung an eine Warmwasserbereitung im Durchlaufbetrieb. Da die Vuilleumier-Wärmepumpe bei größeren Temperaturhuben weder in der Heizleistung nachlässt noch in der Leistungszahl übermäßig einbricht, kann sie auch diese Aufgabe im monovalenten Betrieb mit übernehmen. Sie ist daher für den Ersatzgerätemarkt besonders geeignet, so dass diese Festlegung trotz der geringeren Wärmeanforderung moderner Niedrigenergiehäuser sinnvoll und begründet ist.

Auch wenn aus Abb. 4-12 zu ersehen ist, dass grundsätzlich eine Erhöhung des Druckes zur Steigerung der Leistungsdichte günstiger ist als die der Drehzahl, wurde dennoch ein Auslegungsdruck von lediglich 100 bar festgelegt. Dies ist dadurch begründet, dass eine Drucksteigerung keine Gewichtersparnis bedeutet und bei wachsenden Wandstärken mit den bereits diskutierten Wärmespannungs- und Ermüdungsproblemen zu rechnen ist. Weiterhin spielte die Frage eine Rolle, inwieweit derartige Maschinen der Druckbehälterverordnung unterliegen und ob die für ein zukünftiges Serienprodukt erforderliche Bauartzulassung an die dort festgelegten Grenzen des Druck-Inhaltsproduktes gebunden sein würde. Aus diesem Grunde wurde entschieden, die Grenze von 1000 bar-Liter vorsorglich einzuhalten, was dann dazu führt, dass die theoretische Leistungsdichte unter dieser Vorgabe nur noch über die Drehzahl sowie – in gewissen Grenzen – über die Totraumsumme eingestellt werden kann.

Als Alternative hierzu wurde die unter marktpolitischen Aspekten festgelegte Mindestleistungszahl des Gesamtsystems als Kriterium herangezogen. Nach den von HEIKRODT ET AL. (1996) durchgeführten Abschätzungen ergab sich daraus unter Berücksichtigung des Brennerwirkungsgrades, der Isolationsverluste und der direkt über den Rauchgaswärmeaustauscher direkt in den Heizkreislauf eingekoppelten Energie (einschließlich der Kondensationswärme, die bei hinreichend niedrigen Vorlauftemperaturen analog zu Brennwertkesseln ebenfalls genutzt werden sollte) eine minimale Leistungszahl der eigentlichen Wärmepumpe (des sog. „Nukleus“) von 1,5 im optimalen Betriebszustand.

Das Ergebnis der abschließenden Variation von Drehzahl und Totvolumen unter der Nebenbedingung einer konstanten Leistung im Maximallastfall nach [Tabelle 4-3](#) ist für den erstgenannten Fall in Abb. 4-13 dargestellt. Man erkennt, dass sich in beiden Betriebszuständen übereinstimmend ein Optimum bei einer bezogenen Totraumsumme von ca. 0,86 ergibt, also bei einem deutlich geringeren als den bislang bekannten Werten gemäß [Tabelle 4-2](#). Da mit derart geringen Werten somit noch keine praktischen Erfahrungen vorlagen, wurde bewusst der geringfügig höhere Wert von 0,91 gewählt, um sich nicht zu weit von den bislang bewährten Auslegungen zu entfernen. Die damit einhergehende Steigerung der Leistungsdichte führte in diesem Fall schließlich zu der Festlegung einer maximalen Drehzahl von ca.  $460 \text{ min}^{-1}$  bei Kolbendurchmessern von 180 mm und Hübren von jeweils 50 mm. Die je-



weils gleichen Werte von Hub und Kolbendurchmesser wurden dabei ebenso wie der Phasenwinkel von  $90^\circ$  aus konstruktiven bzw. wirtschaftlichen Gründen festgelegt, da sich die Maschinen- und insbesondere auch die Getriebekonstruktion dadurch vereinfachten.

Die alternative Auslegung mit einer optimalen Leistungszahl von 1,5 hätte dagegen Kolbendurchmesser von lediglich 130 mm (bei dem aus konstruktiven Gründen auch hier beibehaltenen Hub von 50 mm) und eine maximale Drehzahl von ca.  $830 \text{ min}^{-1}$  zu Folge gehabt. Diese Variante wurde aus Gründen der Kompaktheit zunächst favorisiert. Zeitgleich wurde die konstruktive Planung des Brenner- und Erhitzerkopfsystems durchgeführt (HECKT 1999). Dabei sollte der von der Firma Viessmann entwickelte Matrix<sup>®</sup>-Strahlungsbrenner (HOFBAUER UND BORNSCHEUER 1993) zum Einsatz kommen, da er sich – gerade auch unter den durch die erforderliche Rauchgas-Luft-Vorwärmung erschwerten Bedingungen – durch eine besonders niedrige Flammentemperatur und demzufolge auch durch sehr günstige Schadstoffemissionen auszeichnet. Die für die geforderte Brennerleistung benötigten Brennkammerabmessungen bedingten in der Folge einen relativ voluminösen Erhitzerkopf, wie auch die Darstellung im Anhang 4.4 erkennen lässt. Damit war der Vorteil, der sich aus dem geringeren Kolbendurchmesser der alternativen Auslegung ergab, relativiert. Vielmehr ergaben sich sogar zusätzliche Schwierigkeiten wegen verlängerter Überströmkanäle und einer im Hinblick auf Wärmespannungen ungünstigen konstruktiven Gestaltung, so dass schließlich eine Entscheidung zugunsten der Variante mit 180 mm Kolbendurchmesser getroffen wurde.

Man erkennt an diesem Beispiel, dass die Festlegung der fundamentalen Auslegungsgrößen, für die ein thermodynamisch bestimmtes Optimum in sinnvollen Bereichen nicht existiert, ohne weiteres anhand der Randbedingungen des jeweiligen praktischen Anwendungsfalles erfolgen kann. Die Zahl dieser Anforderungen kann offensichtlich sogar so hoch sein, dass das Fehlen zusätzlicher, thermodynamischer Beschränkungen als Vorteil zu sehen ist.

## 4.6.2 Lokale Approximation der Zielfunktion

### 4.6.2.1 Vorüberlegungen und frühere Arbeiten

Wegen der vergleichsweise langsamen Konvergenz des zuvor beschriebenen hierarchischen Simplexverfahrens wird im folgenden die zweite vorgeschlagene Alternative, die Anpassung einer numerisch – oder auch analytisch – stabil differenzierbaren Ausgleichsfunktion, näher betrachtet. Die wesentliche Schwierigkeit besteht dabei darin, sicherzustellen, dass der hierfür gewählte Funktionstyp die wahre Zielfunktion so zuverlässig und vollständig wiedergibt, dass die Optimierung dieser Ersatzfunktion auch zum gewünschten Ziel führt.

Von TOROPOV UND CARLSEN (1994) sowie TOROPOV ET AL. (1994) wurde ein solches Vorgehen erstmals für die Optimierung eines Stirlingmotors vorgeschlagen. Sie verwenden dabei für die Ausgleichsfunktion einen relativ einfach aufgebauten, multiplikativen Ansatz der Form

$$Y(\bar{x}) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^N x_i^{a_i} \quad (4-67),$$

wobei  $x_i$  die zu optimierenden Auslegungsparameter und  $a_i$  die durch ein geeignetes Regressionsverfahren anzupassenden Koeffizienten der Ersatzfunktion sind. Der Vorteil dieser Definition ist, dass sie sich durch Logarithmierung in eine lineare Funktion der Koeffizienten transformieren lässt, was deren Anpassung durch Quadratsummenminimierung erleichtert.

Da diese Funktion jedoch nur streng monotone Abhängigkeiten von den Parametern wiedergeben kann, ist sie für eine unbeschränkte Optimierung grundsätzlich ungeeignet. Die im vorhergehenden Kapitel formulierte Zielfunktion wurde jedoch so gewählt, dass die zugehörige Hesse-Matrix zumindest im Bereich des Optimums positiv definit ist und somit für die Optimierung keine expliziten Nebenbedingungen formuliert werden müssen. Darüber hinaus wurde deutlich, dass es zwar möglich ist, Wechselwirkungen zwischen den lokalen Auslegungsparametern verschiedener Komponenten durch geeignete Definition der übergeordneten Parameter zu minimieren, dass jedoch in anderen Fällen (u. a. zwischen den Parametern derselben Komponente) durchaus mit Wechselwirkungen zu rechnen ist. So ist es z. B. möglich, dass weder die Veränderung der Porosität noch die des Faserdurchmessers eines Regenerators allein eine Verbesserung bewirkt, wohl aber die gleichzeitige Veränderung beider Größen.

Der Funktionsansatz nach Gl. 4-67 kann derartige Wechselwirkungen prinzipiell nicht wiedergeben. Hierzu ist im allgemeinen Fall, wo sämtliche Wechselwirkungen – auch die höchster Ordnung – vorab als signifikant angenommen werden, zumindest der allgemeine lineare Ansatz nach Gl. 4-66 erforderlich. Um dessen  $2^N$  Koeffizienten durch Regression bestimmen zu können, sind jedoch mindestens ebenso viele Funktionswerte erforderlich. Damit wäre bei simultaner Optimierung aller relevanten Auslegungsparameter bereits bei vergleichsweise einfach aufgebauten Stirling-Prozessen nicht nur keine Verbesserung gegenüber dem zuvor behandelten Verfahren zu erzielen, sondern es würden offensichtlich sogar die Grenzen der praktischen Durchführbarkeit erreicht.

Es liegt nahe, zur Lösung dieses Problems Methoden der statistischen Versuchsplanung anzuwenden, denn die Werte der numerisch ermittelten Zielfunktion zeigen wegen des bereits diskutierten, nicht deterministisch vorhersagbaren Rauschens (Abb. 4-1) ein ähnliches Verhalten wie experimentelle Versuchsergebnisse, die einem statistischen Fehler unterliegen. Zwar verhält sich ein numerisches Modell insofern deterministisch als bei exakt gleichen Eingabeparametern selbstverständlich auch jedes Mal exakt dieselben Ergebnisse erhalten werden (zumindest bei hinsichtlich Rechen- und Rundungsregeln der Gleitkomma-Arithmetik absolut

gleicher EDV-Hardware und Software), jedoch genügen minimale, physikalisch völlig insignifikante Änderungen einzelner Eingabeparameter, um eine Streuung der erhaltenen Ergebnisse zu erhalten, ähnlich wie bei experimentell durchgeführten Versuchswiederholungen. Zur Verminderung der Anzahl der „Versuche“ (bzw. Simulationsrechnungen), die zur Bestimmung einer für Optimierungszwecke brauchbaren Ersatzfunktion erforderlich sind, bietet sich insbesondere die Anwendung der Regeln der faktoriellen Teilversuchsplanung an, die z. B. von BANDERMANN (1972) ausführlich dargestellt werden.

Man geht dabei von der Erfahrungshypothese aus, dass Wechselwirkungen dritter oder noch höherer Ordnung, d. h. gegenseitige Beeinflussungen der Wirkungen zwischen drei und mehr Parametern, als nicht existent angenommen werden, da sie i. d. R. wegen des stets vorhandenen statistischen Versuchsfehlers nicht als signifikant nachgewiesen und darüber hinaus auch in vielen Fällen aufgrund physikalischer Überlegungen ausgeschlossen werden können. Werden die Optimierungsparameter auch hier in der gleichen Weise gewählt wie zuvor im Falle des hierarchisch strukturierten Simplexverfahrens, so lassen sich, wie in diesem Zusammenhang bereits dargelegt wurde, sogar viele binäre Wechselwirkungen bereits ausschließen. Da nun eine Wechselwirkung höherer Ordnung grundsätzlich nur dann vorhanden sein kann, wenn alle in ihr enthaltenen binären Wechselwirkungen existieren, ist ihr Auftreten in diesem Fall als besonders unwahrscheinlich einzustufen.

Unter Verwendung der in der statistischen Versuchsplanung üblichen, im folgenden übernommenen Nomenklatur, wonach die Wirkungen der Parameter  $x_1, x_2, x_3, \dots$  mit A, B, C, ... und ihre Wechselwirkungen entsprechend mit AB, BC, ... bezeichnet werden, lässt sich dies so formulieren, dass die Wechselwirkung ABC nur dann existieren kann, wenn sowohl AB, AC und BC existieren. Selbst dort, wo dies der Fall ist – also z. B. bei Auslegungsparametern derselben Prozesskomponente, die zuvor Gegenstand einer einzelnen Unteroptimierung waren, ist die Wechselwirkung dritter Ordnung jedoch i. d. R. nicht mehr als signifikant nachweisbar und kann bei der Anpassung der Ersatzfunktion ohne nennenswerten Genauigkeitsverlust vernachlässigt werden.

Die durch thermodynamische Überlegungen begründete Festlegung von großenteils wechselwirkungsfreien Parametern in Kap. 4.1.5 ist somit auch an dieser Stelle, wo von der hierarchisch strukturierten Optimierung nach Abb. 4-2 abgerückt wird, weiterhin von Nutzen, da sie erheblich dazu beiträgt, die Komplexität der anzupassenden Ersatzfunktion und damit auch die Zahl der hierzu erforderlichen Funktionsaufrufe zu reduzieren.

Nach den Grundregeln der faktoriellen Versuchsplanung werden die Koeffizienten des allgemeinen linearen Ansatzes gemäß Gl. 4-66 durch einen  $2^N$ -Versuchsplan ermittelt, bei dem sämtliche Parameter  $x_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) zwischen einem niedrigen und einem hohen Niveau variiert werden. Durch lineare Transformation können dabei die ursprünglichen physikalischen Größen stets so in eine dimensionslose Variable überführt werden, dass für den Ausgangspunkt des jeweiligen Optimierungsschrittes  $x_i = 0$  gilt und die hohen bzw. niedrigen Niveaus des Versuchsplanes Werten von  $x_i = +1$  bzw.  $x_i = -1$  entsprechen. Dies wird im folgenden vorausgesetzt<sup>3</sup>. Damit entsprechen die Parameterkombinationen für die auszuführenden „Versuche“ (bzw. Simulationsrechnungen) den Eckpunkten eines N-dimensionalen Würfels im  $\mathfrak{R}^N$  mit der Kantenlänge 2. Die Zahl dieser Eckpunkte beträgt offensichtlich  $2^N$  und ist damit ausreichend zur Bestimmung sämtlicher Haupt- und Wechselwirkungen in Gl. 4-66. Der Vorteil eines solchen Planes ist dabei die Orthogonalität, d. h. jede Wirkung lässt sich unabhängig von den übrigen bestimmen und mit einfachen statistischen Methoden auf Signifikanz testen.

<sup>3</sup> Auf den hochgestellten Index \*, der an anderer Stelle für die Kennzeichnung dimensionsloser Größen verwendet wurde, wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Wird nun lediglich ein faktorieller Teilversuchsplan ausgeführt, so reduziert sich die Zahl der benötigten Funktionswerte um einen Faktor  $2^P$  mit  $P = 1, 2, 3, \dots$ . Je nachdem, wie groß  $P$  gewählt wird, werden dabei mehr oder weniger viele (jeweils  $2^P$ ) Wirkungen und Wechselwirkungen vermengt, d. h. sie sind in der statistischen Auswertung nicht mehr voneinander zu trennen. Um hier keinen physikalischen Informationsverlust zu verursachen, sollten diese vermengten Wirkungen so gewählt werden, dass jeweils nur eine von ihnen als real vorhanden anzunehmen ist und somit das erhaltene Ergebnis ihr allein zugeordnet werden kann.

Aufgrund der vorhergehenden Überlegungen lässt sich dies so konkretisieren, dass zumindest die Hauptwirkungen sowie die – zumindest teilweise vorhandenen – binären Wechselwirkungen nicht miteinander vermengt werden sollten. Welche Wirkungen jeweils miteinander vermengt werden, wird nach BANDERMANN (1972) durch die sog. „defining contrasts“ festgelegt, d. h. durch die Gruppe derjenigen Wirkungen, die mit der Wirkung (I), also dem Mittelwert aller Versuche, vermengt werden. Die weiteren Gruppen vermengter Wirkungen ergeben sich dann durch „Multiplikation“ der defining contrasts mit den weiteren Haupt- und Wechselwirkungen, wobei die Rechenvorschrift  $A^2 = B^2 = C^2 = \dots = 1$  gilt.

Stellt man nun die – relativ strenge – Regel auf, dass alle Hauptwirkungen und binären Wechselwirkungen jeweils nur mit Wechselwirkungen dritter und höherer Ordnung vermengt werden dürfen (und somit alle einzeln bestimmt werden können), so bedeutet dies, dass zu den defining contrasts neben (I) lediglich Wechselwirkungen fünfter und höherer Ordnung gehören dürfen, denn wäre (I) z. B. mit ABCD vermengt, so wäre nach der genannten Regel zwangsläufig auch AB mit CD, AC mit BD und AD mit BC vermengt, was im Widerspruch zu obiger Forderung steht. Daraus folgt, dass eine Reduktion der Versuchszahl auf einen Teilversuchsplan unter der genannten Voraussetzung erst für  $N > 4$  möglich ist.

Allerdings ist dies im Hinblick auf die Rechenzeit auch erst bei größeren Werten von  $N$  erforderlich. Für  $N = 5$  ist erstmals eine Halbierung des Versuchsplanes, d. h.  $P = 2$ , möglich, und die einzig mögliche Gruppe von defining contrasts lautet (I), ABCDE. Daraus folgt, dass alle Hauptwirkungen mit Wechselwirkungen vierter Ordnung und alle binären mit jeweils einer ternären Wechselwirkung vermengt sind, also z. B. die Hauptwirkung A mit der Wechselwirkung BCDE oder die binäre Wechselwirkung BC mit ADE, was unter der gestellten Bedingung akzeptabel ist.

Weitere Parameter mit ihren zugehörigen Hauptwirkungen und binären Wechselwirkungen können mit dem gleichen, teilweise ausgeführten Versuchsplan dann zusätzlich erfasst werden, wenn unter den Gruppen miteinander vermengter Wirkungen mindestens eine nur aus Wechselwirkungen vierter und höherer Ordnung besteht. Es zeigt sich, dass dieser Fall am ehesten dann eintritt, wenn in die Gruppe der defining contrasts keine unnötig hohen Wechselwirkungen mit aufgenommen werden. Sieht man von dem trivialen, bereits indirekt erwähnten Fall  $N = 4$  ab, so ist dies zum ersten Mal für  $N = 7$  der Fall. Unter Beibehaltung der defining contrasts für  $N = 5$  erhält man hier die in Tabelle 4-4 angegebenen Paare vermengter Wirkungen, die ab lfd. Nr. 55 insgesamt 10 Paare aus Wechselwirkungen vierter und fünfter Ordnung einschließen. Eine achte Hauptwirkung H kann hier z. B. mit ABFG vermengt werden, indem man die Wechselwirkung ABFGH zu den defining contrasts hinzufügt. Da alle weiteren Möglichkeiten der multiplikativen Verknüpfung ebenso hierzu zählen, lauten die defining contrasts für den nur zu einem Viertel auszuführenden  $2^8$ -Versuchsplan somit (I), ABCDE, ABFGH, CDEFGH und erfüllen somit weiterhin die obige Bedingung.

Derartige Fälle, in denen mit derselben Anzahl von Versuchen bzw. Simulationsrechnungen die Haupt- und binären Wechselwirkungen eines zusätzlichen Parameters mit bestimmt werden können, treten bei Steigerung von  $N$  wiederholt auf. Tabelle 4-5 gibt eine Übersicht bis  $N = 22$ . Man erkennt, dass die erforderliche Versuchszahl im Falle eines Teilversuchsplanes

**Tabelle 4-4:** Vermengte Wirkungen in einem zur Hälfte ( $P = 2$ ) ausgeführten faktoriellen  $2^7$ -Versuchsplan mit den defining contrasts (I), ABCDE

1	( I )	ABCDE	17	BE	ACD	33	ACG	BDEG	49	CEG	ABDG
2	A	BCDE	18	BF	ACDEF	34	ADF	BCEF	50	CFG	ABDEFG
3	B	ACDE	19	BG	ACDEG	35	ADG	BCEG	51	DEF	ABCF
4	C	ABDE	20	CD	ABE	36	AEF	BCDF	52	DEG	ABCG
5	D	ABCE	21	CE	ABD	37	AEG	BCDG	53	DFG	ABCEFG
6	E	ABCD	22	CF	ABDEF	38	AFG	BCDEFG	54	EFG	ABCDFG
7	F	ABCDEF	23	CG	ABDEG	39	BCF	ADEF	55	ABFG	CDEFG
8	G	ABCDEG	24	DE	ABC	40	BCG	ADEG	56	ACFG	BDEFG
9	AB	CDE	25	DF	ABCEF	41	BDF	ACEF	57	ADFG	BCEFG
10	AC	BDE	26	DG	ABCEG	42	BDG	ACEG	58	AEFG	BCDFG
11	AD	BCE	27	EF	ABCDF	43	BEF	ACDF	59	BCFG	ADEFG
12	AE	BCD	28	EG	ABCDG	44	BEG	ACDG	60	BDFG	ACEFG
13	AF	BCDEF	29	FG	ABCDEFG	45	BFG	ACDEFG	61	BEFG	ACDFG
14	AG	BCDEG	30	ABF	CDEF	46	CDF	ABEF	62	CDFG	ABEFG
15	BC	ADE	31	ABG	CDEG	47	CDG	ABEG	63	CEFG	ABDFG
16	BD	ACE	32	ACF	BDEF	48	CEF	ABDF	64	DEFG	ABCFG

mit dem unter der genannten Bedingung jeweils maximal möglichen Wert von  $P$  verhältnismäßig schwach mit  $N$  wächst und in rechentechnisch ohne weiteres handhabbaren Bereichen bleibt. Für die Zahl der für einen vollständigen Plan erforderlichen Versuche trifft dies dagegen offensichtlich nicht mehr zu, wenn für  $N$  Werte gewählt werden, wie sie für die Optimierung eines vollständigen Prozesses typisch sind (ca. 13 – 20). Die zusätzlich zur Gruppe der defining contrasts hinzuzufügenden, unabhängigen Wechselwirkungen, mit denen die Reduktionen der Versuchszahl ohne Vermengung von Haupt- und binären Wechselwirkungen untereinander zu erzielen sind, sind in ebenfalls in Tabelle 4-5 angegeben. Es handelt sich dabei lediglich um eine von vielen verschiedenen Möglichkeiten.

Abhängig von  $P$  existieren dabei jeweils  $2^P$  verschiedene Teilversuchspläne, die grundsätzlich untereinander gleichwertig sind. Welcher von ihnen ausgeführt wird, kann im Einzelfall davon abhängig gemacht werden, ob bei bestimmten Parameterkombinationen sog. „harte“ Randbedingungen, d. h. physikalisch oder rechentechnisch begründete Grenzen, bei deren Überschreitung kein „Versuch“ (in diesem Fall also keine sinnvolle Simulationsrechnung) mehr möglich ist, verletzt werden. Dies kann z. B. bei Überschreitung des Gültigkeitsbereiches der verwendeten empirischen Korrelationen der Fall sein.

Die Bestimmung der in den jeweiligen Teilversuchsplänen auszuführenden Versuche ist nach dem von BANDERMANN (1972; S. 357) angegebenen Verfahren auf einfache Weise möglich und wird hier nicht im einzelnen dargestellt.

Speziell in den Fällen in Tabelle 4-5, in denen  $P$  nicht gemeinsam mit  $N$  erhöht werden kann und sich die Zahl der Versuche im Teilversuchsplan so-

**Tabelle 4-5:** Erforderliche Versuchszahl für den Teilversuchsplan im Vergleich zum vollständigen Plan für die Parameterzahl  $N$ , sowie zusätzlich benötigter unabhängiger defining contrast zur Erhöhung von  $P$ 

$N$	$2^N$	$P_{\max}$	$2^{N-P}$	zusätzl. def. c.
1	2	0	2	-
2	4	0	4	-
3	8	0	8	-
4	16	0	16	-
5	32	1	16	ABCDE
6	64	1	32	-
7	128	1	64	-
8	256	2	64	ABFGH
9	512	2	128	-
10	1024	3	128	ACFIJ
11	2048	4	128	BDGIK
12	4096	4	256	-
13	8192	5	256	ABILM
14	16384	6	256	ADHLN
15	32768	7	256	ACKMO
16	65536	8	256	AEJOP
17	131072	9	256	ADGPQ
18	262144	9	512	-
19	524288	10	512	ABJRS
20	1048576	11	512	ACNRT
21	2097152	12	512	ADKSU
22	4194304	13	512	AEFUV



mit verdoppelt, ist u. U. auch weiterhin die bisherige Zahl von Versuchen ausreichend. Man muss dann zwar in Kauf nehmen, dass einige wenige binäre Wechselwirkungen vermengt werden, jedoch ist es meist möglich, hier nur solche zu wählen, die aufgrund der Definition der Parameter gemäß Kap. 4.1.5 auszuschließen sind.

#### 4.6.2.2 Ermittlung von Ausgleichsfunktionen ersten und zweiten Grades

Als Grundlage für die Anpassung einer Ausgleichsfunktion sollte in jedem Fall ein vollständiger Teilversuchsplan ausgeführt werden, d. h. die Zahl der Versuche sollte einer Potenz von Zwei entsprechen. Andernfalls ist die Orthogonalität der Wirkungen nicht mehr gegeben und die statistische Auswertung wird erheblich erschwert. Da die Zahl der Versuche i. d. R. größer ist als die der als vorhanden angenommenen Wirkungen, bietet sich damit zusätzlich die Möglichkeit zur Bestimmung des mittleren Simulations- und Anpassungsfehlers. Die Anpassung der Koeffizienten ist in jedem Fall durch lineare, multiple Regressionsverfahren nach dem Prinzip der Quadratsummenminimierung möglich. Die verbleibende Varianz, die nicht durch die Regression wiedergegeben werden kann, ist auf die genannten Fehler zurückzuführen.

Eine Unterscheidung zwischen dem statistisch verteilten Simulationsfehler und einem systematischen Anpassungsfehler ist nur möglich, wenn ersterer unabhängig von letzterem durch Wiederholungsversuche – wie beschrieben unter minimaler Variation der Eingangsgrößen – ermittelt wird. Dies geschieht vorzugsweise am Mittelpunkt des Planes, also für  $x_i = 0$ .

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass es durch das beschriebene Vorgehen möglich ist, eine allgemeine lineare Ersatzfunktion der Form

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N a_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j \quad (4-68)$$

zu bestimmen, die das Verhalten der wahren Zielfunktion sicherlich wesentlich zuverlässiger wiedergeben kann als z. B. Ansatz nach Gl. 4-67, der keine Wechselwirkungsparameter enthält. Allerdings ist er ebenso wenig wie jener in der Lage, ein lokales, nicht durch explizite Nebenbedingungen bestimmtes, unbeschränktes Optimum wiederzugeben. Dies ist bekanntlich nur durch Funktionen zweiten oder höheren Grades möglich. Hierzu kann der lineare Ansatz nach Gl. 4-68 durch zusätzliche quadratische Glieder zu einem „central composite design“ erweitert werden:

$$\begin{aligned} Y &= a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^N a_{i,i} \cdot x_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N a_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j = \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N a_{i,j} \cdot x_i \cdot x_j \end{aligned} \quad (4-69)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_{i,j}$  der quadratischen Glieder benötigt man zusätzlich zu dem (ganz oder teilweise ausgeführten) faktoriellen Versuchsplan Funktionswerte am Mittelpunkt des Planes (mindestens einen, zum Zwecke der Fehlerabschätzung sind u. U. mehrere sinnvoll, s. o.) sowie an  $2N$  weiteren Punkten, die auf den Koordinatenachsen im Abstand  $\pm b$  vom Ursprung liegen, d. h. jeweils bei  $x_i = \pm b$ ,  $x_{j \neq i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Um auch hier die Orthogonalität aller zu bestimmenden Koeffizienten sicherzustellen, muss  $b$  dabei in Abhängigkeit von den jeweiligen Versuchsanzahlen für den faktoriellen (Teil-)Plan  $N_F$ , die Punkte auf den Achsen,  $N_A = 2N$ , sowie die Mittelpunktversuche  $N_0$  wie folgt gewählt werden:

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{(N_F + N_A + N_0) \cdot N_F} - N_F \right)} \quad (4-70)$$

KÜHL ET AL. (1999) erläutern diese Vorgehensweise am Beispiel der Optimierung einer Vuilleumier-Wärmepumpe. Dabei wurden die fünf Parameter der Totraumverteilung ( $x_1, \dots, x_5$ ) wie in Kap. 4.1.4.2 angegeben definiert. Da wegen der zusätzlichen konstruktiven Randbedingungen im Bereich der Wärmeübertrager dort keine weiteren Freiheitsgrade mehr verblieben, traten lediglich noch sechs weitere lokale Parameter zur Beschreibung der beiden Regeneratoren ( $x_6, x_7, x_8$  bzw.  $x_9, x_{10}, x_{11}$ ) hinzu, und es ergab sich die verhältnismäßig niedrige Zahl  $N = 11$ . Aufgrund der in Kap. 4.1.5 dargelegten Überlegungen konnten dabei zumindest binäre Wechselwirkungen zwischen den lokalen Parametern des heißen und denen des kalten Regenerators a priori ausgeschlossen werden.

Damit reduziert sich die Gesamtzahl der zu bestimmenden Koeffizienten für einen Ansatz gemäß Gl. 4-69 auf  $1 + 11 + 11 \cdot 12 / 2 - 3 \cdot 3 = 69$ . Formal würde also bereits mit einem zu  $1/32$  ausgeführten faktoriellen Plan zuzüglich der 22 axialen Punkte und eines Mittelpunktversuches, d. h. mit  $64 + 22 + 1 = 89$  Funktionswerten, genügend Information zu deren Bestimmung bereitgestellt. Allerdings setzt dies voraus, dass es gelingt, die defining contrasts so zu wählen, dass lediglich die 9 ausgeschlossenen Wechselwirkungen mit anderen Haupt- oder Wechselwirkungen vermengt werden. Dies war in dem dargestellten Beispiel nicht der Fall und ist generell als schwierig zu bezeichnen. Aus diesem Grunde und um zusätzlich die Datenbasis zu vergrößern, wurde daher entsprechend Tabelle 4-5 ein Teilversuchsplan mit  $P = 4$ , also mit 128 Punkten, ausgeführt. Eine multiple Regression lieferte dann als Ergebnis

$$a_0 = 0.2822 ; (a_i)^T = (21.94 \quad \underline{-0.32} \quad 16.64 \quad \underline{-10.12} \quad 1.14 \quad \underline{-10.20} \quad \underline{-8.01} \quad 6.71 \quad \underline{-4.94} \quad \underline{-4.91} \quad 1.54) \cdot 10^{-4} ;$$

$$(a_{i,j}) = \begin{pmatrix} 5.93 & \underline{0.09} & 4.67 & \underline{-0.86} & 4.29 & 0.11 & 0.03 & -0.19 & -0.29 & -0.09 & -0.02 \\ & 1.13 & -0.34 & \underline{0.10} & 0.05 & -0.02 & -0.05 & 0.02 & -0.12 & -0.04 & -0.09 \\ & & 2.68 & -0.04 & 2.42 & -0.24 & 0.06 & -0.05 & -0.12 & -0.13 & -0.04 \\ & & & 1.07 & 0.14 & 1.87 & 1.13 & \underline{-1.23} & -0.08 & 0.11 & 0.08 \\ & & & & 1.56 & -0.05 & 0.25 & -0.09 & 1.88 & 0.76 & \underline{-1.06} \\ & & & & & 3.27 & 2.68 & \underline{-3.01} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 2.01 & \underline{-2.30} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1.10 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 2.80 & 2.34 & \underline{-3.11} \\ & & & & & & & & & 1.21 & \underline{-1.69} \\ & & & & & & & & & & 1.30 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \quad (4-71).$$

Zusätzlich wurde durch 22 weitere Mittelpunktversuche der statistische Fehler abgeschätzt. Auf dieser Basis konnte die Signifikanz der erhaltenen Koeffizienten im Falle der durch Fettschrift hervorgehobenen Werte mit einem Vertrauensbereich von 90% nachgewiesen werden. Offensichtlich sind damit neben den bereits ausgeschlossenen noch weitere binäre Wechselwirkungen nicht nachweisbar. Allerdings ist in einigen Fällen, insbesondere bei dem Koeffizienten  $a_2$ , der eine zweifellos vorhandene Hauptwirkung beschreibt, von sog. verdeckten Wirkungen auszugehen. Aufgrund physikalischer Überlegungen muss dies nach KÜHL ET AL. (1999) zumindest für die unterstrichenen Zahlenwerte angenommen werden.

Dennoch erkennt man an diesem Beispiel, dass es nach einmaliger Ausführung eines solchen Versuchsplanes und anschließender Regression durchaus möglich ist, dass sich die Zahl der als signifikant anzunehmenden Wechselwirkungen auch über die anfänglichen Annahmen hinaus reduziert. Damit besteht die Möglichkeit, den Rechenaufwand für weitere, nachfolgende Optimierungsschritte zu verringern.

Allerdings setzt dies die Auswahl von speziell für den jeweiligen Einzelfall geeigneten defining contrasts voraus. Dies ist nicht ohne weiteres automatisierbar, zumal stets die Gefahr besteht, dass verdeckte Wirkungen nicht als solche erkannt werden. Es stellt sich damit die Frage, ob der Aufwand für einen interaktiven Eingriff des Anwenders durch die mögliche Rechenzeiterparnis aufgewogen wird. Angesichts der laufenden Steigerungen der verfügbaren Rechenkapazitäten ist sie vermutlich bereits jetzt in den meisten Fällen zu verneinen.

Auch wenn bis zur endgültigen Ermittlung des Optimums erfahrungsgemäß ca. drei derartige Versuchspläne mit (gemäß Tabelle 4-5 im Falle  $N > 17$ ) jeweils 256 berechneten Punkten zuzüglich einer vergleichsweise geringen Zahl von Axial- und Mittelpunktwerten aufgestellt und ausgewertet werden müssen, ist die Rechenzeiterparnis im Vergleich zu dem hierarchischen Simplex-Verfahren, dass in solchen Fällen mehrere Tausend Funktionsaufrufe benötigen würde, erheblich.

#### 4.6.2.3 Unbeschränkte Optimierung auf der Basis der Ausgleichsfunktion

Wie bereits aus dem zuvor Gesagten implizit hervorgeht, führt die einmalige Anwendung des beschriebenen Verfahrens i. d. R. noch nicht zum Ziel, es sei denn, der Startpunkt der Optimierung liegt bereits in unmittelbarer Nähe des Optimums. Schließlich ist die angepasste Ersatzfunktion auch bei Annahme der vergleichsweise komplexen Struktur gemäß Gl. 4-69 lediglich eine vereinfachte, lokale Approximation der wahren Zielfunktion, die nur im Bereich des für die Regression verwendeten Versuchsplanes gilt. Inwieweit sie über diesen Bereich hinaus extrapolierbar ist, muss im Rahmen der anschließenden Auswertung geprüft werden.

Die Struktur von Gl. 4-69 bedingt zwar, dass stets genau ein stationärer Punkt existiert, an dem der Gradient verschwindet. Insbesondere zu Beginn der Optimierung ist jedoch damit zu rechnen, dass sich dieser Punkt weit außerhalb des angepassten Bereiches befindet und deshalb nicht ohne weiteres für eine Annäherung an das tatsächliche Optimum genutzt werden kann. Vielmehr stellt man in solchen Fällen meist fest, dass die Auswertung der wahren Zielfunktion für diesen Punkt sehr schlechte Funktionswerte liefert, oder es tritt sogar der Fall ein, dass sich dieser Punkt in physikalisch unrealistischen Bereichen befindet und eine Auswertung der Zielfunktion nicht möglich ist. Darüber hinaus ist in solchen Fällen keineswegs gesichert, dass der stationäre Punkt auch die notwendige Bedingung für ein Minimum erfüllt, denn die Hesse-Matrix ist nicht immer positiv definit, und es liegt daher u. U. lediglich ein Sattelpunkt vor. Dies ist für die wahre Zielfunktion auszuschließen. Somit kommt hier zum Ausdruck, dass der gewählte Ansatz nach Gl. 4-69 trotz der verhältnismäßig hohen Zahl von Koeffizienten deren Verhalten nur sehr eingeschränkt wiedergeben kann, denn die Hesse-Matrix ist für Funktionen zweiten Grades eine Konstante, die im Fall von Gl. 4-69 durch

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N} \\ a_{1,2} & 2 a_{2,2} & a_{2,3} & & a_{2,N} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 2 a_{3,3} & & a_{3,N} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{1,N} & a_{2,N} & a_{3,N} & & 2 a_{N,N} \end{pmatrix} \quad (4-72)$$

gegeben ist. Sie gilt demnach nur für den Bereich der Anpassung und ist nicht in der Lage, das u. U. abweichende Verhalten der Zielfunktion in der Nähe des wahren Optimums mit abzubilden. Es wäre insofern ein grundsätzlicher Fehler, aufgrund der erhaltenen lokalen Approximation einen einzelnen – möglicherweise sehr großen – Optimierungsschritt unmittelbar zu deren

stationärem Punkt auszuführen. Vielmehr sollte – ausgehend vom Zentrum des Versuchsplanes – in kleinen Schritten vorgegangen werden, wobei laufend durch Auswertung der wahren Zielfunktion zu prüfen ist, inwieweit die Approximation noch verwendbar ist.

Die einfachsten Methoden dieser Art (z. B. die bekannte Box-Wilson-Methode) werten hierzu lediglich den Gradienten der Ersatzfunktion im Zentrum des Planes aus und werden dem tatsächlichen Informationsgehalt der hier verwendeten Funktion nicht gerecht. Daher wird hier stattdessen die auch von BANDERMANN (1972) vorgeschlagene Kammlinienanalyse nach HOERL (1959) verwendet, die die Ersatzfunktion in wesentlich umfassenderer Form auswertet.

Hierzu wird statt des stationären Punktes der Ersatzfunktion im  $\mathfrak{R}^N$  zunächst das Minimum in einem Unterraum der Dimension  $N-1$  gesucht, der durch die Nebenbedingung

$$g_0(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i^2 - R^2 = 0 \quad (4-73)$$

definiert ist. Anschaulich ausgedrückt handelt es sich hier um die (Hyper-)„Oberfläche“ einer  $N$ -dimensionalen Kugel im  $\mathfrak{R}^N$ , deren Mittelpunkt mit dem des Versuchsplanes übereinstimmt. Wählt man den (hier dimensionslosen) „Radius“  $R$  im Bereich von Eins oder darunter, so liegt dieser Unterraum im Bereich des Versuchsplanes und somit auch im Gültigkeitsbereich der angepassten Ersatzfunktion. Die Bedingung für einen Extremwert lautet dann

$$[\mathbf{H} - \lambda_0 \cdot \mathbf{I}] \cdot \bar{x} = -\bar{a} \quad (4-74)$$

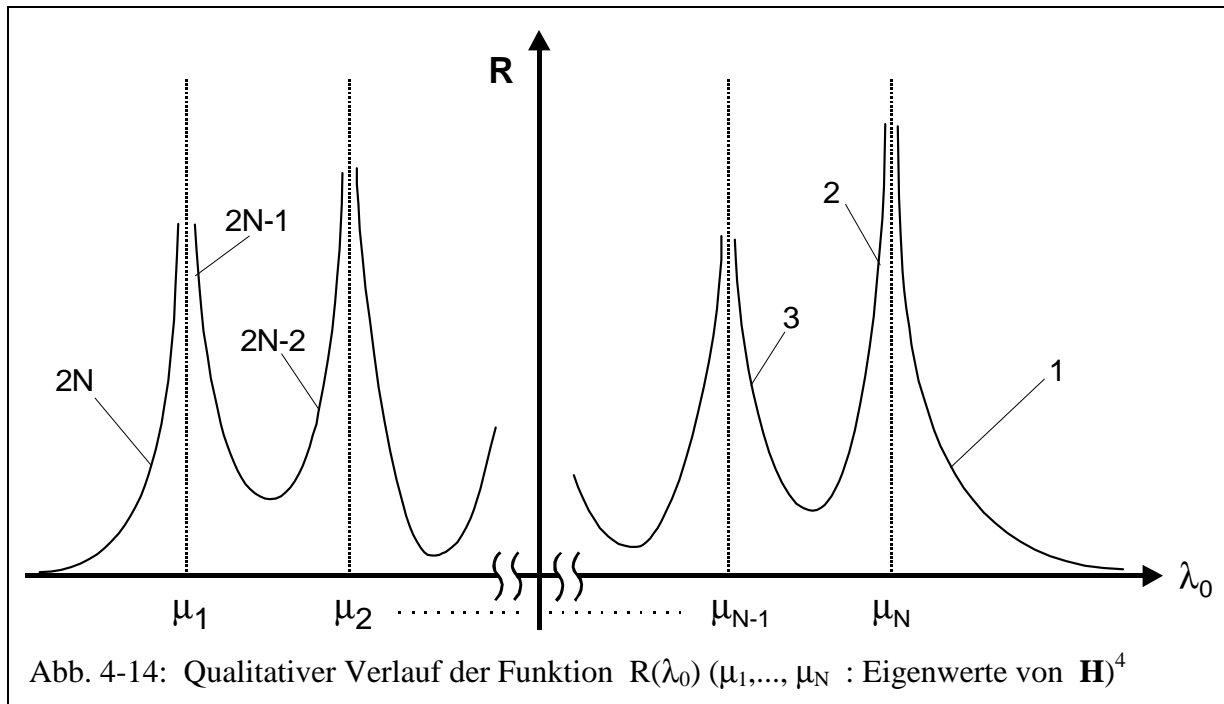
mit  $\bar{a} = (a_i) = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N)^T$

und  $\lambda_0$  als Lagrange'schem Multiplikator. Zusätzlich ist dabei Gl. 4-73 zu erfüllen. Für einen gegebenen Wert von  $R$  ist die Lösung dieses Gleichungssystems bezüglich  $\lambda_0$  durch eine einfache Iteration, z. B. mit Hilfe eines eindimensionalen Quasi-Newton-Verfahrens, möglich. Für den gewählten Startwert lässt sich zunächst das lineare Gleichungssystem 4-74 für  $\bar{x}$  lösen. Die Schätzung für  $\lambda_0$  ist dann solange iterativ zu korrigieren, bis die erhaltene Lösung für  $\bar{x}$  auch Gl. 4-73 erfüllt. Zu beachten ist dabei allerdings, dass es stets mehrere Lösungen gibt, da eine Funktion des in Gl. 4-69 angegebenen Typs unter der Nebenbedingung nach Gl. 4-73 bis zu  $2N$  lokale Extremwerte aufweisen kann.

Um hier die Lösung für das absolute Minimum (unter dieser Nebenbedingung) zu ermitteln, eignet sich die folgende Betrachtung: Grundsätzlich weist Gl. 4-74 für jedes  $\lambda_0$  eine eindeutige Lösung  $\bar{x}$  auf, so dass auch eine eindeutig bestimmte Funktion  $R(\lambda_0) = |\bar{x}(\lambda_0)|$  für alle reellen  $\lambda_0$  existiert. Andererseits wird für  $R \rightarrow \infty$  die rechte Seite von Gl. 4-74 unbedeutend, und man erkennt, dass sich dann als Lösungen für  $\lambda_0$  im Grenzfall die Eigenwerte  $\mu_i$  der Hesse-Matrix ergeben, während die entsprechenden Lösungen für  $\bar{x}$  die Richtung der zugehörigen Eigenvektoren annehmen. Wegen der Symmetrie der Hesse-Matrix sind ihre  $N$  Eigenwerte sämtlich reell, und die Funktion  $R(\lambda_0)$  weist somit stets  $N$  Polstellen auf.

Auch wenn diese Grenzfallbetrachtung für die eigentliche Optimierung unwesentlich ist, lässt sich mit ihrer Hilfe der grundsätzliche Verlauf der Funktion  $R(\lambda_0)$  vorhersagen. Er ist in Abb. 4-14 qualitativ dargestellt. Offensichtlich existieren für endliche Werte von  $R$  i. a.  $2N$  Lösungen für  $\lambda_0$ ; lediglich für  $R \rightarrow 0$  wird die Anzahl schließlich geringer.

Im allgemeinen Fall einer nicht positiv definiten Hesse-Matrix sind die Vorzeichen der Eigenwerte unterschiedlich. In jedem Fall lässt sich jedoch zeigen, dass das absolute Minimum



dann gefunden wird, wenn  $\lambda_0$  kleiner als der kleinste Eigenwert gewählt wird, d. h. wenn die Lösung im Bereich des Kurvenastes gesucht wird, der in Abb. 4-14 mit  $2N$  bezeichnet ist.

Die Auswertung der Ersatzfunktion erfolgt nun in dem hier dargestellten Verfahren in der Weise, dass zunächst für  $R = 0,5$ , also für einen eindeutig innerhalb des Versuchsplanes und damit im Gültigkeitsbereich der Anpassung liegenden Wert, der Ortsvektor  $\bar{x}$  des absoluten Minimums nach dem beschriebenen Verfahren bestimmt und dann die wahre Zielfunktion an diesem Punkt ausgewertet wird. Im Normalfall erhält man auf diese Weise eine Verbesserung gegenüber dem Funktionswert am Mittelpunkt des Planes (d. h. bei  $R = 0$ ).

In der Folge wird nun  $R$  in Schritten von  $0,5$  erhöht und die beschriebene Auswertung wiederholt. Dabei wird die Kammlinie der absoluten Minima verfolgt, und es kommt i. d. R. zu weiteren Verbesserungen der wahren Zielfunktion auch über den gesicherten Gültigkeitsbereich der Anpassung hinaus. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis schließlich eine Verschlechterung der Werte festgestellt wird. Dies kann entweder bedeuten, dass das unbeschränkte Optimum der Zielfunktion tatsächlich mit befriedigender Genauigkeit gefunden und im weiteren Verlauf der Kammlinie überschritten wurde, oder – dies ist zu Beginn der Optimierung der wahrscheinlichere Fall – dass der Gültigkeitsbereich der lokal an den Versuchsplan angepassten Ersatzfunktion so weit verlassen wurde, dass der Verlauf der Kammlinie unzuverlässig ist. In jedem Fall wird die Lage des neuen Optimums durch Anpassung eines Ausgleichspolynoms an die entlang der Kammlinie bestimmten Funktionswerte näherungsweise ermittelt, und dieser Punkt wird daraufhin als Mittelpunkt eines neuen Versuchsplanes gewählt.

Das Verfahren wird abgebrochen, wenn bei der Verfolgung der Kammlinie ein Optimum im gesicherten Gültigkeitsbereich der Approximation, also bei  $R < 1$ , möglicherweise auch direkt bei  $R = 0$ , festgestellt wird. In diesem Fall ist davon auszugehen, dass das wahre, unbeschränkte Optimum der Zielfunktion mit hinreichender Genauigkeit gefunden wurde.

<sup>4</sup> Susanto, A.: Entwicklung eines Optimierungsverfahrens für regenerative Gaskreisprozesse unter Einsatz eines die Problemstruktur berücksichtigenden Regressionsverfahrens. Studienarbeit, Universität Dortmund, Lehrstuhl für Thermodynamik 1998

#### 4.6.2.4 Berücksichtigung expliziter Nebenbedingungen

Das beschriebene Verfahren bietet gegenüber dem in Kap. 4.6.1 vorgestellten nicht nur den Vorteil einer kürzeren Rechenzeit, sondern auch die Möglichkeit, explizite Gleichungs- oder Ungleichungsnebenbedingungen ohne nennenswerte Schwierigkeiten – wie z. B. eine Verschlechterung der Konvergenz – mit einzubinden. Besonders einfach gestaltet sich dies, wenn sich die Nebenbedingungen zumindest näherungsweise als lineare Funktionen der Optimierungsparameter formulieren lassen, d. h. in der Form

$$g_k(\bar{x}) = b_{k,0} + \bar{b}_k^T \cdot \bar{x} = 0 \quad ; \quad \bar{b}_k = (b_{k,1} \quad b_{k,2} \quad \dots \quad b_{k,N})^T \quad (4-75).$$

Dies ist häufig bei geometrisch bedingten Abhängigkeiten zwischen den Parametern der Fall, die dann allerdings auch unmittelbar bei deren Definition berücksichtigt werden können, womit man dann wiederum ein unbeschränktes Optimierungsproblem mit reduziertem  $N$  erhält. Ebenso stellt man jedoch auch bei Nebenbedingungen, die erst nach erfolgter Simulationsrechnung unter Verwendung der Zielfunktion oder sonstiger, parallel zu dieser erhaltener Ergebnisgrößen (z. B. der Heizleistung) auswertbar sind, in vielen Fällen nahezu lineare Abhängigkeiten von den Parametern fest, so dass zumindest im Gültigkeitsbereich der lokalen Approximation der Zielfunktion durch Gl. 4-69 auch die Nebenbedingungen mittels linearer Regression durch Gl. 4-75 angenähert werden können.

Wird bei der Verfolgung der Kammlinie (oder auch bereits zu Beginn des Optimierungsschrittes, d. h. für  $R = 0$ ) eine Nebenbedingung  $k$  verletzt, so erhöht sich der Rang des linearen Gleichungssystem 4-74 jeweils um Eins, und es tritt als weitere zu bestimmende Variable der entsprechende Lagrange'sche (bzw. Kuhn-Tucker'sche) Multiplikator  $\lambda_k$  hinzu, und es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 a_{1,1} - \lambda_0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N} & -b_{1,1} & -b_{2,1} & \dots & -b_{E,1} \\ a_{1,2} & 2 a_{2,2} - \lambda_0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,N} & -b_{1,2} & -b_{2,2} & \dots & -b_{E,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 2 a_{3,3} - \lambda_0 & \dots & a_{3,N} & -b_{1,3} & -b_{2,3} & \dots & -b_{E,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,N} & a_{2,N} & a_{3,N} & \dots & 2 a_{N,N} - \lambda_0 & -b_{1,N} & -b_{2,N} & \dots & -b_{E,N} \\ \hline b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,N} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{E,1} & b_{E,2} & b_{E,3} & \dots & b_{E,N} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_E \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \\ b_{1,0} \\ b_{2,0} \\ \vdots \\ b_{E,0} \end{pmatrix} \quad (4-76).$$

Hier ist zu beachten, dass die Optimierung bei  $E$  aktiven Nebenbedingungen auf einen Unterraum der Dimension  $N-E$  beschränkt ist, und dass die Kammlinienanalyse in der beschriebenen Form hier nicht ohne weiteres unter Verwendung der ursprünglichen  $N$  unabhängigen Parameter fortgeführt werden kann. Die Funktion  $R(\lambda_0)$  weist in diesem Unterraum einen abweichenden Verlauf auf, was allein daran erkennbar ist, dass sie nunmehr nur noch  $N-E$  Polstellen aufweisen kann. Es stellt sich jedoch heraus, dass die erweiterte Matrix in Gl. 4-76 auf grund ihrer teilweise symmetrischen, teilweise schief-symmetrischen Struktur nur noch  $N-E$  reelle und dafür  $E$  Paare konjugiert komplexer Eigenwerte besitzt, und dass die reellen Eigenwerte weiterhin mit den Polstellen der Funktion  $R(\lambda_0)$  identisch sind.

Die iterative Bestimmung von  $\lambda_0$  kann daher auch mit der erweiterten Gleichung 4-76 in der zuvor beschriebenen Weise erfolgen, wenn die Werte auf den Bereich unter dem kleinsten reellen Eigenwert der Matrix beschränkt werden. Dabei kann im Falle von Ungleichungsnebenbedingungen laufend an den Vorzeichen der simultan bestimmten Multiplikatoren  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, E$ ) geprüft werden, ob diese weiterhin aktiv sind.

Bei Verletzung einer weiteren Nebenbedingung wird der zugehörige Wert von  $R$  iterativ bestimmt und das Gleichungssystem wie beschrieben erweitert. Anschaulich ausgedrückt weist die Kammlinie an einem solchen Punkt einen „Knick“ auf und verläuft von dort an in einer veränderten Richtung in einem Unterraum mit um Eins verminderter Dimension. Ihre Verfolgung ist in der beschriebenen Form jedoch weiterhin möglich.

### 4.6.3 Vergleich der Optimierungsverfahren anhand eines Beispiels

Im Rahmen des von HEIKRODT UND HECKT (1999) dokumentierten Entwicklungsprojektes wurde als weiterer Schritt in Richtung auf eine serienmäßig herstellbare Vuilleumier-Wärmepumpe die im Anhang 4.5 dargestellte Maschine konzipiert, die im Gegensatz zum Vorgängermodell (Anhang 4.4) die geforderten 20 kW Heizleistung im Maximallastfall durch das Konzept der „integrierten Bivalenz“ erreicht. Darunter verstehen die Autoren eine im Projekt entwickelte Vorrichtung, mit der die Luftvorwärmung im Brenner bei maximaler Heizleistungsanforderung abgeschaltet wird. Als Folge hiervon wird zusätzliche Wärme direkt vom Brenner über den Rauchgaswärmeaustauscher in den Heizkreis eingekoppelt.

