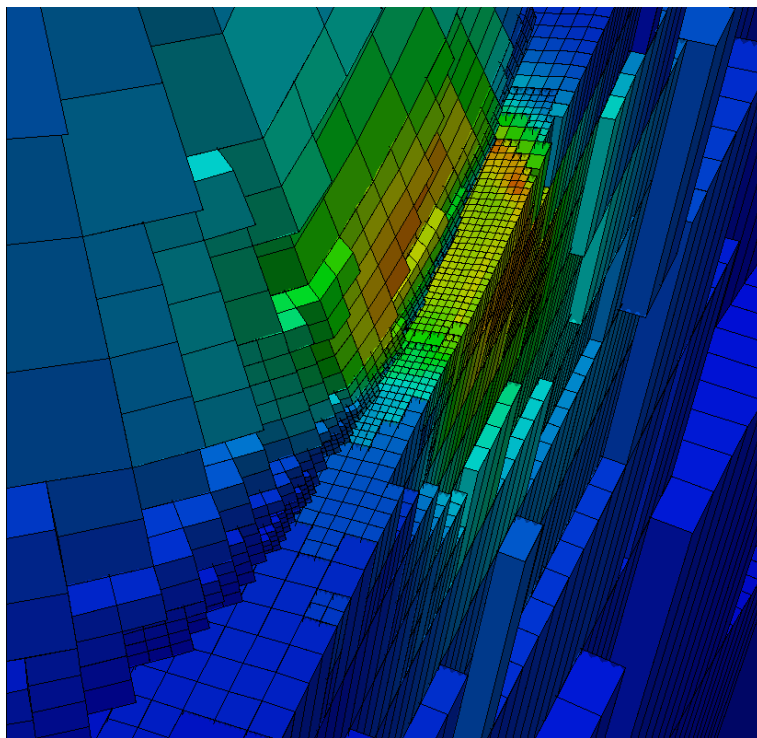


ADAPTIVE FEM FÜR
MEHRKÖRPERKONTAKTPROBLEME



Dissertation

zur

Erlangung des Grades

eines

Doktors der Naturwissenschaften

Der Fakultät für Mathematik

der TU Dortmund

vorgelegt von

Dipl.-Math. Heiko Kleemann

März 2011

Diese Arbeit ist im Rahmen des Sonderforschungsbereiches *3D Surface Engineering* (SFB708) der deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) entstanden.

für meine Tochter, die mich immer wach und bei Laune gehalten hat,
wenn ich mal keine Motivation hatte weiter zu schreiben.

.. und für meinen Vater, dem es wohl gefallen hätte diese Arbeit - wenn
auch nicht ganz zu lesen - so doch zumindest mal in den Händen zu
halten.

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINFÜHRUNG	1
2	GRUNDLAGEN	7
2.1	Gemischte Variationsformulierungen	7
2.2	Sobolevräume und Spurooperatoren	10
2.3	Einführung in die Elastizitätstheorie	14
2.4	Finite Elemente Methoden (FEM)	15
3	STATISCHE KONTAKTPROBLEME	19
3.1	Modellierung von Kontaktproblemen	19
3.1.1	Reibungsfreier Kontakt	20
3.1.2	Reibungsbehafteter Kontakt	21
3.1.3	Kontaktprobleme mit Abstand in der Referenz- konfiguration	23
3.2	Diskretisierung von Kontaktproblemen	25
3.2.1	Diskretisierung	25
3.2.2	Kontaktprobleme mit Abstand in der Referenz- konfiguration	27
3.2.3	Diskretisierungen höherer Ordnung	27
3.2.4	Stabilität	28
3.2.5	A priori Konvergenz	33
3.2.6	Lösungsmechanismus	37
3.3	Numerische Ergebnisse	40
4	DYNAMISCHER KONTAKT	55
4.1	Modellierung und Diskretisierung dynamischer Kontak- probleme	55
4.1.1	Reibungsfreie dynamische Kontaktprobleme	55
4.1.2	Dynamische reibungsbehaftete Kontaktprobleme	59
4.2	Numerische Ergebnisse	61
5	ADAPTIVE METHODEN	67
5.1	Adaptive Methoden für statische Kontaktprobleme	67
5.1.1	Adaptive Netzverfeinerungen	68
5.1.2	Residualer Fehlerschätzer	69
5.1.3	Numerische Ergebnisse	74
5.1.4	Dual gewichtete Fehlerschätzer	82
5.1.5	Numerische Ergebnisse	93
5.2	Adaptive Methoden für zeitabhängige Probleme	98
6	AUSBLICK	105
A	ANHANG	107
A.1	Implementationsfragen	107
A.2	Lokale Stabilisierung der Kontaktträger	110
	LITERATURVERZEICHNIS	113

Diese Arbeit befasst sich mit der Modellierung und Simulation von Kontaktproblemen zwischen deformierbaren Körpern. Solche Probleme sind gerade im ingenieur-technischen Bereich von großem Interesse und Gegenstand aktueller Forschung. Die Dissertation umfasst alle wesentlichen Schritte, um Kontaktprobleme zu modellieren und zu simulieren. Das beinhaltet eine geeignete Problemformulierung und Diskretisierung, sowie adaptive dynamische Strategien, um effiziente Simulationen zu erhalten. Zunächst wird hierzu anhand einer konkreten Anwendung die Problematik erläutert.

Simulation von Schleifprozessen

Eine Anwendung, anhand derer die wesentlichen Herausforderungen bei der Modellierung und Diskretisierung von Kontaktproblemen gezeigt werden können, ist die Simulation eines Schleifprozesses. Im Rahmen eines solchen Prozesses spielen die Kontaktkräfte zwischen dem Schleifstift und dem Werkstück eine besondere Rolle zur Berechnung des Abtrages. Dazu gibt es heuristische Modelle, die anhand der in Experimenten gemessenen Kräfte den Abtrag berechnen. In diesen Modellen werden allerdings Schleifstift und Werkstück als starre Körper angenommen. Insbesondere die Deformation des Schleifstiftes führt zu einer geänderten Kontaktsituation und anderen Kontaktkräften. In [94, 87] wurde diese Deformation unter Annahme eines starren Hindernis zur Verbesserung der Schleifsimulation verwendet. Im Projekt *Simulationsgestützte Entwicklung und Optimierung eines NC-gesteuerten Schleifprozesses zur Bearbeitung frei geformter, beschichteter Oberflächen mit Hilfe angepasster Schleifstifte* des Sonderforschungsbereichs 708, [18, 16, 17], sollte zusätzlich die Reaktion des Werkstücks im Kontakt berücksichtigt werden, um insbesondere das Schwingungsverhalten abzubilden. Zusätzlich sollten die Spannungen im Werkstück zur simulativen Berechnung von Prozessgrenzen genutzt werden, um eine Schädigung einer zuvor aufgetragenen Oberflächenbeschichtung zu vermeiden. Bei freigeformten Werkstücken und Einsatz von sphärischen Schleifstiften stellt sich insbesondere die Eingriffssituation komplex dar, so dass einfache heuristische Methoden der Kontaktvorhersage versagen, während die finite Elemente Simulation die Kontaktsituation auflösen kann. Zur Simulation ist also insbesondere eine Formulierung des Problems nötig, die der komplexen dynamischen Eingriffssituation Rechnung trägt. In der Regel wird es nicht möglich sein, für Schleifstift und Werkstück Vernetzungen zu wählen, die im Kontaktbereich übereinstimmen, so dass sich die Erfüllung der Kontaktbedingung als schwierig erweist. Weiterhin ist der Kontaktbereich sehr lokal begrenzt, die Deformation findet jedoch hauptsächlich im Schaft des Schleifstiftes statt, so dass adaptive Strategien nötig sind, um eine hinreichend genaue Simulation zu gewährleisten. Schließlich erfordert die Dynamik, diese adaptiven Strategien auch auf dynamische Kontaktprobleme auszuweiten.

