Verknüpfungsoperatoren unscharfer Mengen

Seminararbeit von Thomas Rosanski

DOOR UNI DO

Universität Dortmund

Operations Research und Wirtschaftsinformatik

Lehrstuhl Prof. Dr. P. Recht

Sommersemester 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

1.1 Fuzzy Menge 3

2 Erste Verknüpfungsoperatoren **5**

2.1 Standardoperatoren 5

2.2 Weitere Mengenoperatoren 7

3 T–Normen und T–Conormen **8**

3.1 T–Norm 8

3.2 T–Conorm 9

3.3 Dualität 9

4 Kompensation und OWA–Operatoren **10**

4.1 Motivation 10

4.2 Kompensatorische Operatoren 11

4.3 Die Klasse der OWA–Operatoren 12

4.4 Besondere OWA–Operatoren 13

5 Ausblick **13**

Zusammenfassung

Nach einer kurzen Einführung der unscharfen Menge und damit zusammenhängender Begriffe beschäftigt sich diese Seminararbeit mit Verknüpfungsoperatoren auf den unscharfen Mengen. Es wird insbesondere auf die Durchschnittsbildung und Vereinigung zweier unscharfer Mengen eingegangen. In diesem Zusammenhang wird eine besondere Klasse von Operatoren betrachtet, die T–Normen und die T–Conormen. Außerdem werden Verknüpfungen von mehr als zwei Mengen betrachtet. Es werden OWA–Operatoren eingeführt, die es erlauben, mehrere Mengen so zu verknüpfen, daß schlechte Zugehörigkeitsgrade kompensiert werden können.

1 Einleitung

In der klassischen Mengenlehre gehört ein Element x des Universums U entweder eindeutig zu einer Menge M oder es gehört eindeutig nicht dazu; man schreibt formal $x \in M$ oder $x \notin M$. Damit können exakt bestimmbare Eigenschaften, wie z.B. „Menge aller geraden Zahlen“ oder „Menge aller minderjährigen Vereinsmitglieder“ mathematisch formuliert werden. Geht es jedoch um unscharfe Eigenschaften, wie „jung“ oder „kühl“, wird eine exakte Grenze dem Problem nicht mehr gerecht. Deshalb hat Professor Zadeh [ZAD65] unscharfe Mengen vorgeschlagen:

1.1 Fuzzy Menge

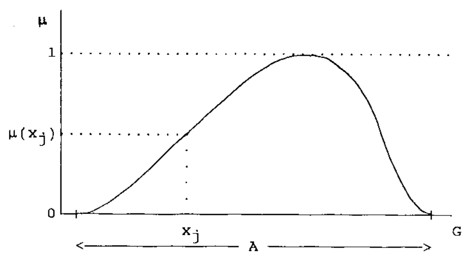

Abbildung 1: Beispiel einer Fuzzy–Menge. aus [TRA94]

Definition 1.1.1 Sei U eine gewöhnliche, scharfe Menge. Eine *unscharfe Menge F über U* wird charakterisiert durch eine Funktion $\mu_F : U \to [0,1]$. Dabei wird μ_F als charakteristische Funktion oder Zugehörigkeitsfunktion bezeichnet.

Jedem Element x aus der Grundmenge U wird eine Zahl $\mu_F(x)$ zugeordnet, die angibt, in welchem Maße das Element x zu der unscharfen Menge F gehört. Man beachte, daß diese Zahl nicht die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der das Element zur Menge gehört, sondern den *Zugehörigkeitsgrad*. Der Unterschied wird deutlich, wenn man sich klarmacht, daß in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Wert von $0,6$ bedeutet, daß in drei von fünf Beobachtungen das Element ganz sicher, und in zwei von fünf Beobachtungen gar nicht dazugehören würde. Ein Element einer Fuzzy Menge gehört aber bei *jeder* Beobachtung mit einem Grad von $0,6$ zu der Fuzzy Menge. Die Interpretation der Zugehörigkeitsgrade hängt von der Anwendung ab.