Da dieser Wärmestrom an der Wärmepumpe vorbeigeführt wird, sinkt in diesem Betriebszustand zwar die Leistungszahl des Gesamtsystems, jedoch wirkt sich dies auf die in Anlehnung an DIN 4702 Teil 8 bestimmte Jahresheizzahl wegen seines statistisch seltenen Auftretens nur sehr geringfügig aus. Andererseits konnte auf diese Weise die Maximalleistung der eigentlichen Wärmepumpe auf ca. 14 kW reduziert werden, was erhebliche Einsparungen in Bezug auf die Baugröße und damit letztlich auf die Herstellungskosten nach sich zieht.

Für die Festlegung der wesentlichen Auslegungsgrößen wurde auch hier – ähnlich wie in dem Beispiel gemäß Abb. 4-12 – ein Kennlinienfeld erstellt, in dem sowohl Druck als auch Drehzahl schrittweise variiert wurden. Es ist einschließlich der für die gewählten Simulationen erhaltenen Ergebnisse und der durch Regression erhaltenen Ausgleichskurven in Abb. 4-15 dargestellt.

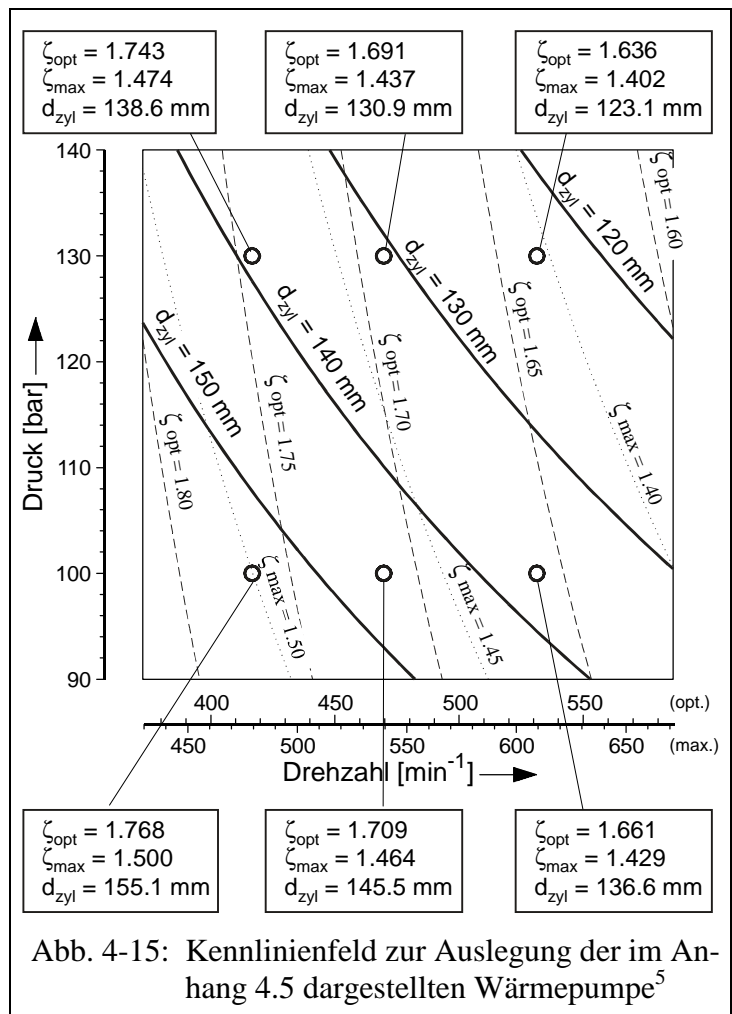
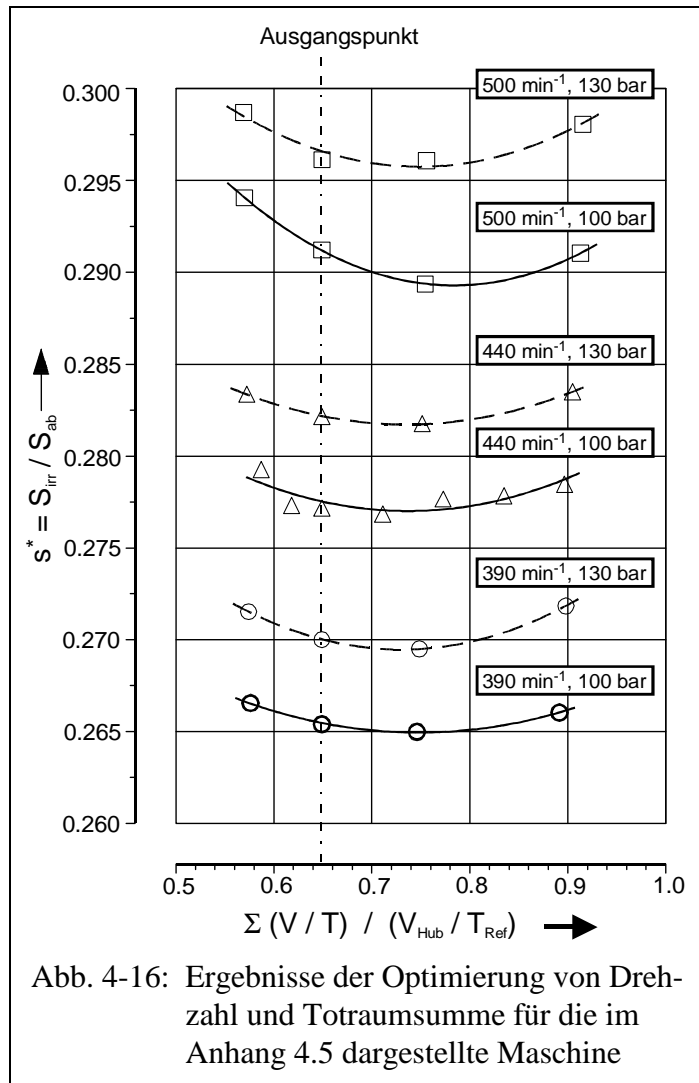


Abb. 4-15: Kennlinienfeld zur Auslegung der im Anhang 4.5 dargestellten Wärmepumpe<sup>5</sup>

Für jede der sechs Kombinationen aus Drehzahl und Druck wurde zunächst eine Optimierung mit dem verfügbaren und erprobten Simplexverfahren gemäß Kap. 4.6.1 durchgeführt. Dabei war die Zahl der Parameter aufgrund konstruktiver Nebenbedingungen bezüglich der Wärmeübertragerauslegung ebenfalls auf insgesamt 11 beschränkt (5 für die Totraumverteilung, jeweils 3 für die Unteroptimierung der Regeneratoren)<sup>5</sup>.

Wegen der positiven Erfahrungen mit der Absenkung der temperaturbezogenen Totraumsumme gemäß Abb. 4-13 wurde dieser Weg hier konsequent weiter verfolgt, wobei zwischenzeitlich entwickelte, neue konstruktive Konzepte für die Wärmeübertrager, insbesondere der Einsatz von kostengünstig im Strangpressverfahren herstellbaren Aluminiumprofilen mit sehr kleinen hydraulischen Durchmessern im Bereich von ca. 1 mm, zusätzliche Möglichkeiten zur Einsparung von Totvolumen eröffneten. Eine abschließende Optimierung des Parameterpaares Drehzahl und Totraumsumme zeigte jedoch, dass der anfänglich gewählte Wert von 0,65 leicht nach oben auf ca. 0,75 korrigiert werden musste (Abb. 4-16). Hierfür wurden hier jeweils mindestens vier Punkte ermittelt, wobei das Minimum offenbar bei drei liegt. Bei jeweils ca. 2200 – 2500 Funktionsaufrufen pro Punkt wird damit der beträchtliche rechentechnische Aufwand für die Erstellung des Kennlinienfeldes in Abb. 4-15 deutlich, der wegen der zwischenzeitlich erforderlichen interaktiven Eingriffe des Anwenders zu Bearbeitungszeiten im Bereich von mehreren Tagen bis zu einigen Wochen führen können.

Mit dem zeitgleich entwickelten lokalen Approximationsverfahren können die Einzeloptimierungen der genannten 11 Parameter unter Auswertung von jeweils drei Teilversuchsplänen mit  $P = 4$  gemäß Tabelle 4-5 mit ca. 500 Funktionsaufrufen reproduziert werden. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, nach der in Kap. 4.6.2.4 beschriebenen Methode die Parameter Drehzahl und Totraumsumme mit einzubeziehen. Dies führt dann zwar mit  $N = 13$  nach Tabelle 4-5 mindestens zu einer Verdoppelung der Zahl der Funktionsaufrufe, aber es tritt dennoch im Vergleich zu dem Verfahren gemäß Abb. 4-16 eine weitere Rechenzeiterparnis ein.



<sup>5</sup> Kühl, H.-D., Pfeffer, Th., Walther, Ch. und Schulz, S.: Abschlußbericht zum Unterauftrag der Universität Dortmund (Lehrstuhl für Thermodynamik) im BMBF-Forschungsprojekt „Regeneratives Heizen und Kühlen II“ (Förder-KZ. 0326947E), unveröffentlicht, in Auszügen wiedergegeben von HEIKRODT UND HECKT (1999)



## 5 Konstruktive Optimierung unter Kostenaspekten

### 5.1 Die Gestaltung der Wärmeübertrager

#### 5.1.1 Wärmeaustausch mit Wärme- und Kälte-trägerkreisläufen

Wie bereits in Kap. 1 deutlich wurde, eignen sich regenerative Kreisprozesse besonders für den theoretisch reversiblen, isothermen Wärmeaustausch mit Reservoirs konstanter Temperatur. Um auch in der Praxis befriedigende Leistungszahlen zu erreichen, muss daher besonders im Bereich der Wärmepumpen- und Kältetechnik dieser Idealfall möglichst gut angenähert werden, da andernfalls der Optimierungsaufwand für den eigentlichen Prozess, der Gegenstand der bisherigen Betrachtungen war, durch die Verluste bei äußeren Wärmeübertragung relativiert oder gar zunichte gemacht wird. Aus prinzipiellen thermodynamischen Gründen verlangt dabei die Wärmeübertragung bei tiefen Temperaturen besondere Aufmerksamkeit, und wegen des oft verhältnismäßig geringen Temperaturhubes gilt dies ebenso auch für Wärmepumpenanwendungen im umgebungsnahen Temperaturbereich. Als generelle Regel sollten die Grädigkeiten bei der Wärmeübertragung hier auf wenige Kelvin beschränkt werden.

Die konstruktive Gestaltung der in diesem Temperaturbereich eingesetzten Wärmeaustauscher unterliegt, wie im vorhergehenden Kapitel deutlich wurde, bereits einer Reihe von prozesseitigen Anforderungen. Hier ist neben den auch in anderen Bereichen relevanten Kriterien einer geringen Grädigkeit sowie eines ebenfalls geringen Strömungsdruckverlustes besonders die Notwendigkeit zur Minimierung des Totvolumens zu nennen. Sie führt in Verbindung mit den Anforderungen an die Wärmeübertragungsfläche zwangsläufig zu geringen hydraulischen Durchmessern, was dann i. d. R. eine fertigungstechnisch aufwändige Gestaltung nach sich zieht. Die prozesseitige Kompaktheit erschwert weiterhin den Wärmeaustausch mit großen Volumenströmen, so dass insbesondere eine direkte Anbindung an Gasströme nicht ohne weiteres in verlustarmer Weise realisiert werden kann.

Der unmittelbare Wärmeaustausch mit der Umgebungs- oder Raumluft im Falle von Heizungswärmepumpen-, Kühlungs- oder Klimatisierungsanwendungen ist aus diesem Grunde problematisch, zumal die zusätzliche Notwendigkeit bestünde, die entsprechenden Luftströme zum jeweiligen Standort der Maschine zu führen. Am ehesten gelingt die Lösung dieses Problems wegen der günstigen Oberflächen-Volumen-Verhältnisse im Bereich kleiner Leistungen, wie sie z. B. für gut isolierte Haushaltskühlschränke ausreichend sein können (z. B. MENNINK UND BERCHOWITZ 1994). Auch im Bereich der KFZ-Klimatisierung sind wegen der räumlichen Nähe der entsprechenden Bauteile solche Lösungen denkbar (MAURER ET AL. 1994).

Grundsätzlich besteht das Problem darin, dass die Wärmeübergangskoeffizienten beim Wärmeaustausch mit Gasen unter Atmosphärendruck generell um einige Größenordnungen niedriger liegen als die prozesseitigen, wenn Helium oder Wasserstoff unter hohem Druck als Arbeitsmedien eingesetzt werden. Das Problem der unterschiedlichen Anforderungen an die Größe der Wärmeübertragungsfläche kann gerade im Bereich größerer Leistungen, wie sie zur Gebäudebeheizung oder -klimatisierung benötigt werden, am einfachsten durch Zwischenschaltung eines Wärme- bzw. Kälte-trägermediums gelöst werden, denn so kann der Wärmeaustausch mit den Luftströmen von dem prozessbedingten Zwang zur Minimierung des Totvolumens entkoppelt werden. Darüber hinaus kommt dieses Konzept im Fall von Heizungswärmepumpen den im europäischen Raum verbreiteten Warmwasser-Gebäudeheizungssystemen entgegen und erlaubt auf dem niedrigen, „kalten“ Temperaturniveau ebenso eine vorteilhafte Anbindung an Erdreich- oder Grundwasser-Wärmeaustauscher als Umgebungswärmequelle, die aus thermodynamischer Sicht ohnehin zu bevorzugen sind.

Für den Wärmeaustausch zwischen dem Prozessmedium und externen Wärme- oder Kälte-trägerkreisläufen haben sich in der Vergangenheit besonders Rohrbündel-Wärmeübertrager bewährt. Die Anforderungen an die Druckbeständigkeit können mit dieser Bauart problemlos erfüllt werden, besonders, wenn – wie es auch wegen des geringeren Totvolumens üblich ist – das Prozessmedium durch die Rohre geführt wird. Sie eignet sich besonders für die Einzelfertigung im Falle von Versuchsmaschinen oder Prototypen, ihr Nachteil ist jedoch darin zu sehen, dass sich die Fertigungskosten bei größeren Stückzahlen nicht in dem gleichen Maße senken lassen wie z. B. bei den weniger druckbeständigen Plattenwärmeaustauschern, was u. a. auf Qualitätssicherungsprobleme in der Serienfertigung zurückzuführen ist.

Wegen des besonders hohen Kostendruckes im Bereich der Heizungswärmepumpen, der durch die Konkurrenzsituation zu den technisch weitaus einfacher aufgebauten, herkömmlichen Heizkesselsystemen begründet ist, wurden im Rahmen des bereits mehrfach erwähnten, von HEIKRODT ET AL. (1996) sowie HEIKRODT UND HECKT (1999) dokumentierten Forschungsprojektes besondere Anstrengungen zur Kostenreduktion auch im Bereich der Wärmeaustauscher unternommen. Grundgedanke war es dabei, den Aufwand für die Konfektionierung der eingesetzten Halbzeuge sowie die Zahl Fügeverbindungen, deren absolute Gasdichtheit auch bei hohen Drücken zu garantieren war, zu minimieren. Dies steht im Widerspruch zu den prozesseitigen Anforderungen, die gemäß Kap. 4.5.2 stets zu großen Rohr- bzw. Kanalzahlen mit kleinem hydraulischen Durchmesser führen.

Eine mögliche Lösung ist hier z. B. das Einpressen eines im Querschnitt sternförmigen Profils in ein drucktragendes Mantelrohr entsprechend größeren Durchmessers. Eine numerische Optimierung unter verschiedenen fertigungstechnischen Randbedingungen, die hier nicht im einzelnen dargestellt werden kann<sup>1</sup>, führte dabei zu der in Abb. 5-1 dargestellten Konstruktion, die in dem im Anhang 4.4 dargestellten Baumuster einer 20 kW-Vuilleumier-Heizungswärmepumpe für den Wärmeübertrager unterhalb des heißen Regenerators Verwendung fand.

Die beiden anderen warmen und kalten Wärmeübertrager dieser Maschine unterscheiden sich von ihr lediglich durch eine weitere, dritte Rohrreihe. Die Rippenrohre mit 7,9 mm Innendurchmesser sind serienmäßig verfügbar und bestehen aus einer Kupferlegierung, die eingewalzten Profile, für die die Optimierung eine Sternform mit 10 Stegen als günstigste Lösung ergab, wurden alternativ sowohl aus Aluminium als auch aus Kupfer hergestellt. Im letzteren Fall wurden zwar Wärmedehnungs- und Passungsprobleme reduziert und die Auswahl eines geeigneten Lötverfahrens erleichtert, jedoch wurde wegen des günstigeren Materialpreises auch die Möglichkeit der Fertigung aus Aluminium-Strangpressprofilen weiter verfolgt.

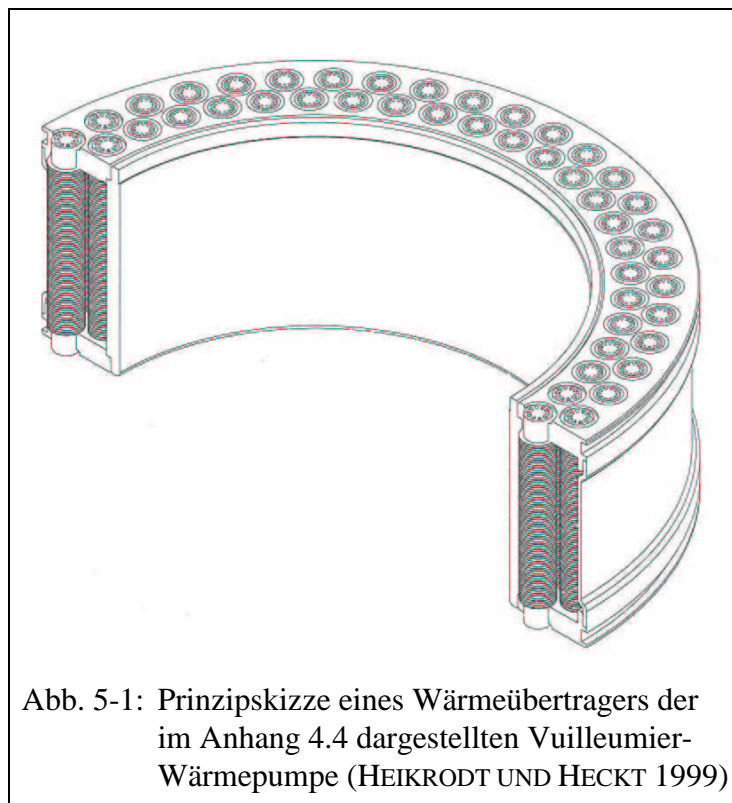
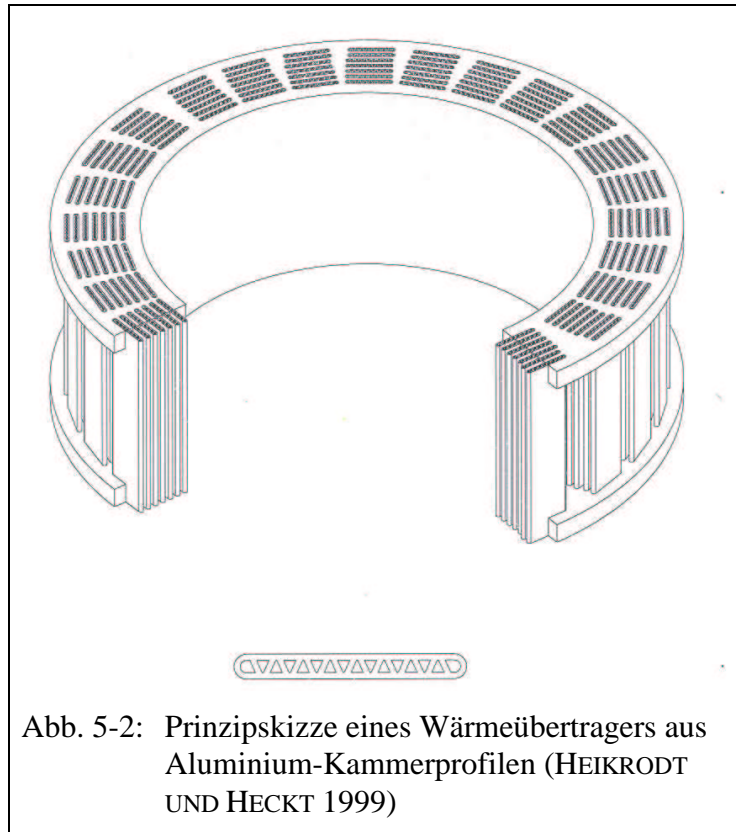


Abb. 5-1: Prinzipskizze eines Wärmeübertragers der im Anhang 4.4 dargestellten Vuilleumier-Wärmepumpe (HEIKRODT UND HECKT 1999)

<sup>1</sup> Bezüglich weiterer Einzelheiten sei auf Kap. 4, S. 154, Anmerkung 5, verwiesen.

Als Ausgangspunkt dienten dabei nach HEIKRODT UND HECKT (1999) die neueren Entwicklungen im Automobilkühler- und -klimaanlagenbau, wo derzeit überwiegend gelötete Aluminiumkonstruktionen verwendet werden. Sie basieren auf Kammerprofilen mit sehr feiner Kanalstruktur, die kostengünstig im Strangpressverfahren hergestellt werden. Ein entsprechender Entwurf für einen Wärmeübertrager ist in Abb. 5-2 wiedergegeben.

Im Vergleich zu Kupfer ist die Verwendung von Aluminium wegen der Korrosionsgefahr als problematisch zu beurteilen. Die besonderen Bedingungen aufgrund der schwellenden Belastung durch den schwankenden Innendruck können auch bei Verwendung von solchen Legierungen zu Korrosionsschäden führen, deren Verwendbarkeit in Medien wie Heizungswasser ansonsten erwiesen ist. HEIKRODT UND HECKT (1999) berichten hier von umfangreichen Versuchsreihen, in denen verschiedene Aluminiumlegierungen mittels Zeitrafferverfahren Ermüdungskorrosionstests unterzogen wurden. Dabei erwies sich die Legierung EN AW 6060 T6 als grundsätzlich geeignet, allerdings stellte sich heraus, dass sehr hohe Anforderungen an die Reinheit und die Oberflächenbeschaffenheit des Materials gestellt werden müssen, die offenbar nicht ohne weiteres gewährleistet werden können. Vor einem Einsatz derartiger Materialien in der Serienfertigung sind daher noch weitere Untersuchungen erforderlich.



### 5.1.2 Kostengünstige Gestaltung von Erhitzerköpfen

Bei allen regenerativen Kreisprozessen, denen ein Antriebswärmestrom bei hoher Temperatur zugeführt werden muss, stellt die Realisierung des hierfür erforderlichen, in der einschlägigen Literatur allgemein als „Erhitzerkopf“ bezeichneten Wärmeübertragers eine besondere Herausforderung dar. Dies ist darauf zurückzuführen, dass zusätzlich zu den im vorhergehenden Kapitel bereits genannten Anforderungen hier eine sehr hohe thermische Bauteilbelastung vorliegt. Sie schränkt die Auswahl verwendbarer Werkstoffe stark ein, zumal die Belastung durch den hohen Innendruck auch hier den Einsatz duktiler, im Druckbehälterbau zugelassener Materialien erfordert. Hier kommen in erster Linie hochlegierte Stähle und Nickelbasislegierungen in Frage, was wiederum die Auswahl an möglichen Herstellungsverfahren, Halbzeugen und Fügeverfahren deutlich reduziert.

Die Vielzahl der simultan zu lösenden Probleme kommt letztlich in einem erfahrungsgemäß stets sehr hohen Preis dieser Maschinenkomponente zum Ausdruck, der oft rund die Hälfte der Gesamtkosten ausmacht (HEIKRODT UND HECKT 1999; S. 89). Es besteht daher bei diesem Bauteil besonderer Anlass, nach kostengünstigen Fertigungsmöglichkeiten zu suchen.

Fein strukturierte Profile ähnlich den in Abb. 5-1 und Abb. 5-2 dargestellten sind aus den hier verwendbaren Materialien nicht mit vertretbaren Kosten herstellbar. Vielmehr sind i. d. R. Rohre mit einigen Millimetern Innendurchmessern die am ehesten verfügbaren Halbzeuge, die demzufolge auch in den meisten bislang bekannten Erhitzerkopfkonstruktionen Verwendung fanden. Hier sei insbesondere auf die umfangreiche Fachliteratur über Stirlingmotoren verwiesen. Gute Übersichten finden sich hier u. a. bei WALKER (1980), READER UND HOOPER (1983), BESCHORNER ET AL. (1984) und SCHIEFELBEIN ET AL. (1996).

Als Fügeverfahren kommt hier in erster Linie das Hochtemperatur-Vakuumlöten in Frage. Die hier aus Kostengründen vorwiegend eingesetzten B-Ni-Lote neigen jedoch zur Ausbildung spröder Phasen, wenn die Lötspaltpoleranzen nicht genau eingehalten werden. Die Außendurchmesser-Toleranzen gezogener Stahlrohre stellen in dieser Hinsicht oft bereits ein Problem dar. Darüber hinaus bilden gewisse zur Stabilisierung dienende Legierungselemente, insbesondere das häufig verwendete Titan, sehr stabile Oxidschichten, die auch im Vakuumlötprozess nicht zuverlässig aufgebrochen werden und die Benetzung des Grundwerkstoffes mit dem Lot behindern können. Dies schränkt die Materialauswahl weiter ein.

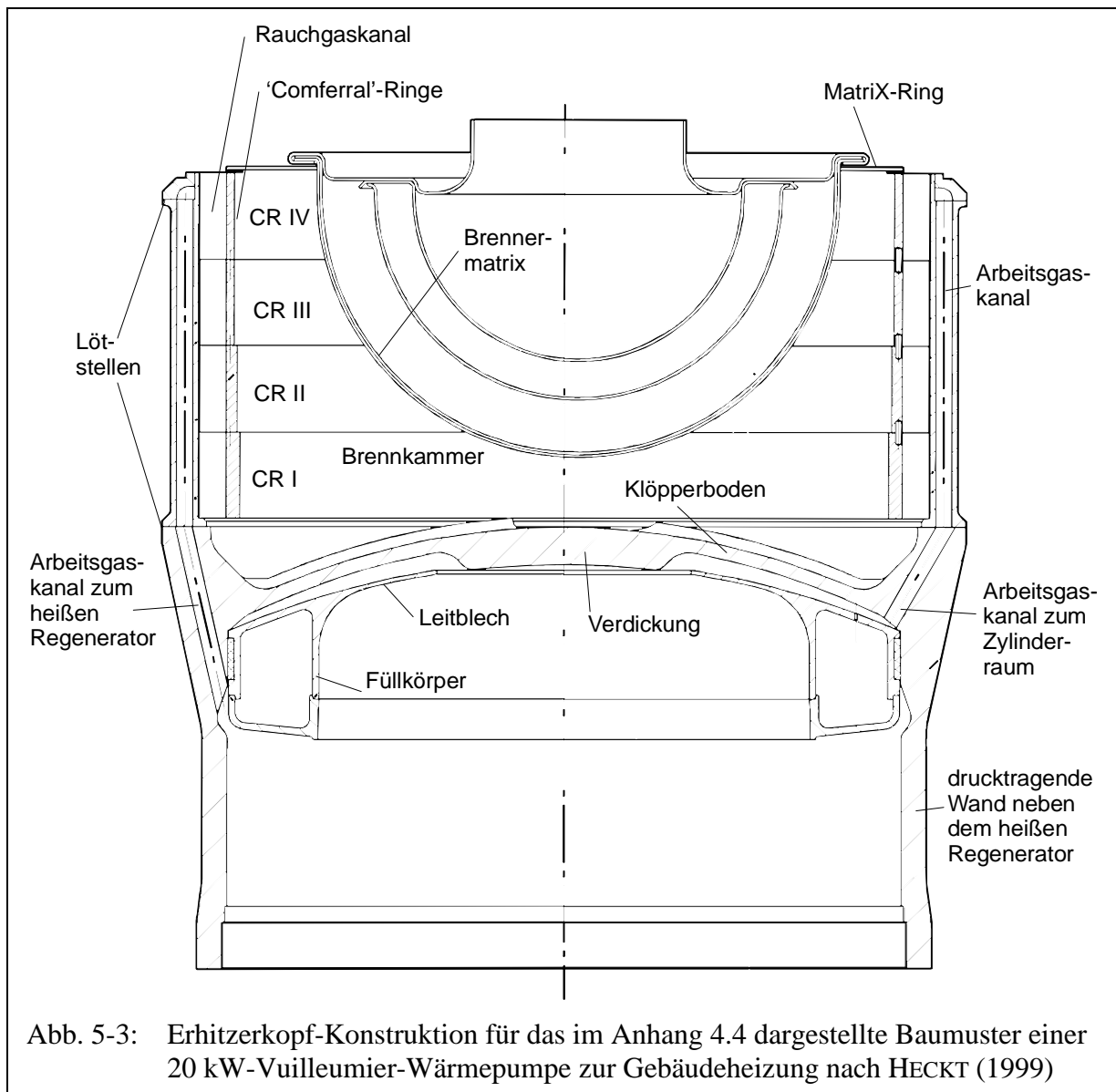
In jedem Fall ist die Herstellung eines derartigen Erhitzerkopfes fertigungstechnisch sehr aufwändig, zumal auch der Lötprozess sehr sorgfältig vorbereitet werden muss. Hinzu kommt der Aufwand für die Herstellung des Zylinder- und Regeneratorgehäuses, die i. d. R. mehrere Arbeitsgänge mit spanenden Fertigungsverfahren beinhaltet. Dies gilt auch für Gusskonstruktionen, zumindest zur Vorbereitung der Löt Nähte und im Bereich von Dichtungen oder sonstigen Fügstellen zu angrenzenden Komponenten. Speziell im Falle von Löt- oder auch Schweißkonstruktionen ist das Kostensenkungspotential bei einer Fertigung größerer Stückzahlen relativ gering. Die große Zahl einzelner Verbindungen, die alle heliumdicht sein müssen und im Falle einer Undichtigkeit nur sehr schwer (wenn überhaupt) nachgearbeitet werden können, stellt unter dem Aspekt der Qualitätssicherung ein kaum lösbares Problem dar. Hohe Ausschussraten treiben dagegen die Herstellungskosten weiter in die Höhe. Aus diesen Gründen wurde schon früh nach Alternativlösungen gesucht.

Eine solche Alternative stellen die sog. Ringspalt-Erhitzerköpfe dar, bei denen auf druckdicht auszuführende Lötverbindungen verzichtet wird. Hier dient der Grundkörper des Zylinderkopfes selbst als Wärmeübertragungsfläche. Auf der Prozessgasseite wird das Medium dabei durch einen Ringspalt zwischen der Druckbehälterwand und einer innen liegenden Zylinderhülse geführt. Sowohl hier als auch auf der Außenseite müssen zur Realisierung des erforderlichen Wärmedurchganges zusätzlich Rippen aufgebracht werden, was bei den hier häufig favorisierten Feingusskonstruktionen leicht möglich ist. Dennoch ist der Anwendungsbereich derartiger Konstruktionen auf Maschinen kleinerer Baugröße und Leistung beschränkt. So konnten daher z. B. die im Anhang 4.2 und 4.3 dargestellten Vuilleumier-Wärmepumpen mit 4 kW Heizleistung noch mit derartigen Erhitzerköpfen ausgestattet werden, während dies bei den größeren Maschinen gemäß Anhang 4.4 und 4.5 wegen des ungünstigeren Oberflächen-Volumen-Verhältnisses und der höheren Leistungsdichte nicht mehr möglich war.

Weiterhin bedingt die Ringspalt-Bauweise eine wenig kompakte Brennerkonstruktion, die in vielen Fällen sogar zu ringförmigen oder halbkugelähnlichen, konkaven Bauformen führte. Der Bereich der höchsten auftretenden Temperaturen erhält so eine verhältnismäßig große äußere Oberfläche, was zu erheblichen Isolationsverlusten führen kann. Zweckmäßiger ist hier eine Konstruktion, bei der die Zone höchster Temperatur zentral im Kernbereich der Gesamtanordnung liegt. Sie wird zudem auch durch das von HOFBAUER UND BORNSCHEUER (1993) entwickelte Matrix<sup>®</sup>-Brenner-Konzept nahegelegt, das, wie schon in Kap. 4.5.1 erwähnt, wegen seiner günstigen Schadstoffemissionswerte eingesetzt werden sollte.

Zum Ausgleich von Wärmespannungen und zur Vermeidung von vorzeitigen Ermüdungsbrüchen sollte das hier als Flammhalter eingesetzte Drahtgewebe möglichst als Halbkugel geformt sein, und es liegt daher nahe, den Brenner zentral anzuordnen und durch eine entsprechende Formgebung des Erhitzerkopfes zu umschließen. Im Falle der im Anhang 4.4 dargestellten Vuilleumier-Heizungswärmepumpe wurde eine solche Konstruktion, die auch unter dem Aspekt einer möglichen kostengünstigen Serienfertigung optimiert ist, von HECKT (1999) entwickelt und im Rahmen des zuvor genannten Projektes experimentell realisiert. Sie ist in Abb. 5-3 im Querschnitt dargestellt.

Ausgangspunkt ist dabei der heiße Zylinder, der mit dem ihn umschließenden, ringförmigen heißen Regenerator in einem gemeinsamen Druckbehälter untergebracht ist. Da der heiße Regenerator wegen seines axialen Temperaturgradienten nicht zugleich die Innenwand des heißen Zylindervolumens bilden sollte, ist er entsprechend tiefer platziert, und darüber liegende Raum wird durch einen ringförmigen Füllkörper eingenommen, der zugleich der Strömungsführung dient. Dies bedeutet zum einen eine Materialersparnis für den im Feingussverfahren herzustellenden Druckbehälter und ermöglicht zudem eine im Hinblick auf die auftretenden Wärmespannungen vorteilhafte, relativ geradlinige und dünnwandige Gestaltung der drucktragenden Außenwand.



Vom heißen Regenerator her kommend strömt das Arbeitsmedium zunächst außen am Füllkörper vorbei und dann durch zylindrische, mit eingegossene Kanäle. Ab der unteren eingezeichneten Lötstelle schließt sich ein ebenfalls gegossener Stahlring an, der von einer größeren Zahl axialer Strömungskanäle durchzogen ist. Alle diese Kanäle sind in einem ringförmigen Sammelkanal auf der Höhe der oberen Lötstelle zusammengeführt. Abwechselnd führt dabei jeweils ein Kanal auf die beschriebene regeneratorseitige Zuführung, während der jeweils benachbarte Kanal über einen schräg verlaufenden, bereits wieder im unteren Gussteil befindlichen Abschnitt auf die Oberseite des Füllkörpers und von dort weiter durch einen berippten Spalt zwischen diesem und dem drucktragenden Klöpperboden in den heißen Zylinderraum mündet.

Der fertigungstechnische Vorteil dieser Konstruktion besteht insbesondere darin, dass das Zusammenfügen der drei Gussteile mit lediglich zwei insgesamt plan und horizontal verlaufenden Lötnähten möglich ist. Die spanende Nachbearbeitung der Gussteile, die bereits alle erforderlichen Strömungskanäle enthalten, ist daher auf sehr wenige, einfache Arbeitgänge beschränkt. Der Lötvorgang lässt sich z. B. nach Zwischenlegen einer Lotfolie unter einfacher Gewichtbelastung der Bauteile sehr zuverlässig durchführen.

Die wärme- und strömungstechnische Auslegung des Erhitzerkopfes wurde unter Anwendung des in Kap. 4.5.1 beschriebenen Verfahrens durchgeführt. Dabei wurde der heiße Wärmeübertrager wegen seines komplexen Aufbaus als Serienschaltung aus vier einzelnen Segmenten modelliert, für die in dem verwendeten Simulationsprogramm jeweils existierende bzw. leicht anzupassende Programm-Module für Rohrbündel- oder Rippenwärmeübertrager eingesetzt wurden. Die Zahl der Freiheitsgrade erhöht sich damit zwar gegenüber der Darstellung in Kap. 4.5.1, bleibt jedoch wegen der Vielzahl konstruktiver und fertigungstechnischer Randbedingungen beherrschbar. So ergibt sich z. B. der minimale Kanaldurchmesser aus der Untergrenze des gusstechnisch Machbaren, und viele Strömungslängen sind konstruktiv durch die zu überbrückenden Abstände bedingt.

Die Einzelheiten der Modellierung und der darauf aufbauenden Optimierung mussten weitgehend an die Randbedingungen des konkreten Einzelfalles angepasst werden, so dass ihre Übertragbarkeit und allgemeine Aussagefähigkeit begrenzt ist. Aus diesem Grunde wird auf eine detaillierte Darstellung verzichtet. Dies gilt auch für die in Teilen mit einbezogene Modellierung des äußeren Wärmeüberganges, insbesondere auch des auf den Klöpperboden wie auch die Innenseite Ringes übertragenen Strahlungsanteiles.

Im letztgenannten Bereich kommt den von HECKT (1999) in Anlehnung an eine ähnliche, in Heizkesseln eingesetzte Konstruktion konzipierten sog. „Comferral“-Ring eine besondere Bedeutung zu. Diese aus Buntmetall gefertigten Rippensegmente übertragen sowohl den Strahlungswärmestrom als auch den von sie durchströmenden Rauchgas konvektiv übertragenen Wärmestrom. Dabei wurde die Rippendichte so gestaffelt, dass trotz abnehmender Rauchgastemperatur in allen vier Segmenten annähernd der gleiche Wärmestrom übertragen und somit eine gleichmäßige thermische Belastung des Bauteils sichergestellt wird.

Die Ringe sind dabei nicht formschlüssig mit dem Erhitzer verbunden. Vielmehr wird der thermische Kontakt im Betrieb durch die im Vergleich zu Stahl höhere Wärmedehnung sichergestellt, was neben der besseren Wärmeleitung der Hauptgrund für die Verwendung von Buntmetallen ist. Bezüglich weiterer Einzelheiten der Werkstoffauswahl wie auch der Festigkeitsauslegung der Bauteile, die hier aus Platzgründen und wegen der thematischen Beschränkung dieser Schrift nicht dargestellt werden können, sei auf die Arbeit von HECKT (1999) sowie auf die zusammenfassende Darstellung von HEIKRODT UND HECKT (1999) verwiesen.

## 5.2 Kostengünstige Regeneratorbauarten

### 5.2.1 Ausgangssituation

Neben den Erhitzerköpfen zählen die Regeneratoren erfahrungsgemäß zu den Maschinenkomponenten, deren Anfertigung die größten Anteile der Gesamtkosten verursacht. Dies gilt insbesondere für die in Stirlingmaschinen vielfach eingesetzten Drahtgewebe-Regeneratoren, mit denen die bislang höchsten Wirkungsgrade (im Sinne von Gl. 3-7) erzielt wurden. Wie schon in Kap. 4.5.1 deutlich wurde, ist dabei eine möglichst geringe Entropieproduktion durch die thermischen Verluste einerseits und die Strömungsdruckverluste andererseits anzustreben, wobei stets die Forderung nach einem geringen Totvolumen im Hintergrund steht. Unter praxisnahen Randbedingungen führt eine Optimierung nach dem beschriebenen Verfahren dabei stets zu Drahtdurchmessern im Bereich von ca. 10 – 80  $\mu\text{m}$ . Dabei kommt als Material vorzugsweise austenitischer Stahl zum Einsatz, da bei Verwendung anderer metallischer Werkstoffe zu hohe Wärmeleitungsverluste (Gl. 3-12) auftreten.

Bereits die Herstellung von Drähten aus diesem Material ist im angegebenen Durchmesserbereich relativ aufwändig, da eine Einbettung in andere Werkstoffe erforderlich ist. Hinzu kommen die Kosten für den Webeprozess, die wegen der benötigten großen Zahl an Gewebelagen (meist mehrere 100) erheblichen Anteil an den Gesamtkosten haben. In besonderem Maße gilt dies wegen des hohen Verschnittanteils für die Herstellung ringförmiger Regeneratoren.

Aus den genannten Gründen wurden verschiedentlich andere, kostengünstigere Bauformen realisiert, die jedoch hinsichtlich der gesamten, verlustbedingten Entropieproduktion den Drahtgewebe-Regeneratoren i. a. unterlegen sind. Hier sind insbesondere Bauarten mit regelloser Drahtfasermatrix zu nennen, die bereits Gegenstand der Betrachtungen in Kap. 3.4 waren. Sie bieten den Vorteil, dass sich die Kosten im wesentlichen auf den Materialpreis für den verwendeten Draht reduzieren lassen, wenngleich auch dieser in Anwendungsbereichen mit relativ hohem Kostendruck noch problematisch sein kann. Wie in Kap. 3.4 deutlich wurde, ist die Charakterisierung derartiger Materialien allein durch Angabe des Drahtdurchmessers und der Porosität unzureichend. Vielmehr übt das Herstellungsverfahren einen zusätzlichen Einfluss auf die relative und absolute Orientierung der einzelnen Fasern aus, was u. a. in den unterschiedlichen realisierbaren Porositätsbereichen zum Ausdruck kommt.

Ebenso ist dies an den unterschiedlichen experimentellen Ergebnissen für den Druckverlust bei vergleichbaren Porositäten und Faserdurchmessern zu erkennen. PFEFFER (1998) stellte bei einer vergleichenden Bewertung fest, dass hier im Vergleich zu Drahtnetzen sowohl höhere (ZHIYUAN UND HONGSHUO 1995, ISSHIKI ET AL. 1996, GEDEON UND WOOD 1996) als auch niedrigere (HEMPEL UND BÖHM 1997) Werte gemessen wurden. Er führt dies auf unterschiedliche Verteilungen der Porengrößen zurück, die gemäß Kap. 3.2.5 auch die thermischen Verluste wesentlich beeinflussen können.

Neben metallischen wurden vereinzelt auch nichtmetallische Werkstoffe für Regeneratoren mit regelloser Fasermatrix verwendet. FAUVEL UND YU (1994) untersuchten hier sowohl Glas- als auch Mineralfasern und kamen zu dem Ergebnis, dass diese Materialien durchaus für Regeneratoren geeignet sind. Von EDER UND APPEL (1982) wurde weiterhin die Verwendung von Eisenwhiskern als Fasermaterial vorgeschlagen. Allerdings scheinen die wegen der geringen Faserdurchmesser relativ hohen Druckverluste den Anwendungsbereich einzuschränken.

Regeneratoren, deren Matrix aus grundsätzlich anders aufgebauten Strukturen bestehen, sollten nach RADEBAUGH UND LOUIE (1984) allgemein nach dem mit ihnen erzielbaren Verhältnis aus der Stanton-Zahl  $St$  (Gl. 3-35) und dem Druckverlustbeiwert  $\xi$  (Gl. 3-34) bewertet



werden. Dabei weisen grundsätzlich diejenigen Strukturen, bei denen der Druckverlust ausschließlich auf Wandreibung zurückzuführen ist, die besten Resultate auf, da nur diesen Druckverlusten, nicht jedoch den durch Strömungsablösung bedingten Formdruckverlusten ein durch die Reynolds-Analogie begründeter Nutzen im Bereich der Wärmeübertragung gegenübersteht. Hier sind insbesondere die Spaltströmung und die Rohrströmung zu nennen, während im Falle der aus quer angeströmten Fasern aufgebauten Matrizen von einem Überwiegen der Formdruckverluste auszugehen ist. Als Indiz hierfür ist z. B. die Tatsache zu werten, dass bei der Korrelation der Druckverlust-Messwerte in Kap. 3.4.2 die Verwendung einer – wenn auch fiktiven – freien Maschenweite als charakteristischer Länge zu besseren Ergebnissen führte als die des hydraulischen Radius (Kühl et al. 1998). Zu ähnlichen Ergebnissen gelangten auch THOMAS (1999) bzw. THOMAS ET AL. (2000, 2000a) bei vergleichenden Analysen von Druckverlust- und Wärmeübergangskorrelationen verschiedener Autoren.

Die ebene Spaltströmung wurde häufig in aus aufgewickelten Metallfolien bestehenden Regeneratoren realisiert. Allerdings ist hier die im Vergleich zu quer angeströmten Fasern deutlich höhere axiale Wärmeleitung zu berücksichtigen, die in solchen Fällen zu verhältnismäßig langen Strömungslängen zwingt (s. z. B. THOMAS 1992). Dadurch werden die Strömungsdruckverluste im Vergleich zum Wärmeübergang wieder in die Höhe getrieben. Ähnliches gilt auch für Strukturen aus in Längsrichtung durchströmten Röhrchen, wie sie z. B. von ISSHIKI ET AL. (1987) untersucht wurden. Hinzu kommt in solchen Fällen die bereits in Kap. 3.2.5 diskutierte Problematik durch die möglicherweise ungleichmäßige Durchströmung der parallelgeschalteten Kanäle, die zu erhöhten thermischen Verlusten führen kann. Besonders anfällig sind hier die aus aufgewickelten Folien hergestellten Regeneratoren.

Bei Verwendung nichtmetallischer Materialien, wie z. B. der im Bereich tiefer Temperaturen einsetzbaren Kunststoffe, ist zwar das Problem der axialen Wärmeleitung relativiert, jedoch ist hier auf der anderen Seite die mit der Temperaturleitfähigkeit zurückgehende Eindringtiefe der Temperaturschwingungen zu beachten, die gemäß Gl. 3-13 zu einem merklichen Penetrationsverlust führen kann. Hier sei nochmals auf die bereits in Kap. 3.2.3 zitierten Ergebnisse von RAWLINS ET AL. (1992) hingewiesen.

Der Gedanke, durch konsequente Vermeidung von Strömungsablösungen die Strömungsdruckverluste bei zugleich gutem Wärmeübergang zu minimieren, ohne dabei den Nachteil erhöhter axialer Wärmeleitungsverluste in Kauf nehmen zu müssen, wurde von RÜHLICH (1999, 2000) verfolgt. Durch numerische Strömungssimulation entwickelte er eine Regeneratorstruktur aus regelmäßig angeordneten, quer zur Strömung ausgerichteten Stabprofilen mit stromlinienförmigem Querschnitt. Durch geeignete Abstimmung des Profilquerschnittes und der Abstände ist hier eine sehr gleichmäßige Umströmung mit betragsmäßig praktisch konstanter Geschwindigkeit erreichbar, bei der das Verhältnis von Druckverlust und Wärmeübergang optimal wird. Als vorrangiger Anwendungsbereich wird dabei die Tieftemperaturtechnik gesehen, wo die voraussichtlich relativ hohen Kosten für die Herstellung derartiger Strukturen eher in Kauf genommen werden können als beispielsweise im Bereich der Heizungs- und Klimatechnik. Sofern es gelingt, ein effizientes und kostengünstiges Herstellungsverfahren zu entwickeln, was angesichts der laufenden Fortschritte auf dem Gebiet der Mikrotechnik durchaus möglich erscheint, ist dieses Konzept als sehr aussichtsreich zu bewerten.

Sonstige Regeneratorbauformen sind bislang nur in geringerem Umfang realisiert und untersucht worden. Schüttungen aus (zumindest annähernd) kugelförmigen Partikeln sind nach den Untersuchungen von RADEBAUGH UND LOUIE (1984) wegen ihrer relativ hohen Druckverluste als wenig geeignet zu beurteilen. Hintergrund ist dabei ihre geringe Porosität, die zu einer im Verhältnis zur Austauschfläche unnötig hohen Wärmekapazität bei zugleich stark reduziertem freien, für die Durchströmung verfügbaren Volumen führt. Vertauscht man hier gedanklich



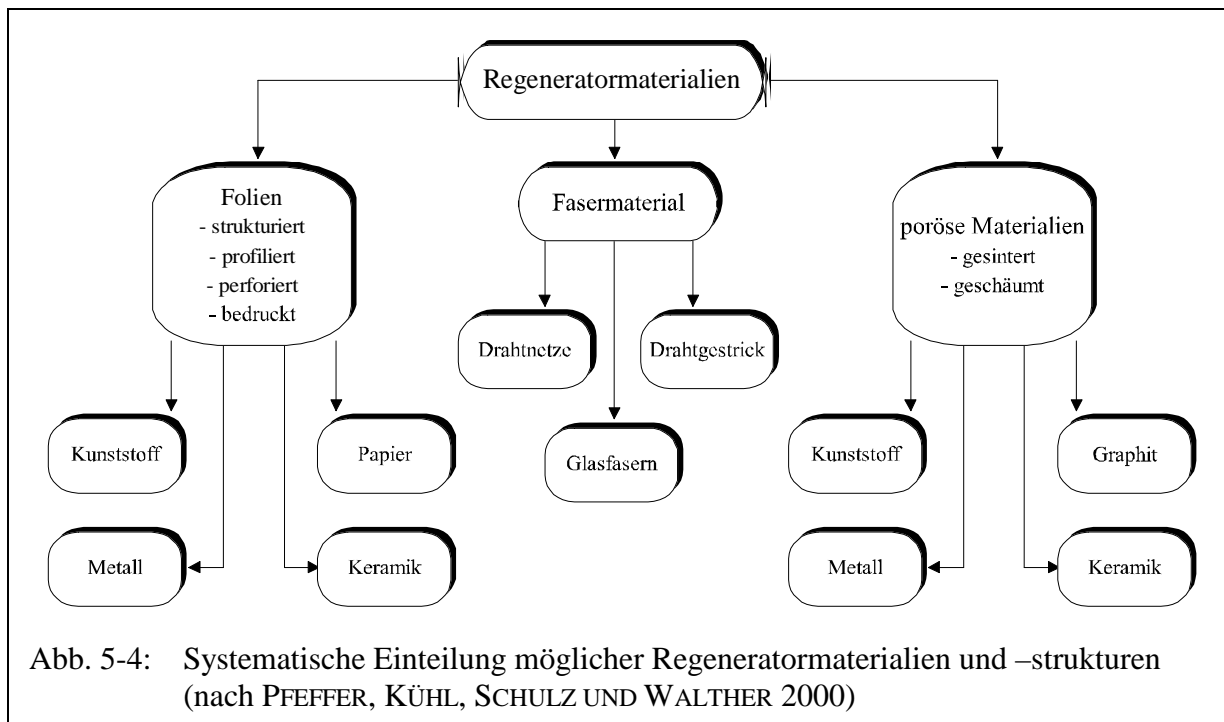
Feststoff- und Leervolumen, so ergäbe sich – ungeachtet der Frage nach durchgehenden Strömungswegen – die gleiche Austauschfläche unter deutlich günstigeren Bedingungen. Daher werden solche Matrizen nur dort eingesetzt, wo das Material nicht anders konfektionierbar ist. So werden z. B. in der Kryotechnik Schüttungen aus Bleipartikeln eingesetzt, weil dieser für die Herstellung von Drähten ungeeignete Werkstoff wegen seiner in bestimmten Temperaturbereichen vergleichsweise hohen Wärmekapazität benötigt wird.

Metallische Schäume wurden von TAKAHASHI ET AL. (1984) und TANAKA ET AL. (1990) untersucht. In beiden Fällen kommen die Autoren zu dem Ergebnis, dass diese Materialien im Vergleich zu Drahtfaser-Regeneratoren hinsichtlich Wärmeübergang und Druckverlust schlechter zu beurteilen sind. Keramische Schäume sind grundsätzlich ähnlich zu beurteilen, zumal hier noch die geringer Temperaturleitfähigkeit sowie die Schwierigkeiten bei der maßgenauen Herstellung, der nachträglichen Bearbeitbarkeit und der im Vergleich zu den üblicherweise metallischen Gehäusen abweichende Wärmeausdehnung hinzukommen.

## 5.2.2 Auswahl von Materialien für vergleichende Untersuchungen

Im Rahmen der Entwicklung von Vuilleumier-Wärmepumpen zur Gebäudeheizung, wie z. B. der im Anhang 4 dargestellten Versuchsmaschinen und Baumuster mit ringförmigen Regeneratoren, wurde die Entwicklung kostengünstiger Regeneratorbauformen als wesentlicher Schritt in Richtung auf eine wirtschaftliche Realisierbarkeit erkannt. Aus diesem Grunde wurden von PFEFFER (1998) umfangreiche Untersuchungen auch unter Einbeziehung neuartiger, noch kaum erprobter Konzepte durchgeführt. Dabei wurde zunächst nach der in Abb. 5-4 dargestellten systematischen Einteilung vorgegangen (PFEFFER ET AL. 2000).

Im Bereich der Folien wurden verschiedene Wege untersucht, um in der Wicklung freie Strömungswege mit der nötigen Gleichmäßigkeit sicherzustellen, die jedoch materialabhängig nicht alle gleichermaßen einsetzbar waren. Keramische Folien stehen zudem nicht in der benötigten Endlosform zur Verfügung und schieden auch aus Kostengründen aus. Damit verbleiben für den Hochtemperaturbereich lediglich die bereits bekannten Metallfolien mit ihren oben diskutierten Nachteilen. Eine Strukturierung oder Profilierung mit der geforderten



Präzision und Feinheit durchzuführen, erwies sich nach Kontaktaufnahme mit einschlägigen Firmen als sehr problematisch und kostenintensiv. Die alternativ dazu verfolgte Perforierung mit Ätzverfahren erschien zwar grundsätzlich möglich, führt jedoch zu einem erheblichen primären Materialverbrauch, da sämtliche für die Durchströmung verfügbaren Hohlräume auf diese Weise entstehen und die ursprüngliche Materialmenge somit dem gesamten Regeneratortvolumen entspricht. Damit schied dieser Weg ebenfalls aus Kostengründen aus.