Für den betrachteten anwendungsbezogenen Prozess ist die Annahme linear elastischer Deformationen zulässig, da die Simulation auf einer makroskopischen Ebene arbeitet. Der Abtragprozess, bei dem

nicht von elastischen Deformationen ausgegangen werden kann, findet auf einer kleineren Skala statt, die in dieser Simulation nicht berücksichtigt wird. Stattdessen wird hier der Abtrag aufgrund der auftretenden Kräfte berechnet, so dass man ein Kontaktproblem zwischen linear elastischen Körpern erhält.

Numerische Lösung von Kontaktproblemen

Obwohl die Theorie zur Lösung von Kontaktproblemen hinlänglich bekannt und untersucht ist, ergeben sich bei der numerischen Behandlung einige Fragestellungen. So lassen sich statische Kontaktprobleme zwischen linear elastisch deformierbaren Körpern durch partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Nebenbedingungen formulieren. Dynamische Kontaktprobleme führen zu hyperbolischen Gleichungen mit Nebenbedingungen. Über diese Nebenbedingungen werden die betrachteten Körper gekoppelt. Dies geschieht bei reibungsfreien Kontaktproblemen durch die sogenannte Nicht-Durchdringungs-Bedingung, bei reibungsbehafteten Problemen durch ein zusätzliches nicht differenzierbares Funktional, das die Reibungsbedingungen beschreibt. Die Behandlung dieser Nebenbedingungen stellt die besondere Herausforderung bei der Diskretisierung von Kontaktproblemen dar. Insbesondere bietet die gemischte Formulierung der zum Kontaktproblem gehörenden Variationsungleichung einen praktischen Ansatz zur Lösung der Probleme.

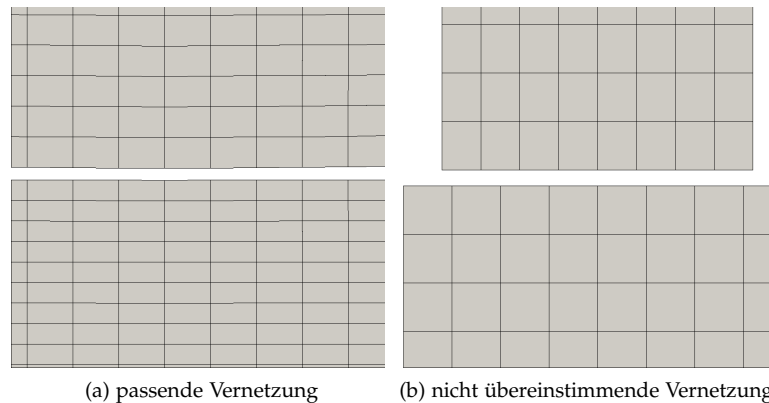


Abbildung 1: Vernetzungen im Kontaktbereich

Die Erfüllung der Kontaktbedingung kann beispielsweise punktweise garantiert werden, wenn eine im Kontaktbereich passende Vernetzung gewählt wird, siehe Abbildung 1a. Dies ist aber bei komplexen Kontaktsituationen und insbesondere im dynamischen Fall nur schwer zu garantieren. Dagegen ist in der gemischten Formulierung die Nicht-Durchdringungs-Bedingung nur schwach zu erfüllen, so dass nicht übereinstimmenden Vernetzungen gewählt werden können (Abbildung 1b).

Kontaktprobleme mit passenden Vernetzungen wurden etwa in [56] untersucht, die gemischte Formulierung, auch für nicht übereinstimmende Vernetzungen zum Beispiel in [94, 87, 14, 65, 66]. Häufig führen diese Ansätze zu zusätzlichen Bedingungen im Kontaktbereich. So führt die Verwendung von Mortardiskretisierungen, siehe [14, 65], zu der Forderung einer Übereinstimmung der Vernetzung auf dem Rand

des Kontaktbereiches, um die Stabilität der Diskretisierung zu gewährleisten. Mit Blick auf dynamische Kontaktprobleme ist eine solche Forderung nur schwer zu erfüllen. Andere Ansätze führen auf Penalty-Verfahren, siehe z.B. [45], oder zusätzliche Stabilisierungsterme, siehe z.B. [60].

Die in dieser Arbeit entwickelte Diskretisierung garantiert durch eine Ausbalancierung der Ansatzräume die Stabilität des gemischten Problems ohne solche zusätzlichen Bedingungen an den Kontaktbereich. In Abschnitt 3.2.4 wird dazu ein Kriterium für die Stabilität hergeleitet und anschließend anhand numerischer Untersuchungen anschaulich dargestellt. Zusätzlich wird in Abschnitt 3.2.5 eine a priori Konvergenzabschätzung vorgenommen, welche anhand numerischer Beispiele verifiziert wird. Die Resultate zeigen die erwartbare Konvergenzordnung für Kontaktprobleme.

In Kapitel 4 wird die zuvor für statische Kontaktprobleme entwickelte Diskretisierung auf dynamische Probleme ausgeweitet. Um die Effizienz der Lösung von Kontaktproblemen zu gewährleisten werden in Kapitel 5 adaptive Methoden entwickelt. Diese Methoden rechtfertigen zum einen die Verwendung von Ansatzräumen mit hohem Polynomgrad, da durch adaptive Strategien die optimale Konvergenzordnung erreicht werden kann. Zum anderen werden zielgerichtete adaptive Methoden entwickelt, um beliebige Fehlerfunktionale kontrollieren zu können. Dazu werden verlässliche Fehlerschätzer entwickelt.

Modellierung von Kontaktproblemen

Die Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der starken Formulierung und der zugehörigen Variationsungleichung, sowie der gemischten Formulierung sind bekannt und werden in Kapitel 3, Abschnitt 3.1, für statische Probleme und Kapitel 4 für dynamische Probleme zusammengefasst. Zunächst werden hierzu in Kapitel 2 mathematische Grundlagen dargestellt, die zum Verständnis der Probleme und zur Lösung notwendig sind. In Abschnitt 2.1 wird die allgemeine Lösungstheorie für elliptische Variationsungleichungen auf Hilberträumen und deren gemischte Formulierungen vorgestellt. Insbesondere wird hier der Zusammenhang zu konvexen Minimierungsproblemen aufgezeigt, so dass man eine allgemeine Lösungstheorie erhält.

In Abschnitt 2.2 werden die zur Beschreibung von Kontaktproblemen nötigen Funktionenräume eingeführt, sowie die zur Beschreibung der Nebenbedingungen nötigen Operatoren. Eine kurze Einführung in die Begriffe der Elastizität wird in Abschnitt 2.3 vorgenommen.

Diskretisierung von Kontaktproblemen

Die Diskretisierung von Mehrkörperkontaktproblemen wird in Kapitel 3 Abschnitt 3.2 für statische Kontaktprobleme vorgenommen. In Kapitel 2.4 wird zunächst ein kurzer Überblick über die Finite Elemente Methode (FEM) gegeben. In diesem Abschnitt werden auch die stückweise polynomialen Ansatzräume vorgestellt, die für die Diskretisierung der Kontaktprobleme genutzt werden. In Kapitel 3 wird für den verwendeten Ansatz ein Kriterium für die Stabilität der Diskretisierung für höhere Polynomansätze hergeleitet, welcher zuvor nur für niedrige Ordnung und reibungsfreie Probleme untersucht wurde [78]. Ferner wird eine a priori Konvergenzabschätzung vorgenommen und

anhand von Beispielen verifiziert. In Kapitel 4 werden die Methoden auf dynamische Kontaktprobleme übertragen.