Da jedem Element x aus der Grundmenge U ein Grad $\mu_F(x)$ zugeordnet ist, kann man zumindest bei endlichen Grundmengen eine Fuzzy–Menge als Menge von Zweiertuppeln schreiben:

$$F = \{(x_1, \mu_F(x_1)), (x_2, \mu_F(x_2)), ..., (x_n, \mu_F(x_n))\} \text{ mit } x_i \in U \text{ und } \mu_F(x) \in [0,1]$$

Bei dieser Schreibweise läßt man Elemente mit Zugehörigkeitsgrad 0 der Übersicht halber weg. Bei größeren oder unendlich grossen Grundmengen ist diese Schreibweise unbrauchbar; man gibt dann meist die charakteristische Funktion als Rechenausdruck an oder bedient sich der grafischen Darstellung. Abbildung 2 zeigt eine mögliche grafische Darstellung für die Mengen „kalte“, „mittelere“ und „warme“ Temperaturen. Dabei ist die Temperatur 20 Grad sowohl Element von „warm“ (und zwar als $(20; 0,3)$) als auch von „mittel“ (und zwar als $(20; 0,9)$).

Jede scharfe Menge M kann als unscharfe Menge aufgefasst werden:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in M \\ 0 \text{ falls } x \notin M \end{cases}$$

Jedem Element aus M wird dabei der Zugehörigkeitsgrad 1, jedem anderen Element aus der Grundmenge der Grad 0 zugeordnet. Somit sind unscharfe Mengen eine Erweiterung

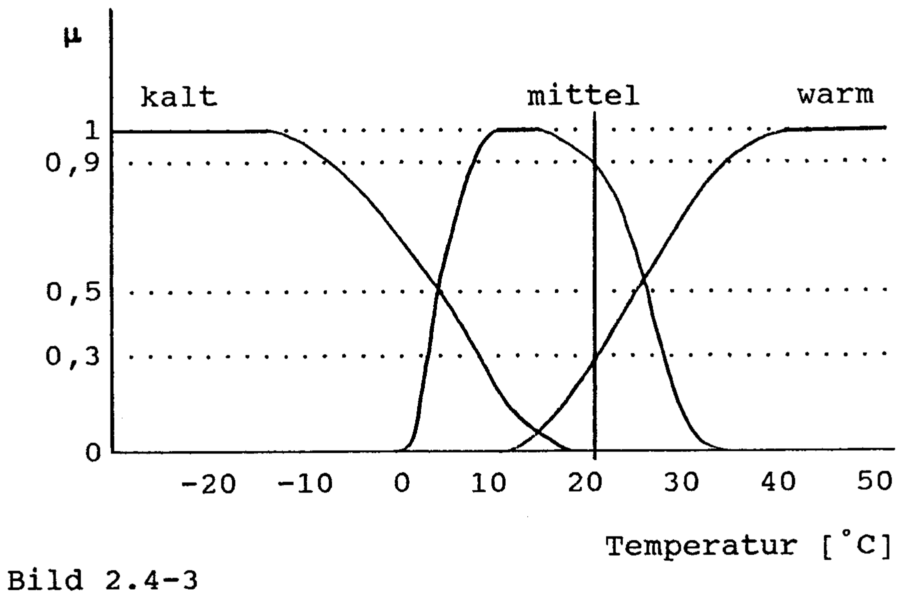

Abbildung 2: Kalte, mittlere und warme Temperaturen als Fuzzy–Mengen. [TRA94]

des gewöhnlichen Mengenbegriffs. Wenn im folgenden Verknüpfungsoperatoren auf Fuzzy–Mengen betrachtet werden, ist zu berücksichtigen, daß gewöhnliche Mengen als Fuzzy–Mengen aufgefaßt werden können und Verknüpfungoperatoren auf solchen Fuzzy–Mengen wie auf den ursprünglichen scharfen Mengen operieren sollen.

2 Erste Verknüpfungsoperatoren

Auf gewöhnlichen Mengen kennt man verschiedene Verknüpfungen. Die grundlegenden Operatoren sind dabei Durchschnitt, Vereinigung und Komplementbildung. Um diese Verknüpfungen auch auf unscharfen Mengen nutzen zu können, muß man sie für unscharfe Mengen neu definieren. Einen ersten Vorschlag dafür hat Zadeh bereits in [ZAD65] gemacht:

2.1 Standardoperatoren

Seien A, B Fuzzy–Mengen auf der Grundmenge U.