Die im Niedertemperaturbereich einsetzbaren Kunststofffolien können alternativ dazu durch Heißprägeverfahren bearbeitet werden. Allerdings stellte sich heraus, dass die Untergrenze der möglichen Folienstärke durch den gleichen Mechanismus bestimmt wird, der auch für die in Kap. 3.2.3 diskutierten Penetrationsverluste verantwortlich ist. Da die Durchlaufgeschwindigkeit der Folie bei diesem Verfahren begrenzt ist, wird die Mindestdicke der Folie, unterhalb derer diese vollständig aufschmilzt, eher erreicht als die maximale Stärke, die hinsichtlich der Penetrationsverluste noch akzeptabel wäre.

Das alternativ untersuchte Bedrucken ließ sich wegen fehlender geeigneter Verfahren, die einen Endlosdruck in der benötigten Form und mit der erforderlichen, über größere Längen gleichmäßigen Auftragsstärke gewährleisten, praktisch nicht realisieren und somit auch nicht experimentell untersuchen, erscheint jedoch theoretisch nach wie vor als gangbarer Weg.

Unter den porösen Materialien erschien unter Berücksichtigung der in Kap. 5.2.1 wiedergegebenen Erkenntnisse insbesondere Schaumkeramik als grundsätzlich geeigneter Werkstoff, da hier offenporige Schäume mit hydraulischen Durchmessern im fraglichen Bereich herstellbar sind. Ein Beispiel zeigt die elektronenmikroskopische Aufnahme in Abb. 5-5. Wegen ihres relativ günstigen Preises erschienen Schaumkeramiken zunächst als durchaus geeignetes Material. Allerdings stellte sich bei der experimentellen Untersuchung des Wärmeübergangs- und Druckverlustverhaltens an kleinen Materialproben heraus, dass die von Fasermaterialien bekannten Werte nicht annähernd erreicht wurden.

Ursache für diese ungünstigen Ergebnisse ist offenbar, dass der angestrebte Porengrößenbereich nur durch ein modifiziertes Herstellungsverfahren erreicht werden kann, bei dem der als Trägermaterial dienende Polyurethanschaum vor dem Trocknungs- und Brennvorgang zusammengepresst werden muss. Dies führt zu einer Anisotropie der Schaumstruktur und, wie weitere elektronenmikroskopische Untersuchungen von PFEFFER (1998) zeigen, zu deutlich höheren Anteilen ganz oder teilweise verschlossener Poren (Abb. 5-6), was den Druck-

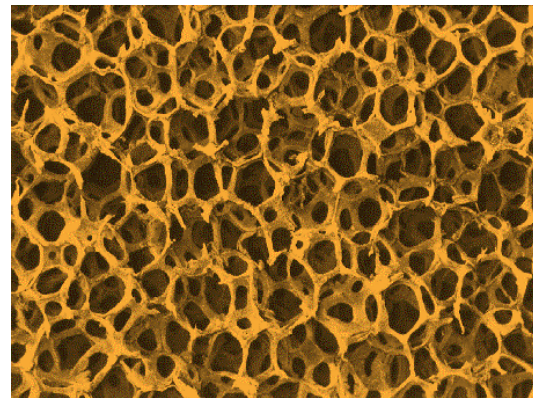


Abb. 5-5: Si C -Schaumkeramik, Elektronenmikroskopische Aufnahme<sup>2</sup>

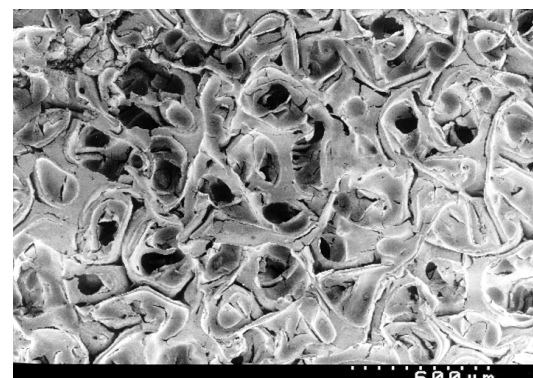


Abb. 5-6: Aufnahme einer Schaumkeramik mit 600 ppi Porendichte (nach PFEFFER 1998)

<sup>2</sup> ADLER, J., STANGKE, G. UND STÖVER, H. (1996): Schaumkeramik – ein alter neuer Werkstoff. Vortrag zur Festwoche in Stuttgart, zitiert von PFEFFER (1998; S. 41)

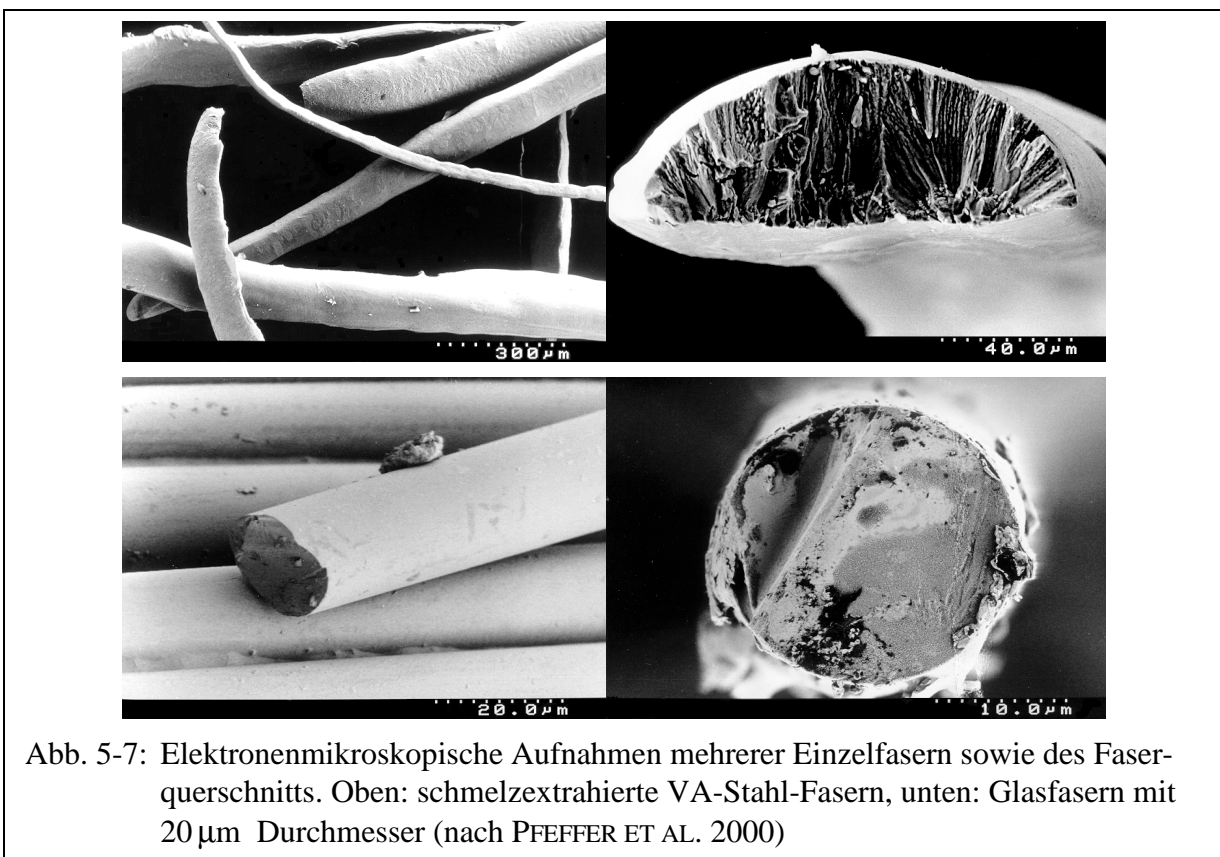
verlust stark erhöht. Aus diesem Grunde wurde auf die Anfertigung eines Regenerators aus diesem Material wegen fehlender Erfolgsaussichten verzichtet.

Nach dieser Vorauswahl konzentrierten sich die weiteren Überlegungen auf Fasermaterialien. Hier wurde zunächst beschlossen, zu Referenzzwecken ungeachtet des hohen Preises auch einen Regenerator mit Drahtnetzmatrix zu untersuchen. Weiterhin lag es nahe, das für die im Anhang 4 dargestellten Versuchsmaschinen und Baumuster bis zu diesem Zeitpunkt standardmäßig verwendete Drahtgestrick mit einzubeziehen, obwohl gerade die Tatsache, dass auch hier der hohe Preis des eingesetzten Drahtes ( $d = 22 \mu\text{m}$ ) noch zu inakzeptablen Herstellungskosten für die Regeneratoren führte, Anlass für die wiedergegebenen Untersuchungen war.

Als aussichtsreiche Alternativen zu konventionell hergestelltem Draht wurden hier zum einen Metallfasern betrachtet, die durch Schmelzextraktion nach einem von STEPHANI ET AL. (1995) entwickelten Verfahren gewonnen wurden. Auf diese Weise können Fasern in einer einstellbaren Länge bis zu mehreren Zentimetern und in einer relativ engen Durchmesser- bzw. Querschnittsverteilung aus verschiedenen Metallen sehr kostengünstig hergestellt werden. Das Verfahren beruht darauf, dass durch ein innen gekühltes, rotierendes Rad die Fasern in zunächst flüssiger Form direkt aus der Schmelze herausgeschleudert werden. Sie erstarren entweder bereits im Flug oder in dem als Auffangbehälter dienenden Wasserbad. Anders als im Fall gezogener Drähte wird ihr Preis im wesentlichen durch den eingesetzten Werkstoff (hier VA-Stahl) bestimmt und ist somit kaum noch weiter zu senken.

Als problematisch erwies sich die Bestimmung des effektiven mittleren Durchmessers, da die Querschnittsverteilung und -form größeren Streuungen unterlag als ursprünglich erwartet. Nach entsprechenden Untersuchungen (Abb. 5-7 oben) und ersten experimentellen Messergebnissen mussten daher die Regeneratorauslegungen nochmals korrigiert werden.

Als weiteres Fasermaterial wurden die ebenfalls sehr kostengünstig herstellbaren Glasfasern mit einbezogen. Wie Abb. 5-7 (unten) erkennen lässt, ist hier eine wesentliche gleichmäßigere



Form und Durchmesserverteilung erzielbar. Nachteilig erwies sich allerdings die ebenfalls erkennbare, herstellungsbedingte Parallelausrichtung größerer Faserbündel, die in jedem Fall aufgebrochen werden musste, um die erforderlichen, geringen hydraulischen Durchmesser der Matrix sicherzustellen. Hierzu wurde von PFEFFER (1998) ein hier nicht im einzelnen dargestelltes pneumatisches Eintragsverfahren zur Befüllung der Regeneratorgehäuse entwickelt.

### 5.2.3 Experimentelle Vorgehensweise

Um unter Berücksichtigung der Kostenaspekte zu verwertbaren Ergebnissen für den konkreten Anwendungsfall der Entwicklung von Vuilleumier-Heizungswärmepumpen zu gelangen, ist weder der jeweilige Material- bzw. Fertigungspreis des Regenerators noch die Betrachtung thermodynamischer, strömungs- und wärmetechnischer Kriterien allein ausreichend. Letztere sollten zum einen mit vertretbarem Aufwand experimentell überprüft werden, und zum anderen sollte auf diese Weise eine vergleichende Bewertung der Materialien ermöglicht werden.

In dem hier wiedergegebenen konkreten Fall stand für die experimentellen Untersuchungen die im Anhang 4.1 und 4.2 beschriebene Versuchmaschine zur Verfügung, die im Rahmen des von HEIKRODT ET AL. (1996) dokumentierten Projektes entwickelt worden war. Für vergleichende Tests unterschiedlicher Matrixmaterialien ist hier nur der kalte Regenerator geeignet, da sich die Matrix des heißen konstruktionsbedingt nur sehr schwer austauschen lässt. Der kalte kann dagegen einschließlich Gehäuse als leicht auswechselbares Modul gefertigt werden. Als Freiheitsgrade standen hier die Länge  $\ell$  sowie der über den Außendurchmesser  $D_a$  einstellbare Querschnitt zur Verfügung. Weiterhin konnten materialabhängig der Faserdurchmesser  $d$  sowie die Porosität  $\varepsilon$  in gewissen Grenzen gewählt werden. Durch die Auslegung des kalten Regenerators kann somit sowohl die vom Totvolumen abhängige Leistungsdichte als auch die vom Regeneratorwirkungsgrad und den Strömungsdruckverlusten abhängige Leistungszahl beeinflusst werden. Es bieten sich somit grundsätzlich zwei verschiedene Wege an, um zu vergleichbaren und aussagefähigen Resultaten zu gelangen:

Einerseits kann man die Regeneratorauslegung unter der Nebenbedingung einer konstanten Heizleistung unter dem Kriterium der Leistungszahl optimieren. Bei Berücksichtigung der qualitativ bekannten Materialeigenschaften ließ sich für diesen Fall ein qualitativ gegenläufiger Zusammenhang zwischen Regeneratorpreis und Leistungszahl vorhersagen. Damit wäre das Problem, zwischen diesen Kriterien den aus unternehmerischer Sicht günstigsten Kompromiss für eine Markteinführung und eine spätere Gewinnmaximierung zu finden, nicht gelöst, sondern nur verlagert. Andererseits wäre das in stationären Anwendungsbereichen eher nebensächliche Kriterium der Leistungsdichte bzw. des Leistungsgewichtes überbewertet.

Die andere mögliche Vorgehensweise, die hier favorisiert wurde, beruht auf der Überlegung, dass die genauen Abmaße und das Gewicht des Gesamtaggregate aus Anwendersicht solange unwesentlich sind, wie sie sich in dem durch herkömmliche Heizkesselsysteme definierten Rahmen bewegen, d. h. solange im Falle eines Austausches keine Platz- oder Gewichtsprobleme zu erwarten sind. Diese Bedingung konnte nach überschlägigen Abschätzungen als erfüllt angenommen werden und bestätigte sich später bei der Planung des Gesamtsystems einer seriennahen 20 kW-Vuilleumier-Wärmepumpe (HEIKRODT UND HECKT 1999; S. 229ff).

Da mit Vuilleumier-Wärmepumpen vergleichsweise hohe Leistungszahlen erzielbar sind, wird sich die Marktakzeptanz vermutlich verbessern, wenn man mit dem Ziel der Kostensenkung von der maximal möglichen Leistungszahl bewusst um ein gewisses Maß abrückt. Es stellt sich somit eher die umgekehrte Frage, wie weit man die Leistungszahl des Gesamtsystems senken kann, ohne dass die Akzeptanz von diesem Wert negativ beeinflusst wird.

Entsprechende Untersuchungen und Bewertungen im Rahmen des genannten Projektes führten zu dem Ergebnis, dass hier eine Leistungszahl des eigentlichen Wärmepumpenprozesses von  $\xi = 1,5$  bei Betriebstemperaturen von  $T_k = 10^\circ\text{C}$ ,  $T_w = 50^\circ\text{C}$  und  $T_h = 600^\circ\text{C}$  ausreichend ist. Daher wurde bei der Auslegung der Regeneratoren die Heizleistung der Maschine unter der Nebenbedingung einer vorgegebenen Leistungszahl optimiert.

Zum Vergleich der Ergebnisse ist dann lediglich eine theoretische Skalierung nach den in Kap. 4.3.2 angegebenen Regeln durchzuführen, damit auch die Absolutwerte der Heizleistung vergleichbar sind. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die Auswirkungen einer solchen Skalierung leichter unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten zu bewerten sind als unterschiedliche Leistungszahlen. Sie können mit den Herstellungskosten der jeweiligen Regeneratoren verrechnet werden.

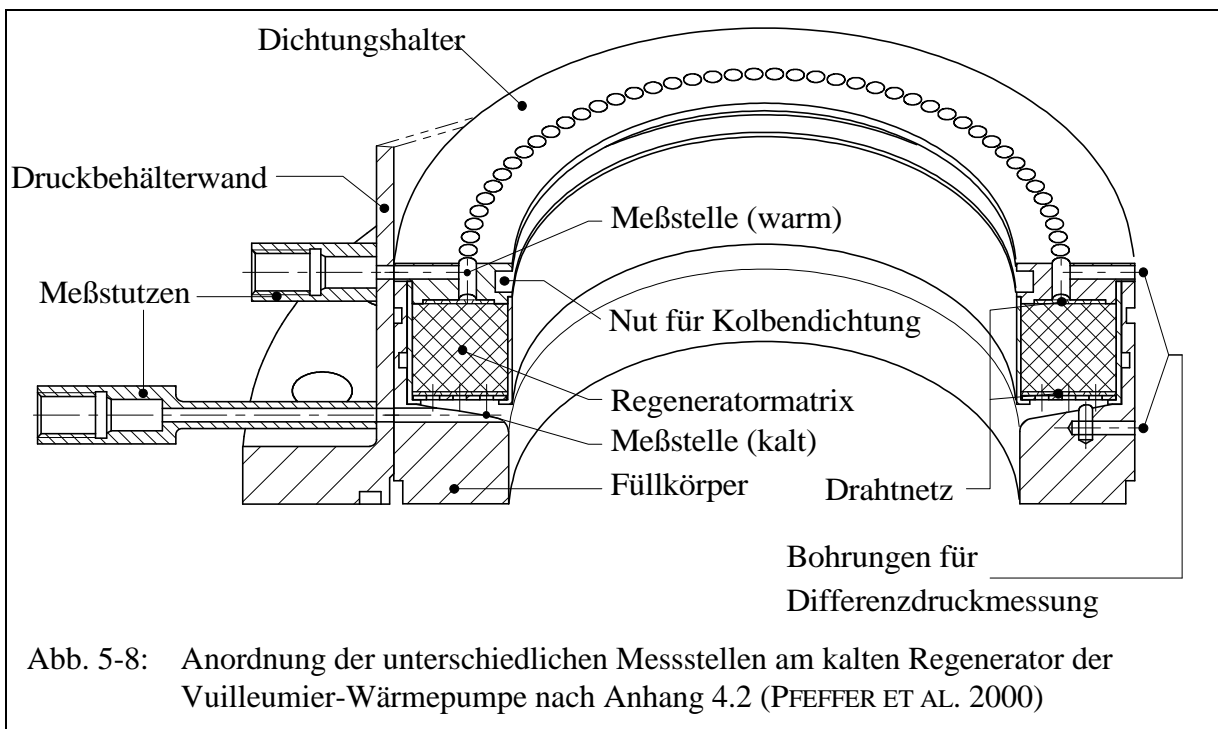
Im Einzelfall kann dies z. B. bedeuten, dass ein sehr preisgünstiges Regeneratormaterial trotz seiner (im Vergleich zum Referenzfall des Drahtnetzregenerators) schlechteren wärme- und strömungstechnischen Eigenschaften zu bevorzugen ist, denn wie in Kap. 4 wiederholt deutlich wurde, sind die von einer bestimmten Prozesskomponente verursachten Verluste (im Sinne der bezogenen Entropieproduktion  $\Phi^*$  nach Gl. 4-16 o. ä.) von der Größe des ihr zugewiesenen Totvolumens abhängig. Somit können also im Umkehrschluss materialbedingte Nachteile durch ein entsprechend größer bemessenes Totvolumen in gewissen Grenzen kompensiert werden. In Kauf zu nehmen ist dabei ein Abfall der Prozessleistung, der jedoch durch die Skalierung ausgeglichen werden kann. Der Kostenvorteil des preisgünstigen Materials kann nun u. U. größer sein als die Mehrkosten für eine z. B. um einige Prozent größer auszuführende Maschine, zumal insbesondere im Bereich der Peripherie in vielen Fällen (Brenner, Umwälzpumpen, Steuerung usw.) von nahezu unveränderlichen Kosten auszugehen ist.

Unter Anwendung dieser Vorgehensweise wurden von PFEFFER (1998) mehrere unterschiedliche Regeneratoren ausgelegt, angefertigt und vermessen. In die abschließende Bewertung gingen von diesen insgesamt sechs ein, deren wesentliche Auslegungsdaten in Tabelle 5-1 zusammen mit den nachfolgend verwendeten Referenzsymbolen angegeben sind.

Um die thermischen Regeneratorverluste und die Strömungsdruckverluste experimentell erfassen zu können, wurden die Regeneratoren wie in Abb. 5-8 dargestellt instrumentiert. Auf der (warmen) Oberseite wurden vier Temperaturfühler gleichmäßig auf dem Umfang verteilt, um Inhomogenitäten der Matrix erfassen zu können, auf der (kalten) Unterseite wurde ein weiterer Fühler angeordnet. Zur Messung der Druckdifferenz wurde ein entsprechender Aufnehmer extern über die eingezeichneten Bohrungen angeschlossen.

Tabelle 5-1: Auslegungsdaten der experimentell untersuchten Regeneratoren nach PFEFFER ET AL. (2000): volumenspezifische Wärmekapazität  $c_p \cdot \rho$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , mittlerer Faserdurchmesser  $d$ , Außendurchmesser  $D_a$ , Länge  $\ell$  und Porosität  $\varepsilon$  des Regenerators, übrige Auslegungsdaten wie in Anhang 4.1 angegeben

Regeneratormatrix	$c_p \cdot \rho$ [kJ/m <sup>3</sup> K]	$\lambda$ [W/mK]	$d$ [μm]	$D_a$ [mm]	$\ell$ [mm]	$\varepsilon$ [-]	Symbol
Drahtnetz	3950	15,6	28,0	157,8	19,5	0,70	■
Drahtgestrick	3950	15,6	22,0	152,2	19,7	0,79	□
SE VA-Fasern (gepreßt)	3950	15,6	49,0	143,0	26,4	0,75	▲
SE VA-Fasern (gesintert)	3950	15,6	23,4	149,0	21,0	0,75	△
Glasfaser (20 μm)	2080	1,0	20,0	161,0	15,0	0,75	●
Glasfaser (35 μm)	2080	1,0	35,0	150,0	19,9	0,75	○



Die Temperaturfühler dienen dabei der möglichst verzögerungsfreien Erfassung der zyklisch veränderlichen Gasttemperatur, wobei letztlich das Ziel verfolgt wird, den thermischen Regeneratorwirkungsgrad experimentell zu bestimmen. Die Temperaturmessung beruht dabei auf einem Prinzip, das von HILLIGWEG (1991) an einer experimentellen Duplex-Ericsson-Maschine erprobt wurde. Als Messfühler wurden hier kommerziell verfügbare, nicht ummantelte Ni-CrNi-Thermoelemente mit Drahtstärken von  $12,7\ \mu\text{m}$ ,  $25,4\ \mu\text{m}$  und  $50,8\ \mu\text{m}$  verwendet, die unmittelbar nebeneinander in der Gasströmung angeordnet waren. Ursprüngliches Ziel war dabei, aus den durchmesserabhängig unterschiedlichen Messsignalen durch theoretisch begründete Korrekturverfahren auf die ursprüngliche Gasttemperatur zu schließen. Dabei stellte sich heraus, dass unter den gegebenen Bedingungen, d. h. bei Drehzahlen bis zu ca.  $700\ \text{min}^{-1}$ , das Signal des dünnsten Thermoelementes im Rahmen der Messgenauigkeit bereits mit der errechneten Gasttemperatur identisch war. Bei Drehzahlen bis zu ca.  $500\ \text{min}^{-1}$  gilt dies auch bereits für den mittleren Drahtdurchmesser von  $25,4\ \mu\text{m}$ , der eine bessere Stabilität und eine längere Lebensdauer besonders im Bereich höherer Gasströmungsgeschwindigkeiten besitzt.

Aufgrund dieser Erkenntnisse wurde das Verfahren von KÜHL ET AL. (1997b) weiterentwickelt. Es wurden leicht austauschbare, direkt in den Druckbehälter einschraubbare Temperaturfühler mit lediglich einem Thermoelement geeigneter Drahtstärke entwickelt, und die Messdatenerfassung wurde durch Einsatz eines Hochgeschwindigkeitsvoltmeters verbessert. Die begrenzte Genauigkeit der Einzelmessung ( $0,025\%$  des Messbereiches) wurde dabei durch Wahl einer hohen Messgeschwindigkeit (maximal  $10^5\ \text{s}^{-1}$ ) kompensiert. Zur Auswertung wurde eine Fourieranalyse in Kombination mit einem statistischen Ausreißertest durchgeführt, wobei die Anpassung der Koeffizienten bis zur 16. Oberwelle sich für die Wiedergabe der Messwerte als ausreichend erwies.

Die von PFEFFER (1998) eingesetzten Temperaturfühler stellen eine an die konstruktiven Bedingungen gemäß Abb. 5-8 angepasste Weiterentwicklung dieses Prinzips dar. Abb. 5-9 zeigt als Beispiel einen am warmen Ende des Regenerators eingebauten Fühler. Die Anschlussdrähte sind druckdicht in die Messing-Verschraubung eingeklebt, der Messdraht wird um die Enden der Trägerdrähte gewickelt und mit Weichlot fixiert, so dass die Schweißstelle zwischen

den Legierungen möglichst genau in der Mitte liegt und vom Gas frei angeströmt werden kann. Auch hier erwiesen sich Messdrähte der Stärke  $25,4 \mu\text{m}$  als ausreichend, wie ein Vergleich von zwei mittels der beschriebenen Fourieranalyse aufbereiteten Kurvenverläufen in Abb. 5-10 zeigt.

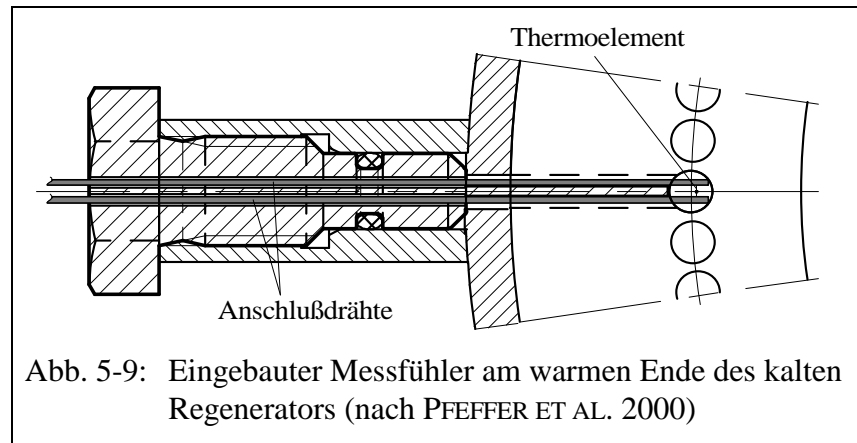


Abb. 5-9: Eingebauter Messfühler am warmen Ende des kalten Regenerators (nach PFEFFER ET AL. 2000)

## 5.2.4 Versuchsauswertung und Ergebnisse

Die weitere Auswertung beruht auf den in Gl. 3-3 bis 3-6 angegebenen Beziehungen. Der Regeneratorverlust ist letztlich definiert über das Kreisintegral des Enthalpiestroms

$$\Delta H_V = \oint dH = \int_0^{2\pi} \dot{m}(\varphi) \cdot c_p \cdot T(\varphi) \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)} \quad (5-1),$$

so dass zur Auswertung neben der Temperatur auch der Verlauf des Massenstromes bekannt sein muss. Seine unmittelbare messtechnische Erfassung war in der zur Verfügung stehenden Maschine jedoch nicht möglich. Es ist jedoch bekannt, dass Massenströme zu denjenigen

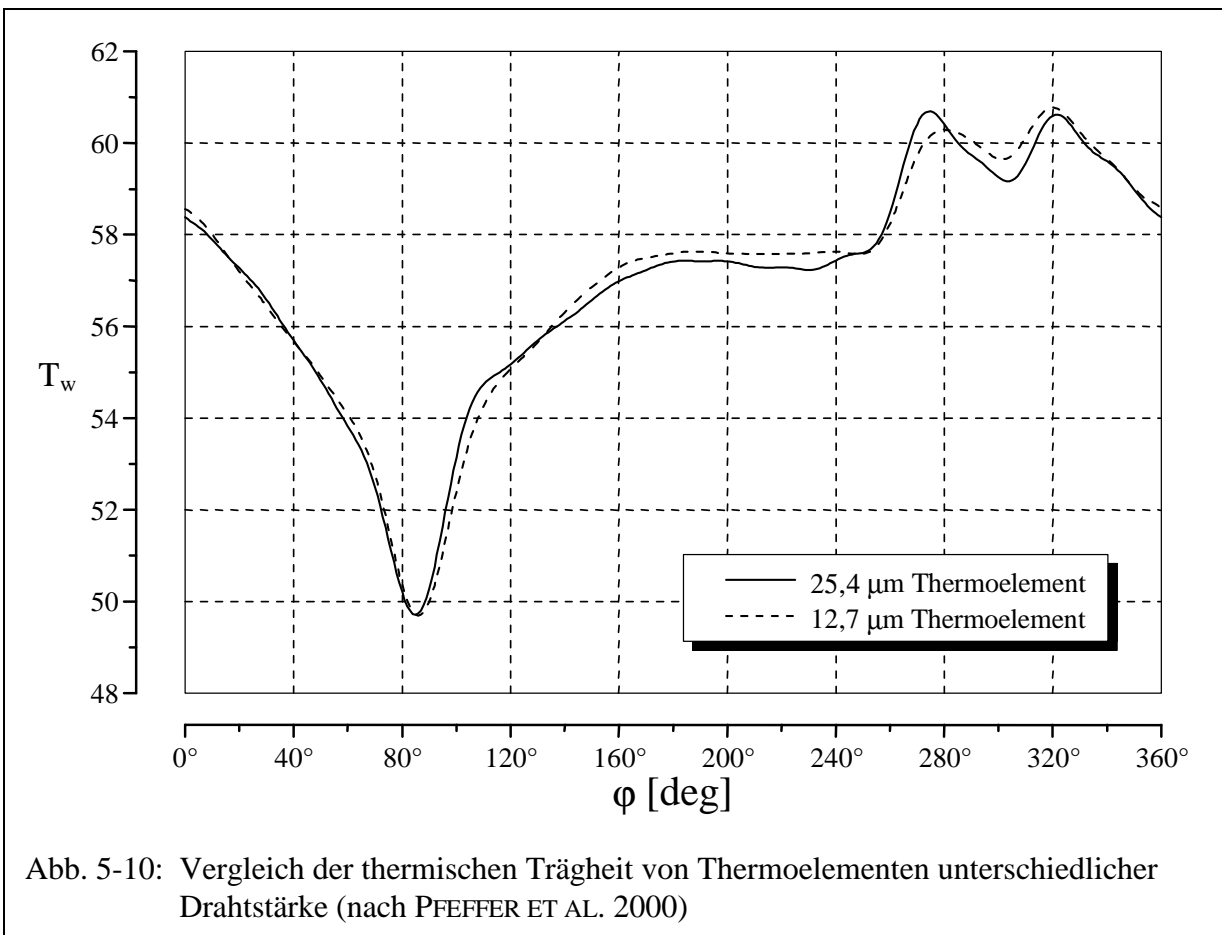


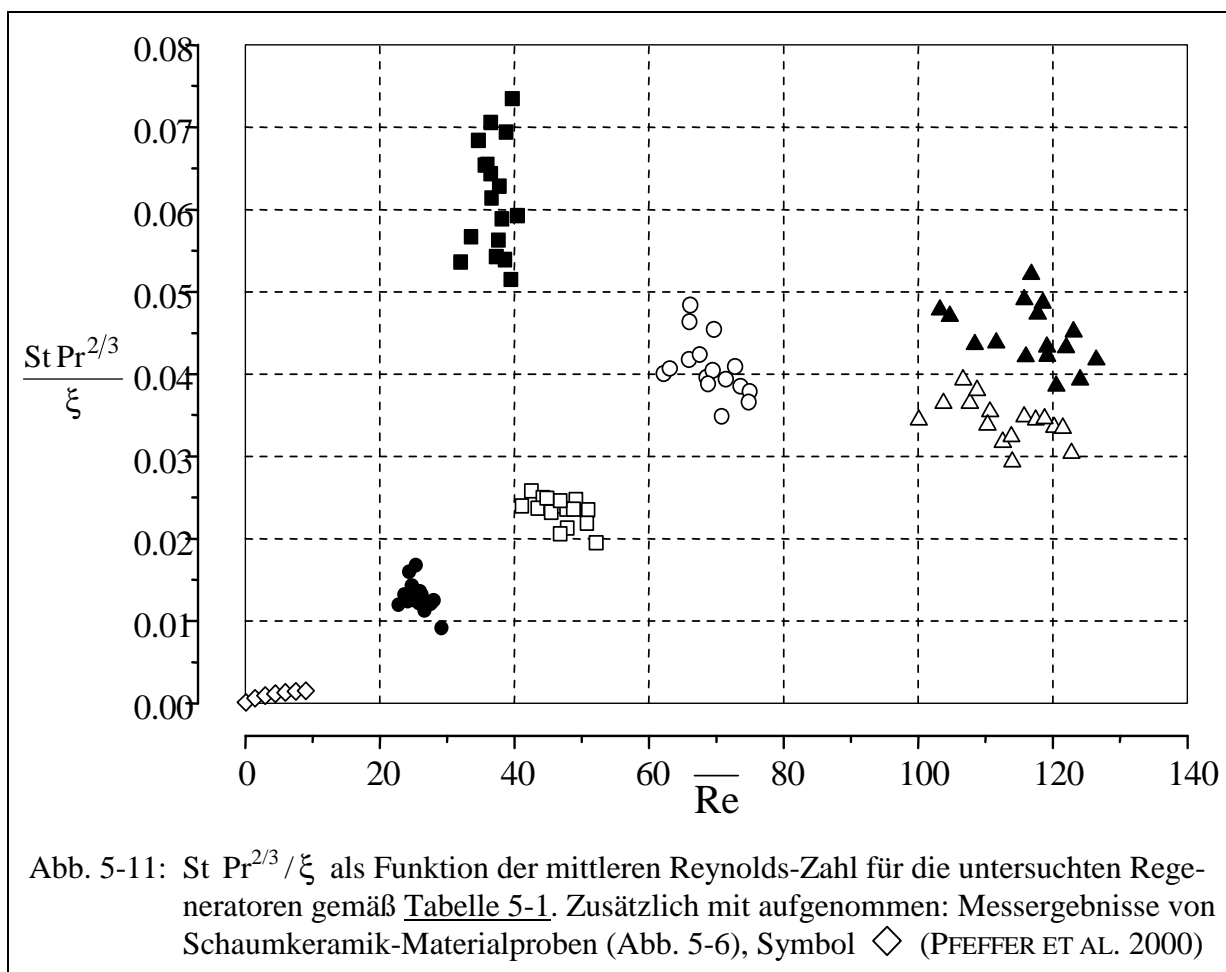
Abb. 5-10: Vergleich der thermischen Trägheit von Thermoelementen unterschiedlicher Drahtstärke (nach PFEFFER ET AL. 2000)

Prozessgrößen zählen, die mit Hilfe von Simulationsverfahren sehr zuverlässig reproduziert werden können. Aus diesem Grunde wurden hier zur Auswertung von Gl. 5-1 berechnete Massenströme zugrundegelegt, die mit einer weiterentwickelten Fassung des Simulationsmodells 3. Ordnung nach KÜHL (1990) ermittelt wurden. Zur Kontrolle wurden dabei auch die simultan durchgeführten Messungen des Druckverlustes herangezogen.

Der auf diese Weise ermittelte dimensionslose Regeneratorverlust  $\xi_R$  schließt aufgrund der Anordnung der Temperaturfühler unmittelbar an den Enden der Matrix den Wandwärmeverlust nicht mit ein und ist daher vorwiegend auf den Wärmeübergangsverlust gemäß Gl. 3-9 zurückzuführen. Aus diesem Grunde nahm PFEFFER (1998) vereinfachend an, dass die durch numerische Auswertung von Gl. 5-1 erhaltenen Regeneratorverluste nach Gl. 3-9 auf eine effektive Zahl der Übertragungseinheiten NTU und damit letztlich auf den Wärmeübergang zwischen Gas und Matrix schließen lassen, der sich z. B. durch die Stanton-Zahl

$$St = \frac{d_h}{\ell} \cdot NTU \quad (5-2)$$

ausdrücken lässt. In Anlehnung an die Vorgehensweise von RADEBAUGH UND LOUIE (1984) verwendete er zur vergleichenden Bewertung der unterschiedlichen Materialien den Quotienten  $St Pr^{2/3} / \xi$ , wobei für  $\xi$  der aus den Druckverlustmessungen bestimmte, mittlere Druckverlustbeiwert eingesetzt wurde. Die Ergebnisse sind in Abb. 5-11 für die verschiedenen untersuchten Regeneratoren nach Tabelle 5-1 über der mittleren Reynoldszahl nach Gl. 4-14 aufgetragen. Man erkennt zunächst deutlich, dass das zu Referenzzwecken untersuchte Drahtnetzmaterial eindeutig die besten Resultate aufweist. Damit werden frühere diesbezügliche





Untersuchungen bestätigt. Das regellose, gepresste Drahtgestrick weist trotz des prinzipiell gleichartigen Ausgangsmaterials deutlich schlechtere Werte auf.

Diese werden von den schmelzextrahierten Fasern zwar übertroffen, allerdings ist hier zu berücksichtigen, dass, wie an den relativ hohen Reynolds-Zahlen zu erkennen ist, der gewünschte Bereich des mittleren Faserdurchmessers hier nicht erreicht wurde und somit noch weitere Verbesserungen des Herstellungsverfahrens erforderlich sind. Da die Messungen – mit Ausnahme des Drahtnetzmaterials – eine mit der Reynolds-Zahl bzw. mit dem hydraulischen Durchmesser fallende Tendenz aufweisen, ist fraglich, ob die mit den schmelzextrahierten Fasern erzielten Werte sich auch für niedrigere Faserdurchmesser bestätigen lassen. Weiterhin ist festzuhalten, dass sich das Sintern der Fasern offenbar nachteilig auswirkt.

Mit Glasfasern der Stärke  $35\ \mu\text{m}$  lassen sich offensichtlich ebenfalls gute Ergebnisse erzielen, jedoch bestätigt der Vergleich mit den deutlich schlechteren Resultaten, die für die  $20\ \mu\text{m}$  starken Fasern erhalten wurden, den vermuteten Zusammenhang mit dem hydraulischen Durchmesser. Herkömmliche, zu Isolationszwecken verwendete Glasfasern weisen zwar noch geringere Durchmesser (ca.  $10\ \mu\text{m}$ ) auf, jedoch ist die Herstellung von Fasern in dem hier vorteilhaften Durchmesserbereich bei entsprechendem Bedarf ebenso kostengünstig möglich. Damit sind Glasfasern als kostengünstiges Regeneratormaterial durchaus geeignet.

Wegen der unterschiedlichen erzielten Heizleistungen ist die Darstellung in Abb. 5-11 jedoch zur Beurteilung allein nicht ausreichend. Vielmehr müssen zusätzlich die Skalierungsfaktoren für die Maschine berücksichtigt werden, die für eine einheitliche Leistung erforderlich wären. Sie sind in Tabelle 5-2 angegeben, wobei der Drahtnetzregenerator den Referenzfall darstellt.

Da die Relation zwischen fixen und größenabhängigen Kosten nicht genau bekannt war, wurden hier zwei verschiedene Werte im üblichen Bereich angenommen. Mit angenommenen Herstellungskosten des Gesamtsystems von ca. 3000 DM kommen PFEFFER ET AL. (2000) zu dem abschließenden Ergebnis,

Tabelle 5-2: Kostenfaktoren im Vergleich zum Drahtnetzregenerator bei Querschnittsskalierung auf gleiche Heizleistung (Faktor  $f_q$ ) bei unterschiedlichen Verhältnissen zwischen Fixkosten und größenabhängigen Kosten  $f_{\text{Kosten}}$  (nach PFEFFER ET AL. 2000)

Regeneratormatrix	$f_q [-]$	$f_{\text{Kosten}} = \frac{50}{50}$	$f_{\text{Kosten}} = \frac{70}{30}$
Drahtgestrick	1.171	104.1 %	102.5 %
SE VA-Fasern	1.364	108.4 %	105.0 %
Glasfasern ( $20\ \mu\text{m}$ )	1.462	110.5 %	106.3 %
Glasfasern ( $35\ \mu\text{m}$ )	1.526	111.8 %	107.1 %

dass sich sowohl mit Glasfasern als auch mit dem (im Vergleich etwas teureren) schmelzextrahierten Fasern Kostenvorteile erzielen lassen, zumal das Optimierungspotential durch die in Tabelle 5-1 angegebenen Konfigurationen noch nicht voll ausgeschöpft ist.

Dies ist zum einem dadurch begründet, dass sich aufgrund der Messwerte z. T. nachträgliche Korrekturen der für die Auslegung verwendeten Druckverlust- und Wärmeübergangskorrelationen ergaben, die bei neuen Auslegungen berücksichtigt werden könnten. Zum anderen ist zu bedenken, dass das jeweils veränderte Totvolumen des kalten Regenerators auch zu einer anschließenden Nachoptimierung der gesamten Totraumverteilung in der Maschine Anlass gibt. Dies konnte im vorliegenden Fall experimentell nicht realisiert werden, da es jeweils eine vollständige Neuankonfertigung der Versuchsmaschine bedeutet hätte. Im Falle der Umsetzung in eine Neukonstruktion bietet sich hier jedoch weiteres Optimierungspotential.

## 5.3 Kinematische Kolbenführungen

### 5.3.1 Allgemeine Anforderungen und Problematik

Wie schon in Kap. 2.1.1.1 verdeutlicht wurde, gibt es grundsätzlich verschiedene Wege, die periodisch veränderlichen Arbeitsräume in regenerativen Kreisprozessen zu realisieren. Von HEIKRODT ET AL. (1996) wurden zur Realisierung einer Vuilleumier-Wärmepumpe sowohl getriebegesteuerte Kolbensysteme als auch Freikolben- und Drehkolbensysteme als mögliche Alternativen betrachtet. Alle drei Bauformen sind grundsätzlich vom Stirling-Prozess her bekannt, wobei allerdings die letztgenannte bislang keine praktische Bedeutung erlangt hat. Als einer der Gründe hierfür ist die Dichtungsproblematik zu nennen, über die insbesondere DREXL (1976) berichtet. Sie ist im Stirling-Prozess wegen der mechanischen Kompression und den dadurch bedingten großen Druckdifferenzen von besonderem Gewicht.

Im Falle des Vuilleumier-Prozesses ist die Situation wegen des (im Idealfall) konstanten Gesamtvolumens und des ausschließlichen Einsatzes von Verdrängerkolben grundsätzlich anders. Hier muss nur gegen Strömungsdruckverluste abgedichtet werden, was mit eng tolerierten Spaltdichtungen ohne weiteres möglich ist. Aufbauend auf dieser Erkenntnis wurden von HOFBAUER (1993) Bauarten mit rotierendem, im Querschnitt trochoidenförmigen Verdrängungskörper vorgeschlagen, der in einem der zugehörigen Rastpolkurve nachgebildeten Kammersystem die benötigten Arbeitsräume bildet. Von einer Realisierung dieses Prinzips wurde jedoch abgesehen, da keine praktikable Möglichkeit gefunden wurde, um die hier auftretenden, sehr hohen thermischen Verluste zu reduzieren. Sie entstehen, weil die Oberfläche des Verdrängungskörpers in zyklischer Folge die drei Temperaturniveaus des Prozesses durchläuft und durch abwechselnde Erwärmung und Abkühlung der oberflächennahen, in ihrer Stärke durch Gl. 3-13 bestimmten Schicht erhebliche Wärmemengen irreversibel überträgt.

Das ebenfalls vom Stirling-Prozess her bekannte und dort schon oft realisierte Freikolbenprinzip ist dagegen auch für den Vuilleumier-Prozess als sehr geeignet anzusehen und ist Gegenstand des nachfolgenden Kapitels (Kap. 5.4). Wie HEIKRODT ET AL. (1996) ausführen, wurde von einer Realisierung in dem dokumentierten Projekt nicht aus prinzipiellen Gründen abgesehen, sondern lediglich wegen der zum damaligen Zeitpunkt (1993) zur geringen praktischen Erfahrungen bei der Übertragung auf den Vuilleumier-Prozess, was einen zusätzlichen, den Rahmen des Projektes übersteigenden Entwicklungsaufwand insbesondere zur Lösung der regelungstechnischen und tribologischen Probleme nach sich gezogen hätte.

Die verbleibende, in allen bislang realisierten regenerativen Maschinen am häufigsten auftretende Bauart ist die eines kinematisch durch ein Getriebe gesteuerten Zylinder-Kolben-Systems. Im Falle des Stirling-Prozesses dient das Getriebe i. d. R. zugleich auch der Ein- bzw. Auskopplung der mechanischen Leistung über eine rotierende Welle und ist daher in zweifacher Hinsicht von Nutzen. Dadurch sind auch die Anforderungen an den Getriebemechanismus hinsichtlich der Belastbarkeit definiert, da die Übertragung dieser Leistung stets mit relativ großen, auf den bzw. die Verdichterkolben wirkenden Prozessdruckkräften verbunden ist.

Im Falle des Vuilleumier-Prozesses ist die Situation in dieser Hinsicht wesentlich unproblematischer, da die Übertragung mechanischer Leistung – wenn überhaupt – nur eine untergeordnete Rolle spielt. Wie schon in Kap. 2.1.2.2 deutlich wurde, erfordert die Bewegung von Verdrängerkolben im Idealfall keinerlei Kraft- und Arbeitsaufwand. In realen Maschinen sind somit nur die durch Festkörper- und Fluidreibung (einschließlich Strömungsdruckverlusten) sowie durch Trägheitseffekte bedingten Kräfte aufzunehmen bzw. zu übertragen. Die Lagerbelastung ist daher äußerst gering und bietet günstige Voraussetzungen für eine hohe Lebensdauer und Wartungsfreiheit. Dennoch existieren auch hier eine Reihe von Anforderungen:

- Da keine mechanische Leistung extern zu übertragen ist, ist das Getriebe im Druckbehälter unterzubringen, da andernfalls bewegliche Kolbenstangen- oder Wellenabdichtungen gegen das Arbeitsmedium erforderlich sind. Dieses vom Stirling-Prozess her bekannte und noch nicht vollständig gelöste Problem sollte hier im Hinblick auf die in heizungstechnischen Anwendungsbereichen sehr hohen Anforderungen an Lebensdauer und Wartungsfreiheit in jedem Fall umgangen werden.
- Flüssige Schmiermittel sind in diesem Fall grundsätzlich zu vermeiden, da sonst die Gefahr der Kontamination des Prozessraumes, insbesondere der Regeneratoren besteht. Als Lager kommen damit nur trockenlaufende Ausführungen mit Feststoffschmierung, die unter Lebensdauergesichtspunkten stets problematisch sind, sowie dauergeschmierte Wälzlager mit Fettfüllung und dauerschwingfest ausgelegte elastische Lager in Frage.
- Die Unterbringung im Druckbehälter bedingt eine während der gesamten Lebensdauer (> 50.000 h) vollständig wartungsfreie Ausführung.
- Da aus wirtschaftlichen und fertigungstechnischen Gründen eine  $\beta$ -Konfiguration in einem einzelnen, zylindrischen Druckbehälter angestrebt wird, muss das Getriebe zwei zentral angeordnete, koaxial ineinander geführte Kolbenstangen aufweisen.
- Aus dem gleichen Grund muss es kompakt und bezüglich der zentralen Kolbenstangen möglichst symmetrisch aufgebaut sein und einschließlich des erforderlichen Schwungrades im Druckbehälter unterzubringen sein, ohne dass hierzu zusätzliche, über den äußeren Umfang der Prozesskomponenten (d. h. der ringförmig um die Kolben angeordneten Wärmeaustauscher und Regeneratoren) hinausgehende Gehäuseerweiterungen nötig sind.
- Es müssen zwei ca.  $90^\circ$  phasenversetzte, zumindest annähernd sinusförmige Kolbenbewegungen realisiert werden. Die Anforderungen an den Hub betragen konkret 25 mm für die 4 kW-Wärmepumpen sowie 50 mm für die 20 kW-Maschinen gemäß Anhang 4.
- Um ein möglichst großes Schwungrad zentral im Gehäuse unterbringen zu können, sollte die Getriebewelle möglichst mittig angeordnet sein.
- Das Getriebe sollte keine Seitenkräfte auf die Kolben übertragen, da diese in den Zylindern nur mit trocken laufenden Führungen aufgefangen werden können, deren Belastbarkeit wegen der hohen Lebensdauern Anforderungen sehr begrenzt ist. Vielmehr sollte eine möglichst genaue Geradföhrung der Kolbenstangen angestrebt werden.
- Ständig im Eingriff befindliche Verzahnungen sind wegen zu geringer Lebensdauer zu vermeiden, da eine zuverlässige Dauerschmierung erfahrungsgemäß nicht möglich ist.
- Aus Kostengründen sollte die Zahl der Bauteile möglichst gering sein, und die benötigten Teile sollten fertigungstechnisch einfach und preiswert herstellbar sein.

Um diese sich zum Teil widersprechenden Anforderungen so weit wie möglich zu erfüllen, wurden von HEIKRODT ET AL. (1996) verschiedene Getriebetypen einer vergleichenden Bewertung unterzogen. Hier sind zunächst die verschiedenen Varianten des Kreuzschubkurbelgetriebes zu nennen, die jedoch meist Kreuzköpfe oder Linearlager zur Aufnahme von Seitenkräften benötigen. Derartige Lager sind nur schwer dauergeschmiert realisierbar, da die Fettfüllung stets die Tendenz hat, sich an den Enden abzulagern.

Eine Ausnahme bilden hier die symmetrischen Bauformen, von denen das von MEIJER (1959) erfundene sog. rhombische Getriebe bei Stirlingmotoren vielfach eingesetzt wurde. Als Nachteil ist hier allerdings die verdoppelte Zahl beweglicher Teile zu sehen. Weiterhin sind die beiden außermittig angeordneten Wellen miteinander verzahnt, was besonders dann zu Lebensdauerproblemen führen kann, wenn, wie es üblich ist, nur eine als An- bzw. Abtriebswelle genutzt wird. Bei Stirlingmaschinen, bei denen ohnehin eine druckdichte Wellen- oder Kolbenstangendurchführung erforderlich ist, relativiert sich allerdings der Nachteil der asym-

metrischen Schwungradposition, da es außerhalb des Druckbehälters angeordnet werden kann. Die Unterbringung ausreichend dimensionierter Schwungmassen innerhalb des Druckbehälters wäre im Falle der Vuilleumier-Maschinen nach Anhang 4 jedoch problematisch.

Weiterhin wurden eine Reihe von Viergelenkgetrieben untersucht, die eine angenäherte Geradföhrung eines Punktes ermöglichen. Nachteilig ist hier generell die weit ausladende und asymmetrische Bauform solcher Systeme. Weiterhin ergeben sich Probleme mit stark verzerrten Hubfunktionen, großen Gliedzahlen und z. T. sehr geringen Schwenkwinkeln einzelner Lagerpunkte, die i. d. R. zu erhöhtem Lagerverschleiß föhren.

Aus den hier in Kürze zusammengefassten Gründen, die von HEIKRODT ET AL. (1996) im einzelnen dargelegt werden, wurde eine Entscheidung zugunsten des rechtwinkligen Kreuzschubkurbelgetriebes getroffen, da es konstruktiv relativ einfach zu realisieren ist und auch unter Kosten- und Qualitätssicherungsaspekten für eine potentielle Serienfertigung in Frage kommt. Abb. 5-12 zeigt eine Konstruktionszeichnung des Getriebes für die 20 kW-Wärmepumpe gemäß Anhang 4.4. Man erkennt, dass hier außermittig angeordnete Geradföhrungen zur Aufnahme der Seitenkräfte bzw. Momente benötigt werden, die zwar als dauergeschmierte Kugelumlauföhlsen auf eine Lebensdauer von 20.000 h ausgelegt sind, aber dennoch hinsichtlich der Dauerhaltbarkeit das kritische Bauelement darstellen.