Fehlerkontrollierte adaptive FE-Methoden

Wie anhand des Beispiels der Schleifsimulation schon motiviert wurde, ist die Frage nach adaptiven FE-Methoden bei Kontaktproblemen von großer Bedeutung. Zum einen gibt es rein geometrische Probleme, wie etwa die Diskretisierung des Kontaktbereiches, zum anderen die Frage, in welchem Bereich der Diskretisierung der Fehler groß ist und mit welcher Strategie er verkleinert werden kann.

Adaptive Methoden zur Verbesserung der Approximation können zum einen lokal nur die Maschenweite verringern (h-Methode), nur den Polynomgrad erhöhen (p-Methoden), oder beide Vorgehensweisen kombinieren (hp-Methoden). In [94] wird für einseitige Kontaktprobleme unter anderem gezeigt, dass die reine p-Methode kein optimales Konvergenzverhalten zeigt. Dieses Ergebnis überträgt sich direkt auf Mehrkörperkontaktprobleme. In dieser Arbeit findet deshalb die h-Methode Verwendung. In Abschnitt 5.1.1 wird ein Überblick über die adaptiven Verfeinerungsstrategien gegeben.

Als Indikator für adaptive Methoden werden in Kapitel 5 a posteriori Fehlerschätzer für Mehrkörperkontaktprobleme hergeleitet. A posteriori Fehlerschätzer schätzen anhand der berechneten Lösung den Diskretisierungsfehler ab, so dass für jedes Element der Diskretisierung ein Fehlerbeitrag berechnet wird. Zunächst werden in Abschnitt 5.1.2 residuale Fehlerschätzer für Kontaktprobleme mit starrem Hindernis für Mehrkörperkontaktprobleme erweitert. Während in Abschnitt 3.2.5 beobachtet wurde, dass Mehrkörperkontaktprobleme nicht die Glattheit besitzen, um mit hohen Polynomgraden einen Ordnungsgewinn zu erzielen, wird in Abschnitt 5.1.3 durch adaptiv verfeinerte Gitter die optimale Konvergenzordnung erreicht. Damit ist die Nutzung von Ansatzfunktionen mit hohen Polynomgrad zu rechtfertigen.

Residuale Fehlerschätzer schätzen den Diskretisierungsfehler bezüglich einer globalen Norm. Häufig ist man aber an lokalen Fehlergrößen, wie etwa Spannungen in Teilgebieten der Lösung, Punktfehlern oder Randintegralen, interessiert. Dazu werden in Abschnitt 5.1.4 dual gewichtete Fehlerschätzer hergeleitet, die den Fehler bezüglich eines beliebigen Funktionals abschätzen können. Grundlegend für dual gewichtete Fehlerschätzer ist die Definition eines geeigneten dualen Problems. Dies geschieht in Abschnitt 5.1.4 über den in [97] hergeleiteten allgemeinen Ansatz für Variationsungleichungen. Die Fehlerabschätzung folgt dem in [92] gewählten Ansatz.

In Abschnitt 5.2 wird die Übertragung auf zeitlich adaptive Methoden vorgenommen. Zunächst wird ein geeigneter Ortsfehlerschätzer auf Grundlage des in Abschnitt 5.1.2 hergeleiteten residualen Fehlerschätzers ermittelt. Anschließend werden die in [87] entwickelten Verfeinerungs- und Regularisierungstechniken verwendet, um dynamisch adaptive FE-Methoden zu erhalten.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine umfassende Strategie für adaptive finite Elemente Methoden für Mehrkörperkontaktprobleme vorgestellt. Ausgehend von der Modellierung der Probleme werden geeignete Diskretisierungen entwickelt und analysiert. Auf Grundlage dieser Diskre-

tisierungen werden Lösungsstrategien für statische und dynamische Kontaktprobleme mit und ohne Reibung vorgestellt. Schliesslich werden adaptive Methoden und a posteriori Fehlerschätzer entwickelt. Diskretisierungen mit Polynomansätzen höherer Ordnung sind für Kontaktprobleme nur im Rahmen adaptiver Methoden sinnvoll. Auf Grundlage der hier entwickelten a posteriori Fehlerschätzer werden adaptive Methoden mit optimaler Ordnung für statische Kontaktprobleme vorgestellt. Für dual gewichtete Fehlerschätzer ist die Verwendung eines geeigneten dualen Problems, welches in Kapitel 5.1.4 hergeleitet wird, von grundlegender Bedeutung. Eine Dualisierung des gemischten Problems ist notwendig, um verlässliche Fehlerschätzer für adaptive Verfahren zu erhalten.

In diesem Kapitel werden zunächst allgemeine Grundlagen zusammengefaßt, die zur Betrachtung von Kontaktproblemen von Nutzen sind. In Abschnitt 2.1 wird eine allgemeine Lösungstheorie für Variationsungleichungen eingeführt, mit der Mehrkörperkontaktprobleme gelöst werden können. In Abschnitt 2.2 werden einige spezielle Funktionenräume und Operatoren auf zusammengefaßt. Abschnitt 2.3 liefert eine kurze Einführung in die Elastizitätstheorie. Schliesslich wird in Abschnitt 2.4 ein kurzer Überblick über die Finite Elemente Methode gegeben. Hier werden auch die endlich dimensional Diskretisierungsräume vorgestellt, die in dieser Arbeit Verwendung finden.

2.1 GEMISCHTE VARIATIONSFORMULIERUNGEN

Kontaktprobleme zwischen deformierbaren Körpern lassen sich als Minimierungsprobleme $\min_{v \in K} E(v)$ schreiben, wobei E die zu minimierende Energie ist. Diese setzt sich zusammen aus der Deformation der Körper und den angreifenden äußeren Kräften. In der Praxis führt dies sowohl bei reibungsbehafteten als auch reibungsfreien Problemen zu Funktionalen der Art $E(v) = a(v, v) - l(v)$ mit einer stetigen, elliptischen Bilinearform a und einem linearen Funktional l . Im Folgenden werden die Zusammenhänge zwischen Minimierungsproblemen, Variationsungleichungen und gemischten Formulierungen aufgezeigt.

Reibungsbehaftete Kontaktprobleme lassen sich über das Minimierungsproblem

$$(H + j)(u) = \min_{v \in K} (H + j)(v) \quad (2.1)$$

beschreiben. Dabei ist K eine Teilmenge eines reflexiven Banachraumes V und H, j sind reelwertige konvexe Funktionale in V . Das Funktional H ist Fréchet-differenzierbar, das Funktional j , durch das die Reibungsbedingungen beschrieben werden, im Allgemeinen jedoch nicht. Reibungsfreie Kontaktprobleme entstehen also durch den Spezialfall $j = 0$ und werden so direkt mitbehandelt. Die Wahl von V, H und j wird in Kapitel 3 deutlich. Die Beweise für die folgenden Resultate sind wohlbekannt und finden sich zum Beispiel in [28, 43, 71], die Darstellung ist im Wesentlichen aus der Einleitung von [91] übernommen.