Definition 2.1.1 $A \cap B := \{(x, \min(\mu_A(x), \mu_B(x)))|x \in U\}$

Definition 2.1.2 $A \cup B := \{(x, \max(\mu_A(x), \mu_B(x)))|x \in U\}$

Definition 2.1.3 $A^C := \{(x, 1 - \mu_A(x))|x \in U\}$

Die klassischen Mengenoperatoren werden dabei auf unscharfe Mengen erweitert. Man kann eine scharfe Menge als unscharfe Menge auffassen, indem man jedem Element des Universums nur die Zugehörigkeitsgrade 0 und 1 zuweist. Auf solchen erweiterten klassischen Mengen kann man die oben definierten Standardoperatoren für Fuzzy–Mengen anwenden und erhält eine Fuzzy–Menge, die genau das Ergebniss der klassischen Mengenoperation widerspiegelt. Das man die klassischen Operatoren auf Fuzzy–Mengen erweitert, möchte ich im folgenden als Erweiterungsprinzip bezeichnet.

Man kann die Verknüpfungen von Fuzzy-Mengen in einem dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen, indem man auf die x- und y-Achse jeweils die Zugehörigkeitswerte der Argument–Mengen und auf die z-Achse den sich ergebenen Zugehörigkeitswert aufträgt. Für die Standardoperationen $\cap_{\min}$ und $\cup_{\max}$ ist das in Bild 3 dargestellt.

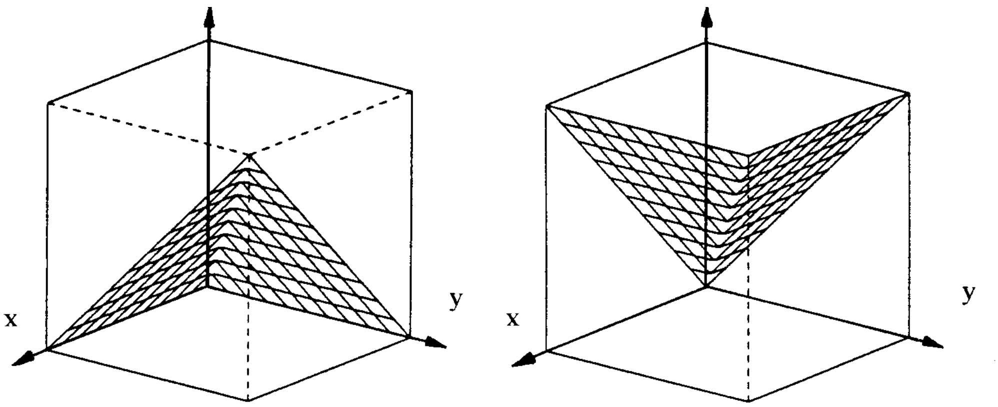

Abbildung 3: Grafische Darstellung von $\min(x, y)$ und $\max(x, y)$. aus [GRA95]

Dabei gelten für diese Operatoren einige der bekannten Rechengesetze: Durchschnitt und Vereinigung sind kommutativ ($A \cup B = B \cup A$), assoziativ ($(A \cap (B \cap C)) = (A \cap B) \cap C)$) und idempotent ($A \cup A = A$). Das folgt direkt aus der Assoziativität, Kommutativität und Idempotenz der Maximums- und Minimumsfunktion.

Für das Komplement gelten die deMorganschen Gesetze: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ und $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. Das folgt bei elementweiser Betrachtung aus $(a \cap b)^C = (1 - (a \cap b)) =$

$(1 - \min\{a, b\}) = \max\{a, b\}$. Die letzte Gleichheit folgt nur wegen $a, b \in [0, 1]$. Das zweite deMorgansche Gesetz folgt analog. □

Das Komplement von Fuzzy–Mengen besitzt aber nicht alle Eigenschaften des Komplements scharfer Mengen. So gilt $A \cap A^C = \emptyset$ für unscharfe Mengen im Allgemeinen nicht!