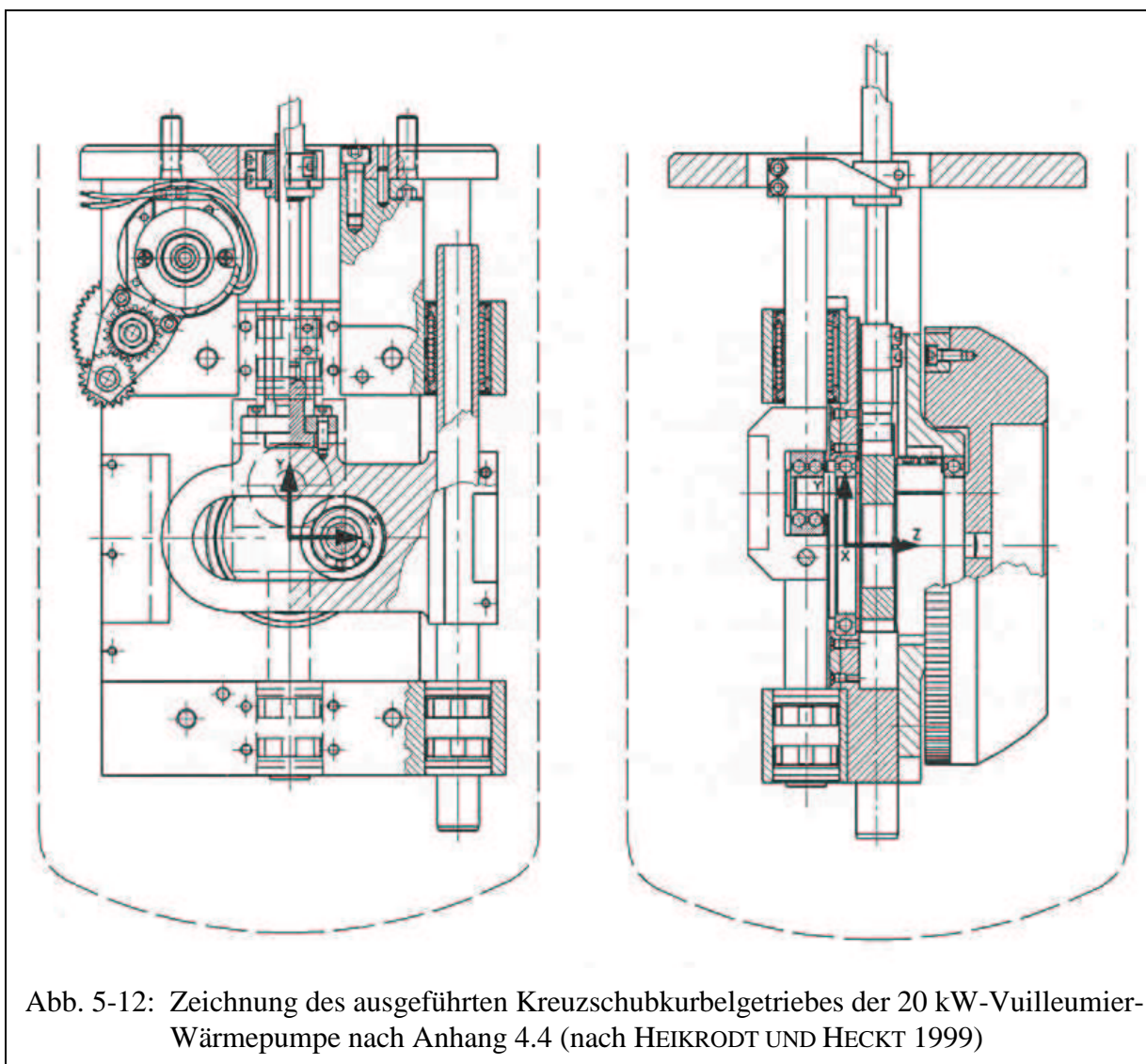


Abb. 5-12: Zeichnung des ausgeführten Kreuzschubkurbelgetriebes der 20 kW-Vuilleumier-Wärmepumpe nach Anhang 4.4 (nach HEIKRODT UND HECKT 1999)

### 5.3.2 Entwicklung eines neuartigen Getriebemechanismus

Die Umsetzung der Drehbewegung der Welle erfolgt in dem in Abb. 5-12 dargestellten Getriebe durch dauergeschmierte Laufrollen, die auf zwei um  $90^\circ$  phasenversetzten Wellenkröpfungen gelagert sind und in zwei Kurbelschlaufen aus gehärtetem Material eingreifen. Dieses Prinzip hat sich wegen des überwiegend rollenden Kontaktes zwischen Schlaufe und Laufrolle hinsichtlich der Lebensduranforderungen als unproblematisch erwiesen.

Unter Beibehaltung dieses Prinzips wurde von KÜHL (1998) ein neuartiges Getriebe vorgeschlagen, das den in Kap. 5.3.1 genannten Anforderungen weitgehend gerecht wird und insbesondere die bezüglich der Lebensdauer als kritisch zu beurteilenden Geradfürungen vermeidet. Das zugrundeliegende Prinzip ist in Abb. 5-13 dargestellt. Es beruht auf dem als „gleichschenklige Geradfürung“ bekannten Viergelenkgetriebe, unterscheidet sich jedoch von diesem dadurch, dass durch abweichende Wahl der Schenkelmaße  $a$ ,  $b$  und  $s$  der annähernd geradgeführte Punkt  $B$  in die Mitte der Anordnung gerückt wird. Man kann dieses System somit als „ungleichschenklige Geradfürung“ bezeichnen. In Kauf zu nehmen ist dabei zwar eine gegenüber der gleichschenkligen Ausführung erhöhte Linearitätsabweichung, die in Abb. 5-13 in stark übertriebener Form als gestrichelte Linie eingezeichnet ist.

Durch Formulieren der kinematischen Beziehungen und Reihenentwicklung der Winkelfunktionen lässt sich jedoch zeigen, dass sich das Maß  $\Delta x$  sehr gering halten lässt, wenn

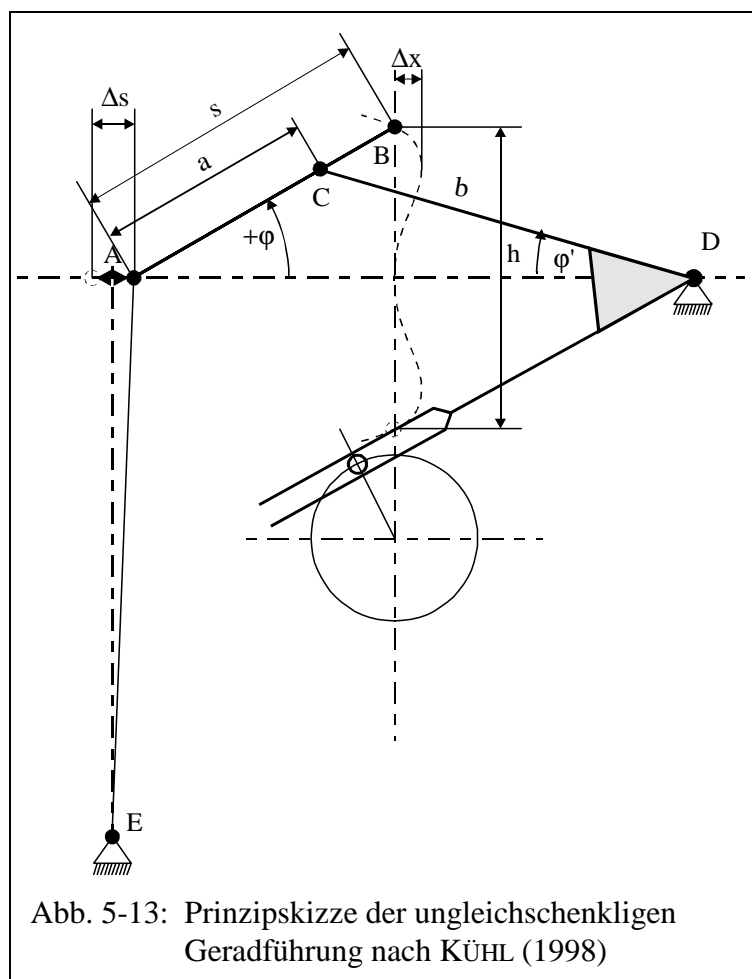
$$a = \frac{1}{2} \Delta s \frac{2\ell - \Delta s}{\ell - (\ell - \Delta s) \cos \varphi} \quad (5-3)$$

gewählt wird. Dabei bezeichnet  $\ell = a + b$  die seitliche Gesamtausdehnung des Systems, die ebenso wie der Hub  $h$  vorgegeben werden kann. Damit ergibt sich die Größe  $\Delta s$  in der gezeichneten (oberen) Totpunktposition ebenso wie der Winkel  $\varphi$  aus einer einfachen Dreiecksberechnung.

Der größte Abstand des Punktes  $A$  von der Mittellinie ist offensichtlich durch die Hebellänge  $s$  gegeben und bestimmt die maximale seitliche Ausdehnung des Mechanismus (sofern nicht  $\ell > 2s$  gewählt wird).

Wählt man z. B.  $h = 50$  mm als Hub und  $s = 65$  mm als Hebellänge, so erhält man  $\Delta s = 5$  mm und  $\cos \varphi = 12/13$  (25, 60, 65 sind ein pythagoräisches Tripel).

Mit der unabhängigen Festlegung  $\ell = 125,5$  mm folgt dann z. B.  $a \approx 43,1$  mm und  $b \approx 82,4$  mm.



Wird die Kurbelschleufe gegenüber dem Hebel  $b$  um  $45^\circ$  schräggestellt, so lässt sich mit einer doppelten, gespiegelten Ausführung des Systems eine Phasenverschiebung von ca.  $90^\circ$  zwischen den beiden Hubfunktionen mit einer einzelnen Kröpfung der Kurbelwelle erreichen. Als Kurbelradius erhält man dann bei zentral angeordneter Welle  $r \approx 17,21$  mm, einen Wert, der nicht wesentlich unter dem halben Hub von 25 mm liegt und somit keine großen Lagerbelastungen verursacht. Für die maximale Auslenkung  $\Delta x$  gilt nach KÜHL (1998) allgemein

$$\Delta x = b \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{a \cdot y}{b \cdot s} \right)^2} \right) - (s - a) \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{y}{s} \right)^2} \right) \quad \text{mit} \quad \left( \frac{y}{s} \right)^2 = \frac{1 - \left( \frac{s}{a} - 1 \right)^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2}{1 - \left( \frac{s}{a} - 1 \right)^2} \quad (5-4).$$

Für die oben angenommenen Zahlen erhält man so z. B.  $\Delta x \approx 0,0125$  mm. Bedenkt man, dass wegen der nur einseitigen Auslenkung die Hauptachse des Gesamtsystems noch in die Mitte dieses Bereiches gelegt werden kann, so ergibt sich eine Seitenauslenkung von lediglich ca.  $\pm 6 \mu\text{m}$ , die sicherlich im Bereich der fertigungstechnischen Toleranzen der Kolbenstangenführungen liegt. Vereinfachend wurde allerdings bei diesen Rechnungen eine exakt horizontale Bewegung des Punktes A angenommen, die jedoch durch eine hinreichend lange Pendelstütze (die z. B. elastisch gelagert werden kann) beliebig gut angenähert werden kann.

Für den Einsatz in  $\beta$ -Vuilleumier-Maschinen bietet sich zur Realisierung der zwei phasenversetzten Hubfunktionen die vertikal gespiegelte Bauweise an, da die konzentrisch laufenden Kolbenstangen dann am besten mit dem Getriebe verbunden werden können. Soll der Vorteil der kompakten Bauweise voll genutzt werden, so ergibt sich hier die Schwierigkeit, dass die innere Kolbenstange im unteren Totpunkt relativ weit in den Getrieberaum eindringt. Dies ist jedoch realisierbar, da der Kurbelzapfen sich in dieser Stellung ebenfalls in einer tiefen Position befindet. Wenn die Rollen auf dem Kurbelzapfen nicht in der Mittelebene, sondern in zwei seitlich versetzten Ebenen angeordnet werden, so ist eine sehr kompakte Bauweise möglich, wie der in Abb. 5-14 wiedergegebene Konstruktionsvorschlag nach KÜHL (1998) zeigt.

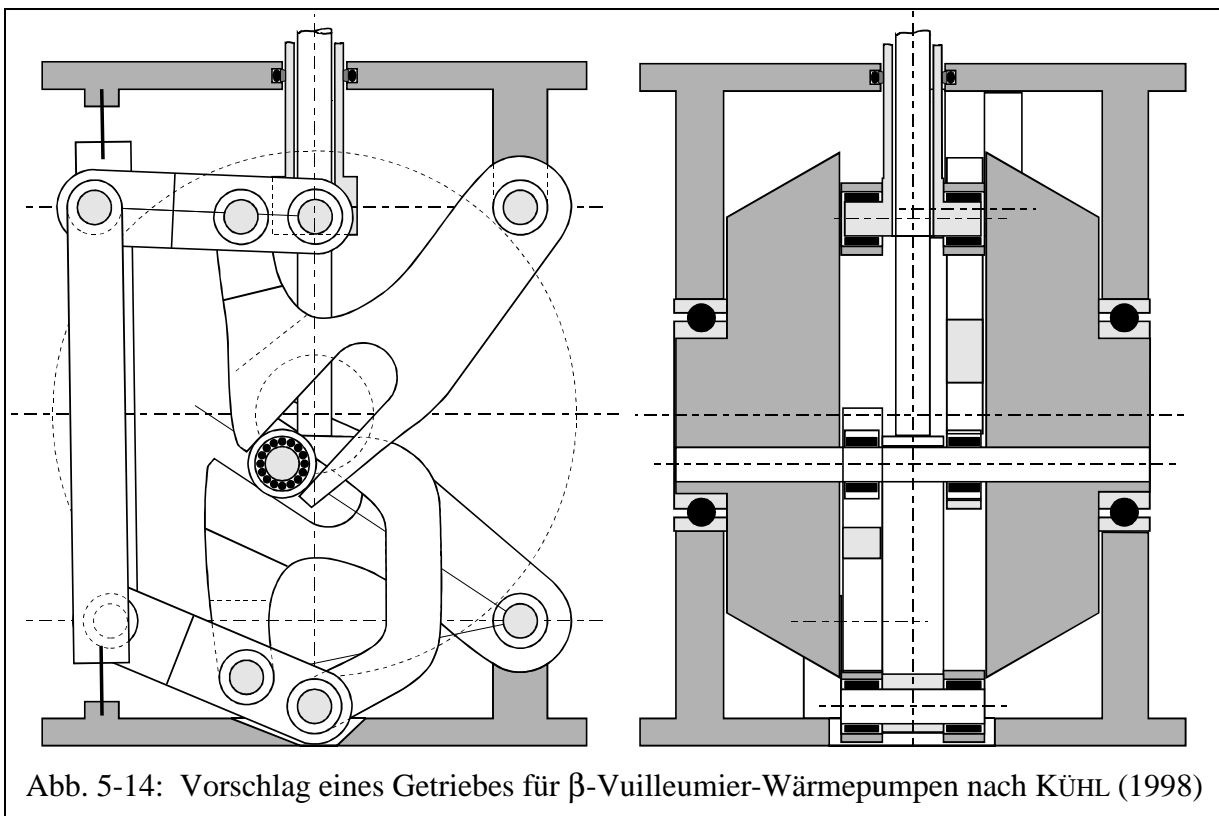


Abb. 5-14: Vorschlag eines Getriebes für  $\beta$ -Vuilleumier-Wärmepumpen nach KÜHL (1998)

## 5.4 Vuilleumier-Wärmepumpen in Freikolben-Bauweise

### 5.4.1 Bisherige Arbeiten

Wie im vorhergehenden Kapitel deutlich wurde, ist der Getriebemechanismus als diejenige Komponente zu sehen, die in vielen Fällen für die Lebensdauer von nach regenerativen Kreisprozessen arbeitenden Maschinen bestimmend ist. Vom Stirling-Prozess her ist seit langem bekannt, dass sich diese Problematik durch die Freikolbenbauweise umgehen lässt. Sie wird daher gerade in Anwendungsfällen, in denen ein hohes Maß an Wartungsfreiheit und Betriebssicherheit unverzichtbar ist, bevorzugt eingesetzt. Beispielhaft sei hier auf die Entwicklungen von Freikolben-Stirlingmotoren zur Energieversorgung von Raumsonden (CAIRELLI ET AL. 1990, WHITE ET AL. 1998, HOSHINO ET AL. 2001, SCHREIBER ET AL. 2001) wie auch von Stirling-Kältemaschinen für Raumfahrtanwendungen (z. B. KNOX ET AL. 1984) verwiesen.

Im Falle des Vuilleumier-Prozesses entfällt die Problematik der Leistungsab- bzw. -zufuhr, die bei Stirling-Prozessen in Freikolbenbauweise i. d. R. den Einsatz von Linearmotoren bzw. -generatoren erfordert, und das Getriebe dient im wesentlichen nur der Synchronisation der Kolbenbewegungen. Es liegt daher sehr nahe, das Freikolbenkonzept auf den Vuilleumier-Prozess zu übertragen. Die theoretischen Grundlagen hierzu wurden von THOMAS (1992) formuliert, der die von BERCHOWITZ (1986) für Freikolben-Stirlingmaschinen entwickelten, linearisierten Modelle für das ungedämpfte wie auch das gedämpfte Schwingungssystem auf den Vuilleumier-Prozess übertrug. Auf dieser Basis entwickelte er eine Freikolben-Vuilleumier-Kältemaschine im Labormaßstab, mit der die Realisierbarkeit derartiger Systeme experimentell nachgewiesen werden konnte (SCHULZ UND THOMAS 1991, 1995).

Anschließend wurde in einem Kooperationsprojekt zwischen der Universität Dortmund und der DTU Lyngby eine Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpe in einem für den Einsatz in der Heizungs- und Klimatechnik typischen Leistungsbereich realisiert. Dies geschah durch Umbau einer ursprünglich von CARLSEN (1989) als abwärmebetriebene Kältemaschine entwickelten, getriebegeteuerten  $\gamma$ -Vuilleumier-Wärmepumpe (KÜHL ET AL. 1993, CARLSEN ET AL. 1994). Zuvor wurde hierzu durch Austausch des heißen Regenerators die Maschinenauslegung den veränderten Betriebsbedingungen (insbesondere der höheren Erhitzerkopftemperatur, die bei Antrieb über einen Gasbrenner erzielt werden kann) angepasst (CARLSEN ET AL. 1993).

Abb. 5-15 zeigt eine Gegenüberstellung der getriebegeteuerten Wärmepumpe VP2 und der im Rahmen dieses Projektes durch Umbau daraus hervorgegangenen Freikolben-Maschine FPV2, für die die wesentlichen Bauteile, insbesondere das heiße und kalte Zylindergehäuse mit den Wärmeübertragern und den Regeneratoren, weiterverwendet wurden. Dadurch ist eine gewisse Vergleichbarkeit der experimentellen Ergebnisse gegeben, wenngleich zu berücksichtigen ist, dass bei der ursprünglichen Auslegung der Komponenten den speziellen Anforderungen des Freikolbenbetriebes nicht Rechnung getragen wurde. Trotz der hierdurch begründeten Einschränkungen war es Ziel dieses Projektes, die grundsätzliche Gleichwertigkeit der Freikolbenbauweise mit der herkömmlichen, getriebegeteuerten Bauart nachzuweisen.

Wie die Auftragung der Heizleistung und der erreichten Leistungszahl über der Erhitzertemperatur in Abb. 5-16 (CARLSEN ET AL. 1994) zeigt, wurde dieses Ziel zunächst nicht voll erreicht. Der primäre Grund hierfür ist, dass alle bis zum damaligen Zeitpunkt realisierten Betriebszustände des Freischwingers deutlich im Teillastbereich liegen. Dass die Leistung von Freikolbensystemen bei Absenkung der Erhitzertemperatur schneller abfällt als bei Getriebe-maschinen, stellt ein erwünschtes Verhalten und einen weiteren Vorteil der Freikolbenbauweise dar, denn es lassen sich Teillastzustände bei höherer Erhitzertemperatur und dementsprechend höherer theoretisch erzielbarer Leistungszahl realisieren. Dass die experimentellen

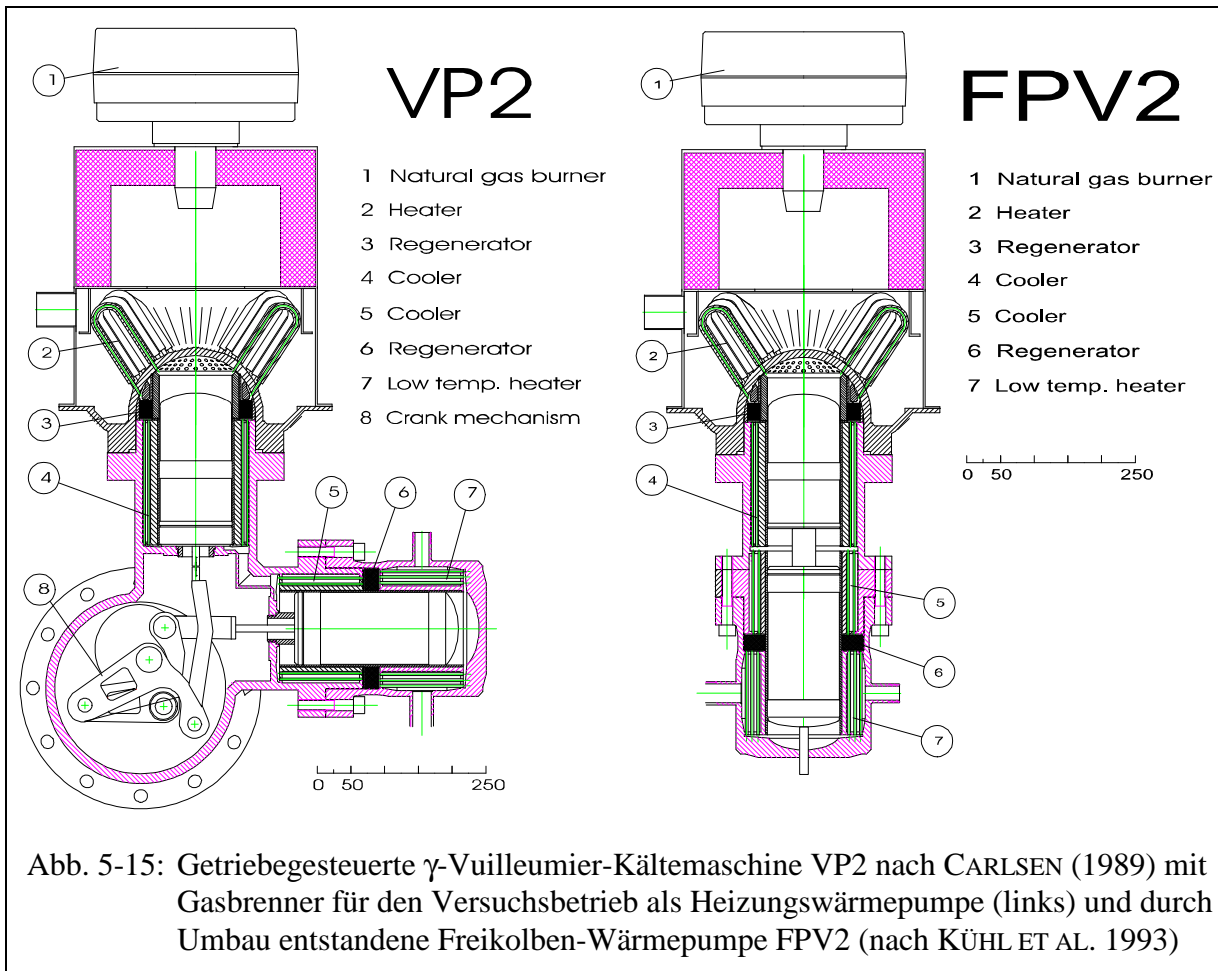


Abb. 5-15: Getriebegeteuerte  $\gamma$ -Vuilleumier-Kältemaschine VP2 nach CARLSEN (1989) mit Gasbrenner für den Versuchsbetrieb als Heizungswärmepumpe (links) und durch Umbau entstandene Freikolben-Wärmepumpe FPV2 (nach KÜHL ET AL. 1993)

Leistungszahlen in diesem Fall sehr niedrig liegen, ist zum einen auf den extremen Teillastbetrieb zurückzuführen, der mit der Getriebeversion überhaupt nicht realisierbar gewesen wäre, und zum anderen darauf, dass die ursprüngliche Maschine auf eine maximale Kälteleistung im Volllastbetrieb ausgelegt war und nicht auf eine maximale Leistungszahl im Teillastbereich.

Man erkennt in Abb. 5-16 deutlich, dass es relativ schwierig ist, die Leistung einer Getriebe-maschine durch Absenken der Erhitzertemperatur nennenswert zu reduzieren. Andererseits lässt die Extrapolation der Messdaten im Falle des Freischwingers erkennen, dass bei einer Erhitzertemperatur von  $500^{\circ}\text{C}$ , was dem Auslegungsfall entspricht, zwar die Leistungszahl, nicht jedoch die Heizleistung der Getriebe-maschine vermutlich hätte erreicht werden können.

Die geringere Heizleistung wurde aus den nachfolgend diskutierten Gründen bereits bei der Auslegung bewusst in Kauf genommen, als eine Schwingungsfrequenz von nur 14 Hz gewählt wurde (gegenüber  $975 \text{ min}^{-1}$  bzw. 16,25 Hz bei der Getriebeversion im Auslegungszustand). Damit ist die ursprünglich angestrebte unmittelbare Vergleichbarkeit beider Bauformen nur bedingt gegeben. Weiterhin wurden zusätzliche Toträume in den Zylindern vorgesehen, um eine evtl. Überschreitung der Auslegungshübe bis jeweils 5 mm in beide Richtungen zuzulassen. Dies könnte allerdings mit Verbesserungen bei der Lage- und Amplitudenregelung der Kolbenschwingungen in zukünftigen Auslegungen vermieden werden.

Dass ein Betrieb bei  $T_h = 500^{\circ}\text{C}$  nicht möglich war, ist auf Schwierigkeiten bei der Lage-regelung der Kolben sowie auf tribologische Probleme (hoher Verschleiß an eng tolerierten Spaltdichtungen und Laufhülsen) zurückzuführen, was trotz der zusätzlichen Toträume insbesondere bei größeren Hüben zum Anschlagen der Kolben und auch zu merklichen Drosselverlusten an den Dichtspalten der Gasfedern führte. Diese Probleme und die möglichen Ansätze zu ihrer Lösung werden im nachfolgenden Kapitel (Kap. 5.4.2) eingehender diskutiert.



In Abb. 5-15 ist zu erkennen, dass die zur Überwindung der Fluid- und Festkörperreibung benötigte mechanische Leistung in der Freikolbenmaschine auf ähnliche Weise bereitgestellt wird wie in der Getriebemaschine. Wie in Kap. 2.2 bereits erläutert wurde, werden in der  $\gamma$ -Bauart hierzu die Kolbenstangen genutzt, die zur Anbindung der Verdrängerkolben an das Getriebe ohnehin erforderlich sind. Aufgrund ihres Querschnittes im Bereich der Durchführung in den Getrieberaum wirken sie als kleine, zusätzliche Verdichterkolben. Nach den in Kap. 2.1.2 ausgeführten Prinzipien tritt dabei die kalte Kolbenstange mit dem heißen thermischen Verdichter in Wechselwirkung und umgekehrt die heiße mit dem kalten Verdichter.

Man kann somit vereinfachend sagen, dass durch diese Stangenquerschnitte zwei Stirlingmotoren in die Maschine integriert sind, von denen der eine mit der Temperaturdifferenz  $T_h - T_w$  und der andere mit  $T_w - T_k$  betrieben wird. Es liegt damit auf der Hand, dass die so produzierte Leistung insbesondere durch Vergrößern des kalten Kolbenstangenquerschnittes den Erfordernissen angepasst werden kann, so wie es auch in der Maschine nach CARLSEN (1989) und – soweit bekannt – auch in allen sonstigen von diesem und anderen Autoren realisierten  $\gamma$ -Vuilleumier-Maschinen geschehen ist.

Der aus der heißen Kolbenstange und dem kalten thermischen Verdichter gebildete Stirlingmotor liefert im Vergleich hierzu wegen der geringen Temperaturdifferenz nur wenig Leistung und „verbraucht“ überdies einen Teil des Wärmestromes, der durch den Vuilleumier-Prozess vom kalten auf das warme Niveau angehoben wurde. Dies ist aus thermodynamischer Sicht zweifellos unvorteilhaft, jedoch bietet sich hier andererseits der Vorteil, dass die auf diesem Wege produzierte Antriebsleistung mit dem Temperaturhub ansteigt. Damit würde drehzahlbedingt die Heizleistung mit dem Temperaturhub zunehmen, und es ergibt sich ein für den Einsatz als Heizungswärmepumpe außergewöhnlich vorteilhaftes Betriebsverhalten, dass in dieser Form bei keinem anderen bekannten Wärmepumpensystem zu finden ist.

Aus diesem Grunde wie auch wegen der konstruktiven Einfachheit und wegen positiver Erfahrungen mit der von THOMAS (1992) entwickelten Versuchsmaschine wurde in der Freikol-

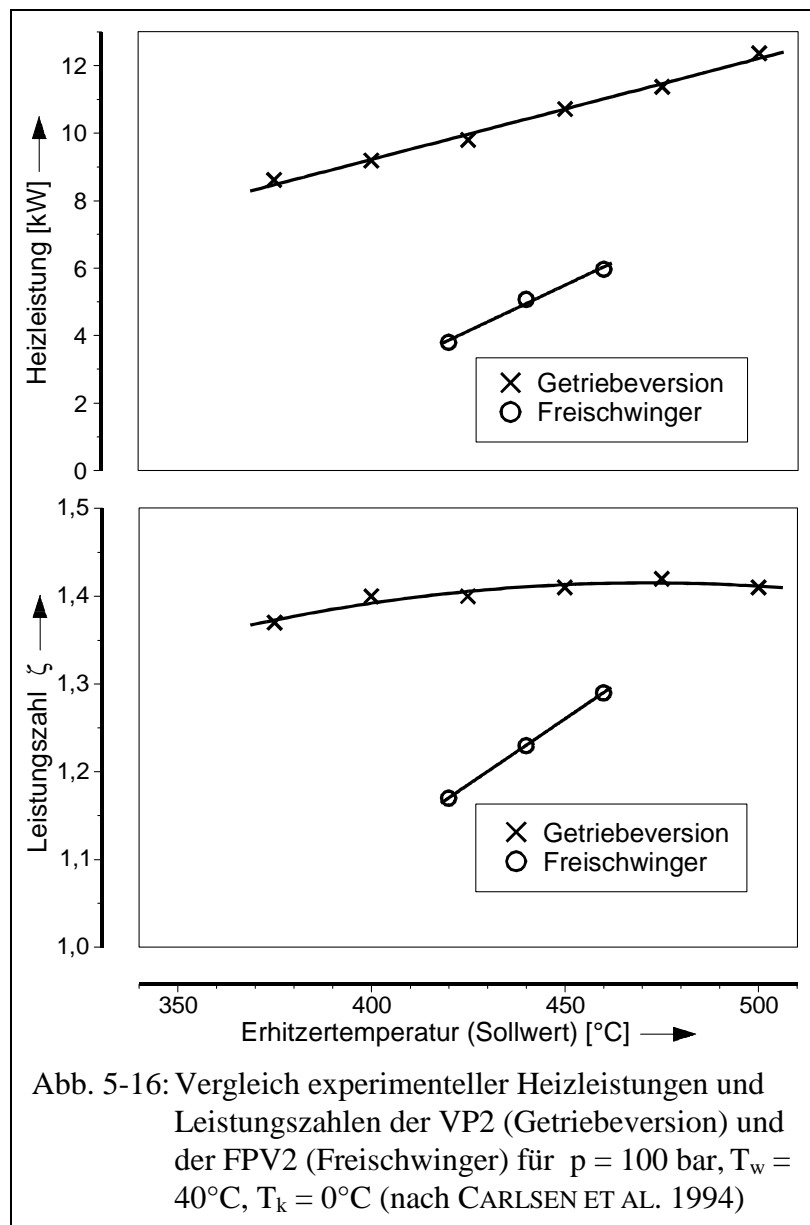


Abb. 5-16: Vergleich experimenteller Heizleistungen und Leistungszahlen der VP2 (Getriebeversion) und der FPV2 (Freischwinger) für  $p = 100$  bar,  $T_w = 40^\circ\text{C}$ ,  $T_k = 0^\circ\text{C}$  (nach CARLSEN ET AL. 1994)

benmaschine FPV2 nach Abb. 5-15 eine durchgehende Kolbenstange konstanten Querschnitts zwischen den Verdrängern vorgesehen. Sie dient nicht nur der beschriebenen Leistungsproduktion, sondern zugleich auch der Aufhängung und Führung der Kolben. Zum Gehäuse hin ist das System hierzu durch eine dünne, nach unten durch den kalten Verdrängerkolben geführte Stange abgestützt, da im Bereich des heißen Volumens wegen der hohen thermischen Belastungen, die keine zuverlässige Stangenführung oder -dichtung zulassen, und im warmen wegen der erwünschten Überlappung der Kolbenhübe keine Möglichkeit hierzu bestand.

Bei der Auslegung des Schwingungssystems erwies es sich als nachteilig, dass die Dämpfungskonstanten der beiden Verdrängerkolben, die im wesentlichen durch die Strömungsdruckverluste der dem jeweiligen thermischen Verdichter zugeordneten Wärmeaustauscher und Regeneratoren bestimmt werden, in einem ungünstigen Verhältnis zueinander standen. Dies wirkt sich in getriebegesteuerten Maschinen nicht auf das Betriebsverhalten aus, da lediglich die Summe der durch Strömungsdruckverluste dissipierten Energie für die mechanische Leistungsbilanz und die sich einstellende Betriebsdrehzahl von Bedeutung ist. In Freikolbenmaschinen übt jedoch das Verhältnis der Dämpfungskonstanten einen Einfluss auf das Hubamplitudenverhältnis der Kolben aus, wie THOMAS (1992) durch Betrachtung des linearisierten Differentialgleichungssystems der gedämpften Schwingung,

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= -J_{kk}\dot{x}_k - J_{kh}\dot{x}_h - K_{kk}x_k - K_{kh}x_h \\ m_h \ddot{x}_h &= -J_{hk}\dot{x}_k - J_{hh}\dot{x}_h - K_{hk}x_k - K_{hh}x_h \end{aligned} \quad (5-5),$$

zeigen konnte. Die Dämpfungskonstanten  $J_{kk}$ ,  $J_{kh}$ ,  $J_{hk}$  und  $J_{hh}$  beschreiben hier in linearisierter Form alle dissipativen Reibungsverluste im System. Lediglich im Falle rein laminarer Strömungsdruckverluste ist dieser lineare Ansatz korrekt, bei turbulenten Anteilen sowie beim Auftreten von – meist als geschwindigkeitsunabhängig anzunehmender – Festkörperreibung sind Linearisierungen unter Konstanthaltung der während eines Prozesszyklus dissipierten Energie erforderlich. Die Konstanten  $K_{ij}$  fassen alle Kraftwirkungen zusammen, die der Kolben  $i$  aufgrund einer Auslenkung  $x_j$  des Kolbens  $j$  erfährt. Hierzu zählen zunächst alle mechanischen Federn, die i. d. R. nach dem Hooke'schen Gesetz durch ihre Federkonstante  $C$  zu beschreiben sind, sowie die Kraftwirkungen durch Gasfedern und durch den veränderlichen Prozessdruck, die beide ebenfalls zu linearisieren sind. Im Falle des Prozessdruckes gilt z. B.

$$p(x_h, x_k) \approx \bar{p} + \left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \right|_{x_k=0} \cdot x_k + \left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_h} \right) \right|_{x_h=0} \cdot x_h \quad (5-6).$$

Nach Lösung des Gleichungssystems 5-5, die durch Laplace-Transformation möglich ist, erhielt THOMAS (1992) für das Amplitudenverhältnis nach Vereinfachungen das Ergebnis

$$\frac{\hat{x}_k}{\hat{x}_h} \approx \sqrt{\frac{K_{kh}J_{hh}}{K_{hk}J_{kk}}} \quad (5-7).$$

Dabei beschreiben die effektiven Federkonstanten-Summen  $K_{kh}$  und  $K_{hk}$  die Kraftwirkungen, die der kalte Kolben aufgrund einer Auslenkung  $x_h$  des heißen bzw. umgekehrt der heiße aufgrund einer Auslenkung  $x_k$  des kalten erfährt. Sie sind ebenso wie  $K_{kk}$  und  $K_{hh}$  positiv definiert, wenn sie wie eine „normale“ Feder rückstellend wirken, d.h. wenn eine positive Auslenkung des betreffenden Kolbens eine in negativer Richtung wirkende Kraft zur Folge hat. Die Ausdrücke für  $K_{kh}$  und  $K_{hk}$  sind dabei abhängig vom prinzipiellen Aufbau des Schwingungssystems. Wird wie zuvor beschrieben eine durchgehende Kolbenstange einheitlichen Querschnittes verwendet, so bestehen grundsätzlich zwei konstruktive Möglichkeiten:

- a) Die Kolbenstange ist mit dem Gehäuse starr verbunden. Beide Verdrängerkolben sind dann mit ihr zum einen durch die Gasfeder verbunden, die wegen der begrenzten inneren Volumina der Kolben zwangsläufig entsteht (und bei Bedarf durch gezieltes Verkleinern des Federvolumens zumindest in gewissen Grenzen verstärkt werden kann). Zum anderen besteht konstruktiv die Möglichkeit, beide Kolben jeweils durch eine zusätzliche mechanische Feder zum Gehäuse hin abzustützen. Eine Feder zwischen den beiden Verdrängerkolben ist dagegen in dieser Variante konstruktiv nur schwer realisierbar, und somit erfolgt die für das gewünschte Schwingungsverhalten unverzichtbare Kopplung der beiden Teilsysteme in diesem Fall ausschließlich über den Prozessdruck, der durch die (vorrangig thermische) Kompressionswirkung beider Kolben verändert wird. Über den Querschnitt der Kolbenstange kommt es somit stets zu einer Kraftwirkung nicht nur auf den die Kompression verursachenden Kolben selbst, sondern auch auf den jeweils anderen.
- b) Die Kolbenstange ist mit einem der beiden Verdrängerkolben fest verbunden. In diesem Fall, der von THOMAS (1992) realisiert wurde, existiert lediglich eine Gasfeder (entweder im heißen oder – konstruktiv vorteilhafter – im kalten Kolben), die beide Kolben miteinander koppelt und die im Bedarfsfall problemlos durch eine zusätzliche mechanische Feder unterstützt werden kann.

Somit gilt mit den Definitionen von  $x_k$  und  $x_h$  gemäß Abb. 5-17 im Fall a) bei gleichen Stangenquerschnitten  $A_{St,h} = A_{St,k} = A_{St}$  für die in Gl. 5-7 auftretenden Federkonstantenterme

$$K_{kh} = -A_{St} \left( \frac{\partial p}{\partial x_h} \right) \Big|_{x_h=0} > 0 \quad ; \quad K_{hk} = A_{St} \left( \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \Big|_{x_k=0} < 0 \quad (5-8),$$

während sich im Fall b) mit der zwischen den Kolben wirkenden, auch die Anteile der Gasfeder enthaltenden Federkonstante  $C_{hk}$  die Ausdrücke

$$K_{kh} = -C_{hk} - A_{St} \left( \frac{\partial p}{\partial x_h} \right) \Big|_{x_h=0} \stackrel{!}{>} 0 \quad ; \quad K_{hk} = -C_{hk} + A_{St} \left( \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \Big|_{x_k=0} < 0 \quad (5-9)$$

ergeben. Die angegebenen Vorzeichen sind dabei für die Schwingungsfähigkeit des Systems zwingend erforderlich. Setzt man diese Ergebnisse in Gl. 5-7 ein, so erkennt man, dass im Fall a) der Stangenquerschnitt herausfällt und somit eine Einstellung des Hubamplitudenverhältnisses nur noch sehr bedingt möglich ist, zumal die (negativen) partiellen Ableitungen des Prozessdruckes nach den Kolbenpositionen durch die Kolbenquerschnitte, die Totvolumina im Prozess und die Betriebstemperaturen praktisch festgelegt sind.

Demgegenüber bietet der Fall b) einen zusätzlichen Freiheitsgrad durch die Federkonstante  $C_{hk}$ , auch wenn die Bedingung  $K_{kh} > 0$  eine obere Schranke bildet. Im vorliegenden Fall hätte jedoch wegen der vorgegebenen Dämpfungskonstanten bereits der minimal mögliche, durch das maximal als Gasfedervolumen verfügbare Innere des kalten Verdrängerkolbens bestimmte Wert ein Amplitudenverhältnis  $\hat{x}_k / \hat{x}_h \ll 1$  zur Folge gehabt. Aus diesem Grunde wurde hier die Variante a) realisiert, da sich hier für das Amplitudenverhältnis aufgrund der vorliegenden Dämpfungskonstanten ein nur leicht über eins liegender Wert ergab.

Die im Vergleich zur Getriebeversion geringere Frequenz wurde gewählt, um zum einen das Amplitudenverhältnis nicht noch weiter über eins anwachsen zu lassen. Wegen des mit der Frequenz steigenden Leistungsbedarfs und der damit erforderlichen Vergrößerung des Kolbenstangenquerschnittes  $A_{St}$  würde sonst der in dieser Hinsicht positive Einfluss der konstruktiv erforderlichen, dünnen Stange im kalten Zylinderraum zurückgedrängt. Weiterhin

hätte eine dickere Kolbenstange zu Platzproblemen beim Einbau der erforderlichen Spiralfedern in den Kolben geführt, und es hätte sich im Falle der Feder zwischen dem heißen Kolben und dem Gehäuse eine noch größere erforderliche Federkonstante ergeben, die auch in der Kombination aus Gasfeder und mechanischer Feder nur schwer in dem verfügbaren Volumen hätte realisiert werden können. Damit ist diese erste Auslegung einer Freikolbenmaschine auf der Basis einer existierenden Getriebemaschine in verschiedener Hinsicht durch die Grenzen des konstruktiv Möglichen bestimmt, die hier bewusst zunächst nicht in jeder Beziehung voll ausgeschöpft wurden. Die im Vergleich zur Getriebemaschine schlechteren Ergebnisse gemäß Abb. 5-16 sind somit unter diesem Aspekt zu relativieren.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Realisierung von Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpen auch in der zur Gebäudeheizung und –klimatisierung erforderlichen Leistungsklasse möglich ist. Die wesentlichen Vorzüge im Vergleich zur Getriebemaschine sind:

- Das Getriebe als mögliche Störungsquelle und als potentiell die Lebensdauer der Maschine limitierende Komponente entfällt.
- Weiterhin wird auch hinsichtlich der Herstellungskosten, des Gewichtes und des Platzbedarfes ein Einsparungseffekt erzielt.
- Freikolbensysteme sind durch Absenken der Erhitzertemperatur leichter in den Teillastbetrieb zu versetzen, da die Kolbenhübe sowohl die Druckamplitude als auch das aktive Hubvolumen bestimmen und die Leistung somit quadratisch von ihnen abhängig ist. Die Abhängigkeit von der Drehzahl bei Getriebemaschinen ist dagegen nahezu linear.

Diese Vorzüge führten in der Folge auch an anderer Stelle zu entsprechenden Forschungs- und Entwicklungsprojekten. Hier ist insbesondere auf die Aktivitäten der Firmen Sanyo (SEKIYA ET AL. 1994, 1994a, 1995) und Mitsubishi (KAWAJIRI ET AL. 1994, YOKOYAMA ET AL. 1994, HONDA ET AL. 1995) hinzuweisen.

## 5.4.2 Gegenwärtige Entwicklungsziele

Das von HEIKRODT ET AL. (1996) sowie HEIKRODT UND HECKT (1999) dokumentierte, durch das BMBF geförderte Forschungsprojekt zur Entwicklung einer Vuilleumier-Wärmepumpe zur Gebäudeheizung hat gezeigt, dass bereits mit getriebegesteuerten Maschinen die Anforderungen des Marktes voraussichtlich erfüllt werden können. Daraufhin wird die Entwicklung der Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpe aufgrund der vorliegenden Erfahrungen und der genannten Vorzüge derzeit im Rahmen eines von der Deutschen Bundesstiftung Umwelt geförderten Projektes weitergeführt, da durch die genannten zusätzlichen Vorteile eine weitere Steigerung der Konkurrenzfähigkeit erwartet werden kann. Um dieses Ziel zu erreichen, sollen die im Versuchsbetrieb der FPV2 aufgetretenen, größtenteils bereits zuvor beschriebenen Probleme gelöst werden. Hier sind insbesondere zu nennen:

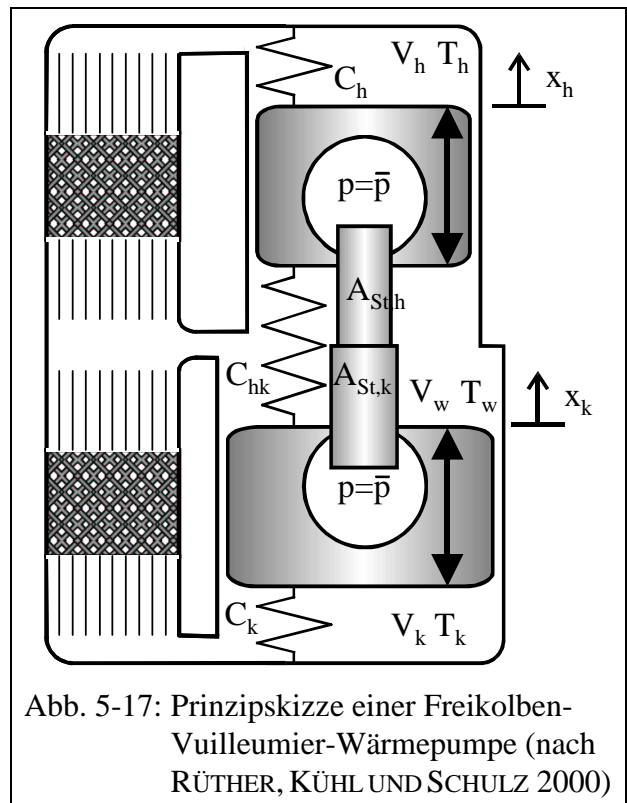
- Es ist eine zuverlässige Regelungsmöglichkeit für die Mittellage der Kolbenschwingungen zu entwickeln, die mit möglichst geringen dissipativen Verlusten verbunden ist. Die in der Literatur über Freikolben-Stirlingmaschinen häufig empfohlenen Center-Ports (s. z. B. BEALE 1983, URIELI UND BERCHOWITZ 1984, WALKER UND SENFT 1985) sind wegen der ständigen Drosselverluste durch das hin- und herströmende Gas als weniger geeignet einzustufen, zumal letztere sich bei niedrigen Frequenzen relativ zur produzierten Leistung besonders stark auswirken. Hinzu kommt, dass sich die mechanische Leistungsbilanz des Vuilleumier-Prozesses wegen des Fehlens zu- oder abgeführter Netto-Leistung allein auf das Gleichgewicht zwischen intern produzierter und dissipierter Leistung reduziert.

- Obwohl lineare Kolbenschwingungen aus Symmetriegründen theoretisch ohne Auftreten von Seitenkräften möglich sind, können diese in realen Maschinen – abhängig von der Bauart der erforderlichen mechanischen Federn – nicht völlig vermieden werden. Angesichts der hohen Lebensdauernforderungen sind trockenlaufende Gleitpaarungen aus Feststoffen wegen zu hoher Verschleißanfälligkeit zu vermeiden, zumal insbesondere an den Dichtspalten der Gasfedern Toleranzen von unter 1/100 mm einzuhalten sind. Darüber hinaus sind alle Formen von Festkörperreibung auch zur Verbesserung des Startverhaltens und zur Stabilisierung des Arbeitspunktes im Betrieb möglichst zu vermeiden.
- Als weiteres Problem der FPV2 in der beschriebenen Konfiguration ist das für den praktischen Einsatz als Heizungswärmepumpe ungeeignete Startverhalten zu nennen. Bei der in Kap. 5.4.1 als Fall a) beschriebenen Konfiguration mit feststehender Kolbenstange gelten für die Konstanten  $K_{kh}$  und  $K_{hk}$  die in Gl. 5-8 angegebenen Ausdrücke. Im Stillstand der Maschine ist jedoch i. d. R.  $T_k \approx T_w$  anzunehmen, und somit ist  $\partial p / \partial x_k \approx 0$ , da in diesem Zustand keine Kompressionswirkung des kalten thermischen Verdichters vorhanden ist. Damit fehlt eine der notwendigen Kopplungen im Schwingungssystem, d. h. der heiße Kolben erfährt keine Anregung aufgrund einer Auslenkung des kalten, das Amplitudenverhältnis nach Gl. 5-7 wird unendlich, und es ist kein Start der Maschine möglich.

Zur Lösung des zuletzt beschriebenen Problems wurde zunächst eine systematische Analyse aller denkbaren Konfigurationen durchgeführt<sup>3</sup>. Dabei wurde von der weitgehend verallgemeinerten, in Abb. 5-17 dargestellten Konfiguration mit drei möglichen Federpositionen und unterschiedlichen Kolbenstangendurchmessern  $A_{St,h}$  und  $A_{St,k}$  ausgegangen. Es wird weiterhin angenommen, dass grundsätzlich jede der drei Federn entweder gar nicht, nur als mechanische Feder, nur als Gasfeder oder als Kombination von beiden vorhanden sein kann. Die Annahme des mittleren Prozessdruckes in den Gasfedern gemäß Abb. 5-17 soll dabei zum Ausdruck bringen, dass evtl. vorhandene Gasfederwirkungen im folgenden rechnerisch den Federkonstanten  $C_h$ ,  $C_{hk}$  bzw.  $C_k$  zugeschlagen werden, um so die mathematische Behandlung zu vereinfachen.

Zur Bewertung wurden dabei folgende Kriterien zugrunde gelegt:

- Prinzipielle Schwingungsfähigkeit
- Start der Maschine bei  $T_k = T_w$  möglich
- Mindestens zwei mechanische Federn müssen vorhanden sein, um die Ruhelagen der Kolben zu fixieren
- Mehr als zwei mechanische Federn sollten wegen der zusätzlichen Komplexität und Störanfälligkeit vermieden werden
- Ebenso sollte die Zahl der Gasfedern auf zwei beschränkt werden, um zusätzliche Verluste sowie konstruktive Probleme bei der räumlichen Unterbringung zu vermeiden



<sup>3</sup> J. Rütther: Entwicklung von Konzepten zur verlust- und verschleißarmen Kolbenführung und -zentrierung in einer Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpe. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Thermodynamik, Universität Dortmund 1998

Zur Beurteilung nach den beiden erstgenannten Kriterien ist eine nähere Betrachtung des die Schwingung beschreibenden Differentialgleichungssystems 5-5 erforderlich. Um zu grundsätzlichen Aussagen über die Fähigkeit zu selbsterregten Schwingungen zu gelangen, ist jedoch die Betrachtung des ungedämpften Systems ausreichend. Ein System ist in diesem Sinne genau dann als schwingungsfähig zu bezeichnen, wenn das ungedämpfte System oszillierende Lösungen mit exponentiell ansteigender Amplitude besitzt. Hierzu wurde das ursprünglich von THOMAS (1992) für den Fall einer einheitlichen, durchgehenden Kolbenstange abgeleitete, beschreibende Gleichungssystem von RÜTHER ET AL. (2000) in verallgemeinerter Form hergeleitet und interpretiert. Ausgangspunkt ist dabei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \\ \dot{x}_h \\ \ddot{x}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_k^2 & 0 & -K_{kh}/m_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_{hk}/m_h & 0 & -\omega_h^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ x_h \\ \dot{x}_h \end{pmatrix} \quad (5-10),$$

das die vektorielle Formulierung von Gl. 5-5 für den Fall  $J_{kk} = J_{kh} = J_{hk} = J_{hh} = 0$  darstellt. Dabei wurde bereits vorweggenommen, dass für die Eigenfrequenzen der beiden Kolben

$$\omega_k = \sqrt{K_{kk}/m_k} \quad \text{bzw.} \quad \omega_h = \sqrt{K_{hh}/m_h} \quad (5-11)$$

gilt. Weiterhin gilt hier im allgemeinen Fall unterschiedlicher Kolbenstangen

$$K_{kk} = C_k + C_{hk} - A_{St,k} \cdot \left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \right|_{x_k=0} ; \quad K_{hh} = C_h + C_{hk} + A_{St,h} \cdot \left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_h} \right) \right|_{x_h=0} \quad (5-12),$$

$$K_{kh} = -C_{hk} - A_{St,k} \cdot \left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_h} \right) \right|_{x_h=0} ; \quad K_{hk} = -C_{hk} + A_{St,h} \cdot \left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \right|_{x_k=0} \quad (5-13).$$

Die Prozessdruckableitungen können grundsätzlich mit jedem beliebigen Prozessmodell ermittelt werden. In vielen Fällen ist bereits das ideale isotherme Modell gemäß Anhang 1.1 völlig ausreichend. Man erhält dann mit Gl. A1-2 nach einfacher Rechnung

$$\left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \right|_{x_k=0} = -\frac{\bar{p}}{B} \left( \frac{A_k}{T_k} - \frac{A_k - A_{St,k}}{T_w} \right) ; \quad \left. \left( \frac{\partial p}{\partial x_h} \right) \right|_{x_h=0} = -\frac{\bar{p}}{B} \left( \frac{A_h - A_{St,h}}{T_w} - \frac{A_h}{T_h} \right) \quad (5-14).$$

Um nun wie gefordert im ungedämpften Fall oszillierende Lösungen mit exponentiell steigender Amplitude zu erhalten, müssen unter den Eigenwerten  $\mu_i$  der Matrix in Gl. 5-10 komplexe Zahlen mit positivem Realteil sein. Sie ergeben sich in diesem Fall als Lösungen einer biquadratischen Gleichung, so dass nur zwei Paare konjugiert komplexer Lösungen möglich sind:

$$\mu_{1..4} = \pm \sqrt{-\frac{\omega_k^2 + \omega_h^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\omega_k^2 - \omega_h^2}{2} \right)^2 + \frac{K_{kh}}{m_k} \cdot \frac{K_{hk}}{m_h}}} \quad (5-15)$$

Damit dieser Fall eintritt, muss offensichtlich das Produkt  $K_{kh} \cdot K_{hk}$  negativ sein. Dies bedeutet zwingend  $K_{kh} > 0$  und  $K_{hk} < 0$ , da der umgekehrte Fall physikalisch nicht möglich ist

(nach Gl. 5-13 ist stets  $K_{hk} \leq 0$ ). Der Grenzfall  $K_{hk} = 0$  soll dabei wegen des Startverhaltens auch für  $T_k = T_w$ , d. h. für  $\partial p / \partial x_k \approx 0$ , ausgeschlossen werden. Damit ist also eine Feder  $C_{hk}$  zwischen den Kolben unbedingt erforderlich, was die Auswahl geeigneter Varianten deutlich einschränkt. Weiterhin ist die Bedingung  $K_{kh} > 0$  gemäß Gl. 5-13 nur mit  $A_{St,k} > 0$  zu erfüllen, d. h. die kalte Kolbenstange ist unbedingt erforderlich, und damit existiert auch stets eine Gasfeder am kalten Kolben (die entweder  $C_k$  oder  $C_{hk}$  zuzurechnen ist). Die analoge Forderung bezüglich der heißen Stange ist an dieser Stelle nicht ableitbar.