Theorem 1. *Sei K konvex.*

(i) *Wenn K abgeschlossen und $H + j$ schwach unterhalb stetig und koerziv ist, dann existiert in K ein Minimum $u \in K$ zu (2.1).*

(ii) *Wenn $H + j$ strikt konvex ist, existiert mindestens ein Minimum.*

(iii) *Sei H Fréchet-differenzierbar in $u \in K$ mit der Fréchet-Ableitung $H' : V \rightarrow V'$.*

Wenn u ein Minimum von (2.1) und j konvex ist, dann gilt

$$\langle H'(u), v - u \rangle + j(u) - j(v) \geq 0 \quad (2.2)$$

für alle $v \in K$. Ist H konvex und Ungleichung (2.2) erfüllt, so ist u ein Minimum von (2.1).

Bemerkung 1. Die Ungleichung (2.2) ist eine Variationsungleichung zweiter Art. Für den Fall $j = 0$ ergibt sich die Variationsungleichung erster Art

$$\langle H'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad (2.3)$$

als Spezialfall. Ist weiterhin $K = V$ so reduziert sich die Variationsungleichung zur Variationsgleichung

$$\langle H'(u), v \rangle = 0.$$

In der Praxis ist die Handhabung der konvexen Menge K und des Funktionals j häufig umständlich, so dass eine gemischte Formulierung der Variationsungleichung von Vorteil ist. Dazu werden Lagrange Multiplikatoren eingeführt. Seien dazu $\Phi_i : V \times \Lambda_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1$ gegeben und erfüllen

$$\sup_{\mu_0 \in \Lambda_0} \Phi_0(v, \mu_0) = \begin{cases} 0, & v \in K \\ \infty & v \notin K \end{cases} \quad (2.4)$$

beziehungsweise

$$j(v) = \sup_{\mu_1 \in \Lambda_1} \Phi_1(v, \mu_1) \quad (2.5)$$

für alle $v \in V$, wobei $\Lambda_i \subset U_i'$ und U_i' ein reflexiver Banachraum sei. Damit gilt für das Lagrangefunktional

$$\mathcal{L}(v, \mu_0, \mu_1) := H(v) + \Phi_0(v, \mu_0) + \Phi_1(v, \mu_1)$$

die Gleichung

$$(H + j)(u) = \inf_{v \in V} \sup_{\mu_0 \in \Lambda_0, \mu_1 \in \Lambda_1} \mathcal{L}(v, \mu_0, \mu_1).$$

Also ist u ein Minimum von Ungleichung (2.1), genau dann wenn das Triple $(u, \lambda_0, \lambda_1) \in V \times \Lambda_0 \times \Lambda_1$ ein Sattelpunkt von \mathcal{L} ist,

$$\mathcal{L}(u, \lambda_0, \lambda_1) = \inf_{v \in V} \sup_{\mu_0 \in \Lambda_0, \mu_1 \in \Lambda_1} \mathcal{L}(v, \mu_0, \mu_1). \quad (2.6)$$

Mit der Definition $\Phi_{i, \mu_i}(v) := \Phi_i(v, \mu_i)$ und $\Phi_{i, v}(\mu_i) := \Phi_i(v, \mu_i)$ erhält man durch Anwendung von Theorem 1 direkt

Theorem 2. Seien K, Λ_0 und Λ_1 konvex. Seien zusätzlich $H, \Phi_{0, \lambda_0}, \Phi_{1, \lambda_1}$ in $u \in V$, sowie $\Phi_{0, u}, \Phi_{1, u}$ in $\lambda_0 \in \Lambda_0$ und $\lambda_1 \in \Lambda_1$ Fréchet-differenzierbar.
(i) Ist $(u, \lambda_0, \lambda_1)$ ein Sattelpunkt, so gilt

$$\begin{aligned} & \left(H' + \Phi'_{0, \lambda_0} + \Phi'_{0, \lambda_1} \right) (u) = 0 \\ & \left\langle \Phi'_{0, u}(\lambda_0), \mu_0 - \lambda_0 \right\rangle + \left\langle \Phi'_{1, u}(\lambda_1), \mu_1 - \lambda_1 \right\rangle \leq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

für alle $(\mu_0, \mu_1) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1$.

(ii) Wenn $H, \Phi_{0, \lambda_0}, \Phi_{1, \lambda_1}, -\Phi_{0, u}$ und $-\Phi_{1, u}$ konvex sind und Bedingung (2.7) erfüllt ist, dann ist $(u, \lambda_0, \lambda_1)$ ein Sattelpunkt.

Folgendes Theorem sichert die Existenz eines Sattelpunktes:

Theorem 3. Seien Λ_0 und Λ_1 abgeschlossen und konvex. Weiter gelten folgende Bedingungen:

(i) $-\Phi_{0,v}$ und $-\Phi_{1,v}$ sind konvex und schwach unterhalb halbsteig für alle $v \in V$,

(ii) H, Φ_{0,μ_0} und Φ_{1,μ_1} sind konvex und schwach unterhalb halbsteig für alle $(\mu_0, \mu_1) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1$,

(iii) es existiert ein $(\hat{\mu}_0, \hat{\mu}_1) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1$, so dass $H + \Phi_{0,\hat{\mu}_0} + \Phi_{1,\hat{\mu}_1}$ koerziv ist.

(iv) $\Lambda_0 \times \Lambda_1$ ist beschränkt oder $(\mu_0, \mu_1) \mapsto \sup_{v \in V} -\mathcal{L}(v, \mu_0, \mu_1)$ ist koerziv.

Dann existiert ein Sattelpunkt $(u, \lambda_0, \lambda_1) \in V \times \Lambda_0 \times \Lambda_1$ von Problem 2.6.

Ein Beweis findet sich zum Beispiel in Bemerkung IV.2.1 und Proposition IV.2.3 in [43]. Ein einfaches Kriterium für Bedingung (2.4) ist gegeben durch

Lemma 1. Sei Λ_0 ein Kegel mit einem Punkt im Ursprung und erfülle $\Phi_0 : V \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall \alpha \geq 0, \forall (v, \mu_0) \in V \times \Lambda_0 : \Phi_0(v, \alpha\mu_0) &= \alpha\Phi_0(v, \mu_0) \\ v \in K &\Leftrightarrow \forall \mu_0 \in \Lambda_0 : \Phi_0(v, \mu_0) \leq 0 \end{aligned}$$

dann erfüllt Φ_0 auch 2.3

Für die Modellierung von Kontaktproblemen seien nun

- a eine symmetrische, stetige und V -elliptische Bilinearform,
- l ein lineares Funktional $l \in V'$,
- U_i reflexive Banachräume und $\beta_i \in L(V, U_i)$,
- Λ_1 eine abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge von U_i ,
- $G \subset U_0$ ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit der Spitze im Ursprung und
- ein $g \in U_0$.

Damit können die in dieser Arbeit betrachteten Kontaktprobleme durch Minimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} H(v) &:= \frac{1}{2}a(v, v) - \langle l, v \rangle, \quad j(v) := \sup_{\mu_1 \in \Lambda_1} \langle \mu_1, \beta_1(v) \rangle, \quad (2.8) \\ K &:= \{v \in V \mid g - \beta_0(v) \in G\} \end{aligned}$$

dargestellt werden.