Beispiel: Sei $A = \{(a; 0,5), (b; 0,3)\}$. Dann ist $A^C = \{(a; 0,5), (b; 0,7)\}$ und $A \cap A^C = \{(a; 0,5), (b; 0,3)\} \neq \emptyset$. □

2.2 Weitere Mengenoperatoren

Neben den oben genannten Definitionen für Fuzzy–Mengenoperatoren gibt es noch viele andere Möglichkeiten, Durchschnitt, Vereinigung und Komplement zu definieren, ohne dabei das Erweiterungsprinzip zu verletzen, zum Beispiel:

$$A \cap B := \{(x, max\{0, \mu_A(x) \cdot \mu_B(c)\}) | x \in U\}$$

Wenn man diese Definition für den Durchschnitt auf klassische Mengen anwendet, also auf Fuzzy–Sets, deren Elemente nur die Zugehörigkeitsgrade 0 und 1 besitzen, bleibt man mit der klassischen Vereinigung konform. Das Produkt $\mu_A \cdot \mu_B$ kann in diesem Fall nur dann ungleich Null werden, wenn beide Faktoren ungleich Null, also Eins, sind. Für unscharfe Mengen ergeben sich jedoch andere Ergebnisse, als bei Anwendung der Standardoperatoren.

Es gibt noch viele weitere Möglichkeiten, Durchschnitt und Vereinigung auf unscharfen Mengen zu definieren, deren Auswahl von dem konkreten Anwendungsfall abhängt. Es soll hier jedoch nicht auf weitere konkrete Definitionen dieser Operatoren eingegangen werden, vielmehr sollen allgemein Operatoren betrachtet werden, die das Erweiterungsprinzip achten. Dazu wird im folgenden die Klasse der T–Normen eingeführt.

3 T–Normen und T–Conormen

3.1 T–Norm

Definition 3.1.1 (T–Norm) Eine *T–Norm*[1] ist ein binärer Operator auf dem Einheitsintervall, d.h. eine Funktion $T : [0,1]^2 \to [0,1]$, so daß für alle $x, y, z \in [0,1]$ die folgenden vier Axiome gelten:

(1)	$T(x,y) = T(y,x)$	(Kommutativität)
(2)	$T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$	(Assoziativität)
(3)	$y \leq z \Longrightarrow T(x,y) \leq T(x,z)$	(Monotonie)
(4)	$T(x,1) = x$	(Einsneutral)

Neben dem Standarddurchschnitt $T_M(x,y) = \min(x,y)$ werden diese Axiome z.B. auch durch das Produkt $T_P(x,y) = xy$ oder dem drastischen Produkt

$$T_W(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{falls } \max(x,y) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt. Das drastische Produkt T_W wird auch als *schwächste T–Norm* bezeichnet.

Für jede T–Norm T gilt:

$$T_W(x,y) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y) = \min(x,y)$$

Beweis: $T_W(x,y) \leq T(x,y)$ gilt, weil T_W nur dann ungleich Null ist, wenn mindestens eines der beiden Argumente x oder y gleich 1 ist und in diesem Fall aufgrund des Axiom (4) das Ergebnis für alle T–Normen vorgegeben ist. In allen anderen Fällen ist $T_W = 0 = \min\{[0,1]\}$, also dem kleinsten möglichen Wert für Fuzzy-Zugehörigkeitsgrade.

$T(x,y) \leq \min(x,y)$: O.B.d.A. sei $\min(x,y) = x$. Wegen Axiom (4) gilt $T(x,1) = x$ und wegen der Monotonie gilt $T(x,y) \leq T(x,1) = x = \min(x,y)$. □

Anmerkung: Das vierte Axiom ($T(x,1) = x$) ist ausschlaggebend für die Eignung von T–Normen für die Durchschnittsbildung auf Fuzzy–Mengen. Aufgrund der Assoziativität läßt sich die T–Norm (und damit auch die Durchschnittsbildung) von zwei auf beliebig[2] viele Argumente ausweiten.

[1] Der Begriff T–Norm kommt von *triangular norm*, also Dreiecksnorm.