Während THOMAS (1992) mit der Annahme eines einheitlichen Kolbenstangenquerschnittes  $A_{St}$  unter Einsetzen der Bedingung  $K_{kh} > 0$  in den Ausdruck für  $K_{hh}$  nach Gl. 5-12 zu dem Ergebnis kam, dass eine Feder  $C_h$  zwischen heißem Kolben und Gehäuse stets erforderlich ist, um  $K_{hh} = m_h \cdot \omega_h^2 > 0$  als notwendige Bedingung für die Schwingungsfähigkeit zu erfüllen, kann diese Bedingung jetzt für den Fall  $A_{St,h} < A_{St,k}$  nicht mehr aufrecht erhalten werden. Vielmehr eröffnet sich hier die Möglichkeit einer konstruktiv einfachen und daher beachtenswerten Variante, nämlich des Falles  $A_{St,h} = 0$ . Die Zahl der – stets verlustbehafteten – Gasfedern lässt sich so auf eine (zwischen kaltem Kolben und Gehäuse) reduzieren. Weiterhin sind die Bedingungen  $K_{hh} > 0$  und  $K_{hk} < 0$  allein durch die (mechanische) Feder  $C_{hk}$  zu erfüllen, und die Bedingung  $K_{kh} > 0$  ist mit einer entsprechend bemessenen kalten Kolbenstangenfläche  $A_{St,k}$  bzw. mit einer entsprechend schwach ausgelegten Feder  $C_{hk}$  ebenfalls erfüllbar. Die (ggf. mechanische) Feder  $C_h$  kann somit u. U. völlig entfallen.

In diesem Fall wird die zum Betrieb erforderliche mechanische Leistung allein über die verbliebene Kolbenstange und somit durch den zwischen  $T_h$  und  $T_w$  arbeitenden „Stirlingmotor“ erzeugt, was aus thermodynamischer Sicht positiv zu bewerten ist. Weiterhin erhöht sich gemäß Gl. 5-14 die Kompressionswirkung des heißen Verdrängerkolbens und damit die Leistungsdichte der Maschine. Nachteilig ist lediglich, dass die in Kap. 5.4.1 beschriebene Steigerung der Leistungsproduktion mit dem Temperaturhub nicht eintritt. Dies wurde jedoch anhand der vorliegenden Beziehungen und aufgrund anfänglicher Simulationsrechnungen als akzeptabel beurteilt, zumal grundsätzlich die Möglichkeit der Leistungssteigerung über die Erhitzertemperatur bestand. Da die Forderung bezüglich des Startverhaltens erfüllt ist und weil diese Variante aufgrund ihrer Einfachheit zusätzliche Vorteile verspricht, wurde sie bei der Weiterentwicklung der Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpe favorisiert.

Die Zahl möglicher Varianten, die ohne die zusätzliche Bedingung  $A_{St,h} = 0$  bei Anwendung der oben genannten Kriterien noch 13 betrug (RÜTHER ET AL. 2000), reduziert sich nunmehr auf lediglich zwei. Beide sind jeweils durch eine Gasfeder zwischen kaltem Kolben und Gehäuse und eine mechanische Feder  $C_{hk}$  zwischen den Kolben gekennzeichnet und unterscheiden sich lediglich darin, das als zweite, zur Fixierung der Ruhelage der Kolben benötigte mechanische Feder in einem Fall  $C_h$  und im anderen Fall  $C_k$  vorhanden ist.

Die Abstimmung des Schwingungssystems kann nun in der Weise erfolgen, dass zunächst für gegebene Frequenz- und Amplitudenwerte die kalte Kolbenstange so dimensioniert wird, dass die erforderliche Leistung zur Verfügung steht. Daraufhin kann über die Federkonstante  $C_{hk}$  das Amplitudenverhältnis beliebig abgestimmt werden, denn es gilt mit Gl. 5-7

$$\frac{\hat{x}_k}{\hat{x}_h} \approx \sqrt{\frac{A_{St,k} \cdot \left| \frac{\partial p}{\partial x_h} \right| - C_{hk}}{C_{hk}}} \cdot \frac{J_{hh}}{J_{kk}} \quad (5-16).$$

Schließlich müssen die Eigenfrequenzen der Kolben gemäß Gl. 5-11 der gewünschten Schwingungsfrequenz des Systems angenähert werden, denn für diese erhält man

$$\omega^2 = \frac{1}{4}(\omega_k^2 + \omega_h^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_k^4 + \omega_h^4) + \frac{K_{kh}}{m_k} \cdot \frac{K_{hk}}{m_h}} \approx \frac{1}{2}(\omega_k^2 + \omega_h^2) \quad (5-17),$$

wenn man die Lösung des ungedämpften Systems betrachtet. Näherungsweise gilt dies auch für das gedämpfte System, für das SCHULZ UND THOMAS (1992) die genaue Lösung angeben. Nach THOMAS (1992) erhält man weiterhin für die Phasenverschiebung  $\theta$  der Kolbenschwingungen im Falle des gedämpften Systems nach einigen Vereinfachungen

$$\tan \theta \approx \omega \frac{J_{kk}/m_k + J_{hh}/m_h}{\omega_h^2 - \omega_k^2} \quad (5-18),$$

so dass der gewünschte Wert von ca.  $90^\circ$  nur mit zumindest annähernd gleichen Eigenfrequenzen erreicht werden kann<sup>4</sup>. Umgekehrt kann eine Feinabstimmung des Phasenwinkels durch gegenläufiges Variieren der Eigenfrequenzen vorgenommen werden. Dies kann i. d. R. über die Kolbenmasse geschehen, es sei denn, dass die Eigenfrequenz bei der konstruktiv mindestens erforderlichen Kolbenmasse bereits zu niedrig liegt. In diesem Fall muss man sie durch Vergrößern der Federkonstanten-Summen  $K_{kk}$  bzw.  $K_{hh}$  anpassen.

Die Auswertung von Gl. 5-12 ergibt für den kalten Kolben stets einen relativ hohen Wert für  $K_{kk}$ , da die Gasfeder  $C_k$ , die mechanische Feder  $C_{hk}$  und die Wirkung des Prozessdruckes über  $\partial p / \partial x_k$  hier jeweils positiv eingehen. Daher ist hier i. d. R. eine Abstimmung über die Kolbenmasse möglich, und eine zusätzliche Feder  $C_k$  ist entbehrlich. Im Falle des heißen Kolbens ergeben sich jedoch geringere Werte für die entsprechende Federkonstanten-Summe  $K_{hh}$ , da hier zunächst lediglich  $C_{hk}$  eingeht. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, von den beiden möglichen Varianten diejenige zu realisieren, bei der die zweite erforderliche mechanische Feder als  $C_h$  zwischen dem Gehäuse und dem heißen Kolben angeordnet ist, denn durch sie kann dann schließlich auch die Eigenfrequenz des heißen Kolbens angepasst werden.

Man erkennt, dass die Zahl der verfügbaren Freiheitsgrade bei dieser Variante ausreicht, um das Schwingungssystem in jeder gewünschten Beziehung, also auch hinsichtlich des Amplitudenverhältnisses und des Phasenwinkels, abzustimmen. Es ist somit dem anfangs realisierten System der FPV2 eindeutig überlegen.

Abb. 5-18 zeigt die ursprüngliche und die modifizierte Version der FPV2 im Vergleich. Die Feder zwischen den Kolben wurde in den Prozessraum gelegt, da der heiße Kolben keine Stange besitzt und daher nicht auf diesem Wege angebunden werden kann. Aus Platzgründen (Totvolumen-Vermeidung) ist nur eine einzelne, wechselnd auf Zug und Druck beanspruchte Feder ausgeführt. Der kalte Kolben musste zur Abstimmung der Eigenfrequenz mit zusätzlicher Masse beschwert werden. Demgegenüber wurde der heiße Kolben so leicht wie möglich ausgeführt. So gelang es, die Abstimmung der Eigenfrequenz mit einer relativ schwachen Feder  $C_h$  durchzuführen, die durch das Eigengewicht der Kolben soweit vorgespannt ist, dass sie stets – auch bei voller Schwingungsamplitude – einseitig druckbelastet bleibt. Auf ein Paar gegeneinander verspannter Druckfedern, wie sie in der ursprünglichen Version eingesetzt wurden, konnte daher auch bei dieser Feder verzichtet werden.

Abb. 5-19 zeigt das Startverhalten der modifizierten Freikolben-Wärmepumpe FPV2 im Falle gleicher warmer und kalter Kreislauftemperaturen ( $T_k = T_w = 25^\circ\text{C}$ ). Man erkennt, dass sich direkt nach dem Start große Kolbenhübe entwickeln und dass das Amplitudenverhältnis nahe bei eins liegt. Das kurzzeitig auftretende Plateau bei Hüben von 35 mm bzw. 40 mm ist auf

<sup>4</sup> Bei der Lösung des Gleichungssystems der ungedämpften Schwingung erhält man stets eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$ . Dies ist eine Folge der Vereinfachung und bestätigt sich bei Beachtung der Dämpfung nicht.



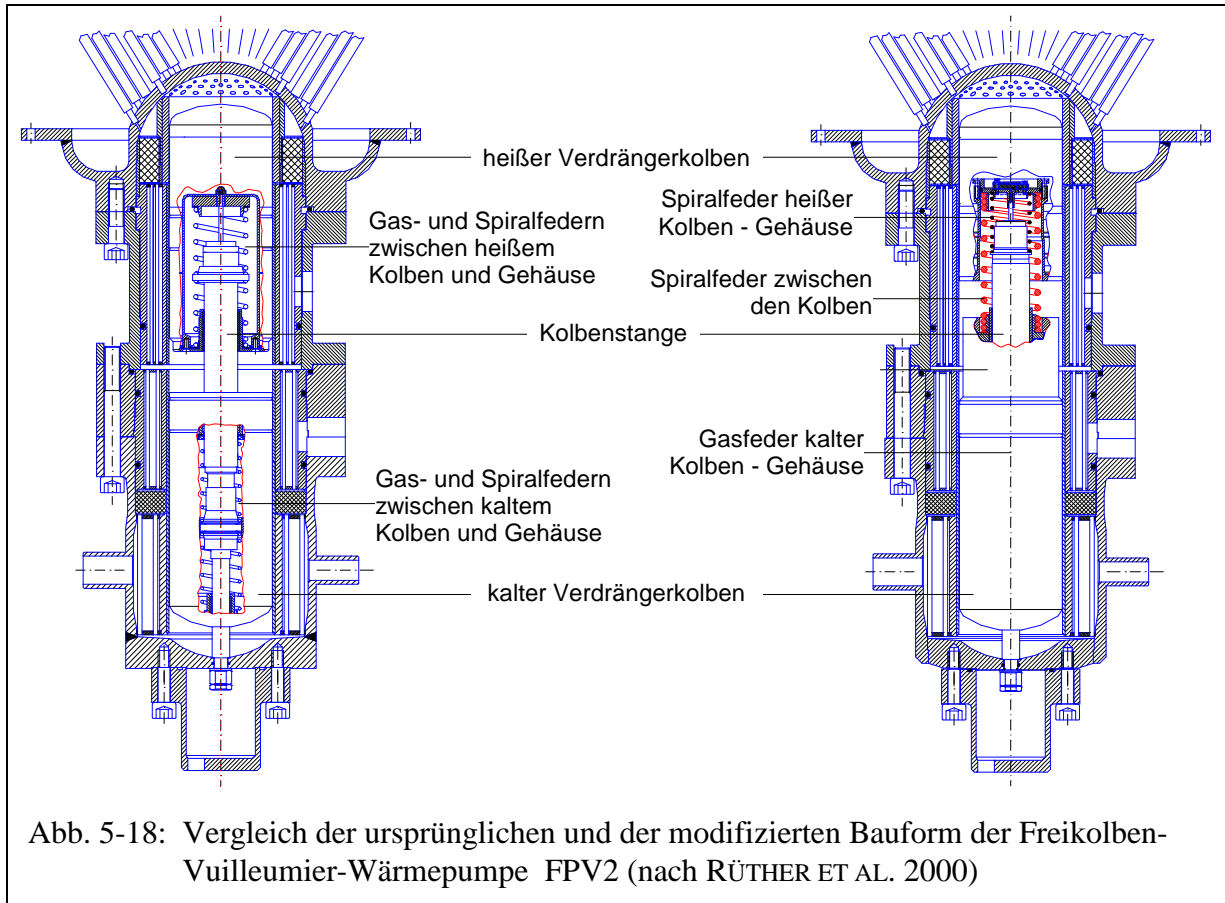


Abb. 5-18: Vergleich der ursprünglichen und der modifizierten Bauform der Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpe FPV2 (nach RÜTHER ET AL. 2000)

einen vorübergehenden Abfall der Erhitzertemperatur kurz nach dem Start zurückzuführen, der durch die plötzlich gestiegene Wärmeaufnahme der Maschine verursacht wird und durch Nachregeln der Brennerleistung kompensiert werden muss.

Die anschließenden Veränderungen der Kreislauftemperaturen dokumentieren qualitativ die Wärme- und Kälteleistung der Maschine.

In Abb. 5-20 ist das Betriebsverhalten beider Bauformen gegenübergestellt. Zunächst ist zu erkennen, dass das Amplitudenverhältnis der modifizierten Maschine nahezu konstant ist, während es bei der ursprünglichen Version stark vom Temperaturhub abhängt und bei niedrigen Werten erheblich von eins abweicht, wie bereits anhand von

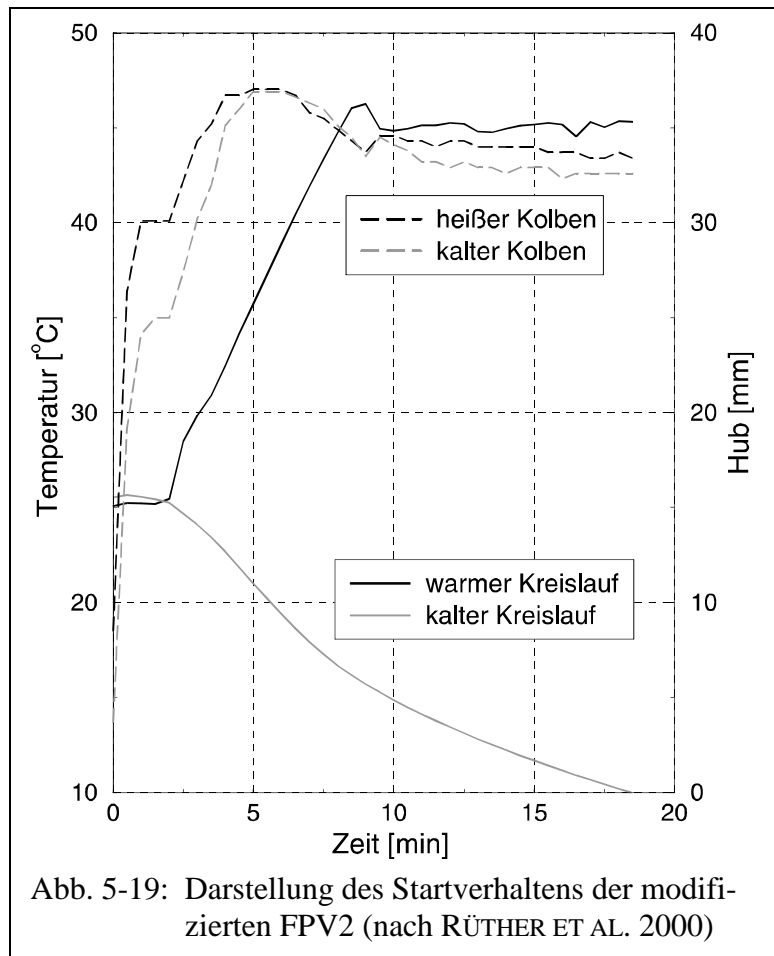
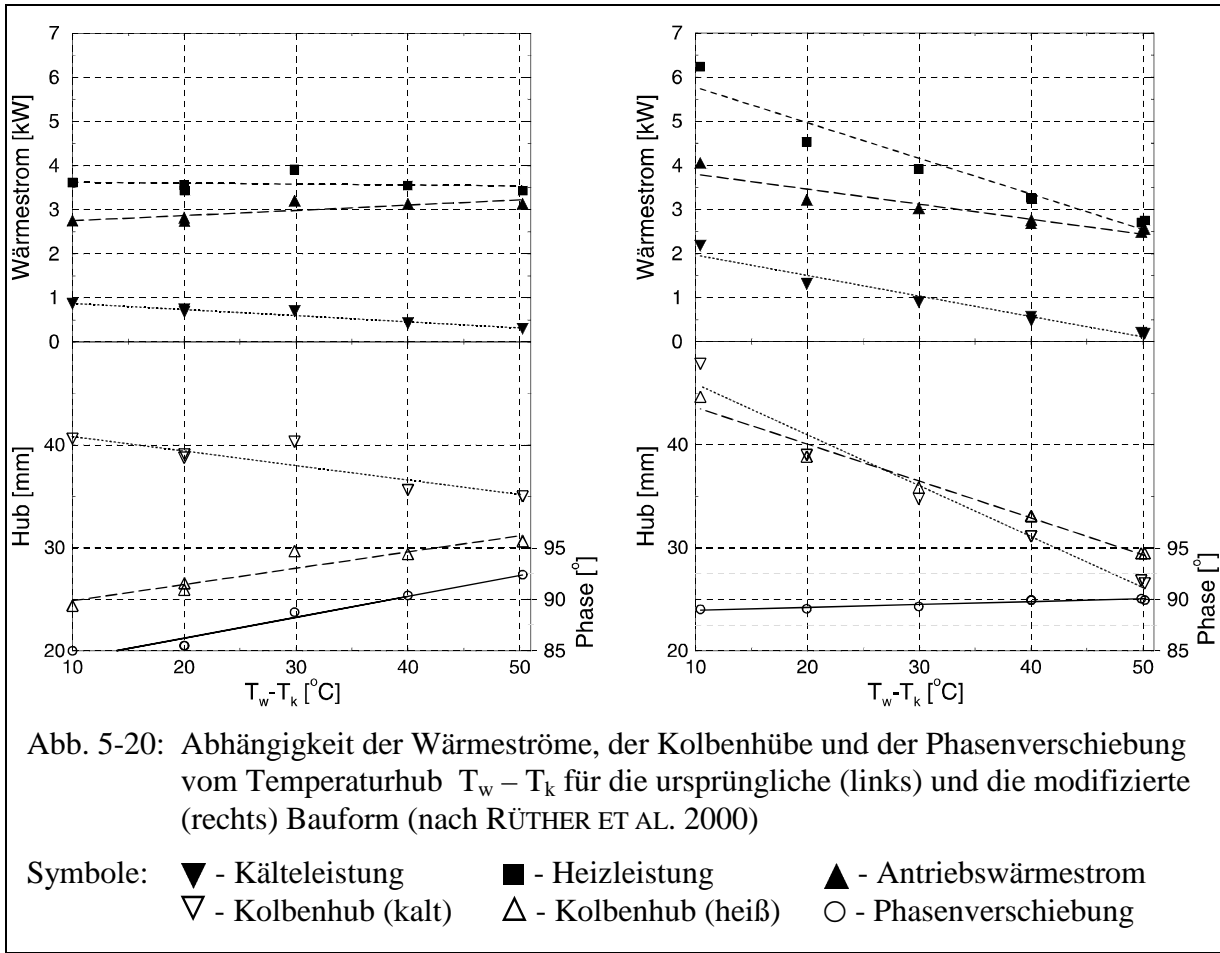


Abb. 5-19: Darstellung des Startverhaltens der modifizierten FPV2 (nach RÜTHER ET AL. 2000)



Gl. 5-7 vorhergesagt werden konnte. Ein Start der Maschine wäre z. B. bei  $T_w - T_k = 10$  K bereits nicht mehr möglich gewesen. Als nachteilig erweist sich jedoch bei der modifizierten Bauart der unerwartet starke Abfall der Hubamplituden und damit der Heizleistung bei steigendem Temperaturhub, das anhand der obigen, vereinfachten Gleichungen nicht in diesem Maße zu begründen ist und im Versuchsbetrieb auch durch Erhöhen der Erhitzertemperatur nicht in vollem Umfang kompensiert werden konnte. Hier zeigt sich, dass die über die heiße Kolbenstange produzierte mechanische Leistung für das Betriebsverhalten der Maschine von größerer Bedeutung ist als ursprünglich angenommen. Aus diesem Grunde ist im nächsten Entwicklungsschritt geplant, die heiße Stange wieder einzuführen, allerdings mit gegenüber der kalten deutlich reduziertem Querschnitt. Dies erfordert zwar eine weitere, eng tolerierte Stangendichtung, jedoch kann nach wie vor eine (gemeinsame) Gasfeder eingesetzt werden, und es bietet sich der konstruktive Vorteil, dass mit der Stange auch die Anbindung des heißen Kolbens an die mechanischen Federn aus dem Prozessraum heraus verlagert werden kann.

Das zweite zu Beginn dieses Kapitels genannte Problem, die Regelung der Kolben-Mittellage, wurde mit dem bereits von WALKER (1980) vorgeschlagenen Konzept einer aktiven Regelung gelöst. Dieses scheinbar aufwändige Verfahren lässt sich mit Hilfe eines Miniatur-Magnetventils und des stets – zumindest in einfacher Form, d. h. als Grenzwertüberwachung – erforderlichen Positionssensors auf kostengünstige und zugleich zuverlässige Weise realisieren. Das Prinzip ist in Abb. 5-21 dargestellt und stellt letztlich eine Regelung des mittleren Druckes in der Gasfeder dar.

Überschreitet der Kolben an einem seiner Totpunkte einen vorgegebenen Grenzwert, so besteht das Problem darin, dass die aktuelle Differenz zwischen Prozess- und Gasfederdruck dem erforderlichen Ausgleichsmassenstrom entgegengerichtet ist. Das Ventil darf also nicht

zu diesem Zeitpunkt öffnen, sondern ca. einen halben Prozesszyklus später, nachdem sich die Druckdifferenz umgekehrt hat. Dies wird durch eine einfache elektronische Schaltung erreicht. Auf diese Weise ist es auch möglich, Öffnungszeitpunkt und -dauer so zu steuern, dass die dissipativen Verluste minimal bleiben. Der Vorteil gegenüber den passiven Regelungskonzepten ist somit der, dass unnötige, periodisch hin- und herpendelnde (und dabei zusätzliche Verluste verursachende) Massenströme vermieden werden können.

Die gesamte Regelung ist mit serienmäßig verfügbaren, kostengünstigen Bauteilen realisierbar. Das eingesetzte Magnetventil erreicht nach Herstellerangaben eine Geschwindigkeit von 160 Zyklen pro Sekunde und eine Lebensdauer von 100 Millionen Zyklen. Dies entspricht zwar noch nicht den Anforderungen im Betrieb als Heizungssystem, jedoch besteht die Möglichkeit, hier alternativ piezoelektrische Ventile einzusetzen, mit denen über  $10^9$  Zyklen erreichbar sind. Derartige Ventile werden z. B. als Einspritzventile im Automobilmotorenbau entwickelt. Es ist daher davon auszugehen, dass sie in Zukunft als kostengünstige Serienbauteile verfügbar sind.

Für das dritte verbleibende Problem, die möglichst verschleißfreie Kolbenführung und -lagerung mit teilweise eng tolerierten Dichtspalten, existieren im wesentlichen zwei verschiedene, aus dem Bereich der Freikolben-Stirling-Maschinen bekannte Lösungsansätze. Der erste ist die Verwendung axialsymmetrischer Tellerfedern mit spiralförmigen Stegen (ROSS ET AL. 1991). Sie werden in der englischsprachigen Literatur als „flexure“ bezeichnet und sind besonders für kurze Kolbenhübe und große Querschnitte geeignet. Sie ermöglichen eine präzise radiale Führung, so dass auch bei eng tolerierten Dichtspalten eine berührungs- und damit verschleißfreie Lagerung möglich ist: Im Fall von Stirlingmaschinen können sie z. B. vorteilhaft im Bereich des Lineargenerators bzw. -motors untergebracht werden, im Falle von Freikolben-Vuilleumier-Maschinen sind jedoch wegen der relativ niedrigen Frequenz, der dadurch bedingt längeren Hübe und des Fehlens eines geeigneten, außerhalb des aktiven Prozessvolumens liegenden Einbauraumes die Einsatzbedingungen deutlich ungünstiger.

Aus den genannten Gründen wird daher im vorliegenden Fall die zweite Möglichkeit, der Einsatz von Gaslagern, favorisiert. Hier haben sich insbesondere die gasstatischen Lager bewährt, die aus einem Reservoir mit höherem Druckniveau versorgt werden. Ein solches Reservoir wird i. d. R. durch Einsatz eines Rückschlagventils geschaffen und erreicht so im Idealfall den maximalen Prozessdruck. Dies bedingt eine ungleichmäßige Lagerversorgung und ein kurzzeitiges Aussetzen, wenn der Prozessdruck sich dem Maximum nähert. Dies kann jedoch erfahrungsgemäß in Kauf genommen werden.

Weiterhin sind als Lagerungsmöglichkeiten noch die gasdynamischen und die magnetischen Lager zu nennen. Erstere erfordern eine Rotation der Kolben um ihre Längsachse, die mit zusätzlichem Energieaufwand aufrechterhalten werden muss. Wird diese Energie z. B. dem strömenden Prozessmedium über ein turbinenähnliches Flügelrad entzogen, so sinkt der Gütegrad des Gesamtsystems wegen des schlechten Wirkungsgrades dieses Antriebs. Andernfalls ist ein aufwändiger externer Antrieb über Elektromotoren o. ä. erforderlich.

Magnetische Lager sind nur mit präzise über Abstandssensoren geregelten Elektromagneten realisierbar, da permanentmagnetische Lager stets Instabilitäten aufweisen. Der mess- und regelungstechnische Aufwand ist hier so hoch, dass solche Lagerungen bislang nur in Sonderfällen, wie z. B. in der Raumfahrt, Bedeutung erlangt haben.

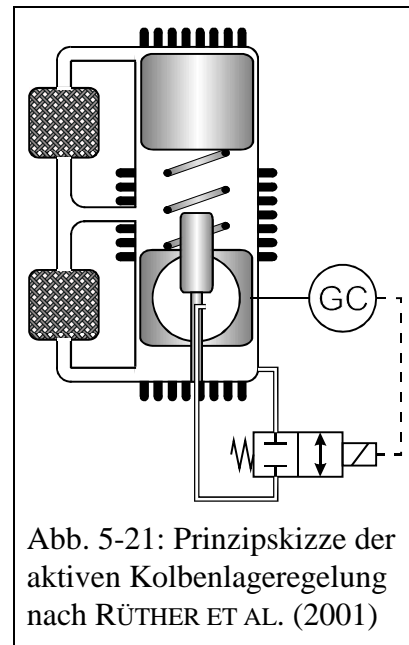


Abb. 5-21: Prinzipskizze der aktiven Kolbenlageregelung nach RÜTHER ET AL. (2001)

Das grundlegende Prinzip der gasstatischen Lager besteht darin, dass bei einer einseitigen Verengung des Lagerspalttes aufgrund von Momenten- oder Seitenkrafteinwirkungen der Gasdruck im Spalt ansteigt und umgekehrt. Es kommt somit zu einer entsprechenden Reaktionskraft, die das Lager stabilisiert. Derartige Lager können auf unterschiedliche Weise realisiert werden, z. B. als sog. einlassgedrosselte Lager, bei denen die Versorgung einzelner, über den Umfang verteilter Zonen vom Reservoir aus über separate Zuleitungen mit definiertem Strömungswiderstand erfolgt. Eine Aufweitung des Spalttes führt hier zu einem verstärkten Abfluss des Gases aus der betreffenden Zone und somit zu einem Druckabfall und umgekehrt.

Weiterhin besteht die Möglichkeit, durch geeignete Verschaltungen von Drosselstrecken im Laufspalt des Lagers und auf dem Umfang gegenüber angeordneten Tragtaschen einen ähnlichen, möglicherweise sogar stärker ausgeprägten Selbstregelungseffekt zu erzielen (sog. Laufspaltdrossel-Lagerung). Eine endgültige Bewertung und Auswahl ist hier nur nach eingehenderen theoretischen und experimentellen Untersuchungen möglich, wobei die Schwierigkeit darin besteht, dass die Leistungsfähigkeit eines derartigen Lagers in der laufenden Maschine messtechnisch nur sehr schwer erfasst werden kann. Aus diesem Grunde wird im Rahmen des genannten Projektes z. Z. ein separater Versuchstand aufgebaut, mit dem verschiedene Lagertypen unter realitätsnahen Bedingungen erprobt werden können (RÜTHER ET AL. 2001).

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt lässt sich zusammenfassend sagen, dass die Übertragung des Freikolbenkonzeptes auf Vuilleumier-Wärmepumpen weiterhin als sehr aussichtsreich zu bewerten ist, da die Vorteile gegenüber der getriebegesteuerten Bauart hinsichtlich Kosten und Lebensdauer offensichtlich sind und für die zu Beginn dieses Kapitels genannten Probleme entweder bereits praktikable Lösungen vorliegen oder zumindest erfolgversprechende Lösungsansätze existieren, die in absehbarer Zeit realisiert werden können.

Zugleich ist in diesem Kapitel sicherlich deutlich geworden, dass zwar die Randbedingungen, unter denen die Lösungen für die vorliegenden Probleme gesucht werden müssen, in verschiedener Hinsicht durch die thermodynamische Auslegung und Optimierung des Prozesses definiert werden, dass jedoch hierbei zunehmend andere, nicht mehr der Thermodynamik zuzuordnende Wissensgebiete Bedeutung erlangen. Die endgültige Entwicklung einer Vuilleumier-Wärmepumpe (oder auch eines anderen regenerativen Kreisprozesses) bis zur kommerziellen Einsatzfähigkeit im Bereich der Energieumwandlung – insbesondere der Wärmetransformation im allgemeinsten Sinne des Wortes – ist in jedem Fall nur durch interdisziplinäre Zusammenarbeit möglich, wobei die Thermodynamik als ingenieurwissenschaftliches Grundlagenfach umso weiter in den Hintergrund treten wird, je mehr man sich dabei dem praktischen Anwendungsfall und der industriellen Serienfertigung nähert.

## 6 Zusammenfassung

Unter den thermodynamischen Kreisprozessen zur Energieumwandlung besitzen die sog. perfekten Prozesse, bei denen der Wärmeaustausch mit den beteiligten Reservoirs im Idealfall isotherm verläuft, das größte Potential zur Erreichung hoher Gütegrade. Neben dem Carnot-Prozess, der wegen seiner geringen Leistungsdichte nur theoretisch von Interesse ist, zählen hierzu die regenerativen Prozesse, auf die sich diese Arbeit konzentriert. Der Verzicht auf Phasenumwandlungen des Arbeitsmediums ermöglicht hier einen nahezu verlustfreien inneren Wärmeaustausch in Regeneratoren und entkoppelt weiterhin den Druck von den Betriebstemperaturen. Damit entfällt hier der sonst bei Wärmepumpen und Kältemaschinen stets beobachtete Leistungsabfall mit sinkender kalter Temperatur. Dies lässt diese Prozessgruppe gerade für Anwendungen in den genannten Bereichen als besonders geeignet erscheinen.

Für die sinnvolle, zielgerichtete Synthese derartiger Prozesse aus ihren funktionellen Grundbausteinen, dem mechanischen und dem thermischen Verdichter, wurden allgemeine Regeln entwickelt. Dabei ist zwischen Prozessen mit ausschließlich thermischer Kompression – mit dem Vuilleumier-Prozess als einfachstem Vertreter – und solchen mit zusätzlicher mechanischer Kompression zu unterscheiden. Letztere sind weiter unterteilbar in die Prozesse der Stirling-Gruppe, in denen die Volumenänderung der Übertragung mechanischer Leistung dient, sowie den Duplex-Ericsson-Prozess und seine Abkömmlinge, in denen sie lediglich eine gegenphasige Druckschwankung und damit indirekt den Austausch von Wärmeströmen bewirkt.

Es wurde gezeigt, dass weitere sinnvolle Prozesse nur durch gezieltes Hinzufügen weiterer thermischer Verdichter zu den genannten Grundtypen entstehen können, wobei ein Wärmeaustausch auf entsprechend vielen Temperaturniveaus gefordert sein muss. Das Ergebnis sind dann Prozesse mit mehrfacher Expansion, wie sie z. B. bei Anwendungen in der Kryotechnik zu finden sind. Allgemein eignen sich damit alle regenerativen Prozesse zur theoretisch reversiblen Transformation von Wärmeströmen zwischen verschiedenen Temperaturniveaus, wobei der als Wärmekraftmaschine bekannte Stirlingmotor eher wie ein Sonderfall erscheint.

Während auf der Ebene einer thermodynamisch verlustfreien, idealisierten Betrachtung zunächst nur die Leistungsdichte als Bewertungskriterium bei der Synthese geeigneter Prozesse dienen kann, müssen bei der Prozessauswahl unter den konkreten Randbedingungen eines Anwendungsfalles stets zusätzlich die wesentlichen Verlustmechanismen betrachtet werden. Anhand des unmittelbar mit der Druckamplitude zusammenhängenden und in praktisch ausgeführten Maschinen kaum vermeidbaren adiabatischen Verlustes wurde gezeigt, dass insbesondere für Wärmepumpen- und Kältemaschinenanwendungen im umgebungsnahen Bereich, d. h. bei kleinen Temperaturhüben, wegen des höheren erreichbaren Gütegrades den Prozessen mit geringer Leistungsdichte der Vorzug gegeben werden sollte und dass aus diesem Grunde sogar der bewusste Verzicht auf die mechanische Kompression sinnvoll ist. Damit rückt insbesondere der Vuilleumier-Prozess in den Mittelpunkt des Interesses, was durch eine Reihe entsprechender Forschungs- und Entwicklungsprojekte bestätigt wird.

Für die Optimierung der Prozessauslegung werden mathematische Modelle benötigt, die auf verschiedenen Ebenen der Komplexität vorliegen und als solche nicht Gegenstand dieser Schrift sind. Sie wurden in Kürze dargestellt und diskutiert. Anschließend wurden ausgewählte Aspekte der Simulation behandelt, die für die Verlässlichkeit der Modelle von besonderer Bedeutung sind und die z. T. zuvor nur unzureichend theoretisch behandelt worden waren. Dies gilt insbesondere für die Auswirkungen von mikroskopischen und makroskopischen Inhomogenitäten der Matrix auf die thermischen Regeneratorverluste sowie für die bislang oft sehr unsichere Beschreibung von Druckverlusten und Wärmeübergängen in Regeneratoren mit

regelloser Fasermatrix sowie in Rekuperatoren bei nicht ausgebildeter, kompressibler, periodisch oszillierender Strömung. Hierzu wurden einige weiterführende Beiträge geliefert.

Bei der Prozessauslegung und -optimierung ist zwischen globalen, den gesamten Prozess betreffenden Parametern und lokalen Parametern der einzelnen Komponenten zu unterscheiden. Zu ersteren zählen Druck, Drehzahl, Hubvolumina, ggf. Phasenwinkel und die Summe der temperaturbezogenen Totvolumina. Bei letzteren – es handelt sich hier um die geometrische Daten der Wärmeaustauscher und Regeneratoren – wurde durch geeignete Definition eine weitgehende Wechselwirkungsfreiheit zwischen den Parametern verschiedener Prozesskomponenten erreicht, so dass deren Auslegungen als separate Unteroptimierungen voneinander entkoppelt werden konnten und die Gesamtoptimierung eine hierarchische Struktur erhielt.

Um grundsätzliche Aussagen zur Lage und Existenz optimaler Werte für die einzelnen Parameter zu ermöglichen, wurden geeignete dimensionslose Kennzahlen genutzt bzw. eingeführt, und es wurden die Möglichkeiten und Grenzen der Skalierung regenerativer Kreisprozesse – auch im Hinblick auf einen Wechsel des Arbeitsmediums – aufgezeigt. Weiterhin wurden einfache dimensionslose Beziehungen für eine grobe Vorab-Auslegung von Zylinder-Kolben-Systemen, Wärmeübertragern und Regeneratoren abgeleitet, die einige grundlegende Abhängigkeiten und Einflüsse erkennen lassen. Auf dieser Grundlage war auch eine vereinfachte Betrachtung des Gesamtprozesses möglich. Sie zeigte, dass bezüglich der globalen Parameter Druck, Drehzahl und Hubvolumen keine thermodynamisch begründeten Optima in physikalisch sinnvollen Bereichen existieren und dass daher jede Wahl dieser Größen – als Grundlage für nachfolgende numerische Optimierungen – einen anwendungsabhängigen Kompromiss zwischen thermodynamischer Güte und Leistungsdichte bzw. –gewicht darstellt.

Eine Feinoptimierung auf der Basis komplexer Prozessmodelle wird durch die numerisch bedingten Integrations- und Abbruchfehler erschwert, die den direkten Einsatz von Newton- oder Gradientenverfahren ausschließen. Als mögliche Lösungswege für dieses Problem wurden hier zum einen der Einsatz von Suchmethoden unter Ausnutzung der o. g. hierarchischen Struktur des Problems und zum anderen die Verwendung lokal an die Zielfunktion angepasster, stabil differenzierbarer Approximationen vorgestellt und diskutiert. Auch im letzteren Fall wurde dabei die auf weitgehende Wechselwirkungsfreiheit ausgerichtete Parameterdefinition genutzt, da so die Zahl der benötigten Funktionsaufrufe unter Ausnutzung statistischer Methoden aus dem Bereich der Versuchsplanung erheblich reduziert werden kann. Wie anhand eines Beispiels gezeigt wurde, benötigt diese Methode, die zudem auch die Einbeziehung von Nebenbedingungen ohne Verschlechterung des Konvergenzverhaltens zulässt, dann einen im Vergleich zur erstgenannten deutlich geringeren Rechenaufwand für die Gesamtoptimierung.

Nach dem Problem der Prozessentwicklung und -auswahl ist damit auch das der thermodynamischen Optimierung mit den entwickelten Methoden grundsätzlich gelöst. Da sie jedoch oft an fertigungstechnische oder wirtschaftliche Grenzen stößt, wurden abschließend einige Ansätze zur konstruktiven Optimierung unter Kostengesichtspunkten dargestellt. Hierzu zählt die Entwicklung von Wärmeübertrager-Bauarten, mit denen sich hohe Kanalzahlen mit kleinen hydraulischen Durchmessern vorteilhaft realisieren lassen. Weiter ist hier die Suche nach kostengünstigen Regeneratormaterialien und deren vergleichende experimentelle Untersuchung zu nennen sowie die Entwicklung fertigungstechnisch und hinsichtlich der Lebensdauer optimierter Getriebemechanismen. Schließlich wurde mit der Übertragung der vom Stirling-Prozess bekannten Freikolbenbauweise auf Vuilleumier-Wärmepumpen ein weiterer Weg aufgezeigt, um durch Senkung der Herstellungskosten den Einsatz regenerativer Prozesse gerade in dem unter Kostenaspekten kritischen Bereich der Heizungstechnik und der umgebungsnahen Kältetechnik zu ermöglichen, denn gerade in diesen Bereichen liegen hierzulande die wohl größten Potentiale zur Reduktion des Primärenergieverbrauches und der CO<sub>2</sub>-Emissionen.

# Literaturverzeichnis

- Akhavan, R.; Kamm, R. D.; Shapiro, A. H. (1991): An investigation of transition to turbulence in bounded oscillatory Stokes flow. Part 1: Experiments.  
J. Fluid Mech., Vol. 225, S. 395-422
- Akhavan, R.; Kamm, R. D.; Shapiro, A. H. (1991a): An investigation of transition to turbulence in bounded oscillatory Stokes flow Part2: Numerical simulations.  
J. Fluid Mech., Vol. 225, S. 423-444
- Azetsu, A.; Nakajima, N.; Hirata, M. (1982): Computer simulation model for Stirling engine.  
Stirling Engines - progress towards reality, Reading, No. C17/82, S. 57-64
- Babcock, G. H. (1885): Substitutes for Steam. Trans. Am. Soc. mech. Engrs. 7, S. 680ff
- Bandermann, F. (1972): Statistische Methoden beim Planen und Auswerten von Versuchen.  
In: Bartholomé, E. et al. (Hrsg.): Ullmanns Encyclopädie der technischen Chemie, 4. Aufl., Bd. 1, Verlag Chemie, Weinheim, S. 293ff
- Bartczak, L.; H; Carlsen (1991): An Optimization Study of Stirling Engines Based on Advanced Simulation. Proc. 5th ISEC, Dubrovnik, YU, No. 91037, S. 161-166
- Baumüller, A. (1992): Technischer Stand des Motors V 160, Weiterentwicklung der Maschine bei Solo. Proc. Europäisches Stirling Forum 1992, S. 35-36
- Baumüller, A. (1996): Anwendungen und Märkte für stationäre Stirlingmaschinen heute - Aufbau der Heizkraft-Module und Solarmaschinen auf Basis des SOLO Stirling 161. Proc. Europäisches Stirling Forum 1996, S. 127-137
- Baumüller, A.; Schmieder, E. (2001): Field-test and market introduction of a 10 kW Stirling engine as CHP- and solar module. Proc. 10th ISEC, Osnabrück, S. 106-113
- Bauwens, L. (1990): Consistency, Stability, Convergence of Stirling Engine Models.  
Proc. 25th IECEC, Reno, Nevada, S. 5.352-5.358
- Bauwens, L. (1993): Stirling Engine Modeling on Eulerian Grids.  
Proc. 28th IECEC, Atlanta, GA, No. 93511, S. 2.725-2.730
- Bauwens, L. (1993a): Stirling Engine Modeling: The MS 2 Code.  
Proc. 6th ISEC, Eindhoven, Niederlande, No. 93081, S. 371-376
- Bauwens, L. (1994): Semi-Analytical Stirling Engine Models: Stratified Isentropic Cylinders and Quasi-Steady Heat Exchangers.  
Proc. 29th IECEC, Monterey, CA, Vol. 4, No. 94- 3954, S. 1841-1846
- Bauwens, L. (1994a): Adiabatic losses in Stirling cryocoolers: a stratified flow model.  
Cryogenics, Vol. 34, Nr. 8, S. 627-633
- Bauwens, L. (1995): A Straftified Flow Model for Adiabatic Losses in Regenerative Thermal Devices. Journal of Energy Resources Technology (ASME), Vol. 117, S. 150-155
- Bauwens, L. (1995a): Stirling Cryocooler Model with Stratified Cylinders and Quasisteady Heat Exchangers.  
Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 9, Nr. 1, S. 129-135
- Beale, W. T. (1983): The Free Piston Stirling Engine: 20 Years of Development.  
Proc. 18th IECEC, Orlando, FL, Nr. 839111, S. 689-693

- Beale, W.; Gedeon, D.; Penswick, B. (1983): Duplex Stirling Heat Pump Development. Proc. International Gas Research Conference, S. 599ff
- Benson, G. M. (1973): Thermal Oscillators. Proc. 8th IECEC, Philadelphia, PA , S. 182ff
- Berchowitz, D. M. (1982): The Design, Development and Performance of a Duplex Stirling Natural Gas Liquefier. Proc. 17th IECEC, Los Angeles, CA, S. 1784ff
- Berchowitz, D. (1986): Stirling Cycle Engine Design and Optimization. Dissertation, University of the Witwatersrand, Johannesburg (Südafrika)
- Beschorner, F.; Großmann, J.; Reuchlein, G.; Schaaf, H.; Pfeiffer, H.; Gondro, B.; Müller, J. (1984): Stand der Stirlingmotorenentwicklung - Anwendungsmöglichkeiten und Erfolgsaussichten im Vergleich zu eingeführten Anlagen und Systemen. BMFT-Forschungsbericht T 84-196 (Nichtnukleare Energietechnik)
- Bidard, R. (1970): Nouveaux cycles et fluides thermodynamiques. Rev. Gen. Therm. 99 (9), S. 239-269
- Bitterlich, W.; Obid, G. H. (1986): Wirklichkeitsnahes Berechnungsmodell für den doppelwirkenden Stirlingmotor. Motortechnische Zeitschrift, Vol. 47, Nr. 12, S. 515-523
- Blass, E. (1964): Geometrische und strömungstechnische Untersuchungen an Drahtgeweben. Chemie-Ing.-Techn., Vol. 36, Nr. 7, S. 747-758
- Bovin, J.; Carlsen, H. (1997): 3 kW Stirling engine for heat and power. Proc. 8th ISEC, Ancona, No. 97072, S. 519-524
- Bradley, P. E.; Radebaugh, R.; Gary, J. (1992): Regenerator performance in a Vuilleumier refrigerator compared with a third-order model. Advances in Cryogenic Engineering, Vol. 37 B, S. 1085-1093
- Bratt, C.; Nelving, H.-G. (2000): Development and production of Stirling engines for submarine and solar application at Kockums. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 313-318
- Bratt, C.; Ivarsson, O. (2001): The Stirling engine in underwater applications. Proc. 10th ISEC, Osnabrück, S. 131-136
- Budliger, J. P. (1987): New Concept for a Stirling-Stirling Heat Pump System. ASME Winter Annual Meeting
- Budliger, J. P. (1994): Stirling-Wärmepumpe mit Resonanzrohr - Ein Vuilleumier-Prozess mit Druckaufladung. Proc. Europäisches Stirling Forum 1994, S. 134ff
- Budliger, J. P. (1995): Progress made on the Stirling Heat Pump with Resonance Tube - a supercharged Vuilleumier Process - . Proc. 7th International Conference on Stirling Cycle Machines (7. ISEC) , Tokyo, S. 465ff
- Budliger, J. P. (1997): Development of a Stirling heat pump with resonance tube - a supercharged Vuilleumier process. Proc. 8th ISEC, Ancona, S. 235ff
- Budliger, J.-P. (2000): Einfacher Stirling-Motor für die Wärme-Kraft- Kopplung (WKK) in kleinen Wohngebäuden. Proc. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 201ff
- Cairelli, J. E.; Swec, D. M.; Rauch, J. S.; Skupinski, R. C. (1990): Update on Results of SPRE Testing at NASA. Proc. 25th IECEC, Reno, Nevada, S. 5.237-5.244
- Carlsen, H. (1989): Development of a Gas Fired Vuilleumier Heat Pump for Residential Heating. Proc. 24th IECEC, Washington, D.C., Vol. 5, S. 2257ff



- Carlsen, H.; Andersen, N. E. (1989): Simulation Model for the Design of Vuilleumier Machines. ASME winter annual meeting, San Francisco
- Carlsen, H.; Commisso, M. B.; Lorentzen, B. (1990): Maximum Obtainable Efficiency for Engines and Refrigerators Based on the Stirling Cycle. Proc. 25th IECEC, Reno, Nevada, S. 5.366ff
- Carlsen, H. (1990): Development of a New 20 kW Gas Fired Heat Pump Based on the Vuilleumier Cycle. Proc. 25th IECEC, Reno, NV, Vol. 2, S. 233-238
- Carlsen, H. (1991): Operation Experience with Three Exhaust Gas Driven Vuilleumier Heat Pumps. Proc. 5th ISEC, Dubrovnik, YU, Nr. 91036, S. 155-160
- Carlsen, H. (1993): 10 kW Hermetic Stirling Engine for Stationary Applications. Proc. 6th ISEC, Eindhoven, Niederlande, No. 93086, S. 401-406
- Carlsen, H.; Kühl, H. D.; Schulz, S.; Thomas, B. (1993): Effects of an Improved Hot Regenerator on the Performance of a Vuilleumier Heat Pump. Proc. 6th ISEC, Eindhoven, Niederlande, Nr. 93052, S. 233-238
- Carlsen, H. (1994): Results from 20 kW Vuilleumier heat pump test program. Proc. 29th IECEC, Monterey, CA, Vol. 2, S. 927ff
- Carlsen, H.; Kühl, H.-D.; Schulz, S. (1994): Natural Gas Driven Vuilleumier Heat Pumps for Residential Heating. Proc. IIR/DKV-Tagung "New Applications of Natural Working Fluids in Refrigeration and Air Conditioning", Hannover, S. 405ff
- Carlsen, H. (1995): 40 kW Stirling Engine for Solid Fuel. Proc. 7th ICSC, Tokyo, S. 353-358
- Carlsen, H.; Bovin, J. (2000): Design and performance of a new 9 kW Stirling engine. Proc. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 183-192
- Chen, N. C. J.; Griffin, F. P. (1983): A review of Stirling- engine mathematical models. Oak Ridge National Laboratory, Rep. No. De83 016454, DOE contract No. W-7405-eng-26
- Chen, N. C. J.; Griffin, F. P.; West, C. D. (1984): Linear Harmonic Analysis for Stirling Machines and Second Law Analysis of Four Important Losses. Proc. 19th IECEC, San Francisco, CA, No. 849141, S. 1973-1981
- Chen, N. C. J.; Griffin, F. P.; West, C. D. (1985): Simplified Analysis of Stirling Engines and Heat Pumps. Engineering Technology Division, Oak Ridge National Laboratory, ORNL/TM- 9498
- Chen, N. C. J.; Griffin, F. P. (1986): Linear Harmonic Analysis of Free-Piston Stirling Engine. Oak Ridge National Lab., ORNL/CON-172, June 1986
- de Cicco, A.; Locorriere, R.; Naso, V.; Bartolini, C. M. (1983): A New Second Order Model for Stirling Machines. Proc. 18th IECEC, Orlando, FL, No. 839122, S. 755-760
- Comisso, M. B.; Carlsen, H. (1995): Study of different numerical methods for Stirling engine simulation. Proc. 7th ICSC, Tokyo, S. 247-252
- Cooke-Yarborough, E. H. (1976): An Integrated Stirling Engine and Heat Pump with only Two Moving Assemblies. AERE Harwell, Report R 8468
- Daney, D. E. (1982): Cooling Capacity of Stirling Cryocoolers - The Split Cycle and Nonideal Gas Effects. Cryogenics 22, Nr. 10, S. 531-535

- Drexl, K. (1976): Rotationskolben-Stirlingmotor - Komponentenentwicklung Triebwerk. 3. Statusseminar Kraftfahrzeug- und Straßenverkehrstechnik, November 1975, BMFT-Forschungsbericht T 76-74, S. 261ff
- Eckmann, D. M.; Grotberg, J. B. (1991): Experiments on transition to turbulence in oscillatory pipe flow. J. Fluid Mech., Vol. 222, S. 329-350
- Eder, F. X.; Appel, H. (1982): Regenerator mit einer Füllung aus polykristallinen Eisenwhiskern. BMFT-Forschungsbericht Nr. T 82-136
- Eder, F. X.; Blumenberg, J. (1987): Wirkungsweise, Aufbau und Betriebseigenschaften einer Vuilleumier-Wärmepumpe. Klima-Kälte-Heizung, S. 537ff
- Eder, F. X. (1992): Alternativen suchen : Nutzen des Vuilleumier-Prozesses für Wärmepumpen und Kältemaschinen im Bereich Klimatechnik. Maschinenmarkt, Würzburg, Vol. 98, Nr. 17, S. 38-44
- Ellison, W.; Atkins, E. E.; Zylstra, S.; Walker, G. (1990): A Gas-fired Stirling-Stirling Natural gas Liquefier for Vehicle Fuel. Proc. 25th IECEC, Reno, Nevada, S. 5.331ff
- Engeln-Müllges, G.; Reutter, F. (1986): Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN 77-Programmen. 5. Aufl., Bibliographisches Institut, Mannheim
- Eppert, V. (1995): Zur Modellierung der Strömung und Wärmeübertragung in einem Stirlingmotor. Dissertation, Gesamthochschule Kassel
- Fan, S.; Lakshminarayana, B.; Barnett, M. (1993): Low-Reynolds- Number  $k-\epsilon$  Model for Unsteady Turbulent Boundary-Layer Flows. AIAA Journal, Vol. 31, Nr. 10, S. 1777-1784
- Fauvel, O. R.; Yu, L. (1994): Development of a Composite Fluidyne Regenerator. Proc. 29th IECEC Monterey, CA, Vol. 4, No. 94-3801, S. 1908-1910
- Feurer, B. (1973): Degrees of freedom in the layout of Stirling engines. Karman Institute for Fluid Dynamics, Ser. 53, S. 1-27
- Finkelstein, T. (1960): Generalized Thermodynamic Analysis of Stirling Engines. SAE annual meeting, Detroit, Michigan, Jan. 11-15, No. 118b
- Finkelstein, T. (1975): Computer Analysis of Stirling Engines. Proc. 10th IECEC, Newark, Delaware, No. 759140, S. 933-941
- Finkelstein, T. (1980): Analysis of a Heat-Activated Stirling Heat Pump. Proc. 15th IECEC, Seattle, WA, S. 1788ff
- Finkelstein, T. (1992): Analysis of Integrated Heat Pumps by the "Null Engine" Concept. Proc. 27th IECEC, San Diego, CA, Vol. 5, S. 5.155ff
- Finkelstein, T. (1992a): Isothermal Sinusoidal Analysis of Balanced Compound Vuilleumier Heat Pumps. Proc. 27th IECEC, San Diego, CA, Vol. 5, S. 5.161ff
- Finkelstein, T. (1992b): Integrated Vuilleumier heat pumps with balanced compounding. Proc. Europäisches Stirling Forum 1992, S. 145ff
- Fischer, K.; Lemrani, H.; Stouffs, P. (1995): Dynamic simulation of kinematic Stirling engines: coupled and decoupled analysis. Proc. 30th IECEC, Orlando, Florida, Vol. 3, S. 413- 418
- Fitzer, E.; Fritz, W. (1982): Technische Chemie. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