Aufgrund von Theorem 1 ist das Funktional j wohldefiniert. Weiterhin ist H konvex, stetig und deshalb schwach unterhalb halbsteig. Aufgrund der Elliptizität ist H strikt konvex. Die Menge K ist abgeschlossen und konvex und das Funktional j ist konvex und unterhalb halbsteig. Aufgrund der Abgeschlossenheit und Konvexität des Epigraphs $\text{epi}(j)$ (Prop I.2,3 in [43]) und dem Trennungs-Theorem von Hahn-Banach existiert ein Funktional $\phi \in V'$ und ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $j(v) \geq \langle \phi, v \rangle + c$. Damit gilt $(H + j)(v) \geq \gamma \|v\|^2 - (\|l\| + \|\phi\|) \|v\| + c$ und damit ist $H + j$ koerziv. Durch Anwendung von Theorem 1 ergibt sich also die Existenz eines Minimums.

Sei nun G' der duale Kegel zu G , der durch

$$G' := \left\{ \mu_0 \in \mathcal{U}'_0 \mid \forall v \in G : \langle \mu_0, v \rangle \geq 0 \right\}$$

gegeben ist. Und weiterhin sei $\Lambda_0 := G'$. Damit gilt:

Theorem 4. *Das Triple $(u, \lambda_0, \lambda_1) \in V \times \Lambda_0 \times \Lambda_1$ ist ein Sattelpunkt genau dann, wenn für alle $v \in V$ und $(\mu_0, \mu_1) \in \Lambda_0 \times \Lambda_1$ gilt:*

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle l, v \rangle - \langle \mu_0, \beta_0(v) \rangle - \langle \mu_1, \beta_1(v) \rangle \\ \langle \mu_0 - \lambda_0, \beta_0(u) - g \rangle + \langle \mu_1 - \lambda_1, \beta_1(u) \rangle &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Existenz eines Sattelpunktes wird durch folgendes Theorem gesichert:

Theorem 5. *Es existiert ein Sattelpunkt $(u, \lambda_0, \lambda_1) \in V \times \Lambda_0 \times \Lambda_1$, wenn es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass*

$$\alpha \|\mu_0\|_{\mathcal{U}'_0} \leq \sup_{v \in V, \|v\|=1} \langle \mu_0, \beta_0(v) \rangle. \quad (2.10)$$

für alle $\mu_0 \in \mathcal{U}'_0$.

Die Beweise für Theorem (4) und (5) finden sich zum Beispiel in [43].

Bemerkung 2. *Wenn das Bild des Kerns von β_0 unter β_1 dicht in \mathcal{U}'_1 ist, dann sind die Multiplikatoren λ_0 und λ_1 eindeutig.*

Bemerkung 3. *Die Bedingung 2.10 ist erfüllt, wenn β_0 surjektiv ist. Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz vom abgeschlossenen Bild, siehe [108].*

2.2 SOBOLEVRÄUME UND SPUROPERATOREN

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über die relevanten Funktionenräume gegeben. Dazu werden zunächst Sobolevräume auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $d = 2, 3$ eingeführt und entsprechend Normen und Skalarprodukte definiert. Beweise und weiterführende Begriffe finden sich zum Beispiel in [1] und [71]. Weiterhin werden zur Beschreibung von Randbedingungen die Spurräume auf $\partial\Omega$ definiert. Anschließend folgen spezielle Raumdefinitionen, die zur Kopplung der Kontaktprobleme benötigt werden. Für dynamische Kontaktprobleme werden zusätzlich zeitabhängige Sobolevräume benötigt. Diese werden zum Abschluss dieses Abschnitts eingeführt.

Zunächst ist der Raum der quadrat integralen Funktionen gegeben durch $L^2(\Omega) := \mathcal{L}^2(\Omega) / \mathcal{N}(\Omega)$, mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\Omega) &:= \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar, } \int_{\Omega} f^2 dx \leq \infty \right\} \\ \mathcal{N}(\Omega) &:= \left\{ f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} f^2 dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Das L^2 -Skalarprodukt für Funktionen $w, v \in L^2(\Omega)$ ist definiert als

$$(w, v) := (w, v)_{\Omega} := \int_{\Omega} wv dx.$$

Mit diesem Skalarprodukt ist der $L^2(\Omega)$ -Raum ein Hilbertraum und die zugehörige Norm ergibt sich als $\|w\|_{0,\Omega}^2 = (w, w)$.

Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k$. Dann ist die partielle Ableitung nach dem Multiindex α gegeben durch

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\prod_{k=1}^d \partial^{\alpha_k} x_k}$$

Die schwache partielle Ableitung $\partial^\alpha w \in L^2(\Omega)$ einer Funktion $w \in L^2(\Omega)$ ist definiert durch

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : (\partial^\alpha w, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (w, \partial^\alpha \varphi).$$

Dabei ist $C_0^\infty(\Omega)$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf kompakten Trägern. Die schwache Ableitung ist wohldefiniert und stimmt mit der klassischen Ableitung überein, falls $w \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ ist.

Der Sobolevraum $H^k(\Omega)$ besteht aus allen Funktionen $u \in L^2(\Omega)$, deren schwache Ableitung $\partial^\alpha u$ zu jedem Multiindex α der Ordnung $|\alpha| \leq k$ existiert und ebenfalls im Raum $L^2(\Omega)$ liegt. Der Raum $H^k(\Omega)$ ist zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(w, \varphi)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha w, \partial^\alpha \varphi)$$

ein Hilbertraum. Die zugehörige Norm ist definiert durch

$$\|w\|_k^2 := \|w\|_{k,\Omega}^2 := (w, w)_k.$$

Bedingungen, die auf dem Rand des Gebietes Ω vorgeschrieben werden, erfordern eine Einschränkung von Funktionen auf Teilmengen des Randes $\Gamma := \partial\Omega$. Da die Gleichheit von L^2 -Funktionen punktweise nur fast überall erfüllt sein muss, ist eine punktweise Einschränkung nicht sinnvoll. Es existiert jedoch stets genau eine stetige, lineare Abbildung $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, die mit der punktweisen Einschränkung für Funktionen aus $C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ übereinstimmt, siehe [1, Th. 5.22]:

$$\forall u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) : u|_\Gamma = \gamma(u).$$

Die Abbildung wird auch Spuroperator genannt.

Für $\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ist für $H^\tau(\Gamma)$ eine Norm definiert durch

$$\|w\|_\tau = \left(\|w\|_{H^m(\Gamma)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(\partial^\alpha w(x) - \partial^\alpha w(y))^2}{|x-y|^{d-1+2\theta}} d\Gamma_x d\Gamma_y \right)^{\frac{1}{2}},$$

vgl. [1, Thm. 7.48]. Dabei ist $m \in \mathbb{N}$ der ganzzahlige Anteil von $\tau = m + \theta$ und $\theta \in \mathbb{R}_+$ der Rest. In [1, Kapitel 7, s.204 ff] ist weiterhin die allgemeine Definition von Spurräumen $H^\tau(\Gamma)$ auf einem Gebiet Γ gegeben. Diese Spurräume werden zur Beschreibung der Randbedingungen benötigt.

Der Hilbertraum $H^{1/2}(\Gamma)$ liegt dicht in $L^2(\Gamma)$ und der Spuroperator γ ist surjektiv. Es gilt also

$$\gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma).$$

Sein Dualraum wird mit $H^{-1/2}(\Gamma)$ bezeichnet, die Norm des Dualraums mit $\|\cdot\|_{-1/2}$.

Zur Formulierung von Kontaktproblemen benötigt man üblicherweise Funktionen, die auf einem Teil des Randes identisch null sind. Diese lassen sich mittels des Spurooperators definieren. Sei Γ_D eine abgeschlossene Teilmenge mit positivem Maß $\int_{\Gamma_D} d\Gamma > 0$. Dann ist

$$H_D^1(\Omega) := H^1(\Omega, \Gamma_D) := \left\{ f : H^1(\Omega) \mid \gamma|_{\Gamma_D}(f) = 0 \right\}$$

und $H_0^1(\Omega) := H^1(\Omega, \Gamma)$.