[2] aber endlich viele

3.2 T–Conorm

Definition 3.2.1 (T–Conorm) Eine *T–Conorm*[3] ist ein binärer Operator auf dem Einheitsintervall, d.h. eine Funktion $S : [0,1]^2 \to [0,1]$, so daß für alle $x, y, z \in [0,1]$ die folgenden vier Axiome gelten:

(1)	$S(x,y) = S(y,x)$	(Kommutativität)
(2)	$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$	(Assoziativität)
(3)	$y \leq z \Longrightarrow S(x,y) \leq S(x,z)$	(Monotonie)
(4)	$S(x,0) = x$	(Nullneutral)

Der einzige Unterschied zur T–Norm besteht im vierten Axiom, wo jetzt die Null als neutrales Element gefordert wird. Analog zu den Beispielen für T–Normen gibt es bei den T-Conormen unter anderem die Standardvereinigung $S_M(x,y) = \max(x,y)$, die Wahrscheinlichkeitssumme $S_P(x,y) = x + y - xy$ oder auch die strengste T–Conorm S_W:

$$S_W(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{falls } \min(x,y) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jede T–Conorm S gilt: $S_W(x,y) \geq S(x,y) \geq \max(x,y)$. Der Beiweis verläuft analog wie bei den T–Normen. □

3.3 Dualität

In der klassischen Mengenlehre gelten die deMorganschen Gesetze $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ und $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. Für die Standardoperatoren $\min(\mu_A, \mu_B)$, $\max(\mu_A, \mu_B)$ und $1 - \mu_A$ gelten die deMorganschen Gesetze auch auf Fuzzy-Mengen. Allgemein gelten die deMorganschen Gesetze für ein beliebiges Tripel aus T-Norm, T-Conorm und Fuzzy-Komplement aber nicht.

Definition 3.3.1 Eine T–Norm T und eine T-Conorm S heißen *dual in Bezug auf das Fuzzy-Komplement* C, g.d.w. $C(T(x,y)) = S(C(x), C(y))$ und $C(S(x,y)) = T(C(x), C(y))$.

[3] statt T für T–Norm und S für T–Conorm benutzt man auch $\top$ und $\bot$.

Wenn T und S in Bezug auf C dual zueinander sind, bezeichnet man $< T, S, C >$ als duales Tripel. Mit $C_S(x) = 1 - x$ als Standard–Fuzzy–Komplement sind zum Beispiel die folgenden Tripel duale Fuzzy-Operatoren: $< T_M, S_M, C_S >$, $< T_P, S_P, C_S >$ und $< T_W, S_W, C_S >$.

Sei eine T-Norm T und ein Fuzzy-Komplement C gegeben. Dann ist die binäre Funktion $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ mit $S(x,y) := C(T(C(x), C(y)))$ eine zu T duale T-Conorm.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß jedes so definierte S eine T-Conorm ist, also die vier Axiome einer T-Conorm erfüllt und daß S die deMorganschen Gesetze erfüllt.

(1)	$S(x,y) = C(T(C(x), C(y))) = C(T(C(y), T(C(x)) = S(y,x)$
(2),(3),(4)	für die drei anderen Axiomen sei auf [KLI95, S. 84f] verwiesen.
deMorgan	$C(S(x,y)) = C(C(T(C(x), C(y)))) = T(C(x), T(y))$
	$S(C(x), C(y)) = C(T(C(C(x)), C(C(y)))) = C(T(x,y))$. □

Beispiel: Für das Standard-Fuzzy-Komplement $C_S(x) = 1 - x$ ist $S = 1 - T(1-x, 1-y)$ die zur T-Norm T duale T-Conorm.

Analog gilt: Sei S ein T-Conorm und C ein Fuzzy-Komplement, dann ist $T(x,y) = C(S(C(y), C(y)))$ die zu S duale T-Norm bezüglich C. □

4 Kompensation und OWA–Operatoren

4.1 Motivation

In der Praxis kommt es häufig vor, daß man nicht nur zwei, sondern mehrere Fuzzy–Mengen miteinander verknüpfen möchte. Aufgrund der Assoziativität von T–Norm und T–Conorm können Mengenoperatoren aus diesen Klassen problemlos auf n-äre Operationen[4] erweitert werden. Dennoch stößt man mit den T–Normen an Grenzen. Nämlich dann, wenn es nicht um einen strengen Durchschnitt geht, sondern nur Forderungen wie „soll möglichst viele der geforderten Eigenschaften besitzen“ oder „soll den besten Kompromiss zwischen Preis und Qualität bieten“. Es ist also nicht wichtig, daß jede Eigenschaft

[4] also Operationen mit n Argumenten

erfüllt ist, sondern daß der „Gesamteindruck“ stimmt; fehlende Eigenschaften sollen durch andere, überdurchschnittlich gute Eigenschaften *kompensiert* werden können.