- Gedeon, D. R. (1978): The Optimization of Stirling Cycle Machines. Proc. 13th IECEC, San Diego, CA, No. 789193, S. 1784- 1790
- Gedeon, D. (1985): Computational Techniques for the Two- Dimensional Gasdynamic Equations in Stirling Engine Regenerators and Associated Manifolds. Proc. 20th IECEC, Miami, FL, Nr. 869434, S. 3.354-3.359
- Gedeon, D. (1986): A Globally-Implicit Stirling Cycle Simulation. Proc. 21st IECEC, San Diego, CA, No. 869121, S. 550-553
- Gedeon, D. (1986a): Mean-Parameter Modelling of Oscillating Flow. Journal of Heat Transfer, Vol. 108, S. 513-518
- Gedeon, D. (1988): Development in Two-Dimensional Regenerator Modeling. Proc. 23rd IECEC, Denver, CO, No. 889115, S. 39-44
- Gedeon, D. (1989): Modeling 2-D Jets Impinging on Stirling Regenerators. Proc. 24th IECEC, Washington, D.C., No. 899202, S. 2199-2204
- Gedeon, D. (1994): Sage: Object Oriented Software for Stirling Machine Design. Proc. 29th IECEC, Monterey, CA, Vol. 4, No. 94- 4106, S. 1902-1907
- Gedeon, D.; Wood, J. G. (1996): Oscillating-Flow Regenerator Test Rig: Hardware and Theory with Derived Correlations for Screens and Felts. NASA Contractor Report No. 198442
- Goldberg, L. F. (1987): The Simulated Systems Impact of Two- Dimensional Oscillating Flows in a Stirling Machine Heat Exchanger. ASME Division FED, HTD-Vol. 93, Fluid Flow and Heat Transfer in Reciprocating Machinery, S. 63-68
- Goldberg, L. F. (1990): One- and two-dimensional Stirling machine simulation using experimentally generated reversing flow turbulence models. NASA Contractor Report 185285
- Grassmann, P.; Tuma, M. (1979): Kritische Reynolds-Zahlen bei oszillierenden und pulsierenden Rohrströmungen. Wärme- und Stoffübertragung, Vol. 12, S. 203-209
- Hall, C. A.; Porsching, T. A.; Medley, J.; Tew, R. C. (1990): Multidimensional Computer Simulation of Stirling Cycle Engines. Proc. 25th IECEC, Reno, NV, Vol. 5, S. 407-411
- Harlow, F. H.; Welch, J. E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. Physics of Fluids 8, Nr. 12, S. 2182-2189
- Hausen, H. (1950): Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom. Springer-Verlag, Berlin
- Heames, T. J.; Daley, J. G.; Uherka, D. J.; Zabel, J. (1982): A User Oriented Design System for Stirling Cycle Codes. Proc. 17th IECEC, Los Angeles, CA, No. 829278, S. 1681-1687
- Heckt, R. (1999): Entwicklung und experimentelle Untersuchung eines neuartigen Erhitzerkopfes für eine Vuilleumier-Wärmepumpe. Dissertation, Universität Dortmund, Shaker Verlag, Aachen, ISBN 3-8265- 6198-8
- Heikrodt, K.; Heckt, R.; Koch, Th.; Kühl, H.-D.; Schlüter, W.; Thomas, B. (1996): Regeneratives Heizen und Kühlen. Abschlußbericht zum BMBF-Verbundprojekt Förder-KZ. 0326947A, BVE Thermolift GbR, Aachen (veröffentlicht über die TIB Hannover)
- Heikrodt, K., Heckt, R. (1999): Gasbetriebene Wärmepumpe zur monovalenten Raumbeheizung und Trinkwassererwärmung. Abschlußbericht zum BMBF-Projekt

- Förder-KZ. 0326947E, BVE Thermolift GbR, Aachen,  
<http://edok01.tib.uni-hannover.de/edoks/e001/303037180.pdf>
- Hempel, O.; Böhm, M. (1997): Experimentelle Untersuchung des Druckverlustes und Wärmeübergangs an Regeneratormaterialien für Gaskältemaschinen. Deutsche Kälte-Klima-Tagung, Hamburg, 19.-21. November
- Hilligweg, A. (1991): Untersuchung eines neuartigen regenerativen Gaskreisprozesses mit freischwingendem Verdrängerkolben. Dissertation, Universität Dortmund
- Hilligweg, A.; Schulz, S. (1992): Ein neuartiger regenerativer Gaskreisprozess mit freischwingendem Verdrängerkolben. KI Klima- Kälte-Heizung 4, S. 118 ff
- Hino, M.; Sawamoto, M.; Takasu, S. (1976): Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow. J. Fluid Mech., Vol. 75, Nr. 2, S. 193-207
- Hino, M.; Kashiwayanagi, M.; Nakayama, A.; Hara, T. (1983): Experiments on the turbulence statistics and the structure of a reciprocating oscillatory flow. J. Fluid Mech., Vol. 131, S. 363-400
- Hirata, M.; Kasagi, N.; Matsuno, Y. (1984): Basic Cycle Analysis of Two- Component Two-Phase Stirling Engine. Proc. 2nd ISEC, Shanghai, China, Nr. 1-7, S. 1-13
- Hofbauer, P. (1993): Außenbeheizte, regenerative Wärme- und Kältemaschine. Europäische Patentschrift EP 0 527 993 B1
- Hofbauer, P.; Bornscheuer, W. (1993): der Matrix-Strahlungsbrenner. Wärmetechnik - Versorgungstechnik 38, Nr. 3, S. 124-135
- Honda, T.; Kawajiri, K.; Sugimoto, T. (1995): Experimental Study on Free Piston Vuilleumier Heat Pump. Proc. 7th ICSC, Tokyo, S. 489-494
- Hoshino, T.; Naito, H.; Fujihara, T.; Eguchi, K. (2001): Design, fabrication and evaluation of Stirling engine generator and heat receiver for solar power generation system in space. Proc. 10th ISEC, Osnabrück, S. 204-209
- Hrenya, C. M.; Bolio, E. J.; Chakrabart, D.; Sinclair, J. L. (1995): Comparison of low Reynolds number  $k$ - $\epsilon$  turbulence models in predicting fully developed pipe flow. Chemical Engineering Science, Vol. 50, Nr. 12, S. 1923-1941
- Hrenya, C.; Miller, S.; Mallo, T.; Sinclair, J. (1998): Comparison of low Reynolds number  $k$ - $\epsilon$  turbulence models in predicting heat transfer rates for pipe flow. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 41, Nr. 11, S. 1543-1547
- Huang, S. C. (1992): HFAST - A Harmonic Analysis Program for Stirling Cycles. Proc. 27th IECEC, San Diego, CA, Vol. 5, No. 929028, S. 5.47-5.52
- Ibrahim, M.; Tew, R. C.; Dudenhofer, J. E. (1989): Two- dimensional numerical simulation of a Stirling engine heat exchanger. Proc. IECEC 1989, Washington DC, S. 2795-2802
- Ibrahim, M.; Tew, R. C.; Dudenhofer, J. E. (1990): Further Two-Dimensional Code Development for Stirling Space Engine Components. Proc. 25th IECEC, Reno, NV, Vol. 6, S. 329-335
- Ibrahim, M.; Kannapareddy, M.; Tew, R. C.; Dudenhofer, J. E. (1991): Instantaneous heat transfer coefficient based upon two- dimensional analysis of Stirling space engine components. Proc. 26th IECEC, Boston, MA, Vol. 6, S. 149-159

- Isshiki, N.; Tsukahara, S. (1984): Approximate Estimations of Power and Various Losses of Stirling Engine. Proc. 2nd ISEC, Shanghai, China, No. 1-4, S. 1-18
- Isshiki, N.; Watanabe, H.; Tsukahara, S.; Hashimoto, K.; Yoshikawa, K. (1987): Study on linear elements for Stirling engine regenerators. Proc. 22nd IECEC, Philadelphia, PA, No. 879218, S. 1847-1852
- Isshiki, N.; Raggi, L.; Isshiki, S.; Iwamoto, S.; Matsuo, M.; Hirata, K. (1995): Studies on Regenerative Rotary Displacer Stirling Engine. Proc. 7th ICSC, Tokyo, S. 185ff
- Isshiki, S.; Sakano, A.; Ushiyama, I.; Isshiki, N. (1996): Measurement on Nusselt number of regenerator wire meshes by cylindrical probe. Proc. 31st IECEC, Washington, D.C. 2, S. 1337-1342
- Kawajiri, K.; Honda, T.; Sugimoto, T. (1994): Study of Free Piston Type Vuilleumier Heat Pump. Proc. 29th IECEC, Monterey, CA 4
- Kays, W. M.; Crawford, M. E.: Convective heat and mass transfer. 3. Aufl., McGraw Hill, New York
- Kentfield, J. A. C.; Kapesi, R. H. (1986): Rotating-displacer Stirling engines. Proc. 3th ISEC, Rome, Vol. II, S. 763ff
- Knox, L.; Patt, P.; Maresca, R. (1984): Design of a flight qualified long-life cryocooler. Proc. 3rd Cryocooler Conference, Boulder, USA, S. 99-118
- Kolin, I. (1984): Low Temperature Difference Stirling Engine. Proc. 19th IECEC, San Francisco, CA, S. 1807ff
- Kühl, H.-D.; Richter, N.; Schulz, S. (1986): Computer Simulation of a Vuilleumier Cycle Heat Pump for Domestic Use. Proc. 21st IECEC, San Diego, CA, No. 869125, S. 555-561
- Kühl, H.-D.; Richter, N.; Schulz, S. (1988): Berechnung des regenerativen Kreisprozesses einer Vuilleumier-Wärmepumpe. Forschung im Ingenieurwesen, Vol. 54, Nr. 4, S. 107-112
- Kühl, H.-D. (1990): Verallgemeinerte thermodynamische Beschreibung regenerativer Gas-kreisprozesse. Dissertation, Universität Dortmund, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 6, Nr. 42, VDI-Verlag Düsseldorf, ISBN 3-18-144219-4
- Kühl, H.-D.; Schulz, S. (1990): Measured Performance of an Experimental Vuilleumier Heat Pump in Comparison to 3rd Order Theory. Proc. 25th IECEC, Reno, Nevada, S. 5.436ff, ISBN 0-8169-0490-1
- Kühl, H.-D.; Schulz, S.; Thomas, B.; Carlsen, H. (1993): Conversion of a Crank-driven Vuilleumier Heat Pump into a Free Piston Machine. Proc. 28th IECEC, Atlanta, GA, Nr. 93351, S. 2.609-2.614, ISBN 0-8169-0490-1
- Kühl, H.-D.; Schulz, S.; Walther, C. (1995): Generalized evaluation of flow losses in 2nd order analysis of regenerative cycles. Proc. 30th IECEC, Orlando, FL, Vol.3, S.457-462, ISBN 0-7918-1221-9
- Kühl, H.-D.; Schulz, S. (1995): Modeling of thermal regenerator losses due to axial flow dispersion. Proc. 7th ICSC, Tokyo, S. 315-320
- Kühl, H.-D.; Schulz, S. (1996): A 2nd order regenerator model including flow dispersion and bypass losses. Proc. 31st IECEC, Washington, D.C., Vol. 2, S. 1343-1348, , ISBN 0-7803-3547-3

- Kühl, H. D.; Pfeffer, T.; Schulz, S.; Walther, C. (1997): Ähnlichkeitstheoretische Ansätze zur Optimierung regenerativer Gaskreisprozesse, Teil 1: Wärmeaustauscher. Forschung im Ingenieurwesen 63, S. 73-80
- Kühl, H. D.; Pfeffer, T.; Schulz, S.; Walther, C. (1997a): Ähnlichkeitstheoretische Ansätze zur Optimierung regenerativer Gaskreisprozesse, Teil 2: Kolben und Regeneratoren. Forschung im Ingenieurwesen 63, S. 112-119
- Kühl, H.-D.; Pfeffer, T.; Schulz, S.; Walther, C. (1997b): High speed gas temperature measurements in a Vuilleumier heat pump and their reproduction by differential computer simulation. Proc. 8th ISEC, Ancona, Nr. 97038, S. 257-266
- Kühl, H.-D. (1998): Getriebe für eine nach einem regenerativen Gaskreisprozeß arbeitende Wärme- und Kältemaschine. Offenlegungsschrift DE 197 22 036 A1
- Kühl, H.-D.; Schulz, S. (1998): A Contribution to the Systematic Classification of Regenerative Cycles. Proc. Europäisches Stirling Forum, Osnabrück, 24.-26. 2. 1998, S. 29ff
- Kühl, H.-D., Heikrodt, K. (1998): Auswahl- und Auslegungskriterien für regenerative Gaskreisprozesse in Heizungswärmepumpen und Kältemaschinen bei kleinen Temperaturhuben. DKV-Tagungsbericht, 25. Jahrgang, Band II.1, Deutscher Kälte- und Klimatechnischer Verein e. V., Würzburg, ISBN 3-932 715-30-6
- Kühl, H.-D.; Schulz, S.; Walther, C. (1998): Theoretical models and correlations for the flow friction and heat transfer characteristics of random wire regenerator materials. Proc. 33rd IECEC, Colorado Springs, No. 207, ISBN 0-89448-639-X
- Kühl, H. D.; Schulz, S.; Susanto, A.; Walther, C. (1999): Optimization Procedures for Regenerative Cycles Minimizing Parameter Interaction and Numerical Noise Effects. Proc. 9th ISEC, Pilanesburg, Südafrika, Paper-No. ISEC-99004, S. 33ff
- Kühl, H. D.; Schulz, S.; Walther, C. (1999a): Thermodynamic Design and Optimization of a 20 kW Vuilleumier Heat Pump. Proc. 34th IECEC, Vancouver, No. 01-2558
- Kühl, H.-D. (2001): Ein neuartiger, bedarfsgerecht umschaltbarer Gaskreisprozess für eine integrierte, dezentrale Wärme-Kraft- Kälte-Kopplung. Fortschrittliche Energiewandlung und -anwendung, VDI-Berichte 1594, VDI-Verlag, Düsseldorf, S. 59 ff, ISBN 3-18-091594-3
- Larson, V. H. (1981): Characteristic Dynamic Energy Equations for Stirling Cycle Analysis. Proc. 16th IECEC, Atlanta, GA, No. 819798, S. 1942-1947
- Larson, V. H. (1982): Computation Techniques and Computer Programs to Analyze Stirling Cycle Engines Using Characteristic Dynamic Energy Equations. Proc. 17th IECEC, Los Angeles, CA, Nr. 829283, S. 1710-1715
- Lazarides, Y.; Rallis, C. J. (1990): A Computer Code for the Analysis and Design of Stirling Cycle Machines. Proc. 25th IECEC, Reno, Nevada, S. 5.372-5.376
- Lee, K.; Krepchin, I. P.; Toscano, W. M. (1981): Thermodynamic Description of an Adiabatic Second Order Analysis for Stirling Engines. Proc. 16th IECEC, Atlanta, GA, No. 819794, S. 1919- 1924
- Lysenko, G. P. (1997): External heat supply rotary engine with hydraulic locks and electrochemical control of power output. Proc. ISEC, Ancona, S. 225ff
- Mai, M.; Schikora, H.; Siegel, A.; Steimle, F. (2001): Results of measurements taken from a SOLO 161 Stirling-Refrigerating machine. Proc. 10th ISEC, Osnabrück, S. 513-520

- Makhkamov, K. K.; Ingham, D. B. (1998): Preliminary results for a two-dimensional simulation of the working process of a Stirling engine.  
Proc. 33rd IECEC, Colorado Springs, Nr. 408
- Makhkamov, Kh.; Ingham, D. B. (1999): Mathematical Simulation of Stirling Engines for Energetic Units. Proc. 9th ISEC, Pilanesburg, Südafrika, No. ISEC-99019, S. 137-150
- Makhkamov, K.; Ingham, D. B. (2000): A computational research in the development of Stirling engines. Proc. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 155-164
- Malone, J. F. J. (1931): A new prime mover. Engineer, London, S. 97-101
- Martini, W. (1978): Stirling Engine Design Manual.  
US Department of Energy, Report No. DOE/NASA/3152-78/1
- Martini, W. R. (1978a): A Simple Method of Calculating Stirling Engines for Engine Design Optimization. Proc. 13th IECEC, San Diego, CA, No. 789115, S. 1753-1762
- Martini, W. R.; Ross, B. A. (1979): An Isothermal Second Order Stirling Engine Calculation Method. Proc. 14th IECEC, Boston, MA, No. 799237, S. 1091-1097
- Martini, W. R. (1983): A Revised Isothermal Analysis Program for Stirling Engines. Proc. 18th IECEC, Orlando, FL, No. 839120, S. 743-748
- Martini, W. R. (1986): A Stirling Engine Analysis Method Based Upon Moving Gas Nodes. Proc. 21st IECEC, San Diego, CA, No. 869124, S. 569-574
- Maurer, T.; Feulner, P.; Krauch, H. (1994): The application of the Stirling cycle to near-ambient temperature refrigeration. Proc. IIR/DKV-Tagung "New applications of natural working fluids in refrigeration and air conditioning", Hannover, S. 651-662
- McEligot, D. M.; Taylor, M. F. (1996): The turbulent Prandtl number in the near wall region for low Prandtl number gas mixtures.  
Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, Nr. 6, S. 1287- 1295
- Meijer, R. J. (1959): Der Philips Heißgasmotor mit Rhombengetriebe.  
Philips Technische Rundschau 20, Nr. 10, S. 293-336
- Meijer, R. J.; Miniatt, E. C. (1993): STM4-120RF as Refrigerator for Supermarkets.  
Proc. 6th ISEC, Eindhoven, Niederlande, Nr. 93045, S. 209-214
- Mennink, B. D.; Berchowitz, D. M. (1994): Development of an improved Stirling cooler for VSI insulated domestic fridges with thermal store and photovoltaic power source for industrialized and developing countries . Proc. IIR/DKV-Tagung "New applications of natural working fluids in refrigeration and air conditioning", Hannover, S. 631-640
- Merkli, P.; Thomann, H. (1975): Transition to turbulence in oscillating pipe flow.  
J. Fluid Mech., Vol. 68, Nr. 3, S. 567- 575
- de Monte, F.; Galli, G. (1997): The effect of "flushing ratio" on the performance of counter-flow fixed-bed thermal regenerators. Proc. 32th IECEC, Hawaii, S. 1009-1016
- Mitchell, M. P.; Bauwens, L. (1988): Computer Simulation of Stirling and Sibling Cycle Machines. Proc. 23rd IECEC, Denver, CO, No. 889119, S. 59-64
- Miyabe, H.; Takahashi, S.; Hamaguchi, K. (1982): An Approach to the Design of Stirling Engine Regenerator Matrix Using Packs of Wire Gauzes.  
Proc. 17th IECEC, Los Angeles, CA, No. 829306, S. 1839-1844

- Myong, H. K.; Kasagi, N.; Hirata, M. (1989): Numerical Prediction of Turbulent Pipe Flow Heat Transfer for Various Prandtl Number Fluids with the Improved k- $\epsilon$  Turbulence Model JSME International Journal, Vol. 32, Nr. 4, S. 613-622
- Nelder, A., Mead, R. (1965):  
A Simplex Method for Function Minimization. Computer Journal 7, S. 308-313
- Nykyri, M.; Hiismäki, P. (1981): Vuilleumier Heat Pump for Heating Applications. Technical Research Centre of Finland, Research Reports 15/1981
- Olsen, N.; Carlsen, H.; Andersen, N. E. (1989): Finite element model for Vuilleumier machines. American Society of Mechanical Engineers, AES, Vol. 7, S. 1-8
- Organ, A. J. (1975): The Concept of "Critical Length Ratio" in Heat Exchangers for Stirling Cycle Machines. Proc. 10th IECEC, Newark, Delaware, No. 759151, S. 1012-1019
- Organ, A. J. (1982): Gas Dynamics of the Temperature-Determined Stirling Cycle. Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 23, Nr. 4, S. 207-216
- Organ, A. J. (1982a): Gas dynamics of Stirling cycle machines.  
Stirling Engines - progress towards reality, Reading, No. C25/82, S. 131-140
- Organ, A. J. (1992): Thermodynamics and Gas Dynamics of the Stirling Cycle machine. Cambridge University Press, Cambridge
- Organ, A. J. (1993): Anatomy of the Stirling engine cycle. Proc. Instn. Mech. Engrs., Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 207, S. 161-173
- Organ, A. (1994): 'Flushing Ratio' and the Art of Stirling Gas Circuit Design. Proc. 29th IECEC Monterey, CA, Vol. 4, No. 94-4034, S. 1878-1883
- Organ, A. J. (1996): The great Stirling cycle simulation fraud.  
Proc. Europäisches Stirling Forum 1996, S. 245-269
- Organ, A. J.; Maeckel, P. (1996): 'Connectivity' and regenerator thermal shorting.  
Proc. Europäisches Stirling Forum 1996, S. 229-244
- Organ, A. J. (1997): The Regenerator and the Stirling Engine. Mechanical Engineering Publications, London und Bury St. Edmunds, ISBN 1 86058 010 6
- Penswick, B.; Urieli, I. (1984): Duplex Stirling Machines.  
Proc. 19th IECEC, San Francisco, CA, S. 1823ff
- Pfeffer, T. (1998): Entwicklung und experimentelle Untersuchung neuer Regeneratorkonzepte für regenerative Gaskreisprozesse am Beispiel einer Vuilleumier-Wärmepumpe. Dissertation, Universität Dortmund, Shaker Verlag, Aachen, ISBN 3-8265-4471-4
- Pfeffer, T.; Kühl, H.-D.; Schulz, S.; Walther, C. (2000): Entwicklung und experimentelle Untersuchung neuer Regeneratorkonzepte für regenerative Gaskreisprozesse am Beispiel einer Vuilleumier- Wärmepumpe. Forschung im Ingenieurwesen 65, S. 257-272
- Pfriem, H. (1940): Der periodische Wärmeübergang bei kleinen Druckschwankungen. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Vol. 11, Nr. 2, S. 67-75
- Prieto, J.; Diaz, R. (1993): Isothermal Simulation with Decoupled Losses for Kinematic Stirling Engine Design. JSME International Journal, Vol. 36, Nr. 4, S. 697-710
- Prieto, J.-I.; Gonzalez, M.-A.; Fano, J. (1997): SIMILAR: A new software for Stirling engine primary design. Proc. 8th ISEC, Ancona, No. 97046, S. 339-343



- Qvale, E. B.; Smith, J. L. (1968): A mathematical model for steady operation of Stirling-type engine. *Journal of Engineering for Power*, S. 45-50
- Rauch, J. S. (1980): Harmonic Analysis of Stirling Engine Thermodynamics. *Proc. 15th IECEC, Seattle, WA, No. 809335, S. 1696-1700*
- Rauch, J. S. (1984): Harmonic Analysis of Stirling-Cycle Performance - A Comparison with Test Data. *Proc. 19th IECEC, San Francisco, CA, No. 849173, S. 2015-2020*
- Radebaugh, R.; Louie, B. (1984): A simple, first step to the optimization of regenerator geometry. *Proc. 3rd Cryocooler Conference, Boulder, USA, S. 177-198*
- Rawlins, W.; Timmerhaus, K. D.; Radebaugh, R.; Daney, D. E. (1992): Measurement of the performance of a spiral wound polyamide regenerator in a pulse tube refrigerator. *Advances in Cryogenic Engineering, Vol. 37, Part B, S. 947-953*
- Reader, G. T.; Hooper, C. (1983): *Stirling Engines*. E. & F. N. Spon, London
- Renfroe, D. A. (1983): Effects of Using a Two Phase two Component Working Fluid in a Stirling Engine. *Proc. 18th IECEC, Orlando, FL, Nr. 839148, S. 908-913*
- Renyer, B. L. (1973): High Capacity Long-Life Vuilleumier Cycle Refrigerator. *Closed cycle Cryogenic Cooler Technology and Applications, 147-162, AFFDL-TR-73-149, Vol.1, WPAFB, Dayton, Ohio (zitiert von Walker 1983)*
- Richardson, E. G.; Tyler, E. (1929): The Transverse Velocity Gradient near the Mouths of Pipes in which an Alternating or Continuous Flow of Air is Established. *Proceedings of the Physical Society, Vol. 42, Nr. 231, S. 1-15*
- Richter, N. (1988): Theoretische Untersuchungen und konstruktive Vorschläge für die Realisierung einer Vuilleumier- Wärmepumpe. *Dissertation, Universität Dortmund, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 19, Nr. 29, VDI-Verlag, Düsseldorf, ISBN 3-18-142919-8*
- Rinia, H.; du Pre, F. K.: Heißluftmotoren. *Philips Technische Rundschau 8 (1946) S. 129ff*
- Rios, P. A.; Smith Jr., J. L.; Qvale, E. B. (1968): An analysis of the Stirling-cycle refrigerator. *Advances in Cryogenic Engineering, Vol. 13, S. 332-342*
- Rios, P. A. (1971): An Approximate Solution to the Shuttle Heat- Transfer Losses in a Reciprocating Machine. *ASME Journal of Engineering for Power, Nr. 4, S. 177-182*
- Rispoli, F. (1985): The Lambda-Scheme Method Applied to Stirling Engines. *Proc. 20th IECEC, Miami, FL, No. 859325, S. 3.301-3.306*
- Rispoli, F.; Riccucci, G. (1988): Simulation of Stirling Engines with Explicit Modelling of Propagating Effects. *ASME - On Flows in internal combustion engines (IV), S. 35-40*
- Rix, D. H. (1986): Progress with a Stirling cycle simulation using Lagrangian coordinates. *Proc. 3rd ISEC, Rome, Italy, Vol. V.1, Nr. III-55, S. 225-238*
- Rix, D. H. (1988): A thermodynamic design simulation for Stirling cycle machines using a Lagrangian formulation. *Proc. Instn Mech Engrs, Vol. 202, Nr. C2, S. 85-93*
- Ross, B. A.; Tingey, G.; Holliday, J. C. (1991): Conceptual Design of a Long-Life, 10 Watt Stirling Generator Set. *Proc. 26th IECEC, Boston, MA, Vol. 5, S. 186-191*
- Rühlich, I. (1999): Strömungstechnische Optimierung von Regeneratoren für Gaskältemaschinen. *Dissertation, TU Dresden, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 19, Bd. 117, VDI-Verlag, Düsseldorf, ISBN 3-18-311719-3*

- Rühlich, I. (2000): Strömungstechnische Optimierung von Regeneratoren für Stirling-Maschinen. Proc. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 149-154
- Rüther, J.; Kühl, H.-D.; Schulz, S. (2000): Application of the free piston concept to Vuilleumier heat pumps. Proc. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 265ff
- Rüther, J.; Kühl, H. D.; Schulz, S. (2001): The free piston Vuilleumier heat pump for residential heating: Project status. Proc. 10th ISEC, Osnabrück, S. 98-105, ISBN 3-931384-38-1
- Rule, T. T.; Qvale, E. B. (1969): Steady-state Operation of the Idealized Vuilleumier Refrigerator. Advances in Cryogenic Engineering 14 S. 343ff
- Sakamoto, M.; Yamada, T. (1998): A Displacer type stirling refrigerator of 100 W Refrigeration capacity with a nylon matrix regenerator. International Institute of Refrigeration, Gustav Lorentzen Conference, Oslo 1998, S. 430-437
- Schager, D. (1994): Entwicklung, Bau und Erprobung eines kleinen Rotationsverdränger-Stirlingmotors. Proc. Europäisches Stirling Forum, Osnabrück, S. 181ff
- Schiefelbein, K.; Siegel, A.; Winnesberg, B. (1996): Stirling-Maschinen-Technik - Grundlagen, Konzepte, Chancen. (Hrsg. F. Steimle)  
C. F. Müller, Heidelberg, ISBN 3-7880-7583-X
- Schiefelbein, K. (1997): Theoretische und experimentelle Untersuchung von Stirling-Kältemaschinen für die Kältebereitstellung bei Temperaturen oberhalb von  $-40^{\circ}\text{C}$ . Dissertation, Universität-Gesamthochschule Essen, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 19, Nr. 102, VDI- Verlag, Düsseldorf, ISBN 3-18-310219-6
- Schikora, H.; Siegel, A.; Schiefelbein, K. (1998): Entwicklung von Stirling-Kältemaschinen alternativ zu Kaltdampf- Kältemaschinen.  
Sanitär- und Heizungstechnik, Vol. 10, S. 116- 120
- Schikora, H.; Siegel, A. (2000): Entwicklung und erste Betriebserfahrung einer Solo 161 Stirling-Kältemaschine für die Kältebereitstellung bei Temperaturen zwischen  $-30^{\circ}\text{C}$  und  $-90^{\circ}\text{C}$ . Europäisches Stirling Forum 2000, S. 285-294
- Schmidt, G. (1871): Theorie der Lehmann'schen kalorischen Maschine.  
VDI-Z., Nr. 1, S. 1-12, u. Nr. 2, S. 98-112.
- Schmidt, T.; Wieser, U.; Zumsteg, H.; Gaegauf, C. (1997): Measurements and simulations of a 300 W free-piston-Stirling-generator. Proc. 8th ISEC, Ancona, S. 329ff
- Schock, A. (1978): Nodal Analysis of Stirling Cycle Devices.  
Proc. 13th IECEC, San Diego, CA, No. 789191, S. 1771-1779
- Schock, A. (1978a): Stirling Engine Nodal Analysis Program.  
J. Energy, Vol. 2, Nr. 6, S. 354-362
- Schreiber, J. G.; Thieme, L. G.; Mason, L. S. (2001): Status of Free-Piston Stirling power conversion in the United States. Proc. 10th ISEC, Osnabrück, S. 137-145
- Schulz, S.; Thomas, B. (1991): Development of a Free Piston Vuilleumier Machine for Cooling Purposes. Proc. 5th ISEC, Dubrovnik, YU, No. 91060, Anhang, S. 15-19
- Schulz, S.; Thomas, B. (1992): A Linear Model of a Free-Piston Vuilleumier Machine Compared to Experimental Results of a Prototype.  
Proc. 27th IECEC, San Diego, CA, Vol. 5, Nr. 929032, S. 5.75-5.80
- Schulz, S.; Thomas, B. (1995): Experimental investigation of a free- piston Vuilleumier refrigerator. Int. J. Refrig. 18, Nr. 1, S. 51-57

- Schwendig, F. (1992): Wärme- und Impulsaustausch in regenerativen Gaskreisprozessen. Dissertation, Universität Dortmund, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 19, Nr. 55, VDI-Verlag, Düsseldorf, ISBN 3-18-145519-9
- Sekiya, H.; Yamashita, I. (1993): Multisimulation model for Stirling and Vuilleumier cycle machines. JSME International Journal (Series B), Vol. 36, Nr. 2, S. 383-390
- Sekiya, H.; Kobayashi, K.; Fukuda, E.; Susai, T.; Terada, F. (1994): Numerical Analysis and Experimental Investigation of a Free Piston Vuilleumier Cycle Heat Pump. Proc. 29th IECEC, Monterey, CA 4, Nr. 94-4182, S. 1823-1828
- Sekiya, H.; Kobayashi, K.; Fukuda, E.; Susai, T.; Terada, F. (1994a): Characteristic Analysis of a Free-Piston Vuilleumier Cycle Heat Pump. Proc. 72th. ISME Fall Annual Meeting 3, S. 437-439
- Sekiya, H.; Kobayashi, K.; Fukuda, E.; Susai, T.; Terada, F. (1995): Research and Development of a 2.5 kW Class Free Piston Vuilleumier Cycle Heat Pump. Proc. 7th ICSC, Tokyo, S. 483-488
- Senft, J. R. (1982): A Simple Derivation of the Generalized Beale Number. Proc. 17th IECEC, Los Angeles, CA, No. 829273, S. 1652-1654
- Senft, J. R. (1984): A Low Temperature Difference Ringbom Stirling Demonstration Engine. Proc. 19th IECEC, San Francisco, CA, S. 1929ff
- Senft, J. R. (1991): An Ultra Low Temperature Differential Stirling Engine. Proc. 5th ISEC, Dubrovnik (Anhang)
- Seume, J. R.; Simon, T. W. (1986): Oscillating flow in Stirling Engine Heat Exchangers. Proc. 21st IECEC, San Diego, CA, No. 869118, S. 533-538
- Serrate, O. A. G.; Parise, J. A. R. (1991): Development of a Non-Linear Mathematical Model for Stirling Engines. Proc. 26th IECEC, Boston, MA, Vol. 5, S. 320-325
- Sexl, Th. (1930): Über den von E. G. Richardson entdeckten "Annulareffekt". Zeitschrift für Physik, Vol. 61, S. 349-362
- Sherman, A. (1971): Mathematical Analysis of a Vuilleumier Refrigerator. ASME publication, No. 71-WA/HT-33
- Shao, H. (2000): Qualitative comparison of duplex Stirling and absorption refrigerators in domestic applications. Proc. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 275ff
- Shoureshi, R. (1982): Simple Models for Analysis and Design of Practical Stirling Engines. Proc. 17th IECEC, Los Angeles, CA, No. 829272, S. 1647-1650
- Siegel, A.; Schiefelbein, K. (1996): Stirling-Maschinen in der Kältetechnik. Proc. Europäisches Stirling Forum 1996, S. 9-28
- Siegel, A. (1998): Entwicklung einer Stirling-Kältemaschine mit Kurbeltrieb für die Kälteerzeugung bei Temperaturen unterhalb von  $-40^{\circ}\text{C}$ . Proc. Europäisches Stirling Forum, Osnabrück, 24.-26. 2. 1998, S. 83-90
- Srinivasan, V.; Fauvel, R.; Walker, G.; Martini, W. R. (1982): An Isothermal Second-Order Ringbom-Stirling Engine Computer Program. Proc. 17th IECEC, Los Angeles, CA, No. 829300, S. 1807-1812
- Steimle, F.; Siegel, A.; Schikora, H. (1998): Stirlingmaschinen in der Kältetechnik. Proc. Europäisches Stirling Forum, Osnabrück, 24.-26. 2. 1998, S. 67- 74

- Stephan, K. und Mayinger, F. (1986): Thermodynamik. 12. Aufl., Springer Verlag, Berlin
- Stephani, G.; Heider, J.; Kostmann, C.: Metallische Hochtemperaturfasern durch Schmelzextraktion – Herstellung, Eigenschaften und Anwendungen.  
VDI-Bericht Nr. 1151, S. 175-183
- Suganami, T.; Kawajiri, K.; Honda, T. (1990): Vuilleumier Cycle Heat Pump.  
Proc. 3rd. IEA Heat Pump Conference, Tokyo, S. 585ff
- Swift, G. W. (1989): Simple Theory of a Malone Engine.  
Proc. 24th IECEC, Washington, D.C. 5, Nr. 899055, S. 2355-2362
- Swift, G. W. (1989a): Experiments with a Malone Engine.  
Proc. 24th IECEC, Washington, D.C. 5, Nr. 899054, S. 2385-2394
- Swift, G. W. (1993): Malone Refrigeration.  
Proc. 6th ISEC, Eindhoven, Niederlande, Nr. 93025, S. 137-142
- Takahashi, S.; Hamaguchi, K.; Miyabe, M.; Fujita, H. (1984):  
On the flow friction and heat transfer of the foamed metals as the regenerator matrix.  
Proc. 2nd ISEC, Shanghai, China, S. 1-10
- Tanaka, M.; Yamashita, I.; Chisaka, F. (1990): Flow and Heat Transfer Characteristics of the Stirling Engine Regenerator in an Oscillating Flow.  
JSME International Journal 33, Nr. 2, S. 283-289
- Taylor, D. R. (1984): The Method of Characteristics Applied to Stirling Engines.  
Proc. 19th IECEC, San Francisco, CA, No. 849177, S. 2037-2042
- Tew Jr., R. C.; Thieme, L. G.; Miao, D. (1979): Initial comparison of single cylinder Stirling engine computer model predictions with test results.  
SAE Technical Paper Series, Tagung Z 1394, No. 790327
- Thomas, B.; Kühl, H. D.; Schulz, S. (1989): A Short-Cut Optimization of the Swept Volume Ratio for Regenerative Cycles. Proc. 24th IECEC, Washington, D.C., S. 2193ff
- Thomas, B. (1992): Entwicklung und experimentelle Untersuchung einer Freikolben-Vuilleumier-Wärmepumpe.  
Dissertation, Universität Dortmund, Shaker-Verlag, Aachen, ISBN 3-86111-296-5
- Thomas, B.; Kühl, H.-D.; Schulz, S.; Kentfield, J. (1994): Optimization of the Swept Volume Ratio for Cold-End and Hot-End Connected Gamma Type Stirling Engines.  
Proc. 29th IECEC, Monterey, CA 4, Nr. 94-3952, S. 1835-1840, ISBN 1-56347-091-8
- Thomas, B. (1999): Evaluation of 6 Different Correlations for the Flow Friction Factor of Stirling Engine Regenerators. Proc. 34th IECEC, Vancouver, No. 01-2456,
- Thomas, B.; Bolleber, F. (2000): Evaluation of 5 different correlations for the heat transfer in Stirling engine regenerators. Proc. Europäisches Stirling Forum 2000, S. 111-120
- Thomas, B.; Pittman, D. (2000a): Update on the evaluation of different correlations for the flow friction factor and heat transfer of Stirling engine regenerators. Proc. 35<sup>th</sup> IECEC, Las Vegas, NV, USA, Vol. 1, No. AAIA-2812, S. 1-9
- Thomas, B. (2001): PROSA - software for evaluation of Stirling cycle machines.  
Proc. 10th ISEC, Osnabrück, S. 67-74
- Thorsen, J. E.; Bovin, J.; Carlsen, H. (1996): 3 kW Stirling engine for power and heat production. Proc. 31th IECEC, Washington, D.C., Vol. 2, S. 1289-1294

- Tong, L. S.; London, A. L. (1957): Heat Transfer and Flow Friction Characteristics of Woven Screen and Crossed-Rod Matrixes. Transactions of the ASME, No. 10, S. 1558-1570
- Toropov, V. V.; Carlsen, H. (1994): Optimization of Stirling engine performance based on multipoint approximation technique.  
Advances in Design Automation, ASME 1994, Vol. 69, Nr. 2, S. 531-536
- Toropov, V. V.; Markin, V. L.; Carlsen, H. (1994): Discrete Structural Optimization Based on Multipoint Explicit Approximations.  
Discrete Structural Optimization, IUTAM Symposium, Zakopane, Polen, S. 98-107
- Uchida, S. (1956): The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe. ZAMP, Vol. VII, S. 403-421
- Urieli, I.; Rallis, C. J.; Berchowitz, D. M. (1977): Computer Simulation of Stirling Cycle Machines. Proc. 12th IECEC, Washington, D.C., No. 779252, S. 1512-1521
- Urieli, I. (1980): A General Purpose Program for Stirling Engine Simulation.  
Proc. 15th IECEC, Seattle, WA, No. 809336, S. 1701-1705
- Urieli, I. und Berchowitz, D. M. (1984): Stirling Cycle Engine Analysis.  
Adam Hilger Ltd., Bristol
- Vuilleumier, R. (1918): Method and Apparatus for Inducing Heat Changes.  
U.S.-Patent Nr. 1.275.507 v. 13.8.1918
- Walker, G. (1979): Elementary Design Guidelines for Stirling Engines.  
Proc. 14th IECEC, Boston, MA, No. 799230, S. 1066-1068
- Walker, G. (1980): Stirling Engines. Oxford University Press, Oxford
- Walker, G. (1980a): Regenerative Engines with Dense Phase Working Fluids - The Malone Cycle. Proc. 15th IECEC, Seattle, WA, Nr. 809454, S. 2278- 2274
- Walker, G.; Fauvel, R.; Gustafson, R.; van Benthem, J. (1982): Stirling engine heat pumps.  
Revue Internationale du Froid 5, S. 91-97
- Walker, G. (1983): Cryocoolers. Part 1: Fundamentals. Plenum Press, New York und London
- Walker, G. (1983a): Cryocoolers. Part 2: Applications. Plenum Press, New York und London
- Walker, G.; Senft, J.R. (1985): Free Piston Stirling Engines. Springer-Verlag, Berlin
- Walker, G.; Weiss, M.; Fauvel, R. (1989): Microcomputer Simulation of Stirling Cryocoolers.  
Proc. 24th IECEC, Washington, D.C., No. 899059, S. 2181-2186
- Walker, G.; Weiss, M.; Fauvel, R.; Reader, G.; Bingham, E. R. (1992): Simulation Program for Multiple Expansion Stirling Machines.  
Proc. 27th IECEC, San Diego, CA, Vol. 5, No. 929036, S. 5.97-5.100
- Walker, G.; Reader, G.; Fauvel, O. R.; Bingham, R. E. (1994): The Stirling Alternative: Power Systems, Refrigerants and Heat Pumps. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon
- Walther, Ch.; Kühl, H.-D.; Pfeffer, Th.; Schulz, S. (1998): Influence of Developing Flow on the Heat Transfer in Laminar Oscillating Pipe Flow.  
Forschung im Ingenieurwesen 64, Nr. 3, S. 55-64
- Walther, Ch. (1999): Modellierung des Wärmeübergangs bei nicht ausgebildeter, oszillierender Strömung am Beispiel der Wärmetauscher regenerativer Gaskreisprozesse.  
Dissertation, Universität Dortmund, Shaker-Verlag, Aachen, ISBN 3-8265-6167-8

- Walther, C.; Kühl, H.-D.; Schulz, S. (2000): Numerical Investigations on the Heat Transfer in Turbulent Oscillating Pipe Flow. *Heat and Mass Transfer* 36, S. 135-141
- van Weenen, F. L. (1947): Die Konstruktion des Philips-Heißluftmotors. *Philips Technische Rundschau* 9, S. 125ff
- Weiss, M.; Fauvel, R. (1986): A user-friendly, graphics oriented, Martini Stirling engine simulation program. *Proc. 3rd ISEC, Rome, Italy, Vol. V.1, Nr. III-21, S. 209-224*
- Weiss, M.; Walker, G.; Fauvel, O. R.; Reader, G. (1988): Microprocessor Based Stirling Engine Design Aid. *Proc. 4th ISEC, Tokyo, Japan, No. 067, S. 321-326*
- Weiss, M. H.; Walker, G.; Fauvel, O. R. (1991): MULTIWEISS: a Computer Simulation for Multiple Expansion Stirling Cryocoolers. *Proc. 5th ISEC, Dubrovnik, YU, No. 91067, S. 341- 346*
- Wen, C. Y.; Fan, L. T. (1975): *Models for Flow Systems and Chemical Reactors.* Marcel Dekker Inc., New York
- West, C. D. (1981): Theoretical Basis for the Beale Number. *Proc. 16th IECEC, Atlanta, GA, No. 819787, S. 1886-1887*
- West, C. D. (1983): Stirling Engines with Controlled Evaporation of a Two-Phase Two-Component Working Fluid. *Proc. 18th IECEC, Orlando, FL, Nr. 839149, S. 914-917*
- West, C. D. (1986): Stirling Machines Adiabatic to Isothermal. *Proc. 3rd ISEC, Rom, S. 557ff*
- White, M. A.; Olan, R.W.; Welty, S. C. (1998): Status of an advanced radioisotope space power system using free-piston stirling technology. *Proc. 33rd IECEC, Colorado Springs*
- Wünning, J. (1991): Flammlose Oxidation von hochvorgewärmter Luft. *Chem.-Ing.-Tech.* 63 (12), S. 1657-1664
- Yagi, S.; Kunii, D.; Wakao, N. (1960): Studies on Axial Effective Thermal Conductivities in Packed Beds. *AIChE Journal*, Vol. 6, Nr. 4, S. 543-546
- Yagyu, S.; Fujishima, I.; Corey, J.; Isshiki, N.; Satoh, I. (1997): Design, simulation and test results of a heat-assisted three-cylinder Stirling heat pump. *Proc. 32nd IECEC, Honolulu, S. 1033ff*
- Yokoyama, T.; Kawajiri, K.; Sugimoto, T. (1994): Simulation of Free Piston Type Vuilleumier Heat Pump. *Proc. 72th. ISME Fall Annual Meeting 3, S. 485-487*
- Yuan, S. W. K.; Spradley, I. E. (1992): A Third Order Computer Model for Stirling Refrigerators. *Cryogenic Engineering*, Vol. 37, S. 1055-1063
- Zacharias, F. (1977): Weiterentwicklungen am Stirling Motor - Teil 1. *MTZ Motortechnische Zeitschrift*, Vol. 38, Nr. 9, S. 371- 377
- Zhao, T.; Cheng, P. (1995): A numerical solution of laminar forced convection in a heated pipe subjected to a reciprocating flow. *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 38, Nr. 16, S. 3011-3022
- Zhiyuan, L.; Hongshuo, L. (1995): Research on a new Filler of Regenerator in Stirling Engine. *Proc. 7th ICSC, Tokyo, S. 321-327*

# Anhang

## 1 Mathematische Behandlung der isothermen Idealprozesse

### 1.1 Grundgleichungen des idealen isothermen Modells regenerativer Kreisprozesse nach SCHMIDT

Die Berechnung des idealen, verlustfreien Kreisprozesses mit isothermen Zustandsänderungen wurde unter der Annahme sinusförmiger Volumenänderungen erstmals von SCHMIDT (1871) für den Stirling-Prozess durchgeführt. Sie lässt sich ohne Schwierigkeiten auf andere Prozesse übertragen, z. B. auf den Vuilleumier-Prozess (RULE und QVALE 1969). Eine Zusammenstellung der wesentlichen Beziehungen in allgemeiner Form für einen aus  $n+1$  Teilräumen ( $i = 0, \dots, n$ ) aufgebauten Prozess findet sich bei KÜHL (1990) und sei hier als Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen und zu Referenzzwecken nochmals wiedergegeben. Bezüglich der Herleitungen sei hier auf die angegebene Literatur verwiesen.

Wesentliche Voraussetzungen des Modells sind die Vernachlässigung aller Reibungs-, Strömungs- und Wärmeleitungsverluste sowie die Annahme eines idealen Gases als Arbeitsmedium. Weiterhin werden alle Teilräume  $i$  eines Prozesses als isotherm angenommen, wobei die Temperatur  $T_i$  dort, wo sie örtlich veränderlich ist (insbesondere also in den Regeneratoren), als massenbezogener Mittelwert zu verstehen ist. Im Falle eines linearen Verlaufes und eines über die Länge gleich verteilten Totvolumens ergibt sich hier z. B. das logarithmische Mittel der Endwerte. An den Grenzen zwischen benachbarten Teilräumen wird ein stetiger Temperaturverlauf angenommen, so dass auch Irreversibilitäten durch Vermischung ausgeschlossen sind und implizit alle Regeneratoren ebenfalls als ideal angenommen werden. Damit sind alle Möglichkeiten einer Entropieproduktion ausgeschlossen, so dass dieses Modell für alle Prozesse die reversiblen Grenzwerte des Wirkungsgrades bzw. der Leistungszahl liefert.

Die Größe eines Raumes wird durch den Mittelwert  $\bar{V}_i$  und ggf. durch die Amplitude  $\hat{V}_i$  seines Volumens sowie den Phasenwinkel  $\theta_i$  beschrieben gemäß

$$V_i(\varphi) = \bar{V}_i + \hat{V}_i \cos(\varphi + \theta_i) \quad (\text{A1-1}).$$

Damit folgt aus einer Massenbilanz der Prozessdruck  $p$  als Funktion des Kurbelwinkels  $\varphi$  :

$$p(\varphi) = \frac{m_{\text{ges}} \cdot R}{B - D \cos(\varphi + \theta_p)} \quad (\text{A1-2})$$

mit 
$$B = \sum_{i=0}^n \frac{\bar{V}_i}{T_i} \quad (\text{A1-2a}),$$

$$D = \sqrt{\left(\sum_{i=0}^n \frac{\hat{V}_i}{T_i} \cos \theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n \frac{\hat{V}_i}{T_i} \sin \theta_i\right)^2} \quad (\text{A1-2b})$$

$$\text{und} \quad \tan(\theta_p) = \frac{-\sum_{i=0}^n \frac{\hat{V}_i}{T_i} \sin \theta_i}{-\sum_{i=0}^n \frac{\hat{V}_i}{T_i} \cos \theta_i} \quad (\text{A1-2c})$$

Wählt man den Quadranten von  $\theta_p$  entsprechend den Vorzeichen im Zähler und Nenner von Gl. A1-2c, so wird der Druck für  $\varphi = -\theta_p$  maximal, ebenso wie das Volumen  $i$  für  $\varphi = -\theta_i$  maximal wird. Als Mittelwert  $\bar{p}$  dieser reziprok-harmonischen Funktion erhält man das geometrische Mittel der Extremwerte  $p_{\max}$  und  $p_{\min}$  :

$$p_{\max} = \frac{m_{\text{ges}} \cdot R}{B - D}, \quad p_{\min} = \frac{m_{\text{ges}} \cdot R}{B + D}, \quad (\text{A1-3})$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2\pi} \oint p(\varphi) d\varphi = \frac{m_{\text{ges}} \cdot R}{\sqrt{B^2 - D^2}} = \sqrt{p_{\max} \cdot p_{\min}}$$

Die in einem Zylinderraum  $i$  pro Zyklus ausgetauschte Wärmemenge errechnet sich zu

$$Q_i = -\oint V_i dp = \oint p dV_i = -2 \cdot \pi \cdot \bar{p} \cdot \hat{V}_i \cdot \sin(\theta_i - \theta_p) \cdot \frac{D}{B} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (D/B)^2}} \quad (\text{A1-4a})$$

bzw. nach Elimination von  $\theta_p$  zu

$$Q_i = -2 \cdot \pi \cdot \bar{p} \cdot \hat{V}_i \cdot \frac{1}{B} \sum_{k=0}^n \frac{\hat{V}_k}{T_k} \sin(\theta_k - \theta_i) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (D/B)^2}} \quad (\text{A1-4b}),$$

und für die Arbeit des Gesamtprozesses ergibt sich analog

$$W = -\oint p dV_{\text{ges}} = 2 \cdot \pi \cdot \bar{p} \cdot \hat{V}_{\text{ges}} \cdot \sin(\theta_{\text{ges}} - \theta_p) \cdot \frac{D}{B} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (D/B)^2}} \quad (\text{A1-5})$$

mit der Amplitude des Gesamtvolumens

$$\hat{V}_{\text{ges}} = \sqrt{\left(\sum_i \hat{V}_i \cos \theta_i\right)^2 + \left(\sum_i \hat{V}_i \sin \theta_i\right)^2} \quad (\text{A1-6a})$$

und dem zugehörigen Phasenwinkel

$$\theta_{\text{ges}} = \arctan \left( \frac{\sum_i \hat{V}_i \sin \theta_i}{\sum_i \hat{V}_i \cos \theta_i} \right) \quad (\text{A1-6b}).$$



Da das isotherme Prozessmodell nach Schmidt wegen seiner weitgehenden Idealisierungen ohnehin vorwiegend für Abschätzungen und vereinfachende Darstellungen fundamentaler Abhängigkeiten geeignet ist, bietet es sich in vielen Fällen an, die Druckfunktion zu linearisieren und zu der Näherungsgleichung

$$p(\varphi) \approx \bar{p} \cdot \left( 1 + \frac{D}{B} \cos(\varphi + \theta_p) \right) \quad (\text{A1-7})$$

überzugehen. Der relative Fehler der Extremwerte ist durch  $1 - \sqrt{1 - (D/B)^2} \approx \frac{1}{2}(D/B)^2$  gegeben und beträgt selbst im ungünstigsten praktisch auftretenden Falle, dem hoch verdichtenden Stirlingmaschinen mit  $p_{\max}/p_{\min} \approx 2:1$  bzw.  $D/B \approx 1/3$ , lediglich ca. 6%. Allerdings weichen sowohl das Maximum als auch das Minimum von Gl. A1-7 im gleichen Sinne vom wahren Verlauf gemäß Gl. A1-2 ab. Da in vielen Fällen eine Übereinstimmung der Extremwerte wichtiger ist als die der Mittelwerte, empfiehlt sich eine entsprechende Korrektur von  $\bar{p}$ , wodurch sich der genannte Fehler von ersteren auf letztere verlagert:

$$p(\varphi) \approx \frac{\bar{p}}{\sqrt{1 - (D/B)^2}} \cdot \left( 1 + \frac{D}{B} \cos(\varphi + \theta_p) \right) = \frac{m_{\text{ges}} \cdot R}{B} \cdot \frac{1 + \frac{D}{B} \cos(\varphi + \theta_p)}{1 - (D/B)^2} \quad (\text{A1-7a})$$

Der Quotient  $D/B$ , der als Verhältnis der Wirkungen von variablen und konstanten Volumenanteilen gedeutet werden kann, stellt die entscheidende Steuergröße für den Prozessdruckverlauf und damit auch für die Leistungsdichte dar. Im Falle der angegebenen linearisierten Näherungen nach Gl. A1-7 und A1-7a gibt er zugleich auch die auf den jeweiligen Mittelwert  $\bar{p}' = (p_{\max} + p_{\min})/2$  bezogene Amplitude  $\hat{p} = (p_{\max} - p_{\min})/2$  des Druckes an:

$$\frac{\hat{p}}{\bar{p}'} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}} = \frac{D}{B} \quad (\text{A1-8})$$

Für die in einem (Zylinder-)Volumen  $i$  ausgetauschten Netto - Wärmemengen pro Zyklus gilt dann mit  $\bar{p}' \approx \bar{p}$  und  $1 + \sqrt{1 - (D/B)^2} \approx 2$  näherungsweise

$$Q_i \approx -\pi \cdot \hat{p} \cdot \hat{V}_i \sin(\theta_i - \theta_p) \quad (\text{A1-9})$$

und für die Netto - Arbeit des Gesamtprozesses analog

$$W \approx \pi \cdot \hat{p} \cdot \hat{V}_{\text{ges}} \sin(\theta_{\text{ges}} - \theta_p) \quad (\text{A1-10}).$$

Die angegebenen Näherungen, deren relative Fehler etwa die Hälfte des oben abgeschätzten betragen, lassen sich damit jeweils als Fläche einer Ellipse im  $p, V$ -Diagramm deuten, die dem durch die zweifache Druck- und Volumenamplitude aufgespannten Rechteck einbeschrieben ist. Ihre Exzentrizität hängt von der relativen Phasenverschiebung zwischen Druck und Volumen ab. Damit wird auf einfache Weise anschaulich klar, dass für einen maximalen Austausch von Wärme und Arbeit diese Phasenverschiebung möglichst ca.  $\pm 90^\circ$  betragen sollte bzw. dass bei Darstellung im komplexen Zeigerdiagramm eine Proportionalität zu der von Druck- und Volumenvektoren aufgespannten Parallelogrammfläche vorliegt und somit nur die jeweils aufeinander senkrecht stehenden Komponenten beider Vektoren von Bedeutung sind.