Zur Definition der Kontaktbedingung sei angenommen, das der möglichen Kontaktrand Γ_C durch eine offene Menge mit $\Gamma_C \subsetneq \Gamma \setminus \Gamma_D$ gegeben sei. Der topologische Dualraum von des Raums $H^{1/2}(\Gamma_C)$ mit $H^{-1/2}(\Gamma_C)$ bezeichnet und die zugehörigen Normen mit $\|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_C'}$ bzw. $\|w\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C}$. Dann ist der Spuroperator γ_{Γ_C} eingeschränkt auf den Kontaktrand surjektiv, vergleiche [41].

Zusätzlich sei das Randstück Γ_N definiert durch $\Gamma_N := \Gamma \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_C)$. Auf diesem Rand können Neumann-Bedingungen definiert werden.

Für vektorielle Sobolevräume $(H_D^1(\Omega))^d$ können Normal- und Tangentialräume bezüglich des Randes $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_D$ definiert werden, wenn der Rand hinreichend glatt ist. Die Tangentialvektoren zu Γ_1 seien über $t \in L^2(\Gamma_1)^{d \times (d-1)}$ gegeben, so dass $\kappa(x) := (n(x), t(x))$ für $x \in \Gamma_1$ ein orthonormales System ist. Dann ist der Spuroperator in Normalenrichtung

$$\gamma_n : (H_D^1(\Omega))^d \rightarrow H_n^{1/2}(\Gamma_1)$$

definiert durch

$$\gamma_n(v) := n^T \gamma(v)$$

und der Spuroperator in Tangentialrichtung

$$\gamma_t : (H_D^1(\Omega))^d \rightarrow H_t^{1/2}(\Gamma_1)$$

durch

$$\gamma_t(v) := t^T \gamma(v).$$

Mit der Abbildung $\tilde{\gamma} : H^{1/2}(\Gamma_1)^d \rightarrow H_{nt}^{1/2}(\Gamma_1)$ mit $\tilde{\gamma}(w) := \kappa^T w$ gilt

$$H_{nt}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) := H_n^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H_t^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \simeq H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)^d.$$

Weiterführende Informationen sind zum Beispiel in [55] zu finden.

Kontaktprobleme zwischen k Gebieten $\Omega^0, \dots, \Omega^{k-1}$ führen zu einer paarweisen Kopplung auf einem gemeinsamen Randstück $\Gamma_C^{m,n} = \Omega^m \cap \Omega^n$. Dabei ist vorauszusetzen, dass $\dot{\Omega}^m \cap \dot{\Omega}^n = \emptyset$ für alle $0 \leq m, n < k$ mit $m \neq n$ gilt. Zunächst wird durch das kartesische Produkt der Raum

$$\mathbf{H}_D^1 := \left(H_D^1(\Omega^0) \right)^d \times \left(H_D^1(\Omega^1) \right)^d \times \dots \times \left(H_D^1(\Omega^{k-1}) \right)^d$$

eingeführt. Entsprechend ergibt sich das Skalarprodukt

$$(\cdot, \cdot)_{\mathbf{H}_D^1} = \sum_{j=0}^{k-1} (\cdot, \cdot)_{H_D^1(\Omega^k)}$$

und die zugehörige Norm

$$\|v\| := (v, v)_{\mathbf{H}_D^1}^{1/2}.$$

Mit den zuvor definierten Spurräumen erhält man nun den Sprung

$$[\cdot]_{n, \Gamma_C^{m,n}} : \mathbf{H}_D^1 \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_C^{n,m})$$

einer Funktion $u \in \mathbf{H}_D^1$ in Normalenrichtung durch

$$[u]_{n, \Gamma_C^{m,n}} := \gamma_n(u^n) + \gamma_n(u^m).$$

Analog erhält man den Sprung in Tangentialrichtung

$$[\cdot]_{t, \Gamma_C^{m,n}} : \mathbf{H}_D^1 \rightarrow \left(H^{1/2}(\Gamma_C^{n,m})\right)^{d-1}$$

durch

$$[u]_{t, \Gamma_C^{m,n}} := \gamma_t(u^n) + \gamma_t(u^m).$$

Sowie den allgemeinen Fall

$$[\cdot]_{\Gamma_C^{m,n}} : \mathbf{H}_D^1 \rightarrow \left(H^{1/2}(\Gamma_C^{n,m})\right)^d$$

durch

$$[u]_{\Gamma_C^{m,n}} := \gamma(u^n) + \gamma(u^m).$$

Im Folgenden werden die Produkträume bezüglich der Gebiete Ω^l stets mit Fettdruckbuchstaben bezeichnet. Wenn klar ist welche Ränder gemeint sind, wird die Randbezeichnung weggelassen, also $[\cdot]$ statt $[\cdot]_{\Gamma_C^{m,n}}$ geschrieben.

Zeitabhängige Sobolevräume

Für die zeitabhängigen Kontaktprobleme in Kapitel 4 werden noch spezielle Räume benötigt, die im Folgenden vorgestellt werden. Eine weiterführende Übersicht zu diesen Räumen findet sich zum Beispiel in [37] oder [44].

Zeitabhängige Sobolevräume können mittels der Bochner-Integraltheorie studiert werden. Sei dazu zunächst X ein reeller Banachraum mit der Norm $\|\cdot\|$ gegeben, sowie ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann besteht der Raum $L^p(I, X)$ aus allen stark messbaren Funktionen $\varphi : I \rightarrow X$ mit

$$\|\varphi\|_{L^p(I; X)} := \left(\int_I \|\varphi\|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \quad (1 \leq p < \infty),$$

und

$$\|\varphi\|_{L^\infty(I;X)} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|\varphi(t)\| < \infty, \quad (p = \infty).$$

Der Raum $C(I;X)$ ist gegeben durch alle stetigen Funktionen $\varphi : I \rightarrow X$ mit

$$\|\varphi\|_{C(I;X)} := \max_{t \in I} \|\varphi(t)\| < \infty.$$

Die erste schwache Ableitung einer Funktion $u \in L^2(I;X)$ wird mit $\dot{u} \in L^2(I;X)$ bezeichnet, wenn

$$\int_I \dot{u}(t) \phi(t) dt = - \int_I u(t) \dot{\phi}(t) dt$$

für alle skalaren Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty(I)$ gilt. Entsprechend wird die zweite schwache Ableitung \ddot{u} analog definiert. Ist die Funktion u glatt genug, so stimmen schwache und starke Ableitung überein.

Ist X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) , dann ist das Raum-Zeit Skalarprodukt definiert durch

$$((u, v)) := \int_I (u(t), v(t)) dt.$$

Der Sobolevraum $W^{1,p}(I;X)$ besteht aus allen Funktionen $u \in L^p(I;X)$, für die die schwache Ableitung $\dot{u} \in L^p(I;X)$ existiert. Weiterhin ist die zugehörige Norm definiert durch

$$\|u\|_{W^{1,p}(I;X)} := \begin{cases} \left(\int_I \|u\|^p + \|\dot{u}\|^p dt \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} (\|u(t)\| + \|\dot{u}(t)\|) & (p = \infty) \end{cases}.$$

Für den Fall $p = 2$ wird $H^1(I;X) = W^{1,2}(I;X)$ geschrieben.