Wie bereits gezeigt, gilt für alle T–Normen $T(x, y) \leq \min(x, y)$. Aufgrund der Assoziativität von T-Normen läßt sich diese Ungleichung auch auf n-äre[5] T–Normen erweitern: $T(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \min(x_1, x_2, ..., x_n)$. Das hat aber zur Folge, daß jedes Element einer Fuzzy–Menge nach einem n-stelligen Durchschnitt höchstens den niedrigsten Zugehörigkeitswert besitzt, den es in einer der am Durchschnitt beteiligten Mengen hat. Ein Ausgleich eines niedrigen Zugehörigkeitsgrades in einer Menge läßt sich also nicht durch hohe Zugehörigkeitsgrade in den anderen beteiligten Mengen ausgleichen.

4.2 Kompensatorische Operatoren

Die Idee, einen Mittelweg zwischen Vereinigung und Durchschnitt zu finden, nennt man *kompensatorische Operatoren.*

Definition 4.2.1 $\mu_{A\lambda B}(x) = \lambda \cdot \underbrace{(\mu_A(x) \cdot \mu_B(x))}_{T_P} + (1-\lambda) \cdot \underbrace{(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x))}_{S_P}$ mit $\lambda \in [0, 1]$ heißt λ-Operator.

$A\lambda B$ ist kompensatorisch, weil sich mit λ festlegen läßt, wo zwischen „UND“ und „ODER“ der Operator liegt. Für $\lambda = 1$ erhält man die T–Norm T_P, für $\lambda = 0$ erhält man die T–Conorm S_P.

Man kann den λ–Operator auch noch mit Gewichten versehen, so daß man eine der beiden unscharfen Mengen bevorzugen kann. Gewichtete, kompensatorische Operatoren sind aber nicht mehr kommutativ. Um dies zu erreichen, müssen andere Bedingungen an die Operatoren gestellt werden.

Im folgenden wird daher eine neue Klasse von Operatoren eingeführt, die sogenannten *ordered weight averaging*[6] Operatoren, kurz OWA. Die Klasse der OWA–Operatoren erfüllt die Kommutativität und ist dennoch kompensatorisch. Man erkauft sich diese Eigenschaft mit dem Verlußt, die Gewichte fest an eine Menge zu binden. Bei Verknüpfung mehrerer

[5] also auf $[0, 1]^n \to [0, 1]$ erweiterten

[6] Englisch für geordneter, gewichteter Durchschnitt

Mengen, bei denen „Ausreißer“ in nur wenigen, aber dafür beliebigen Mengen vorkommen darf, sind OWA–Operatoren gut geeignet. Sie werden deshalb im folgenden genauer betrachtet.

4.3 Die Klasse der OWA–Operatoren

Definition 4.3.1 Sei $W = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ Vektor mit $w_i \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Dann heißt $F : [0,1]^n \to [0,1]$ mit $F(a_1, a_2, ..., a_n) = w_1 b_1 + w_2 b_2 + ... + w_n b_n$ *OWA–Operator* der Dimension n. Dabei enthält der Vektor $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ die Elemente des Vektors $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ in absteigender Reihenfolge, i.e. $\forall b_i : j > i \Leftrightarrow b_i \geq b_j$.

Beispiel: Angenommen, $W^T = (0,4; 0,1; 0,2; 0,3)$ sei der Gewichtsvektor. Dann ist $F_W(0,3; 0,1; 0,8; 0,9) = F_W(0,9; 0,8; 0,3; 0,1) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,53$.