Die Forderung nach einer Phasenverschiebung von  $\pm 90^\circ$  zwischen Druck- und Volumenfunktion lässt sich allerdings nicht für alle Zylinderräume erfüllen, da der Druckverlauf seinerseits gemäß Gl. A1-2 von den Volumenfunktionen bestimmt wird. Mehr Klarheit verschafft hier Gl. A1-4b. Im einfachsten Falle, dem einer  $\alpha$ -Stirling-Maschine, reduziert sich die Summe auf einen Term, und man erkennt, dass für eine maximale Leistungsdichte die Phasenverschiebung zwischen dem heißen und kalten Zylinderraum ca.  $\pm 90^\circ$  betragen sollte, da dann  $|\sin(\theta_h - \theta_k)| = 1$  ist. Bei genauer Betrachtung existiert jedoch ein weiterer - wenn auch nur geringer und nur bei hohen Druckverhältnissen merklicher - Einfluss des Phasenwinkels über den Quotienten  $D/B$  unter der Wurzel, was, wie z. B. von RINIA und DU PRÉ (1946) dargelegt wurde, zu einer Verlagerung des Optimums zu Werten oberhalb von  $90^\circ$  bis hin zu etwa  $110^\circ$  führt. Der obere Wert gilt allerdings nur für unrealistisch hohe Druckverhältnisse, und da das Optimum sehr flach verläuft, wird auch für  $90^\circ$  nahezu die gleiche Leistungsdichte erreicht. Man sollte hier bedenken, dass das ideal-isotherme Modell nur für anfängliche Abschätzungen geeignet ist und eine Optimierung lediglich unter dem Kriterium der Leistungsdichte zulässt. Letztlich wird der Phasenwinkel jedoch auch unter dem Aspekt eines möglichst hohen Gütegrades zu wählen sein und somit auch von den hier nicht berücksichtigten Verlusten des realen Prozesses, wie z. B. dem adiabatischen Verlust, beeinflusst, zumal das flache Optimum bezüglich der Leistungsdichte hier einen erheblichen Spielraum lässt.

## 1.2 Die allgemeine Berechnung von Gasmassenverteilungen und Massenströmen

Die im vorhergehenden Kapitel abgeleiteten Beziehungen für den Prozessdruckverlauf und die pro Zyklus mit der Umgebung bzw. entsprechenden Reservoirs ausgetauschten Energieströme waren unabhängig von der genauen Verschaltung der einzelnen Prozesskomponenten. Dies ist deshalb möglich, weil bei der Herleitung implizit vorausgesetzt wurde, dass alle Zustandsänderungen der jeweils von einer Komponente in eine andere übertretenden Massenelemente grundsätzlich reversibel verlaufen. Damit sind einerseits Strömungsdruckverluste ausgeschlossen, und andererseits wird bei Temperaturänderungen jeweils eine ideale Regeneration angenommen. Dies kommt dadurch zum Ausdruck, dass Gl. A1-4 auf der in Kap. 2 angegebenen idealisierten Gleichung 2-10 basiert, die sich aus der allgemeinen Form (Gl. 2-9) nur für den Fall verschwindender Enthalpieterme  $\Delta H_j$  ergibt.

Um nun Massenströme  $\dot{m}_j$  oder auch Massenverschiebungen  $\Delta m_j$  berechnen zu können, muss selbstverständlich bekannt sein, wie die jeweiligen Prozesskomponenten durch Überströmkanäle – im folgenden als „Schnittstellen“ bezeichnet – miteinander in Verbindung stehen. Um diese Information in allgemeiner Form bereitzustellen, wird die hier die von KÜHL (1990) eingeführte Nomenklatur übernommen. Es wird danach zunächst eine *eindeutige* Verknüpfung angenommen, d. h. es dürfen keine Schleifen existieren, auf denen ein Massenstrom theoretisch „im Kreis“ fließen könnte. Andernfalls ist wegen der Vernachlässigung aller Strömungsdruckverluste keine eindeutige Lösung des resultierenden Gleichungssystems möglich.

Als Folge dieser (praktisch für alle realen Prozesse zutreffenden) Annahme ist jede Verknüpfung der Prozesskomponenten als „Baum“ darstellbar, d. h. von einer grundsätzlich beliebig wählbaren, als Ausgangspunkt („Wurzel“) dienenden Prozesskomponente ist jede andere auf genau *einem*, eindeutig festliegenden Pfad erreichbar. Werden nun die Prozesskomponenten mit  $i = 0, \dots, n$  durchnummeriert, so existieren demnach zwischen den  $n+1$  Komponenten  $n$  Schnittstellen, die mit  $j = 1, \dots, n$  bezeichnet werden. Ansonsten gelten folgende weitere Festlegungen:

- Die als „Wurzel“ dienende Komponente erhält die Nummer 0. Um die Zahl von Verzweigungen gering zu halten, sollte hier zweckmäßig ein Zylinderraum an einem „Ende“ des Prozesses gewählt werden, z. B. der Zylinderraum auf dem tiefsten Temperaturniveau.
- Alle von Raum 0 weggerichteten Massenströme an den Schnittstellen zählen positiv, Massenströme in Richtung auf Raum 0 negativ.
- Jeder Schnittstelle  $j$  wird die Nummer der von Raum 0 aus unmittelbar hinter ihr liegenden Komponente  $i$  zugewiesen. Damit ist die Verknüpfung der Prozesskomponenten allein durch die zusätzliche Angabe der jeweils *vor* einer Schnittstelle  $j$  liegenden Komponente  $i$  eindeutig definierbar, also lediglich durch Angabe von  $n$  Zahlenwerten. Damit ist – z. B. in Eingabedateien – eine sehr kompakte Beschreibung der Prozessstruktur möglich.

Als Folge dieser Festlegungen existiert für jede Komponente  $i$  außer der Wurzel genau ein Massenstrom  $\dot{m}_j$  mit  $j = i$ , der (positiv, d. h. aus Richtung der Wurzel) in sie hinein gerichtet ist. Die Zahl der sich nach „oben“ anschließenden Schnittstellen mit nach außen positiv zählenden Massenströmen kann je nach Typ der Komponente  $i$  unterschiedlich sein, im Falle von „endständigen“ Zylinderräumen also auch durchaus Null. In den meisten Fällen – insbesondere bei Regeneratoren und Wärmeaustauschern – gibt es genau eine weitere Schnittstelle, bei Zylinder- und Toträumen, an denen sich der Prozess verzweigt, sind es zwei oder auch mehr.

Bei der präzisen Formulierung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für eine beliebige Prozesskomponente muss die Verknüpfung zu den Nachbarkomponenten selbstverständlich berücksichtigt werden. Während in Gl. 2-7 angenommen wird, dass die Summe der Enthalpiedifferentiale nur über diejenigen Schnittstellen  $j$  läuft, die an das betrachtete Zylindervolumen  $i$  angeschlossen sind (und die in dieses Volumen hinein sämtlich positiv gezählt werden), muss die Energiebilanz einer Komponente  $i$  unter Beachtung der obigen Festlegungen wie folgt lauten:

$$dU_i = dQ_i - p dV_i + \sum_j a_{ij} h_j dm_j \quad (\text{A1-11})$$

Dabei ist durch die Größen  $a_{ij}$  die Verknüpfung der Komponenten wie folgt kodiert:

- $a_{ij} = 1$ , wenn der Massenstrom  $j$  in die Komponente  $i$  hinein positiv gerichtet ist. Dies ist offensichtlich nur für die Schnittstelle  $j = i$  der Fall, d. h. es gilt allgemein  $a_{ii} = 1$ .
- $a_{ij} = -1$ , wenn der Massenstrom  $j$  aus der Komponente  $i$  heraus positiv gerichtet ist
- $a_{ij} = 0$  für Schnittstellen  $j$ , die nicht mit Komponente  $i$  verbunden sind.

Wegen der Massenerhaltung ist die Angabe von  $a_{ij}$  für die Wurzel-Komponente  $i=0$  redundant und kann daher unberücksichtigt bleiben. Für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n$  ist  $(a_{ij})$  eine quadratische Matrix, deren inverse Matrix  $(b_{ji})$  für die folgenden Ableitungen vorteilhaft verwendet werden kann, denn es gilt

- $b_{ji} = 1$  für alle Komponenten  $i$ , die von der Wurzel aus hinter der Schnittstelle  $j$  liegen,
- $b_{ji} = 0$  für alle Komponenten  $i$ , die von der Wurzel aus vor der Schnittstelle  $j$  liegen.

Die Massenverschiebung  $\Delta m_j$  oder der zeitliche Ableitung, den Massenstrom  $\dot{m}_j$ , erhält man offensichtlich durch Betrachtung desjenigen Teils der Prozessgasmasse, der sich von der Wurzel aus betrachtet hinter der Schnittstelle  $j$  befindet. Er wird im folgenden durch

$$m_{tj} = m_{\text{ges}} \cdot g_j(\varphi) \quad (\text{A1-12})$$

bezeichnet, wobei die dimensionslose Verteilungsfunktion  $g_j(\varphi)$  nach KÜHL ET AL. (1995) gegeben ist durch

$$g_j(\varphi) = \frac{X_j + Y_j \cdot \cos(\varphi + \psi_j)}{B - D \cdot \cos(\varphi + \theta_p)} \quad (\text{A1-13})$$

mit

$$X_j = \sum_i b_{ji} \cdot \frac{\bar{V}_i}{T_i} \quad (\text{A1-14}),$$

$$Y_j = \sqrt{\left( \sum_i b_{ji} \cdot \frac{\hat{V}_i}{T_i} \cdot \cos(\theta_i) \right)^2 + \left( \sum_i b_{ji} \cdot \frac{\hat{V}_i}{T_i} \cdot \sin(\theta_i) \right)^2} \quad (\text{A1-15})$$

und

$$\psi_j = \arctan \left( \frac{\sum_i b_{ji} \cdot \frac{\hat{V}_i}{T_i} \cdot \sin(\theta_i)}{\sum_i b_{ji} \cdot \frac{\hat{V}_i}{T_i} \cdot \cos(\theta_i)} \right) \quad (\text{A1-16}).$$

Da die Änderung von  $m_{tj}$  i. a. sowohl auf die Veränderung des Prozessvolumens hinter der Schnittstelle  $j$  als auch auf die Kompressibilität des Arbeitsmediums in Verbindung mit der Prozessdruckänderung zurückzuführen ist, ergeben für  $m_{tj}(\varphi)$  als auch für den als Zeitableitung unmittelbar folgenden Massenstrom an der Schnittstelle  $j$ ,

$$\dot{m}_j = \omega \cdot \frac{dm_{tj}}{d\varphi} = -\omega \cdot m_{\text{ges}} \cdot \frac{1}{(B - D \cdot \cos(\varphi + \theta_p))^2} \cdot \left[ Y_j \cdot B \cdot \sin(\varphi + \psi_j) + X_j \cdot D \cdot \sin(\varphi + \theta_p) + Y_j \cdot D \cdot \sin(\theta_p - \psi_j) \right] \quad (\text{A1-17}),$$

trotz der als sinusförmig angenommenen Volumenänderungen (Gl. A1-1) verzerrt periodische Funktionen mit verhältnismäßig komplexer Struktur. Die Nullstellen  $\varphi_{0,j}$  des Massenstroms, die für die Berechnung der Massenverschiebung  $\Delta m_j$  in Gl. A1-12 einzusetzen sind, sind daher i. a. nicht um  $180^\circ$  voneinander entfernt, sondern ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$\sin(\varphi_{0,j} + \beta_j) = \frac{D}{B} \cdot \sin(\beta_j - \theta_p) \quad (\text{A1-18})$$

mit

$$\beta_j = \arctan \left( \frac{(Y_j/D) \cdot \sin \psi_j + (X_j/B) \cdot \sin \theta_p}{(Y_j/D) \cdot \cos \psi_j + (X_j/B) \cdot \cos \theta_p} \right) \quad (\text{A1-19}).$$

Mit den angegebenen Gleichungen lassen sich offensichtlich die Massenverschiebungen und Massenströme an allen Schnittstellen  $j$  auf der Grundlage des idealen, isothermen Prozessmodells berechnen. Manchmal ist jedoch auch der Massenstrom an einer bestimmten Stelle innerhalb einer Komponente von Interesse. Sie sind theoretisch stets mit dem gleichen Formalismus zu ermitteln, wenn die betreffende Komponente zuvor gedanklich in zwei Teile zerlegt und an der fraglichen Stelle somit eine weitere Schnittstelle geschaffen wird. Oft ist jedoch ein derartiger Aufwand nicht angemessen. Werden z. B. mittlere Massenströme in einem Wärmeübertrager oder Regenerator benötigt, um eine Druckverlust- oder Wärmeübergangskorrelation auszuwerten, so ist angesichts deren stets beschränkter Genauigkeit i. d. R. eine Mittelwertbildung aus den angrenzenden Schnittstellenwerten ausreichend und angemessen.



## 2 Herleitungen zur Modellierung von Verlusten

### 2.1 Der Wärmeleitungsverlust in der Behälterwand

Im folgenden wird vereinfachend angenommen, dass es sich bei den Gehäusewänden, die i. d. R. einen Regenerator oder ein Zylinder-Kolben-System umschließen, um dünnwandige, nach den einschlägigen Regeln der Technik für Innendruckbelastung ausgelegte Zylinderschalen handelt. Für die im Druckbehälterbau zugelassenen duktilen metallischen Werkstoffe gilt dann nach der Schubspannungshypothese die als „Kesselformel“ bekannte Beziehung

$$\frac{s}{D} \geq \frac{1}{2 \cdot \frac{\sigma_{zul}}{p} - 1} \quad (\text{A2-1})$$

mit  $D$  und  $s$  als Innendurchmesser bzw. Wandstärke des Mantels,  $\sigma_{zul}$  als der zulässigen Vergleichsspannung und  $p$  als dem für die Dimensionierung maßgeblichen Innendruck. Abhängig davon, ob hier eine Streck- bzw. Dehngrenze oder (speziell im Hochtemperaturbereich) die Zeitstandfestigkeit einzusetzen ist, muss hier zwischen mittlerem und maximalem Druck unterschieden werden. Da beide Werte für einen gegebenen Prozess in relativ engem Zusammenhang stehen, wird hier vereinfachend angenommen, dass der Auslegungsdruck dem mittleren Prozessdruck entspricht und dass dort, wo der Maximaldruck einzusetzen wäre, dies über einen entsprechenden Korrekturfaktor des Festigkeitskennwertes berücksichtigt wird, ähnlich wie dies bei Sicherheitsbeiwerten üblich ist. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass alle derartigen Korrekturen bereits in  $\sigma_{zul}$  enthalten sind. Für den wärmeleitenden Querschnitt der Druckbehälterwand gilt dann mit Gl. A2-1A2-1

$$A_W = \pi \cdot (D + s) \cdot s = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot 4 \left(1 + \frac{s}{D}\right) \frac{s}{D} = A_q \cdot \frac{2 \frac{p}{\sigma_{zul}}}{\left(1 - \frac{p}{2 \sigma_{zul}}\right)^2} \quad (\text{A2-2})$$

Man erkennt, dass der wärmeleitende Wandquerschnitt stets proportional zum freien Innenquerschnitt  $A_q$  des Zylindermantels ist. Daraus folgt, dass die Wandwärmeleitung unabhängig davon ist, ob z. B. im Falle eines Regenerators die Matrix in einem einzelnen Gehäuse oder in mehreren kleineren mit gleichem Gesamtquerschnitt untergebracht ist, denn der gesamte Wärmestrom durch Wandwärmeleitung errechnet sich in jedem Fall gemäß

$$\dot{Q}_{WW1} = \lambda_W \cdot \frac{2 \frac{p}{\sigma_{zul}}}{\left(1 - \frac{p}{2 \sigma_{zul}}\right)^2} \cdot \left(\sum_i \frac{A_{q,i}}{\ell_i}\right) \cdot \Delta T \quad (\text{A2-3})$$

mit  $\lambda_W$  als Wärmeleitkoeffizienten des Materials und  $\ell_i$  als den Längen der Wandabschnitte, über die die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  auftritt. Ist  $\ell_i$  für die parallelgeschalteten Komponenten gleich, so lassen sich die freien Querschnitte offensichtlich zusammenfassen.

Vergleicht man dagegen jedoch den Fall eines ringförmig um ein Kolben-Zylindersystem angeordneten Regenerators mit dem äquivalenten Fall, in dem beide Komponenten in separaten

Druckbehältern untergebracht sind, so würde die relativ geringe Länge der Regeneratormatrix im ersten Fall für den gesamten, im zweiten jedoch nur für den anteilig dem Regeneratorquerschnitt entsprechenden wärmeleitenden Wandquerschnitt gelten, so dass die Situation bezüglich des Wand-Wärmeleitungsverlustes hier günstiger ist.

Die obige Voraussetzung, dass der Druckbehälter hinsichtlich der Dimensionierung als dünnwandig behandelt werden kann – dies ist Bedingung für die Anwendbarkeit von Gl. A2-1A2-1 – ist nur für  $p \ll \sigma_{zul}$  erfüllt. In diesem Fall kann der Wand-Wärmeleitungsverlust in guter Näherung als zum Auslegungsdruck proportional betrachtet werden, denn es gilt

$$\dot{Q}_{WW1} \approx 2 p \frac{\lambda_W}{\sigma_{zul}} \cdot \left( \sum_i \frac{A_{q,i}}{\ell_i} \right) \cdot \Delta T \quad (A2-4).$$

Weiterhin ist zu erkennen, dass letztlich nur das Verhältnis von Wärmeleitfähigkeit und Festigkeitskennwert für den Wand-Wärmeleitungsverlust von Bedeutung ist. Im Rahmen ähnlichkeitstheoretischer Betrachtungen (vgl. Kap. 4) bietet es sich daher an, aus diesem Verhältnis einen dimensionslosen Materialkennwert zu bilden.

## 2.2 Thermische Verluste an Zylindern und Kolben

Gemäß Kap. 4.1.4.1 ist eine Analyse der Kolbengeometrie unter thermodynamischen und wärmetechnischen Gesichtspunkten nur sinnvoll im Falle von Verdrängerkolben, die zwei Zylinderräume voneinander trennen und sich daher im Bereich eines axialen Temperaturgradienten bewegen, oder in dem besonders bei  $\alpha$ -Konfigurationen auftretenden Fall eines Verdichterkolbens, dessen Dichtungssystem vor hohen (oder auch sehr tiefen) Temperaturen durch einen wärmeisolierenden Dom geschützt ist. Im folgenden wird nur der Fall des Verdrängerkolbens exemplarisch behandelt, da die Verhältnisse bezüglich der thermischen Verluste in beiden Fällen vergleichbar sind. Im einzelnen sind hier zu unterscheiden:

- Wärmeleitungsverluste, die im wesentlichen auf den axialen Querschnitt der drucktragenden Zylinderwand und darüber hinaus zu einem geringeren Teil auch auf den Wärmetransport über den isolierenden Dom des Verdrängers zurückzuführen sind,
- die sog. „Shuttle“-Verluste im Kolbenspalt, die durch die periodische Relativbewegung der Kolben- und Zylinderwand mit ihren jeweils zeitlich nahezu unveränderlichen Temperaturgradienten und den hierdurch bedingten, positionsabhängig zwischen beiden Wänden ausgetauschten Wärmestrom entstehen, und
- die sog. Enthalpiestrom-Verluste durch das am offenen Ende des Kolbenspaltes periodisch ein- und ausströmende Gas, für das das Kreisintegral des Enthalpiestromes wegen der Phasenverschiebung zur positionsabhängigen Temperatur nicht verschwindet.

Die Wärmeverluste über den Verdrängerdom sind bedingt durch die Wärmeleitung in der meist sehr dünn ausgeführten Wand des Doms sowie aus Konvektions- und Strahlungsanteilen im Innern. Sie können durch konstruktive Maßnahmen sehr gering gehalten und daher im Rahmen vereinfachter Betrachtungen näherungsweise durch einen pauschalen Zuschlag auf den Wärmeleitwert der Zylinderwand berücksichtigt werden. Hierfür gilt nach Anhang 2.1

$$\dot{Q}_{WW1} \approx 2 \lambda_W \frac{\bar{p}}{\sigma_{zul}} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \frac{T_h - T_k}{\ell} \quad (A2-5).$$



Die beiden verbleibenden Verluste hängen eng mit der Dimensionierung des Kolbenspaltes zusammen. Die Wärmekapazität der oberflächennahen Wandschichten von Zylinder und Kolben, die durch eine mittlere Eindringtiefe ähnlich der in Gl. 3-13 definierten bestimmt sind, ist nach URIELI UND BERCHOWITZ (1984) unter praxisrelevanten Betriebsbedingungen und Abmessungen stets so groß, dass die während eines Zyklus periodisch ausgetauschten Wärmemengen von ihnen ohne nennenswerte Temperaturänderung gespeichert werden können. Sie vereinfachen daher die Analyse des Shuttle-Verlustes nach RIOS (1971) und betrachten die Oberflächentemperaturen als zeitlich konstant. Damit ist dieser Verlust drehzahlunabhängig.

Steht nun also – je nach Auslenkungsrichtung des Kolbens – jedem Flächenelement des Kolbenmantels eine heißeres bzw. kälteres Element der Zylinderwand gegenüber, so wird der übertragene Wärmestrom also nicht durch die endliche Leitfähigkeit der Oberflächen, sondern ausschließlich durch die des Gases im Spalt limitiert. Daher ist der so verursachte Shuttle-Verlust zur Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Arbeitsmediums sowie zum Kehrwert der Spaltweite  $h$  proportional. Die weiteren Proportionalitäten zur Mantelfläche, zum Temperaturgradienten sowie zum Quadrat des Kolbenhubes (der sowohl die treibende Temperaturdifferenz als auch die Größe der periodisch vom Kolben überdeckten und wieder freigegebenen Flächen beeinflusst) sind ebenfalls qualitativ leicht begründbar. Quantitativ ergibt sich die Beziehung

$$\dot{Q}_{Sh} = \frac{\pi}{2} \cdot \lambda \cdot \hat{x}^2 \cdot \frac{D}{h} \cdot \frac{T_h - T_k}{\ell} \quad (\text{A2-6})$$

mit  $\hat{x}$  als der Hubamplitude des Kolbens und  $\ell$  als der den Temperaturgradienten zwischen der hohen und der niedrigen Temperatur  $T_h$  bzw.  $T_k$  bestimmenden Länge. Für den Enthalpiestromverlust gibt BERCHOWITZ (1986) eine Beziehung an, die in linearisierter Form als

$$\dot{Q}_{En} = 2 \cdot \frac{c_P}{R} \cdot n \cdot \bar{p} \cdot V_H \cdot \left(\frac{h}{D}\right) \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \cdot \left[ \left(\frac{x_H}{L}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)\right) + b \cdot \frac{\hat{p}}{\bar{p}} \right] \quad (\text{A2-7})$$

$$\text{mit} \quad b = \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\theta) - \cos(\theta) \quad (\text{A2-8})$$

formuliert werden kann. Hier tritt im Gegensatz zu Gl. A2-6 eine direkte Proportionalität zu  $h$  wie auch zur Drehzahl  $n$  und zum mittleren Prozessdruck  $\bar{p}$  auf. Nach KÜHL ET AL. (1997a) kann der Einfluss der Prozessdruckamplitude  $\hat{p}$ , der vom relativen Phasenwinkel zwischen Druck und Kolbenbewegung  $\theta$  beeinflusst wird, in den meisten Fällen, insbesondere bei komplexeren Prozessen mit relativ geringer Druckamplitude, vernachlässigt werden, da der Logarithmus des Temperaturverhältnisses i. d. R. deutlich kleiner als Zwei ist. Damit erhält man für die Summe beider Verluste

$$\dot{Q}_{Sh} + \dot{Q}_{En} = \frac{\pi}{2} \frac{\hat{x}^2}{\ell} D \left[ \lambda \cdot \frac{T_h - T_k}{h} + \frac{c_P}{R} \cdot n \cdot \bar{p} \cdot h \cdot \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \cdot \left(2 - \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)\right) \right] \quad (\text{A2-9}).$$

Bezüglich der Kolbenspaltweite weist diese Funktion ein leicht bestimmbares Minimum für

$$h_{opt} = \sqrt{\lambda \frac{R}{c_P} \cdot \frac{\bar{T}_{ln}}{n \cdot \bar{p} \cdot \left(2 - \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)\right)}} \quad \text{mit} \quad \bar{T}_{ln} = \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} \quad (\text{A2-10})$$

auf, das im wesentlichen druck- und drehzahlabhängig ist und in praktischen Fällen i. d. R. bei einigen Zehntel Millimetern, also in einem problemlos realisierbaren Bereich liegt.

Wird nun unter der Nebenbedingung eines konstanten Hubvolumens  $V_{\text{Hub}} = \pi D^2 \hat{x}/2$  der günstigste Kolbenhub  $\hat{x}$  gesucht, so muss man zusätzlich auch den Wärmeleitungsverlust nach Gl. A2-5 betrachten. Die Bestimmung der Nullstelle der ersten Ableitung von

$$\left[ \dot{Q}_{\text{WWI}} + \dot{Q}_{\text{Sh}} + \dot{Q}_{\text{En}} \right]_{h=h_{\text{min}}} = \frac{T_h - T_k}{\ell} \sqrt{2\pi V_{\text{Hub}}} \cdot \left[ \frac{\lambda_W}{2} \cdot \frac{\bar{p}}{\sigma_{\text{zul}}} \sqrt{\frac{2V_{\text{Hub}}}{\pi}} \frac{1}{\hat{x}} + \sqrt{\lambda \frac{c_p}{R} n \bar{p} \frac{\left(2 - \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)\right)}{\bar{T}_{\text{ln}}}} \right] \cdot \hat{x}^{3/2} \quad (\text{A2-11})$$

ergibt 
$$\hat{x}_{\text{opt}} = \left[ \frac{2}{9\pi} \left( \frac{\lambda_W}{\sigma_{\text{zul}}} \right)^2 V_{\text{Hub}} \frac{R \bar{p}}{c_p n} \frac{\bar{T}_{\text{ln}}}{\lambda \left( 2 - \ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right) \right)} \right]^{1/5} \quad (\text{A2-12}).$$

## 2.3 Abschätzung des Dispersionsverlustes

WEN UND FAN (1975) geben für die Dispersion bei der Strömung von Gasen durch Kugelschüttungen der Porosität  $\varepsilon \approx 0,4$  aufgrund von Messungen verschiedener Autoren eine Korrelation an, die sich bei Berücksichtigung des angegebenen Wertes für die Porosität als

$$\frac{1}{\text{Pe}} = \frac{0,75}{\text{Re} \cdot \text{Sc}} + \frac{0,5}{1 + 9,5/(\text{Re} \cdot \text{Sc})} \quad (\text{A2-13})$$

formulieren lässt. Dabei sind die Peclet-Zahl des Stofftransportes  $\text{Pe}$ , die Reynolds-Zahl  $\text{Re}$  und die Schmidt-Zahl  $\text{Sc}$  gemäß

$$\text{Pe} = \frac{u \cdot d}{D} \quad (\text{A2-14}),$$

$$\text{Re} = \frac{u \cdot d}{\nu} \quad (\text{A2-15})$$

und

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D_m} \quad (\text{A2-16})$$

mit  $d$  als Partikeldurchmesser und  $u$  als der mittleren Strömungsgeschwindigkeit im Haufwerk, d. h. dem Quotienten aus Leerrohrgeschwindigkeit und Porosität, definiert. Offensichtlich ist bei kleinen Werten von  $\text{Re}$ , d. h. bei schleichender Strömung, nur der erste Summand in Gl. A2-13 von Bedeutung, und man erhält im Grenzfall das Ergebnis  $D = 0,75 D_m$ . Der Dispersionskoeffizient  $D$  wird also von der molekularen Selbstdiffusionskonstante  $D_m$  bestimmt, wobei der Zahlenfaktor den gegenüber einem Kanal gleichen freien Querschnittes

verlängerten Diffusionsweg beschreibt. Unter den für regenerative Kreisprozesse typischen Bedingungen ist jedoch nur der durch den zweiten Summanden beschriebene Grenzfall hoher Reynolds-Zahlen von Bedeutung, in dem man den konstanten Wert  $Pe = 2$  erhält.

Die dimensionslose Sprungantwort oder Verweilzeit-Summenfunktion  $c^*(t)$  an einer beliebigen Position  $x$  innerhalb eines als quasi-homogen behandelten, durch die so ermittelte Dispersionskonstante  $D$  beschriebenen Systems erhält man als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 c^*}{\partial x^2} - u \cdot \frac{\partial c^*}{\partial x} \quad (\text{A2-17}).$$

Für  $x = \ell$  und die entsprechende Anfangsbedingung ergibt sich in dimensionsloser Form

$$c^*(x = \ell, \tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{1}{2} \sqrt{Bo} \cdot \frac{1 - \tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \quad (\text{A2-18})$$

mit  $\tau = t \cdot \dot{V} / V$  als dimensionsloser Raumzeit und der Bodenstein-Zahl

$$Bo = \frac{\ell \cdot u}{D} \quad (\text{A2-19}).$$

Neben diesem in der Reaktionstechnik als Dispersionsmodell bekannten Ansatz findet alternativ auch das sog. Kaskadenmodell zur Beschreibung des dispersiven Verhaltens realer Strömungssysteme Verwendung (vgl. z. B. FITZER UND FRITZ 1982). Hier wird eine Serienschaltung aus  $n$  ideal vermischten Zellen angenommen, deren Verweilzeit-Summenfunktion durch

$$c^* = 1 - e^{-n\tau} \cdot \left[ 1 + n\tau + \frac{1}{2!} (n\tau)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} (n\tau)^{n-1} \right] \quad (\text{A2-20})$$

gegeben ist. Ihr Verlauf ist für größere Werte von  $n$  ( $n > 10$ ) dem nach Gl. A2-18 sehr ähnlich, sofern die Steigungen für  $\tau = 1$  identisch sind. Durch Gleichsetzen der ersten Ableitungen an diesem Punkt erhält man zunächst

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Bo}{\pi}} = \frac{n}{(n-1)!} (n\tau)^{n-1} e^{-n\tau} \quad (\text{A2-21}).$$

Unter Verwendung der Stirling'schen Näherung für die Fakultäts- bzw. Gamma-Funktion führt dies schließlich zu dem einfachen Ergebnis

$$Bo = 2 \cdot n \quad (\text{A2-22}),$$

und mit dem Grenzwert der Peclet-Zahl für große Reynolds-Zahlen,  $Pe = 2$  (s. o.), folgt

$$n = \frac{\ell}{d} \quad (\text{A2-23}).$$

Dieses Ergebnis lässt sich so deuten, dass alle vom Fluid auf dem Weg durch das System passierten Hohlräume, deren Anzahl für regellose Kugelschüttungen in guter Näherung durch Gl. A2-23 abgeschätzt werden kann, als ideal vermischte Zellen aufgefasst werden können, denn das Kaskadenmodell, das auf dieser Annahme basiert, liefert mit  $n$  nach Gl. A2-23 offenbar das gleiche Ergebnis wie das Dispersionsmodell mit  $Pe = 2$ .

## 2.4 Herleitungen zur Erfassung von Strömungsdruckverlusten in Prozessmodellen 2. Ordnung

Strömungsdruckverluste werden allgemein durch Ansätze der Form

$$\Delta p = \left( \xi(\text{Re}) \cdot \frac{\ell}{d_h} + f_C \right) \cdot \frac{\rho}{2} u^2 \quad (\text{A2-24})$$

beschrieben, wobei  $u$  die über den Querschnitt und ggf. auch über die Strömungslänge  $\ell$  gemittelte Strömungsgeschwindigkeit,  $\rho$  die (ggf. ebenfalls gemittelte) Dichte,  $d_h$  den hydraulischen Durchmesser und  $\xi$  den von der Reynolds-Zahl  $\text{Re}$  abhängigen Druckverlustbeiwert bezeichnen. Letzterer ist i. d. R. aus einem laminaren, vom Kehrwert der Reynolds-Zahl abhängigen Anteil und einem die turbulente Strömung beschreibenden Anteil zusammengesetzt:

$$\xi(\text{Re}) = \frac{a}{\text{Re}} + \frac{b}{\text{Re}^c} \quad (\text{A2-25})$$

Dabei wird der in einigen Strömungsformen, wie z. B. der ausgebildeten Rohrströmung, auftretende plötzliche Umschlag der Strömungsform durch einen kontinuierlichen Übergang angenähert, wie er u. a. bei durchströmten Haufwerken zu beobachten ist. Bekanntlich nimmt der Exponent in Gl. A2-25 in allen Fällen Werte  $c \ll 1$  an. Während für hydraulisch glatte Rohre  $c \approx 0,25$  gilt, ist bei technisch rauen Rohren  $c = 0$ . Dieser Fall tritt in regenerativen Kreisprozessen wegen der of sehr kleinen Kanaldurchmesser im Bereich von wenigen Millimetern häufig auf. Im Falle von Haufwerken gilt nach Untersuchungen verschiedener Autoren durchweg  $c \approx 0,1$ . Für den in regenerativen Kreisprozessen relevanten Bereich der Reynolds-Zahl können hier ohne signifikanten Genauigkeitsverlust auch Ersatzkorrelationen mit  $c = 0$  eingesetzt werden, die bei der numerischen Auswertung Geschwindigkeitsvorteile bieten. Werden nun aus diesen Gründen alle Strömungsdruckverluste durch den vereinfachten Ansatz

$$\xi(\text{Re}) = \frac{a'}{\text{Re}} + b' \quad (\text{A2-26})$$

beschrieben, so bietet sich weiterhin die Möglichkeit einer Zusammenfassung des konstanten, von  $b'$  abhängigen Gliedes mit dem Faktor  $f_C$  in Gl. A2-24, durch den der Carnot'sche Stoßverlust sowie ggf. auch weitere, durch konstante Druckverlustbeiwerte beschreibbare Einlauf- oder Umlenkungsverluste beschrieben werden können. In diesem Fall kann der einer Schnittstelle  $j$  zugeordnete Druckverlust als

$$\Delta p_j = -(f_0 \cdot \dot{m} + f_1 \cdot \dot{m} \cdot |\dot{m}|) \quad (\text{A2-27})$$

formuliert werden, wenn zusätzlich eine konstante Dichte  $\rho$  angenommen wird. Die Konstanten  $f_0$  und  $f_1$  erhält man durch Koeffizientenvergleich.

Die Ermittlung des drehzahlabhängigen Faktors in der linearisierten Druckverlustbeziehung

$$\Delta p_j = -k_j(n) \cdot \dot{m}_j \quad (\text{A2-28})$$

wird hier nur für den vereinfachten Fall eines durch Gl. A2-27 beschriebenen Druckverlustes angegeben, ist jedoch ebenso auch für den allgemeinen Fall nach Gl. A2-24 möglich. Das entscheidende Kriterium, dass bereits von mehreren Autoren (z. B. BERCHOWITZ 1986, THOMAS

1992) zur Linearisierung von Druckverlustbeziehungen bei der mathematischen Behandlung regenerativer Kreisprozesse angewandt wurde, ist dabei die Gleichheit der während eines Prozesszyklus dissipierten Energie im ursprünglichen und im linearisierten Fall. Mit der an dieser Stelle ohne weiteres vertretbaren Annahme eines sinusförmig verlaufenden Massenstromes,

$$\dot{m}_j = \pi \cdot n \cdot \Delta m_j \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{A2-29}),$$

ist das Integral für die dissipierte Energie lösbar, und man erhält mit Gl. A2-27

$$\begin{aligned} \Phi_j &\approx -\frac{1}{\rho} \cdot \oint \dot{m}_j \cdot \Delta p_j \cdot dt = \frac{1}{\rho} \cdot \oint (f_0 \cdot \dot{m}_j^2 + f_1 \cdot \dot{m}_j^2 \cdot |\dot{m}_j|) dt \\ &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot n \cdot \Delta m_j^2 \cdot (f_0 + \frac{8}{3} \cdot f_1 \cdot \Delta m_j \cdot n) \end{aligned} \quad (\text{A2-30}).$$

Bei Verwendung von Gl. A2-28 ist lediglich  $f_0 = k_j$  und  $f_1 = 0$  zu setzen, und somit folgt

$$k_j(n) = f_0 + \frac{8}{3} \cdot f_1 \cdot \Delta m_j \cdot n \quad (\text{A2-31}).$$

Im allgemeinen Fall nach Gl. A2-24 erhält man für  $k_j(n)$  eine kompliziertere Funktion mit nichtlinearen Gliedern, die jedoch bei einer iterativen Bestimmung der Maschinendrehzahl in einem Modell zweiter Ordnung ebenfalls problemlos auszuwerten ist.

Die Massenverteilung im Prozess verändert sich nun aufgrund der den Schnittstellen zugeordneten Druckverluste  $\Delta p_j$  gegenüber dem Idealfall eines örtlich konstanten Druckes  $p_m$ , wobei als Nebenbedingung die gesamte Prozessgasmasse  $m_{\text{ges}}$  konstant bleibt. Für die Druckdifferenz zwischen einem beliebigen Raum  $i$  und Raum 0 gilt zunächst nach Kap. 3.3

$$p_i(\varphi) - p_0(\varphi) = \sum_j b_{ji} \cdot \Delta p_j(\varphi) \quad (\text{A2-32}).$$

Durch Gleichsetzen der Gasmasse in beiden Fällen erhält man nun für  $p_0$

$$m_{\text{ges}} = \frac{p_m}{R} \cdot \sum_i \frac{V_i}{T_i} = \sum_i \frac{p_i \cdot V_i}{R \cdot T_i} = \frac{p_0}{R} \cdot \sum_i \frac{V_i}{T_i} + \sum_i \frac{V_i \cdot \sum_j b_{ji} \cdot \Delta p_j}{R \cdot T_i} \quad (\text{A2-33}).$$

Durch Umordnen der Summenbildung über  $i$  und  $j$  erhält man weiter

$$(p_m - p_0) \cdot \sum_i \frac{V_i}{T_i} = \sum_i \frac{V_i \cdot \sum_j b_{ji} \cdot \Delta p_j}{T_i} = \sum_j \Delta p_j \cdot \sum_i b_{ji} \frac{V_i}{T_i} \quad (\text{A2-34}).$$

Unter Beachtung der Definitionen von  $B$ ,  $D$  und  $\theta_p$  gemäß Anhang 1.1 sowie von  $X_j$ ,  $Y_j$ ,  $\psi_j$  und der dimensionslosen Massenverteilung  $g_j(\varphi)$  gemäß Anhang 1.2 folgt mit

$$\sum_i \frac{V_i}{T_i} = B - D \cdot \cos(\varphi + \theta_p) \quad (\text{A2-35})$$

und

$$\sum_i b_{ji} \frac{V_i}{T_i} = X_j + Y_j \cdot \cos(\varphi + \psi_j) \quad (\text{A2-36})$$

$$p_0 = p_m - \sum_j \Delta p_j \cdot \frac{\sum_i b_{ji} \frac{V_i}{T_i}}{\sum_i \frac{V_i}{T_i}} = p_m - \sum_j \Delta p_j \cdot g_j(\varphi) \quad (\text{A2-37}).$$

Eine an der Schnittstelle  $j$  auftretende Druckdifferenz  $\Delta p_j$  verändert also den Druck in Raum 0 umso mehr, je größer der von Raum 0 aus gesehen „hinter“ ihr liegende Gasmassenanteil ist. Da mit  $p_0$  auch alle anderen Drücke  $p_i$  bekannt sind, sind die Korrekturterme für die indizierten Wärmemengen der Zylinderräume durch Aufspalten in zwei Teilintegrale zu ermitteln:

$$\Phi_i = Q_{i,\text{id}} - Q_i = \oint (p_m - p_i) \cdot dV_i \quad (\text{A2-38})$$

$$= \oint (p_m - p_0) \cdot dV_i - \oint \sum_j b_{ji} \cdot \Delta p_j \cdot dV_i \quad (\text{A2-39})$$

Für die Teilintegrale erhält man mit Gl. A2-28 sowie Gl. A1-12 und 17

$$\begin{aligned} \oint (p_m - p_0) dV_i &= \omega \cdot m_{\text{ges}} \cdot \hat{V}_i \cdot \sum_j k_j(n) \cdot \oint g_j(\varphi) \cdot \frac{dg_j(\varphi)}{d\varphi} \cdot \sin(\varphi + \theta_i) d\varphi = \\ &= -\pi \cdot n \cdot m_{\text{ges}} \cdot \hat{V}_i \cdot \sum_j k_j(n) \cdot \oint (g_j(\varphi))^2 \cdot \cos(\varphi + \theta_i) d\varphi \end{aligned} \quad (\text{A2-40}),$$

$$\begin{aligned} -\oint \sum_j b_{ji} \Delta p_j dV_i &= -\omega \cdot m_{\text{ges}} \cdot \hat{V}_i \cdot \sum_j b_{ji} \cdot k_j(n) \cdot \oint \frac{dg_j(\varphi)}{d\varphi} \cdot \sin(\varphi + \theta_i) d\varphi = \\ &= 2\pi \cdot n \cdot m_{\text{ges}} \cdot \hat{V}_i \cdot \sum_j b_{ji} \cdot k_j(n) \cdot \oint g_j(\varphi) \cdot \cos(\varphi + \theta_i) d\varphi \end{aligned} \quad (\text{A2-41}).$$

Damit ergibt sich  $\Phi_i$  insgesamt als Summe der den Schnittstellen zuzuordnenden Anteile

$$\Phi_{ji} = \pi \cdot n \cdot m_{\text{ges}} \cdot \hat{V}_i \cdot k_j(n) \cdot G_{ji} \quad (\text{A2-42}).$$

Die Volumen- und Temperaturfunktionen  $G_{ji}$  sind analytisch integrierbar (KÜHL ET AL. 1995):

$$\begin{aligned} G_{ji} &= -\oint g_j(\varphi) [g_j(\varphi) - 2b_{ji}] \cos(\varphi + \theta_i) d\varphi = \\ &= -2\pi \frac{D/B}{[1 - (D/B)^2]^{3/2}} \cos(\theta_i - \theta_p) \left[ \left( \frac{X_j}{B} \right)^2 + 2 \left( \frac{X_j}{B} \right) \left( \frac{Y_j}{D} \right) \cos(\psi_j - \theta_p) + \left( \frac{Y_j}{B} \right)^2 \cos^2(\psi_j - \theta_p) \right] + \\ &+ 4\pi b_{ji} \frac{1}{\sqrt{1 - (D/B)^2}} \cos(\theta_i - \theta_p) \left[ \frac{D/B}{1 + \sqrt{1 - (D/B)^2}} \left( \frac{X_j}{B} \right) + \left( \frac{Y_j}{B} \right) \cos(\psi_j - \theta_p) \right] + \\ &+ 4\pi \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (D/B)^2}} \left( \frac{Y_j}{B} \right) \cos[(\psi_j - \theta_p) + (\theta_i - \theta_p)] \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (D/B)^2}} \left( \frac{X_j}{B} \right) - b_{ji} \right] + \\ &+ 2\pi \frac{D/B}{\sqrt{1 - (D/B)^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - (D/B)^2})^2} \left( \frac{Y_j}{B} \right)^2 \cos[2(\psi_j - \theta_p) + (\theta_i - \theta_p)] \end{aligned} \quad (\text{A2-43})$$

## 3 Herleitungen ähnlichkeitstheoretischer Zusammenhänge

### 3.1 Entropieproduktion in Regeneratoren

Die Entropieproduktion in Regeneratoren ist zum einen auf Strömungsdruckverluste und zum anderen auf irreversible Temperaturlausgleichsvorgänge, d. h. auf die in Kap. 3.2 behandelten thermischen Regeneratorverluste, zurückzuführen. Es treten somit zwei typische Mechanismen der Entropieproduktion auf, der (meist als Dissipation bezeichnete) Ausgleich *mechanischer* Potentialunterschiede sowie der irreversible Ausgleich *thermischer* Potentialunterschiede. Weitere analoge Ausgleichsvorgänge, wie z. B. der stoffliche oder der elektrische Potentialausgleich, brauchen hier aus naheliegenden Gründen nicht berücksichtigt zu werden.