2.3 EINFÜHRUNG IN DIE ELASTIZITÄTSTHEORIE

Die Kontaktprobleme, die in dieser Arbeit behandelt werden, beschränken sich auf den linear elastischen Fall. In diesem Abschnitt wird eine Einführung in die Begriffe der Elastizität gegeben. Für einen ausführlichen Überblick sei zum Beispiel auf [26] verwiesen.

Die Elastizitätstheorie betrachtet den Zustand von Körpern unter der Einwirkung von Kräften. Insbesondere werden Spannungen und Verzerrungen, die durch die Deformationen erzeugt werden, studiert. In dieser Arbeit werden nur linear elastische Körper unter Annahme kleiner Verzerrungen betrachtet. Dazu wird für die Deformation $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ eines Körpers die Verzerrung über

$$\epsilon_{ij}(u) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

definiert. Die Spannung σ ist in Abhängigkeit der Verzerrungen $\epsilon(u)$ durch

$$\sigma_{ij}(u) := \sum_{k,l} \mathcal{C}_{ijkl} \epsilon(u)_{kl}$$

mit dem Tensor

$$c_{ijkl} := \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{cases} 1-\nu, & i=j=k=l \\ \nu, & i=j, k=l, k \neq i \\ 1-2\nu, & i=k, j=l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Es ergibt sich so das Hooke'sche Materialgesetz

$$\sigma(u) := \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon(u) + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{spur } \epsilon(u) \mathbf{1} \right).$$

Weitere Informationen zur physikalischen Motivation der eingeführten Größen finden sich zum Beispiel in [27] und [80]. Für den Spezialfall dünner Scheiben lässt sich die Dimension des Problems auf den 2-dimensionalen Fall vereinfachen. Dies führt zu den Modellen mit "ebenen Verzerrungszustand", bzw. "ebenen Spannungszustand", siehe dazu z.B. [26, Kapitel VI, Paragraph 4].

Man erhält ein Energiefunktional

$$H(v) := \frac{1}{2} (\sigma(v), \epsilon(v))_0 - (f, v)_0 - (q, v)_{0, \Gamma_N},$$

welches im Rahmen der Kontaktprobleme zu minimieren ist, vgl. Abschnitt 2.1. Dabei ist $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ eine Volumenkraft, die auf den Körper wirkt und $q \in L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^k)$ eine Oberflächenkraft, die auf einem Teilstück Γ_N des Randes definiert ist.

Ist durch n der äußere Normalenvektor auf dem Rand $\partial\Omega$ gegeben, dann ist die Oberflächenspannung σ_n auf einem Randstück $\Gamma \subset \Omega$ definiert als $\sigma_n(u) := \sigma(u) \cdot n$ und σ_{nn} durch $\sigma_{nn}(u) := n^T \sigma(u) n$. Die Tangentialspannung auf dem Rand ist dann definiert durch $\sigma_{nt} := \sigma_n - \sigma_{nn} \cdot n$.

In den Ingenieur-Wissenschaften ist man häufig an äquivalenten Spannungen interessiert, um den Zustand eines Körpers zu charakterisieren. Oft findet dabei die von Mises Spannung σ_v Verwendung, die definiert ist als

$$\sigma_v := \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2}. \quad (2.11)$$

Diese Spannung wird zur Darstellung des Spannungszustands in den numerischen Beispielen verwendet und bei adaptiven Verfahren als zu kontrollierende Größe, siehe Abschnitte 3.3, 4.2, 5.1.3, 5.1.5 und Abschnitt 5.2 Beispiel 15.

2.4 FINITE ELEMENTE METHODEN (FEM)

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die finite Elemente Methode vorgenommen. Der wesentliche Ansatz der FEM besteht darin die unendlich dimensionalen Funktionenräume, in denen eine Lösung der Variationsungleichungen gesucht wird, mittels lokal definierter Polynomräume durch endlich dimensionale Teilräume zu ersetzen und so eine Approximation an die eigentliche Lösung zu finden. Hier werden nur die wesentlichen Punkte kurz aufgeführt. Ausführliche Einführungen finden sich zum Beispiel in [68, 69, 26]. Die hier vorgestellten finite

Elemente Räume werden auch in [91, 22] genutzt. Dementsprechend folgt die Darstellung der dortigen Notation.

Als Ausgangspunkt wählt man eine Vernetzung $\mathbb{T} := \{T_0, \dots, T_n\}$ für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d = 2, 3$ und einer darauf definierten Polynomgradverteilung $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{N}$. Für die Vernetzung \mathbb{T} gelte für stückweise polygonale Ränder stets $\bigcup_{T \in \mathbb{T}} \bar{T} = \bar{\Omega}$. Im Falle von krummlinigen Rändern werden übliche Randapproximationen vorgenommen. So ergeben sich im Falle einer stückweise polygonalen Approximation nichtkonforme Ansätze, siehe zum Beispiel [26, Kapitel 3]. Für Ansätze höherer Ordnung können Transformationen mittels sogenannter “Blendingfunktionen” verwendet werden, siehe dazu zum Beispiel [6, Kapitel 6.3]. Auf diese Weise wird verhindert, dass der Randapproximationsfehler die Konvergenzordnung der finite Elemente Methoden dominiert.

Die Elemente der Vernetzung sind offen und es gilt $T_i \cap T_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Ferner sei die Vernetzung \mathbb{T} stets regulär, das heißt: Die Schnittmenge $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j$ für $j \neq i$ ist entweder leer, oder enthält einen Punkt, eine Kante oder eine Facette von \bar{T}_i . In dieser Arbeit werden für $d = 2$ Vernetzungen aus Rechtecken und für $d = 3$ aus Quadern betrachtet. Die Paarung (\mathbb{T}, p) wird im Folgenden FE-Vernetzung oder FE-Gitter genannt. Die Maschenweite eines Gitters ist definiert durch $h_{\mathbb{T}} := \max_{T \in \mathbb{T}} h_T$, wobei h_T der maximale Durchmesser eines Elements T ist. Ein Folge von Gittern $\{\mathbb{T}_h\}$ heißt nicht degeneriert, wenn ein ρ_0 existiert, so dass

$$\forall h > 0 : \forall T \in \mathbb{T} : r_T \geq \rho_0 h_T$$

mit $r_T := \sup\{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid B_r(x) \subset T, x \in T\}$. Die Gitterfolge $\{\mathbb{T}_h\}$ heißt quasiuniform, wenn es eine Zahl $\rho_1 > 0$ gibt, so dass jedes Element T aus \mathbb{T}_h einen Kreis vom Radius r_T mit

$$r_T \geq \tilde{h}_T / \rho_1$$

enthält, wobei \tilde{h}_T der halbe Durchmesser von T ist.

Lokale Polynomräume werden durch die Transformation des Tensorproduktraumes $S_k^q := \otimes_{i=0}^k S^q$ mit

$$S^q := \{\tilde{v} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{v}(\xi) = \sum_{0 \leq i \leq q} c_i \xi^i, c_i \in \mathbb{R}\}$$

konstruiert. Den endlichdimensionalen Teilraum von $H_D^1(\Omega)$ erhält man mit Hilfe bijektiver und hinreichend glatter, für jedes Gitterelement definierter Abbildungen $\Psi_T : [-1, 1]^k \rightarrow T$ in der folgenden Form:

$$S^p(\mathbb{T}_h) := \left\{ v \in H_D^1(\Omega) \mid \forall T \in \mathbb{T}_h : v|_T \circ \Psi_T \in S_k^{p_T} \right\}. \quad (2.12)$$

Der Raum $S^p(\mathbb{T}_h)$ besteht also aus stetigen und elementweise polynomialen Funktionen vom Grad p , siehe [26, Lemma 2, Kapitel II]. Für die gemischte Formulierung von Kontaktproblemen wird ferner ein adäquater Raum für die duale Variable benötigt, die auf dem Spurraum $H^{1/2}(\Gamma_C)$ definiert ist. Dazu definiert man:

$$M^p(\mathbb{T}_H) := \left\{ \mu \in L_2(\Gamma_C) \mid \forall T \in \mathbb{T}_H : \mu|_T \circ \Psi_T \in S_{k-1}^{q_T} \right\}. \quad (2.13)$$

Hier ist (\mathbb{T}_H, q) eine Vernetzung des Randstücks Γ_C . Damit sind die Funktionen aus $M^q(\mathbb{T}_H)$ elementweise polynomial vom Grad q , aber nicht zwangsläufig stetig.