Falls $\forall i : a_i \in [0,1]$ gilt, dann liegen die Ergebnisse des OWA–Operators im Intervall $[0,1]$, und können somit zur Verknüpfung mehrerer Fuzzy–Mengen zu einer neuen Fuzzy–Menge dienen. Dazu wird für jedes Element $x \in U$ der Zugehörigkeitswert mit Hilfe eines OWA–Operators neu berechnet. Sei X_i die i-te Fuzzy–Menge, die mit dem OWA-Operator verknüpft werden soll. Dann ist

$$\mu_{neu}(x) = F(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, ..., \mu_{X_n}) \, \forall \, x \in U$$

der Zugehörigkeitswert von x in der Ergebnismenge X_{neu}.

Anmerkung: OWA–Operatoren sind *kommutativ*, was leicht einzusehen ist, da die Argumente $a_1, a_2, ..., a_n$ zur Berechnung absteigend sortiert werden und ihre ursprüngliche Reihenfolge egal ist. Weiterhin sind alle OWA-Operatoren *idempotent*, d.h. wenn $a_j = a$ für alle $j = 1, ..., n$ gilt, dann ist $F(a_1, a_2, ..., a_n) = a$. Das hängt mit der Eigenschaft des Gewichtsvektors W zusammen, desen Elemente in der Summe Eins ergeben müssen. Des weiteren sei angemerkt, daß OWA–Operatoren monoton in Bezug auf die Werte ihrer Argumente sind: Wenn $x_j \geq y_j$ für alle $j = 1, ..., n$, dann ist auch $F(X) \geq F(Y)$ mit $X = (x_1, ..., x_n)$ und $Y = (y_1, ..., y_n)$. Dies folgt direkt aus der Berechnung von F als $W \cdot B$. $\square$

4.4 Besondere OWA–Operatoren

Sei $A = (a_1, ..., a_n)$ der Argumentvektor und $B = (b_1, ..., b_m)$ der dazugehörige, geordnete Vektor.

Definition 4.4.1 $F_M(A) = \frac{1}{n}b_1 + \frac{1}{n}b_2 + ... + \frac{1}{n}b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_j$ ist der einfache Durchschnittsoperator. Es sind also alle Gewichte w_i gleich groß: $w_1 = w_2 = ... = w_n = \frac{1}{n}$

Definition 4.4.2 Sei W_* der Vektor mit $w_n = 1$ und $w_j = 0$ für alle $j \neq n$ und sei W^* der Vektor mit $w_1 = 1$ und $w_j = 0$ für alle $j \neq 1$. Dann ist $F_*(A) = W_* \cdot B = b_n = \min\{a_j\}$ der bekannte Standarddurchschnittsoperator und $F^*(A) = W^* \cdot B = b_1 = \max\{a_j\}$ der bekannte Standardvereinigungsoperator.

Anmerkung: Es gilt $W_* \cdot B \leq W \cdot B \leq W^* \cdot B$ für jeden Gewichtsoperator W, und somit auch $F_*(A) \leq F(A) \leq F^*(A)$ für jeden OWA–Operator F. Der Operator F_* ist damit der kleinste und F^* der größte OWA–Operator. Gleichzeitig ist F_* die größte T-Norm und F^* die kleinste T-Conorm. Für eine beliebige T-Norm T, eine beliebige T-Conorm S und einen beliebigen OWA–Operator F gilt deshalb:

$$T(A) \leq F(A) \leq S(A)$$

Es ist leicht zu sehen, daß OWA–Operatoren von der Bedeutung zwischen Durchschnitt (T-Norm) und Vereinigung (T-Conorm) anzusiedeln sind[7]. Sie erfüllen also die Voraussetzung, bei Verknüpfung mehrerer Mengen einen schlechten Zugehörigkeitsgrad in einer Menge durch gute Zugehörigkeitsgrade in anderen Mengen zu kompensieren. Man kann mit ihnen die anfangs genannten sprachlichen Bedingungen wie „möglichst viele Eigenschaften gut erfüllen“ modelieren.