Betrachtet man einen differentiellen Abschnitt  $dx$  des Strömungsweges durch die Regeneratormatrix, so gilt bei Annahme quasi-stationärer Bedingungen und bei Vernachlässigung von Änderungen der kinetischen und der potentiellen Energie nach dem ersten Hauptsatz

$$d\dot{Q} + dP = \dot{m} \cdot dh = \dot{m} \cdot (Tds + vdp) = T \cdot (d\dot{S}_q + d\dot{S}_{irr}) + \dot{V}dp \quad (\text{A3-1})$$

Mit  $dP = 0$  und mit  $d\dot{Q} = T \cdot d\dot{S}_q$  als dem auf der Weglänge  $dx$  übertragenen Wärmestrom folgt damit für die Entropieproduktion durch Strömungsdruckverluste

$$d\dot{S}_{irr} = -\frac{\dot{V}}{T} dp \approx \frac{\dot{m} \cdot R}{\bar{p} \cdot d_h} \cdot \xi(\text{Re}) \cdot \frac{RT}{2\bar{p}} \left( \frac{\dot{m}}{A_{frei}} \right)^2 dx \quad (\text{A3-2})$$

Dabei wurde ein Druckverlustansatz nach Gl. 4-37 (ohne Ausströmverlust) angenommen und die Dichte  $\rho$  mit Hilfe der idealen Gasgleichung unter Verwendung des mittleren Prozessdruckes angenähert. Wird nun der Druckverlustbeiwert  $\xi$  durch einen Ansatz der Form

$$\xi(\text{Re}) = \frac{a}{\text{Re}} + b \quad \text{mit} \quad \text{Re} = \frac{|\dot{m}| \cdot d_h}{\eta \cdot A_{frei}} \quad (\text{A3-3})$$

ausgedrückt, so folgt nach Integration über die Länge zunächst

$$\dot{S}_{irr} = \frac{R^2 \cdot T_m \cdot \ell}{2 \bar{p}^2 \cdot d_h \cdot A_{frei}^2} \left( \frac{a}{\text{Re}} + b \right) \cdot |\dot{m}|^3 = \frac{R^2 T_m V_{frei} \eta^3}{2 d_h^4 \bar{p}^2} (a \text{Re}^2 + b \text{Re}^3) \quad (\text{A3-4})$$

wobei die mittlere Temperatur  $T_m$  im Falle eines Regenerators mit linearem, zwischen  $T_h$  und  $T_k$  veränderlichen Temperaturprofil gleich dem arithmetischen Mittel dieser Werte ist. Wird nun für die Reynolds-Zahl ein sinusförmiger Verlauf gemäß

$$\text{Re}(t) = \hat{\text{Re}} \cdot |\sin(\omega t)| = \frac{\pi}{2} \overline{\text{Re}} \cdot |\sin(\omega t)| \quad (\text{A3-5})$$

angenommen, so liefert die Integration über den Zyklus schließlich

$$\Delta S_{irr, \Delta p} = \frac{\pi^2 R^2 T_m V_{frei} \eta^3}{16 n d_h^4 \bar{p}^2} \cdot \overline{\text{Re}}^2 \left( a + \frac{4}{3} b \cdot \overline{\text{Re}} \right) \quad (\text{A3-6})$$

oder in dimensionsloser Form unter Berücksichtigung von Gl. 4-4 bis 4-6, 4-14 und 4-16

$$\Phi_{\Delta p}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr}, \Delta p} \cdot T_m}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{S_g} \cdot \frac{\eta^*}{\Lambda} \cdot \left(\frac{\ell}{d}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \left(a + \frac{4}{3}b \cdot \overline{\text{Re}}\right) \quad (\text{A3-7}).$$

Der Wärmeübergangsverlust kann leicht unter Verwendung der von MARTINI (1978) angegebenen Näherungsgleichung (Gl. 3-9) behandelt werden, wenn man ihn formal ebenfalls als Verlustwärmestrom auffasst und in Gl. A3-12 einsetzt. Allerdings geht MARTINI von phasenweise konstanten Massen- und Wärmeströmen aus. Da bei der Wärmeübertragung an einem differentiellen Flächenelement  $dA$  die Entropieproduktion  $d\dot{S}_{\text{irr}, \text{WÜ}}$  jedoch gemäß

$$d\dot{S}_{\text{irr}, \text{WÜ}} = \frac{\dot{q}^2}{\alpha \cdot T^2} dA \quad (\text{A3-8})$$

auch bei massenstromabhängig veränderlichem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  in jedem Fall nichtlinear von der Wärmestromdichte  $\dot{q}$  abhängig ist, ist diese Vereinfachung hier problematisch. Da zudem auch bei der Behandlung der Strömungsdruckverluste eine Integration über den Prozesszyklus unter Annahme eines sinusförmig veränderlichen Massenstromes – bzw. der äquivalenten Reynolds-Zahl nach Gl. A3-5 – durchgeführt wurde, sollte man hier aus Gründen der Vergleichbarkeit analog vorgehen. Dazu wird – wie bereits bei der Formulierung von Gl. A3-8 geschehen – ein so hoher Wert für  $\alpha$  vorausgesetzt, dass der Unterschied zwischen Gas- und Matrixtemperatur bei den Absolutwerten der Temperatur vernachlässigbar ist. Nach den Ausführungen in Kap. 3.2.1 und 3.2.5 ist dies bei praktisch brauchbaren Regeneratoren stets der Fall. Unter dieser Voraussetzung und unter der üblichen Annahme einer linear zwischen  $T_h$  und  $T_k$  veränderlichen Temperatur  $T$  kann Gl. A3-8 zunächst über die Austauschfläche  $A$  bzw. über die Regeneratorlänge  $\ell$  integriert werden. Mit der dann örtlich konstanten Wärmestromdichte  $\dot{q} = \dot{m} c_p (T_h - T_k) / A$  und  $A = 4 V_{\text{frei}} / d_h$  folgt

$$\dot{S}_{\text{irr}, \text{WÜ}} = \frac{\dot{m}^2 c_p^2 d_h}{4 V_{\text{frei}} \alpha} \cdot \Delta\vartheta^2 = \frac{\dot{m} c_p}{4} \cdot \frac{d_h}{\ell} \cdot \frac{1}{\text{St}(\text{Re}, \text{Pr})} \cdot \Delta\vartheta^2 \quad (\text{A3-9}),$$

wobei für die Stanton-Zahl gemäß Kap. 4.5.1 die Korrelation nach ORGAN (1992; S. 114),

$$\text{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p u} = \frac{\alpha V_{\text{frei}}}{\dot{m} c_p \ell} = c \cdot \text{Re}^{-1/2} \cdot \text{Pr}^{-2/3} \quad ; \quad c = 1,25 \quad (\text{A3-10}),$$

eingesetzt werden kann. Für die dimensionslose Entropieproduktion erhält man dann

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{WÜ}}^* &= \frac{\dot{S}_{\text{irr}, \text{WÜ}} \cdot T_m}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} = \frac{1}{8 \cdot 1,25} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{c_p}{R} \cdot \text{Pr}^{2/3} \cdot \frac{d_h}{\ell} \cdot \overline{\text{Re}}^{-1/2} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} |\sin \varphi|^{3/2} d\varphi}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \cdot \Delta\vartheta^2 \\ &\approx 0,4381 \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \text{Pr}^{2/3} \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \overline{\text{Re}}^{-1/2} \cdot \frac{\Delta\vartheta^2}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \end{aligned} \quad (\text{A3-11}).$$



Für die Entropieproduktion durch einen von hoher zu tiefer Temperatur fließenden Verlustwärmestrom gilt allgemein

$$\dot{S}_{\text{irr}} = \dot{Q} \cdot \left( \frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_h} \right) \quad (\text{A3-12}).$$

Somit folgt für den Wärmeleitungsverlust der Matrix mit Gl. 3-12 und 4-26

$$\dot{S}_{\text{irr,WL}} = \lambda_M \frac{1-\varepsilon}{1+11\varepsilon^2} \cdot \frac{A_q}{\ell} \cdot (T_h - T_k) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \cdot \left( \frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_h} \right) \quad (\text{A3-13})$$

und nach Integration über den Zyklus erhält man in dimensionsloser Darstellung

$$\Phi_{\text{WL}}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr,WL}} T_m}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} = 2\lambda_M^* \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{\varepsilon}{1+11\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \cdot \Delta\vartheta^2 \quad (\text{A3-14}).$$

Für den Wandwärmeverlust gilt mit Gl. A2-4 nach Integration über den Zyklus

$$\Delta S_{\text{irr,WWL}} = \frac{2\bar{p}}{n} \cdot \frac{\lambda_W}{\sigma_{\text{zul}}} \cdot \frac{A_q}{\ell} \cdot \frac{(T_h - T_k)^2}{T_h \cdot T_k} = \frac{2\bar{p}}{n} \cdot \frac{\lambda_W}{\sigma_{\text{zul}}} \cdot \frac{V_{\text{frei}}}{\varepsilon \cdot \ell^2} \cdot \Delta\vartheta^2 \quad (\text{A3-15})$$

mit  $\Delta\vartheta$  wie in Gl. 4-35. In dimensionsloser Form erhält man mit Gl. 4-5 und  $k_W$  nach Gl. 4-20

$$\Phi_{\text{WWL}}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr,WWL}} \cdot T_m}{p \cdot 2\hat{V}} = \frac{2k_W T_m^* \Lambda}{\varepsilon \text{Ma} \ell^{*2}} \Delta\vartheta^2 = \frac{4k_W N_p}{\eta^*(1-\varepsilon)\text{Re}} \cdot \frac{d}{\ell} \Delta\vartheta^2 \quad (\text{A3-16}).$$

Dabei wurde für die Querschnittsfläche  $A_q$  lediglich die der Matrix eingesetzt. Bei ringförmig um einen Zylinder angeordneten Regeneratoren müssen jedoch gemäß Kap. 4.1.4.1 und Anhang 2.1 zum einen die anteilig auf dessen Querschnitt entfallenden Wärmeleitungsverluste (vgl. Gl. A2-4) und zum anderen auch die Kolbenspaltverluste berücksichtigt werden, da der diese Verluste bestimmende Temperaturgradient in diesem Fall durch die Matrixlänge  $\ell$  bestimmt wird. Unter der Voraussetzung, dass Kolbenspaltweite und -hub gemäß Gl. A2-10 und A2-12 optimiert wurden, erhält man nach Einsetzen von Gl. A2-12 in Gl. A2-11

$$\sum \dot{Q}_{\text{V,Z,opt}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\lambda_W}{\sigma_{\text{zul}}} \cdot \frac{\bar{p} \cdot V_{\text{Hub}}}{\hat{x}_{\text{opt}}} \cdot \frac{T_h - T_k}{\ell} \quad (\text{A3-17}).$$

In dimensionsloser Form bieten sich hier unterschiedliche Formulierungen an. Zum einen gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{V,Z}}^* &= \frac{\Delta S_{\text{irr,V,Z}} \cdot T_m}{p \cdot 2\hat{V}} = \frac{5}{3} \frac{k_W T_m^*}{\text{Ma} \ell^* \hat{x}_{\text{opt}}^*} \frac{V_{\text{Hub}}}{2\hat{V}} \Delta\vartheta^2 = \\ &= \frac{10}{3} \frac{k_W N_p}{\eta^* \text{Re}} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{d}{\hat{x}_{\text{opt}}} \frac{V_{\text{Hub}}}{V_{\text{frei}}} \Delta\vartheta^2 \end{aligned} \quad (\text{A3-18}),$$

so dass sich die Zusammenfassung der zylinderspezifischen Verluste mit Gl. A3-16 anbietet:

$$\Phi_{\text{WWL}}^* + \Phi_{\text{V,Z}}^* = \frac{4 k_{\text{W}} N_{\text{p}}}{\eta^* (1-\varepsilon) \text{Re}} \cdot \frac{d}{\ell} \Delta\vartheta^2 \cdot \left[ 1 + \frac{5}{6} \varepsilon \frac{\ell}{\hat{x}_{\text{opt}}} \frac{V_{\text{Hub}}}{V_{\text{frei}}} \right] \quad (\text{A3-19})$$

Man erkennt hier, dass alle Verluste die prinzipiell gleichen Abhängigkeiten aufweisen, und dass die Kolbenspaltverluste daher formal wie Wandwärmeleitungsverluste behandelt werden können und bei optimalen Hub- und Spaltwerten zu letzteren im Verhältnis 2:3 stehen. Der zweite Summand des Klammerausdruckes in Gl. A3-19 stellt lediglich das (wegen der Kolbenspaltverluste um den Faktor 5/3 erhöhte) Verhältnis der Querschnittsflächen von Zylinder und Regenerator dar. Nachteilig ist an dieser Formulierung lediglich, dass hier im Gegensatz zu allen anderen dimensionslosen Entropieproduktionen die Matrixlänge  $\ell$  nicht im Verhältnis zum Faserdurchmesser  $d$ , sondern zum optimalen Kolbenhub steht (der gemäß Gl. A2-12 zudem eine schwache Abhängigkeit vom Hubvolumen aufweist).

Zum anderen ist jedoch auch eine Formulierung möglich, die ebenso wie die bisher abgeleiteten Ausdrücke lediglich die mittlere Reynoldszahl, das Verhältnis  $d/\ell$  und die Porosität  $\varepsilon$  als (im Rahmen der Unteroptimierung veränderliche) Variable enthält:

$$\Phi_{\text{V,Z}}^* = \frac{5}{3} \frac{k_{\text{W}}}{\hat{x}_{\text{opt}}^*} \frac{V_{\text{Hub}}}{2\hat{V}} \Delta\vartheta^2 \sqrt{\frac{2 T_{\text{m}}^* S_{\text{g}} \varepsilon d}{\Lambda \eta^* \text{Re} (1-\varepsilon) \ell}} \quad (\text{A3-20})$$

Der Regeneratorverlust durch Dispersion lässt sich formal ebenso wie ein Verlustwärmestrom nach Gl. A3-12 behandeln, wobei nach Kap. 3.2.4 und Anhang 2.2 zunächst

$$\Delta H_{\text{V,Disp}} = \frac{1}{\frac{\ell}{2d_z} \cdot \text{Pe} + 1} \cdot c_{\text{p}} \Delta m (T_{\text{h}} - T_{\text{k}}) \quad (\text{A3-21})$$

gilt. dabei ist mit  $d_z$  der mittlere Durchmesser der Vermischungszellen bezeichnet, der in der Peclet-Zahl (Gl. A2-5) einzusetzen ist. In dem hier beispielhaft betrachteten Fall einer Drahtgewebematrix kann er näherungsweise mit dem doppelten Faserdurchmesser  $d$  abgeschätzt werden. (KÜHL ET AL. 1997a). Mit dem gemäß Gl. A2-4 für hinreichend große Reynoldszahlen gültigen Grenzwert  $\text{Pe} = 2$  sowie mit der Annahme  $\ell \gg d_z$  folgt dann weiter

$$\Delta H_{\text{V,Disp}} \approx \frac{2d}{\ell} \cdot \frac{c_{\text{p}} \Delta m (T_{\text{h}} - T_{\text{k}})}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_{\text{M}}^*}} \quad (\text{A3-22})$$

und damit letztlich für die dimensionslose Entropieproduktion

$$\Phi_{\text{Disp}}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr,Disp}} T_{\text{m}}}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} \approx 2 \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{d}{\ell} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_{\text{M}}^*}} \cdot \Delta\vartheta^2 \quad (\text{A3-23}).$$

### 3.2 Entropieproduktion in Wärmeübertragern

Bei Wärmeübertragern wird gemäß Kap. 4.5.2 exemplarisch nur die Rohrbündelbauart behandelt und es werden lediglich die zwei Grenzfälle der vollständig laminaren bzw. turbulenten Strömung betrachtet. Ausgehend von Gl. A3-2 erhält man zunächst für den laminaren Fall

$$\dot{S}_{\text{irr}} = \frac{R^2 \cdot T}{2 \bar{p}^2 \cdot A_q^2} \cdot \left( \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{\ell}{d} + f_C \right) \cdot |\dot{m}|^3 = \frac{R^2 T A_q \eta^3}{2 d^3 \bar{p}^2} \left( 64 \frac{\ell}{d} \text{Re}^2 + f_C \text{Re}^3 \right) \quad (\text{A3-24}),$$

wobei mit dem Faktor  $f_C$  pauschal alle Einlauf- und Ausströmungsdruckverluste (im Sinne des Carnot'schen Stoßverlustes) berücksichtigt werden (vgl. Kap. 4.3.3, Gl. 4-37). Die Integration über den Prozesszyklus unter der Annahme einer sinusförmig veränderlichen Reynoldszahl gemäß Gl. A3-5 ergibt dann in dimensionsloser Form

$$\Phi_{\Delta p, l}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr}, \Delta p} T}{\bar{p} \cdot 2 \hat{V}} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{T^*} \left( \frac{\text{Ma} \ell^*}{\Lambda} \right)^2 \left( \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d} + \frac{4}{3} f_C \right) = \frac{\pi^2}{2} \text{Ma}_i^2 \left( \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d} + \frac{4}{3} f_C \right) \quad (\text{A3-25}).$$

Mit einem modifizierten Blasius-Widerstandsgesetz (STEFAN UND MAYINGER 1986; S. 398),

$$\xi(\text{Re}) = 0,18 \cdot \text{Re}^{-0,2} \quad ; \quad \text{Re} = \frac{|\dot{m}| \cdot d}{\eta \cdot A_q} \quad (\text{A3-26}),$$

erhält man analog für den Fall der turbulenten Strömung im hydraulisch glatten Rohr

$$\dot{S}_{\text{irr}} = \frac{R^2 \cdot T}{2 \bar{p}^2 \cdot A_q^2} \cdot \left( \frac{0,18}{\text{Re}^{0,2}} \cdot \frac{\ell}{d} + f_C \right) \cdot |\dot{m}|^3 = \frac{R^2 T A_q \eta^3}{2 d^3 \bar{p}^2} \left( 0,18 \frac{\ell}{d} \text{Re}^{2,8} + f_C \text{Re}^3 \right) \quad (\text{A3-27})$$

und mit Gl. A3-5 nach der (für Winkelfunktionen mit gebrochenem Exponenten nur numerisch möglichen) Integration über den Zyklus

$$\Phi_{\Delta p, t}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr}, \Delta p} T}{\bar{p} \cdot 2 \hat{V}} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{T^*} \left( \frac{\text{Ma} \ell^*}{\Lambda} \right)^2 \left( \frac{0,2257}{\text{Re}^{0,2}} \frac{\ell}{d} + \frac{4}{3} f_C \right) \quad (\text{A3-28}).$$

Zur Berechnung der Entropieproduktion durch Wärmeübergang gemäß Gl. A3-8 sollte nach KÜHL ET AL. (1997) zumindest die ungleiche Verteilung des Wärmestromes auf die beiden Strömungsphasen, d. h. auf die Phasen der regeneratorsseitigen und der zylinderseitigen Einströmung, beachtet werden. Nimmt man hierzu an, dass das Gas zylinderseitig mit einer mittleren Temperatur  $T_{Z, \text{ein}}$  und regeneratorsseitig mit  $T_{R, \text{ein}}$  einströmt, so kommt es in den jeweiligen Strömungsphasen zur Übertragung der Wärmemengen

$$Q_Z = \Delta m c_p (T_W - T_{Z, \text{ein}}) \cdot (1 - e^{-NTU}) \quad (\text{A3-29})$$

$$\text{und} \quad Q_R = \Delta m c_p (T_W - T_{R, \text{ein}}) \cdot (1 - e^{-NTU}) \quad (\text{A3-30}).$$

Beachtet man weiter, dass für die jeweiligen Austrittstemperaturen  $T_{Z, \text{aus}}$  und  $T_{R, \text{aus}}$

$$T_W - T_{Z, \text{aus}} = (T_W - T_{Z, \text{ein}}) e^{-NTU} \quad (\text{A3-31})$$

$$\text{und} \quad T_W - T_{R,\text{aus}} = (T_W - T_{R,\text{ein}}) e^{-NTU} \quad (\text{A3-32})$$

gilt und aus der Energiebilanz für die indizierte Wärmemenge und den Regeneratorverlust

$$Q_{\text{ind}} = \Delta m c_p (T_{R,\text{aus}} - T_{Z,\text{ein}}) \quad (\text{A3-33})$$

$$\text{und} \quad \Delta H_{RV} = \Delta m c_p (T_{Z,\text{aus}} - T_{R,\text{ein}}) \quad (\text{A3-34})$$

folgt, so lässt sich das erhaltene Gleichungssystem nach  $Q_Z$  und  $Q_R$  auflösen:

$$Q_Z = \frac{Q_{\text{ind}} + \Delta H_{RV} e^{-NTU}}{1 + e^{-NTU}} \quad ; \quad Q_R = \frac{\Delta H_{RV} + Q_{\text{ind}} e^{-NTU}}{1 + e^{-NTU}} \quad (\text{A3-35})$$

Die Entropieproduktion durch Wärmeübergang erhält man nach Integration von Gl. A3-8 in Orts- und Zeitrichtung unter Annahme gleich langer, jeweils stationärer Strömungsphasen zu

$$\Delta S_{\text{irr},\alpha} = \frac{2 n (Q_Z^2 + Q_R^2)}{\alpha A T^2} = \frac{n Q_{\text{eff}}^2}{\alpha A T^2} \quad (\text{A3-36})$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{eff}}^2 &= 2 \frac{(Q_{\text{ind}}^2 + \Delta H_{RV}^2)(1 - e^{-2NTU}) + 4Q_{\text{ind}}\Delta H_{RV}}{(1 - e^{-NTU})^2} = \\ \text{mit} \quad &= 2(Q_{\text{ind}}^2 + \Delta H_{RV}^2) - \frac{4e^{-NTU}}{(1 - e^{-NTU})^2} (Q_{\text{ind}} - \Delta H_{RV})^2 = \\ &= (Q_{\text{ind}} + \Delta H_{RV})^2 + (Q_{\text{ind}} - \Delta H_{RV})^2 \tanh^2\left(\frac{NTU}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A3-37}).$$

Für die Entropieproduktion wird im Falle laminarer Strömung ein konstanter Wert der Nusselt-Zahl  $Nu_l = 3,66$  sowie im turbulenten Fall die mit Gl. A3-26 nach der Reynolds-Analogie zusammenhängende, ebenfalls von STEFAN UND MAYINGER (1986) angegebene Gleichung

$$Nu_t(\text{Re}, \text{Pr}) = 0,023 \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{1/3} \quad (\text{A3-38})$$

verwendet. Damit erhält man mit Gl. A3-36 und mit der Definition von  $\Gamma$  nach Gl. 4-17

$$\Phi_{\alpha,l}^* = \frac{\Delta S_{\text{irr},\alpha} T}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} = \frac{n \cdot \bar{p} \cdot 2\hat{V}}{Nu_l \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{4V_T}{d} T} \left( \frac{Q_{\text{eff}}}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} \right)^2 = \frac{1}{8} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{\text{Pr}}{Nu_l} \cdot \frac{d}{\ell} \overline{\text{Re}} \Gamma^2 \quad (\text{A3-39})$$

für den laminaren Fall und

$$\Phi_{\alpha,t}^* = \frac{n \cdot \bar{p} \cdot 2\hat{V}}{0,023 \cdot \overline{\text{Re}}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{4V_T}{d} T} \left( \frac{Q_{\text{eff}}}{\bar{p} \cdot 2\hat{V}} \right)^2 = \frac{\text{Pr}^{2/3}}{0,184} \cdot \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{d}{\ell} \overline{\text{Re}}^{-0,2} \Gamma^2 \quad (\text{A3-40})$$

für die turbulente Strömung.

### 3.3 Bestimmung optimaler Auslegungsdaten

Setzt man für  $V_{\text{Hub}} = 0$  die Ableitungen von Gl. 4-48 nach den Variablen  $\overline{\text{Re}}$ ,  $\varepsilon$  und  $d/\ell$  gleich Null, so erhält man für die optimale Regenerator-Auslegung das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\eta^*}{\text{Sg} \cdot \Lambda \cdot \Delta\vartheta^2} \cdot (160 + 1,6 \overline{\text{Re}}) \cdot \left( \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\ell}{d} \right)^3 = \\ & = \left\{ 0,4381 \text{Pr}^{2/3} \cdot \overline{\text{Re}}^{-1/2} + \frac{2\lambda_M^*}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+11\varepsilon^2} + 2 \right\} \cdot \frac{\kappa/(\kappa-1)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} + \frac{4k_W N_p}{\eta^* \varepsilon \overline{\text{Re}}} \end{aligned} \quad (\text{A3-41});$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\eta^*}{\text{Sg} \cdot \Lambda \cdot \Delta\vartheta^2} \cdot 1,6 \cdot \left( \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\ell}{d} \right)^3 = \\ & \left\{ -\frac{0,4381}{2 \cdot \overline{\text{Re}}^{1/2}} \text{Pr}^{2/3} + \frac{2\lambda_M^*}{\text{Re}^2 \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+11\varepsilon^2} \right\} \cdot \frac{\kappa/(\kappa-1)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} + \frac{4k_W N_p}{\eta^* \varepsilon \overline{\text{Re}}^2} \end{aligned} \quad (\text{A3-42});$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\eta^*}{\text{Sg} \cdot \Lambda \cdot \Delta\vartheta^2} \cdot (160 + 1,6 \overline{\text{Re}}) \cdot \left( \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\ell}{d} \right)^3 \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\kappa/(\kappa-1)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\Lambda C_M^*}} \cdot \\ & \left\{ 0,4381 \text{Pr}^{2/3} \cdot \overline{\text{Re}}^{-1/2} + \frac{2\lambda_M^*}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{1-11\varepsilon^2}{(1+11\varepsilon^2)^2} \cdot (1-\varepsilon)^2 + \right. \\ & \left. \left[ 0,4381 \text{Pr}^{2/3} \cdot \overline{\text{Re}}^{-1/2} + \frac{2\lambda_M^*}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+11\varepsilon^2} + 2 \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right] \cdot \frac{\Lambda C_M^* \cdot \varepsilon (1-\varepsilon)}{(\varepsilon - \Lambda C_M^* (1-\varepsilon))^2} \right\} \cdot \frac{4k_W N_p}{\eta^* \overline{\text{Re}}} \end{aligned} \quad (\text{A3-43}).$$

Man erkennt, dass sich  $d/\ell$  z. B. durch Einsetzen von Gl. A3-42 in Gl. A3-41 und A3-43 eliminieren lässt und dass dabei zugleich auch der Ausdruck  $\text{Sg} \cdot \Lambda \cdot \Delta\vartheta^2 / \eta^*$  herausfällt. Das verbleibende Gleichungssystem für  $\text{Re}$  und  $\varepsilon$  hängt also *nicht* von dieser die Prozessbedingungen charakterisierenden Größe ab, sondern nur noch von den bezogenen Werkstoffeigenschaften der Regeneratormatrix und der Druckbehälterwand – ausgedrückt durch  $\lambda_M^*$ ,  $\Lambda \cdot C_M^*$  bzw.  $k_W \cdot N_p$ . Damit werden die optimale Reynolds-Zahl und Porosität der Regeneratormatrix bemerkenswerterweise weder von der Drehzahl noch von der Temperaturdifferenz beeinflusst.

Zur Bestimmung des optimalen Rohrdurchmessers von Wärmeübertragern ist in Gl. 4\_54 bzw. 4-55 zunächst die mittlere Reynoldszahl gemäß Gl. 4-14 zu substituieren. Für die Nullstelle der ersten Ableitung nach  $d$  bzw. nach  $d^*$  erhält man im laminaren Fall unmittelbar die in Gl. 4-56 angegebene Lösung. Für den Fall turbulenter Strömung gilt zunächst

$$0,2257 \frac{\pi^2}{T^*} \left( \frac{\text{Ma}}{\Lambda} \right)^{8/5} (\ell^*)^{18/5} \left( \frac{\eta^* T^*}{2N_p} \right)^{2/5} = 2 \frac{R}{c_p} \frac{\text{Pr}^{2/3}}{0,184} (d^*)^{12/5} \Gamma^2 \quad (\text{A3-44}),$$

und Auflösung nach  $d^*$  ergibt

$$d_{\text{opt,t}}^* = \frac{0,46}{(\Gamma^*)^{1/4}} \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{1}{\text{Pr}^{2/3}} \right)^{5/12} \left( \frac{\text{Ma}}{\Lambda} \right)^{2/3} \left( \frac{\eta^*}{N_P} \right)^{1/6} \frac{(\ell^*)^{3/2}}{\Gamma^{5/6}} \quad (\text{A3-45}).$$

Der Zahlenfaktor ergibt sich dabei u. a. aus den Konstanten der Korrelationen und aufgrund der bisherigen Umformungen, die z. B. auch zu Gl. A3-28 führten:

$$2^{1/3} \cdot \pi^{3/4} \cdot \left( 0,18 \cdot 0,023 \cdot \int_0^{2\pi} |\sin \varphi|^{14/5} d\varphi \right)^{5/12} \approx 0,45026 \quad (\text{A3-46}).$$

# 4 Auslegungsdaten und Zeichnungen verschiedener Vuilleumier-Wärmepumpen

## 4.1 Daten der 4 kW-Versuchsmaschine nach PFEFFER (1999)

Prozesskonfiguration (0-9=Totv., 10-19=Zyl., 20-29=WT, 30-39=Reg.)  
 Raum Nr. -0---1---2---3---4---5---6---7---8---9---10---11---12---13---14-  
 Gasraumtyp 12 23 12 25 0 35 22 23 13 23 36 23 23 23 12  
 Getriebetyp 1

### Betriebsdaten

```
-----
1 0.0 W Soll-Leistung
2 500.0 rpm Start-Drehzahl
3 0.0 Nm*s Steilheit der Motorkennlinie
4 120.0 bar Gasmasse/Druck
5 1 (-) bei Druckang.:1=Mitteldruck,2=Max.Druck,3=Fuelldruck 20`
6 1 (-) Getriebedruck oder 1 (-) => pquer, 2 (-) => pmin
7 10.0 `C mittl. Getrieбетemperatur
8 20.0 `C Umgebungstemperatur fuer Exergieberechnungen
9 1.2 Nm konstantes Bremsmoment (Reibung)
10 2 (-) Prozessgas(1=H2,2=He,3=N2)
11 0.0 mm3 Leckrate zum Getriebe (d**4/l fuer Kapillare)
```

Aussentemp. [ `C ] 10. 10. 10. 10. 10. , , 50. 50. 50. 50. , , 500. 500. 500. 450.

### Daten zu den Massenstromschnittstellen

```
-----1---2---3---4---5---6---7---8---9---10---11---12---13---14-
Totvol. [cm3] 0. 15.5 23.7 0. 0. 0. 0. 18.8 18.4 34.0 35.1 0. 0. 17.8
Quer. afw. [cm2] 999. 999. 999. 4.7 64.2 64.2 999. 999. 999. 41.4 40.0 999. 999. 999.
Quer. abw. [cm2] 999. 999. 999. 4.7 10.4 64.2 999. 999. 999. 8.9 41.4 999. 999. 999.
dp.bw.aufw [(-)] 0. 0. 0. 0. 8. 0. 0. 0. 0. 8. 0. 0. 0. 0.
dp.bw.abw [(-)] 0. 0. 0. 0. 8. 0. 0. 0. 0. 8. 0. 0. 0. 0.
Vkn. zu R. [(-)] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
```

### Waermeleitungsverluste Zylinder/Kolben:

```
-----
1 0.483 W/K von Raum 14 nach Raum 8
2 0.0000 mm3 Spalt zw Raum 14 und Raum 8 (h=0.05mm)
3 2.670 W/K von Raum 8 nach Raum 2
4 0.0000 mm3 Spalt zw Raum 8 und Raum 2 (h=0.05mm)
```

### Getriebedaten (Sinus)

```
-----
1 0.0096 kgm2 Traegheitsmoment der Welle
2 4000.0 cm3 freies Volumen im Kurbelgehaeuse
3 25.0 mm Hub Kolben 1 (kalt)
4 0.0 deg mittl. Phasenwinkel 1
5 1.8 kg Masse Kolben 1
6 -9.81 m/s2 Erdbeschl. Kolben 1
7 25.0 mm Hub Kolben 2 (heiss)
8 -90.0 deg mittl. Phasenwinkel 2
9 3.0 kg Masse Kolben 2
10 -9.81 m/s2 Erdbeschl. Kolben 2
```

## 0. Raum - Kalter Zylinderraum 1

1	92.0	mm	Kolbendurchm./Querschnitt/Hubvolumen(Stangend.0)
2	3.4	cm <sup>3</sup>	Totvolumen
3	25.0	mm	Kolbenstangendurchmesser/Querschnitt/Q.-anteil
4	-1	(-)	Hubfunktion-Nr. (abh. v. Getriebe-UP)
5	0.6	mm	Kolbenspalt-Weite
6	0.1	mm	Kolbenspaltlaenge bis Dichtung
7	5.0	mm	mittlere Wandstaerke der Zylinderwand
8	150.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit der Zylinderwand
9	2.5	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspez. Waermekapazitaet der Wand
10	1.0	(-)	Verhaeltnis Stirnflaeche zu pi*d <sup>2</sup> /4

## 1. Raum - Kalter Waermetauscher 1

1	180.0	(-)	Kanalzahl kalter WT
2	65.5	mm	Kanallaenge kalter WT
3	11.34	mm	Kanaltiefe kalter WT (Ber.des zus. Spaltes)
4	1.0	mm	Rippenbreite
5	0.35	mm	Kanalbreite kalter WT
6	3.9	mm	Wandstaerke Mantel
7	150.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des Mantels
8	2.50	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspezifische Waermekapazitaet des Mantels
9	306.0	W/K	Waermeuebergang aussen (Produkt aus alpha * A)

## 2. Raum - Kalter Zylinderraum 2

1	112.0	mm	Kolbendurchm./Querschnitt/Hubvolumen(Stangend.0)
2	6.57	cm <sup>3</sup>	Resthub/Totvolumen
3	92.4	mm	Kolbenstangendurchmesser/Querschnitt/Q.-anteil
4	-1	(-)	Hubfunktion-Nr. (abh. v. Getriebe-UP)
5	0.5	mm	Kolbenspalt-Weite
6	24.8	mm	Kolbenspaltlaenge kalt2
7	10.0	mm	mittlere Wandstaerke der Zylinderwand
8	150.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit der Zylinderwand
9	2.5	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspez. Waermekapazitaet der Wand
10	0.3	(-)	Verh. Stirnflaeche zu pi*d <sup>2</sup> /4 (Verh. Kreisring/Kreisfl.)

## 3. Raum - Kalter Waermetauscher 2

1	0.0	(-)	Strukturzahl kalter WT
2	19.0	mm	Laenge WT kalt2
3	112.0	mm	Innendurchmesser
4	1.3	mm	Spaltbreite kalter WT 2
5	0.0	mm	zus. Umfang kalter WT
6	0.0	mm <sup>2</sup>	zus. Querschnitt kalter WT
7	20.0	mm	Wandstaerke des Mantels
8	0.31	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des Mantels
9	2.1	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspezifische Waermekapazitaet des Mantels
10	100.0	W/K	Waermeuebergang aussen (Produkt aus alpha * A)

## 4. Raum - Totraum

1	19.5	cm <sup>3</sup>	Volumen
2	60.0	W/K	mittlerer Waermeuebergang

## 5. Raum - Kalter Regenerator

1	157.8	mm	Durchmesser aussen
2	115.0	mm	Innendurchmesser kalter Reg.
3	19.5	mm	Laenge kalter Reg.
4	1	(-)	Anzahl Einheiten
5	28.0	um	Drahtdurchmesser
6	0.70	(-)	Porositaet kalter Reg.
7	78.0	um	Maschenweite kalter Reg.
8	3.95	J/cm <sup>3</sup> K	Waermekapazitaet/Volumen
9	15.6	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
10	0.0	um	angenommene Spaltweite
11	1.35	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge



## 6. Raum - Bohrungen im Dichtungshalter (Rohrbuendel)

1	90	(-)	Rohrzahl
2	44.12	mm	Rohrlaenge (ergibt sich aus ermitteltem Totvolumen)
3	4.0	mm	Innendurchmesser
4	40.0	mm	Aussendurchmesser
5	15.6	W/mK	Waermeleitfaehigkeit der Rohrwand
6	1.0	W/m <sup>2</sup> K	Waermeuebergang aussen (Rohrmitte)
7	1.0	W/m <sup>2</sup> K	Waermeuebergang aussen (Rohrenden)
8	3.95	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspezifische Waermekapazitaet der Rohrwand

## 7. Raum - 1. Warmer Waermetauscher

1	270.0	(-)	Kanalzahl warmer WT
2	62.2	mm	Kanallaenge warmer WT
3	9.40	mm	Kanaltiefe warmer WT (Ber.des zus. Spaltes)
4	1.0	mm	Rippenbreite
5	0.35	mm	Kanalbreite kalter WT
6	2.8	mm	Wandstaerke Mantel
7	150.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des Mantels
8	2.50	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspezifische Waermekapazitaet des Mantels
9	735.0	W/K	Waermeuebergang aussen (Produkt aus alpha * A)

## 8. Raum - Warmer Zylinderraum

1	112.0	mm	Zylinderdurchmesser kalter Verdraenger
2	112.0	mm	Zylinderdurchmesser heisser Verdraenger
3	36.0	mm	Stangendurchmesser
4	-0.25	mm	Resthub Kolben 2 (<0 => Kolbenmindestabstand)
5	3.85	cm <sup>3</sup>	zusaeztzliches Totvolumen (ohne Kolbenspalt)
6	+1	(-)	Hubfunktion-Nr. kalter Verdraenger (abh. v. Getriebe-UP)
7	-2	(-)	Hubfunktion-Nr. heisser Verdraenger (abh. v. Getriebe-UP)
8	0.5	mm	Kolbenspalt-Weite kalt
9	0.5	mm	Kolbenspalt-Weite heiss
10	1.7	mm	Kolbenspaltlaenge bis Dichtung
11	2.0	mm	Kolbenspaltlaenge bis Dichtung (heiss)
12	10.0	mm	mittlere Wandstaerke der Zylinderwand
13	150.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit der Zylinderwand
14	2.5	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspez. Waermekapazitaet der Wand

## 9. Raum - 2. Warmer Waermetauscher

1	270.0	(-)	Kanalzahl warmer WT
2	34.2	mm	Kanallaenge warmer WT
3	9.40	mm	Kanaltiefe warmer WT (Ber.des zus. Spaltes)
4	1.0	mm	Rippenbreite
5	0.35	mm	Kanalbreite kalter WT
6	2.8	mm	Wandstaerke Mantel
7	150.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des Mantels
8	2.50	J/cm <sup>3</sup> K	volumenspezifische Waermekapazitaet des Mantels
9	455.0	W/K	Waermeuebergang aussen (Produkt aus alpha * A)

## 10. Raum - Heisser Regenerator

1	134.9	mm	Aussendurchmesser heisser Reg.
2	113.8	mm	Durchmesser innen
3	73.1	mm	Laenge heisser Reg.
4	1.0	(-)	Anzahl Einheiten
5	22.0	um	Drahtdurchmesser
6	0.8825	(-)	Porositaet heisser Reg.
7	3.95	J/cm <sup>3</sup> K	Waermekapazitaet/Volumen
8	18.4	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
9	103.0	um	angenommene Spaltweite
10	0.566	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge

## 11. Raum - Heisser Waermeaustauscher (Zone 1 (Zyl.))

1	72.0	(-)	Kanalzahl heisser WT
2	10.0	mm	Kanallaenge heisser WT
3	3.5	mm	Kanaltiefe heisser WT
4	2.36	mm	Rippenbreite
5	2.9	mm	Kanalbreite heisser WT
6	6.5	mm	Wandstaerke Mantel
7	21.5	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des Mantels
8	3.95	J/cm3K	volumenspezifische Waermekapazitaet des Mantels
9	9999.0	W/K	Waermeuebergang aussen (Produkt aus alpha * A)

## 12. Raum - Heisser Waermeaustauscher (Zone 2 (Kugelaussens.))

1	36.0	(-)	Kanalzahl heisser WT
2	60.25	mm	Kanallaenge heisser WT
3	3.5	mm	Kanaltiefe heisser WT
4	2.36	mm	Rippenbreite
5	5.53	mm	Kanalbreite heisser WT
6	3.0	mm	Wandstaerke Mantel
7	21.5	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des Mantels
8	3.95	J/cm3K	volumenspezifische Waermekapazitaet des Mantels
9	9999.0	W/K	Waermeuebergang aussen (Produkt aus alpha * A)

## 13. Raum - Heisser Waermeaustauscher (Zone 3 (Kugelmitte))

1	18.0	(-)	Kanalzahl heisser WT
2	10.1	mm	Kanallaenge heisser WT
3	3.5	mm	Kanaltiefe heisser WT
4	2.36	mm	Rippenbreite
5	6.57	mm	Kanalbreite heisser WT
6	3.0	mm	Wandstaerke Mantel
7	21.5	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des Mantels
8	3.95	J/cm3K	volumenspezifische Waermekapazitaet des Mantels
9	9999.0	W/K	Waermeuebergang aussen (Produkt aus alpha * A)

## 14. Raum - Heisser Zylinderraum

1	112.0	mm	Kolbendurchm./Querschnitt/Hubvolumen(Stangend.0)
2	49.07	cm3	Resthub/Totvolumen
3	0.0	mm	Kolbenstangendurchmesser/Querschnitt/Q.-anteil
4	+2	(-)	Hubfunktion-Nr. (abh. v. Getriebe-UP)
5	0.58	mm	Kolbenspalt-Weite (geht in Totraumberechnung mit ein.)
6	86.5	mm	Kolbenspaltlaenge heiss
7	3.0	mm	mittlere Wandstaerke der Zylinderwand
8	21.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit der Zylinderwand
9	3.7	J/cm3K	volumenspez. Waermekapazitaet der Wand
10	2.0	(-)	Verh. Stirnfl. zu $\pi \cdot d^2/4$ (Halbkugel)

## EINGABEDATENSÄTZE DER UNTERSCHIEDLICHEN REGENERATOR KONFIGURATIONEN:

## DRAHTNETZREGENERATOR

## 5. Raum - Kalter Regenerator

1	157.8	mm	Durchmesser aussen
2	115.0	mm	Innendurchmesser kalter Reg.
3	19.5	mm	Laenge kalter Reg.
4	1	(-)	Anzahl Einheiten
5	28.0	um	Drahtdurchmesser
6	0.70	(-)	Porositaet kalter Reg.
7	78.0	um	Maschenweite kalter Reg.
8	3.95	J/cm3K	Waermekapazitaet/Volumen
9	15.6	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
10	0.0	um	angenommene Spaltweite
11	1.35	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge

**DRAHTGESTRICKREGENERATOR**

## 5. Raum - Kalter Regenerator

1	152.2	mm	Durchmesser aussen
2	115.0	mm	Innendurchmesser kalter Reg.
3	19.7	mm	Laenge kalter Reg.
4	1	(-)	Anzahl Einheiten
5	22.0	um	Drahtdurchmesser
6	0.79	(-)	Porositaet kalter Reg.
7	3.95	J/cm <sup>3</sup> K	Waermekapazitaet/Volumen
8	15.6	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
9	0.0	um	angenommene Spaltweite
10	1.35	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge

**SCHMELZEXTRAKTREGENERATOR / GEPRESST; VA-STAH**

## 5. Raum - Kalter Regenerator

1	143.0	mm	Durchmesser aussen
2	115.0	mm	Innendurchmesser kalter Reg.
3	26.4	mm	Laenge kalter Reg.
4	1	(-)	Anzahl Einheiten
5	49.0	um	Drahtdurchmesser
6	0.75	(-)	Porositaet kalter Reg.
7	3.95	J/cm <sup>3</sup> K	Waermekapazitaet/Volumen
8	15.6	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
9	0.0	um	angenommene Spaltweite
10	1.35	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge

**SCHMELZEXTRAKTREGENERATOR / GESINTERT; VA-STAH**

## 5. Raum - Kalter Regenerator

1	149.0	mm	Durchmesser aussen
2	115.0	mm	Innendurchmesser kalter Reg.
3	20.8	mm	Laenge kalter Reg.
4	1	(-)	Anzahl Einheiten
5	23.4	um	Drahtdurchmesser
6	0.7743	(-)	Porositaet kalter Reg.
7	3.95	J/cm <sup>3</sup> K	Waermekapazitaet/Volumen
8	15.6	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
9	0.0	um	angenommene Spaltweite
10	1.35	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge

**GLASFASERREGENERATOR / 20 µM (KORRIGIERTE AUSLEGUNG)**

## 5. Raum - Kalter Regenerator

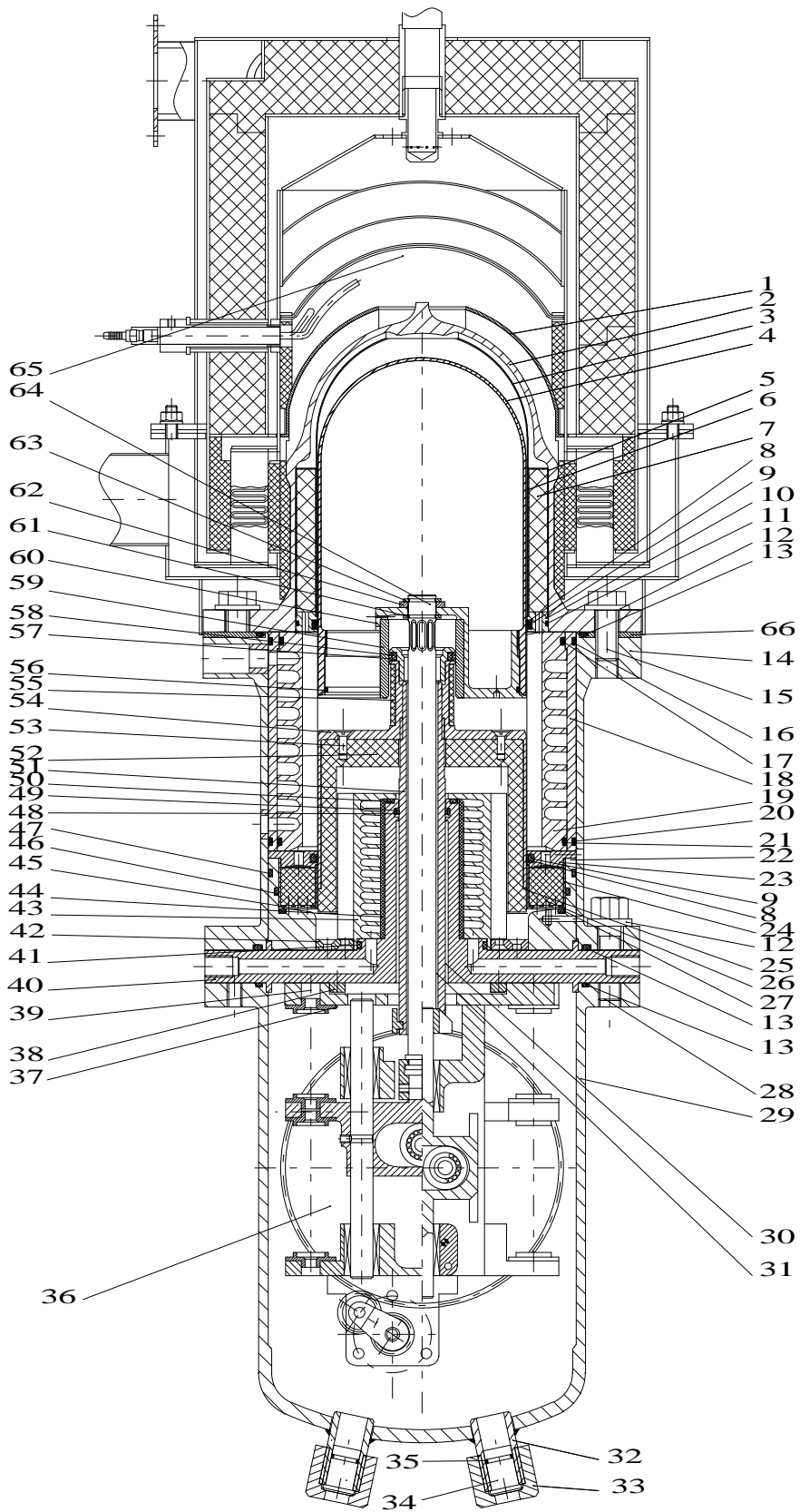
1	161.0	mm	Durchmesser aussen
2	115.0	mm	Innendurchmesser kalter Reg.
3	15.0	mm	Laenge kalter Reg.
4	1	(-)	Anzahl Einheiten
5	20.0	um	Drahtdurchmesser
6	0.75	(-)	Porositaet kalter Reg.
7	2.08	J/cm <sup>3</sup> K	Waermekapazitaet/Volumen
8	1.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
9	0.0	um	angenommene Spaltweite
10	1.35	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge

**GLASFASERREGENERATOR / 35 µM**

## 5. Raum - Kalter Regenerator

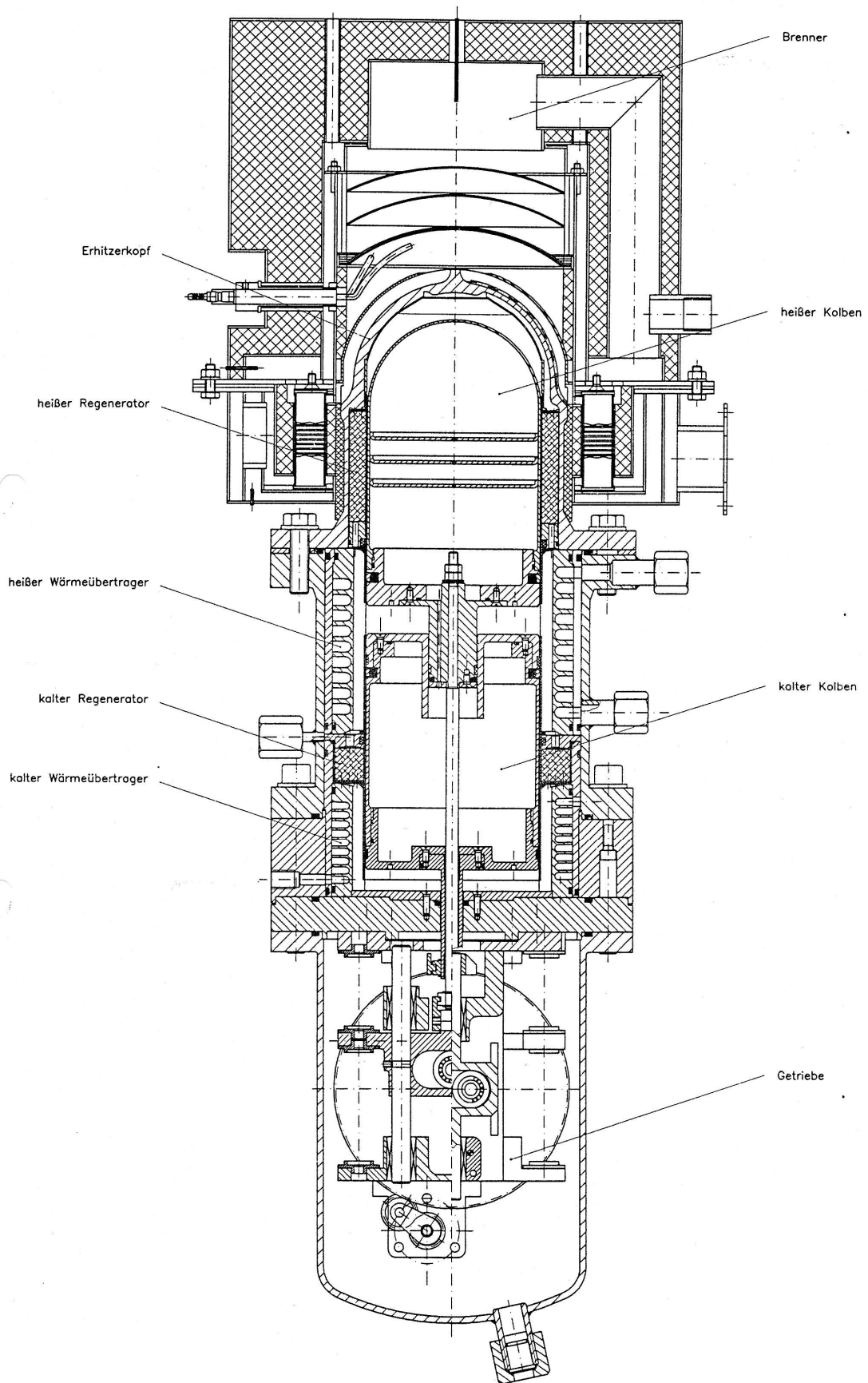
1	150.0	mm	Durchmesser aussen
2	115.0	mm	Innendurchmesser kalter Reg.
3	19.9	mm	Laenge kalter Reg.
4	1	(-)	Anzahl Einheiten
5	35.0	um	Drahtdurchmesser
6	0.75	(-)	Porositaet kalter Reg.
7	2.08	J/cm <sup>3</sup> K	Waermekapazitaet/Volumen
8	1.0	W/mK	Waermeleitfaehigkeit des reinen Matrixmaterials
9	0.0	um	angenommene Spaltweite
10	1.35	W/mK	W'leitwert Wand pro Gesamtquerschnitt * Laenge

## 4.2 Zeichnung der 4 kW-Versuchsmaschine (PFEFFER 1999)

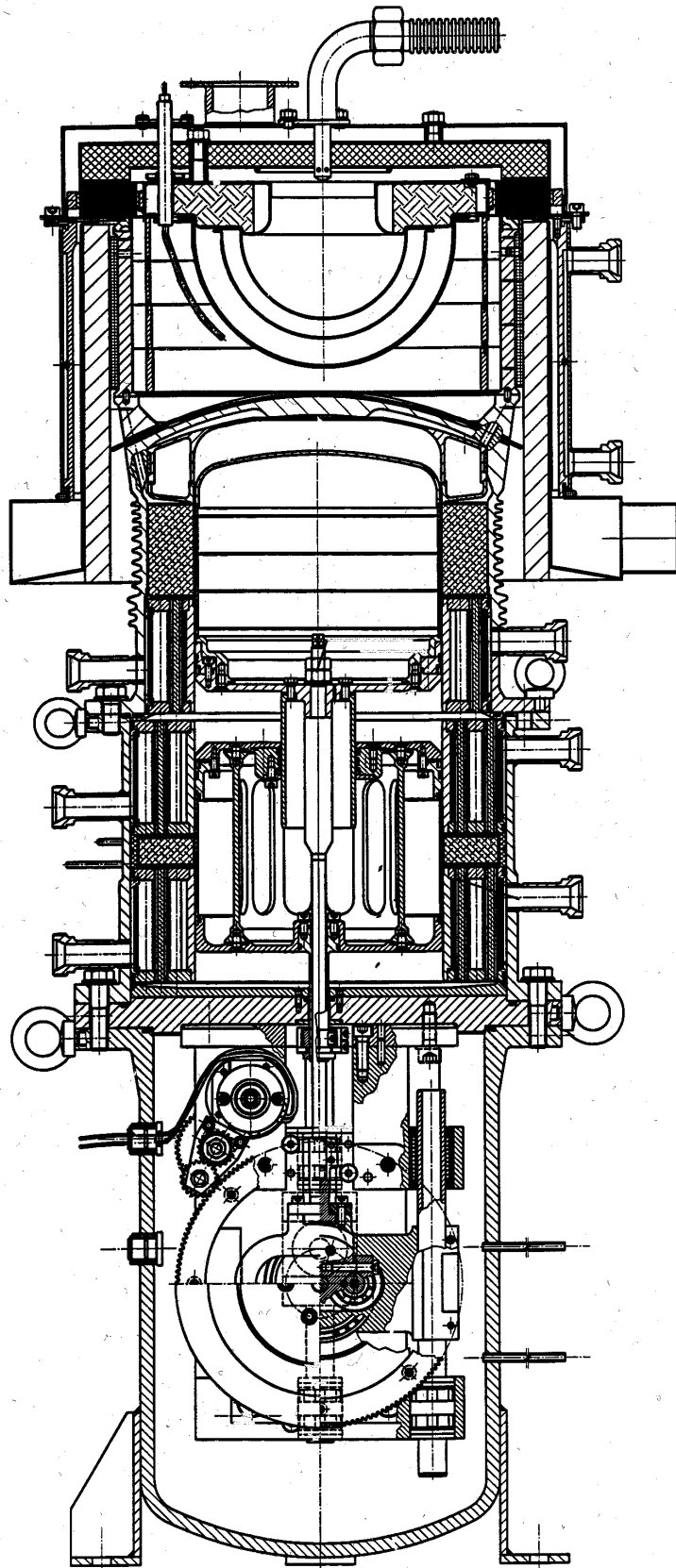


Nummer	Menge	Bezeichnung
1	1	Rauchgasleitblech
2	1	konvexer Erhitzerkopf V1
3	1	Heliumleitblech
4	1	Kolbendeckel heiß
5	1	Regeneratorhülse innen
6	1	Regeneratorhülse innen
7	276 g	Regeneratormatrix (Metallgestrick)
8	2	Gleitringdichtung
9	2	O-Ring 113.89 x 3.53
10	1	Dichtungshalter heiß
11	1	O-Ring 132 x 2
12	32	Unterlegscheibe
13	3	O-Ring 170 x 3.5; 172 x 3.5
14	1	Gehäuse kalte Prozeßseite
15	16	Sechskantschraube heißer Flansch
16	1	O-Ring 160 x 3
17	1	O-Ring 149 x 3
18	1	Isolationskörper warm
19	1	Wärmetauscher warm
20	1	O-Ring 160 x 3
21	1	O-Ring 150 x 3
22	1	Füllkörper
23	1	Dichtungshalter
24	1	Regeneratorhülse
25	1	Regeneratorhülse
26	250 g	Regeneratormatrix (Metallgestrick)
27	1	O-Ring 149 x 3
28	16	Sechskantschraube kalter Flansch
29	1	Druckbehälter
30	2	Gleitlager
31	2	Gleitlager
32	4	Anschlußstutzen
33	4	Überwurfmutter
34	4	Stopfen
35	4	O-Ring 10.5 x 1.8
36	1	Getriebe
37	2	Senkkopfschraube
38	1	Zentrierring
39	4	Schraube
40	1	Grundplatte
41	1	O-Ring 65 x 3
42	1	Zwischenstück
43	1	Wärmetauscher kalt
44	1	Kunststoffbuchse
45	1	Lochblech
46	1	O-Ring 155 x 3
47	1	O-Ring 160 x 3.5
48	1	O-Ring 26.5 x 4
49	1	Gleitringdichtung
50	1	O-Ring 30 x 3.5
51	1	Stange kalt
52	1	Kunststoffeinsatz
53	6	Senkkopfschraube
54	1	Kolbendeckel
55	1	Isolationshülse
56	1	O-Ring 102 x 2
57	1	Gleitringdichtung
58	1	O-Ring 26 x 4
59	1	Laufbuchse
60	1	Kolbenboden
61	4	Seegerring 15 x 1.5
62	4	Paßscheibe 15 x 21 x 0.1/0.2/0.5/1.0
63	6	Seegerring 15 x 1.5
64	1	Stange heiß
65	1	Brenner
66	1	Stabilisator

### 4.3 Versuchsmaschine 4 kW nach HEIKRODT ET AL. (1996)



#### 4.4 Baumuster 20 kW nach HEIKRODT UND HECKT (1999)



## 4.5 Seriennaher Konstruktionsentwurf (20 kW mit integrierter Bivalenz) nach HEIKRODT UND HECKT (1999)