5 Ausblick

Es geht über den Rahmen dieser Seminararbeit hinaus, die Bedeutung der Zugehörigkeitsgrade, der Gewichtsvektoren und der verschiedenen Operatoren einer Klasse zu diskutie-

[7] Yager [YAG88] nennt sie deshalb auch „orand“–Operator, also eine Mischung aus „UND“ (Durchschnitt) und „ODER“ (Vereinigung).

ren. Es sei nur darauf hingewiesen, daß es nicht *die* Bedeutung gibt. Je nach praktischem Anwendungsfall können die Zugehörigkeitswerte ganz verschiedene Bedeutungen haben. Je nach Intention benutzt man daher auch verschiedene Vertreter der T-Norm, T-Conorm oder OWA-Operatoren. Ähnliches gilt auch für die Gewichtsvektoren.

Man kann die Werte der Gewichtsvektoren aufgrund einer vorher festgelegten semantischen Bedeutung bestimmen. Man kann aber auch automatische Lernmechanismen, wie zum Beispiel generische Algorithmen benutzen, um aus anfänglichen Basisdaten zu für die Anwendung passenderen Werten[8] zu kommen.

OWA–Operatoren eignen sich aufgrund der Tatsache, daß sie zwischen Durchschnitt („UND“) und Vereinigung („ODER“) liegen, auch für unscharfe Quantoren. Im Gegensatz zu scharfen Quantoren (∀: „für alle“, ∃: „es gibt ein“) beschreibt man mit unscharfen Quantoren semantische Bedingungen wie „fast alle“, „einige“ oder „viele“, wie man sie im natürlichen Sprachgebrauch benutzt.

Literatur

[BAN93] Hans Bandemer, Siegfried Gottwald: EINFÜHRUNG IN FUZZY-METHODEN – THEORIE UND ANWENDUNGEN UNSCHARFER MENGEN. Akademie-Verlag, 4. Aufl., 1993

[GRA95] Adolf Grauel: FUZZY-LOGIC – EINFÜHRUNG IN DIE GRUNDLAGEN MIT ANWENDUNGEN. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1995

[KLE97a] Peter Erich Klement, Radko Mesiar: TRIANGULAR NORMS. Tatra Mountains Math. Publ. 13 (1997), 169-193

[KLE97b] Peter Erich Klement: SOME MATHEMATICAL ASPECTS OF FUZZY SETS: TRIANGULAR NORMS, FUZZY LOGICS, AND GENERALIZED MEASURES. Fuzzy sets and systems, Special Issue: Fuzzy Sets: Where Do We Stand? Where Do We Go?, Vol. 90, No. 2, September 1997

[8] ganz nach Friedrich v. Schiller: „Ein jeder gibt den Wert sich selbst“ (aus *Wallensteins Tod*)

[KLI95] Georg J. Klir, Bo Yuan: FUZZY SETS AND FUZZY LOGIC: THEORY AND APPLICATIONS.Prentice Hall PTR, 1995

[KRU95] Rudolf Kruse, Jörg Gebhardt, Frank Klawonn: FUZZY-SYSTEME. Leitfäden der Informatik. Teubner, Stuttgart 1995

[ROM94] Heinrich Rommelfanger: FUZZY DECISION SUPPORT-SYSTEME – ENTSCHEIDEN BEI UNSCHÄRFE. Springer-Verlag, Heidelberg 1994

[TRA94] Dirk H. Traeger: EINFÜHRUNG IN DIE FUZZY-LOGIK. B. G. Teubner Stuttgart 1994

[YAG88] Ronald R. Yager: ON ORDERED WEIGHTED AVERAGING AGGREGATION OPERATORS IN MULTICRITERIA DECISIONMAKING. IEEE transactions on systems, man and cybernatics, Vol. 18, No.1, Jan/Feb 1988

[ZAD65] L.A. Zadeh: FUZZY SETS. Information and Control, Vol. 8, 1965, p.338-353

Die hier aufgeführte Literatur ist eine bescheidene Auswahl und diente mir als Grundlage für diese Seminararbeit. Eine gute Einführung in die Fuzzy Set Theorie findet man in [BAN93] oder [KRU95]. T–Normen und T–Conormen werden ausführlich in [KLE97a] diskutiert. OWA Operatoren werden in [YAG88] und [KLI95, Kap. 3.6] behandelt. Eine ausführliche Literaturliste mit etwa siebzehntausend Artikeln, Zeitschriften und Lehrbüchern findet man in [KLI95, S. 494-547].