Die Güte der Approximation hängt offenbar sowohl von der Maschenweite h als auch vom Polynomgrad p . Zur Verbesserung der Approximation kann man nun nur die Maschenweite verringern (h -Methode), nur den Polynomgrad erhöhen (p -Methoden), oder beide Vorgehensweisen kombinieren (hp -Methoden). Diese Arbeit beschränkt sich auf die h -Methode für Vernetzungen (\mathbb{T}, p) mit konstanter Polynomgradverteilung, so dass im Folgenden nur \mathbb{T}_h , bzw. \mathbb{T}_H geschrieben wird, wenn der Polynomgrad p , bzw. q klar ist. Höhere Polynomgrade werden zur Untersuchung der Stabilität bei gemischten Problemen genutzt. Hier spielt die richtige Wahl der diskreten Räume eine wichtige Rolle, da eine Ausbalancierung der Räume zur Erfüllung der diskreten inf-sup-Bedingung analog zu Theorem 5 nötig ist. Adaptive lokale Verfahren mittels der h -Methode werden in Kapitel (5) für verschiedene feste Paarungen (p, q) betrachtet.

In dieser Arbeit werden adaptive Diskretisierungen mit sogenannten hängenden Knoten verwendet. Das heißt ein Element T kann eine Kante mit mehreren Nachbarelementen T_i besitzen. Um für die Funktionenräume $S^p(\mathbb{T}_h)$ weiterhin Stetigkeit zu garantieren, werden die zusätzlichen Freiheitsgrade entsprechend eliminiert. Im Falle von stückweise linearen Funktionen, d.h. $p = 1$ und einem hängenden Knoten auf einer Kante kann das realisiert werden, indem der zusätzliche Freiheitsgrad auf den Mittelwert der Eckfreiheitsgrade gesetzt wird. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf [94] verwiesen.

In diesem Kapitel werden statische Kontaktprobleme vorgestellt. Dabei wird ausgehend von der starken Formulierung, die Variationsungleichung und das zugehörige Sattelpunktproblem vorgestellt. Die Theorie zur Existenz und Eindeutigkeit der kontinuierlichen Probleme ist bekannt und wird in Abschnitt 3.1 zusammengefasst und mit dem allgemeinem Lösungskonzept aus Abschnitt 2.1 verbunden. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 die Diskretisierung der Probleme vorgenommen. Der kritische Punkt in der Diskretisierung ist die Ausbalancierung der gemischten Formulierung. Hierfür wird die Herleitung der diskreten inf-sup-Bedingung, vgl. Theorem 5 in Abschnitt 2.1, für reibungsfreie und reibungsbehaftete Probleme vorgenommen. Zusätzlich wird für das reibungsfreie Kontaktproblem eine a-priori Fehlerabschätzung angegeben und der Lösungsmechanismus für die diskreten Probleme vorgestellt. Das Kapitel schließt mit numerischen Untersuchungen bezüglich der Stabilität und Konvergenz der Probleme.

3.1 MODELLIERUNG VON KONTAKTPROBLEMEN

Die Modellierung von Kontaktproblemen führt auf partielle Differentialgleichungen mit Nebenbedingungen auf dem Kontaktrand. In der starken Formulierung ergibt dies eine punktweise zu erfüllende Bedingung. Diese führt bei der Diskretisierung zu Problemen, da so im Kontaktbereich eine Übereinstimmung der FE-Diskretisierungen gefordert werden müsste. Hier liefert die Sattelpunktformulierung der Variationsungleichung eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen. Denn in dieser Formulierung ist die Bedingung elementweise im Integral zu erfüllen. Dies bietet die Möglichkeit nicht zueinander passende Gitter im Kontaktbereich zu nutzen.

Die Kontaktbedingung führt zu einer paarweisen Kopplung zweier Gebiete Ω^k, Ω^l auf möglichen Kontakträndern Γ_C^k, Γ_C^l . Deshalb kann man sich zur Analyse des Problems auf den Kontakt zwischen zwei Körpern beschränken. Zudem wird zunächst der Fall $\Gamma_C^k = \Gamma_C^l$ betrachtet. Das bedeutet, dass die Gebiete in der Referenzkonfiguration eine gemeinsame Kontaktkante $\Gamma_C = \overline{\Omega^1} \cap \overline{\Omega^2}$ besitzen. Für den Fall eines Abstandes $g \neq 0$ in der Referenzkonfiguration besitzen die Gebiete keine gemeinsame Kante mehr. In Abschnitt 3.1.3 wird dieses Problem durch Einführung einer Funktion $\delta : \Gamma_C^k \rightarrow \Gamma_C^l$, die die Zuordnung zwischen den möglichen Kontakträndern übernimmt, vorgestellt. Eine genaue Analyse dazu ist in [41] zu finden.

Die grundlegende zu erfüllende Nebenbedingung bei Kontaktproblemen ist die Nicht-Durchdringungs-Bedingung. Diese wird bei einem einseitigen Kontaktproblem über die sogenannte "Gap-Funktion" und deren Ableitung beschrieben. Terme höherer Ordnung werden dabei vernachlässigt. Bei Mehrkörperkontaktproblemen tritt anstelle der Gap-Funktion der Sprung der Verschiebungen und deren Ableitungen. Eine ausführliche Beschreibung ist etwa in [71] finden. Im Falle linear elastischen Materials unter Annahme kleiner Deformationen

ist eine Linearisierung der Kontaktbedingung akzeptabel, siehe auch [14, 65, 78, 13, 39].

3.1.1 Reibungsfreier Kontakt

Zunächst wird der reibungsfreie Kontakt zwischen linear elastischen Körpern betrachtet. Dazu seien Gebiete $\Omega^l \subset \mathbb{R}^d$ mit $d = 2, 3$ mit $l = 1, 2$ gegeben. Auf dem Rand $\Gamma^l = \partial\Omega^l$ eines Gebietes seien paarweise disjunkte Teilmengen $\Gamma_D^l, \Gamma_N^l, \Gamma_C^l$ gegeben auf denen Dirichlet-, Neumann- und Kontaktbedingungen definiert sind.

Unter Annahme linear elastischer Deformationen lässt sich die linearisierte Nicht-Durchdringungs-Bedingung für ein Problem mit einem Abstand $g = 0$ in der Referenzkonfiguration durch den in Kapitel 2.2 eingeführten Sprung in Normalenrichtung, angeben (vgl. [14, 65], u.a.):

$$[u]_n = \gamma_n^1(u^1) + \gamma_n^2(u^2) \leq 0. \quad (3.1)$$

Bemerkung 1. Für nichtlineare Materialgesetze, etwa unter Annahme großer Verzerrungen, ist diese Linearisierung nicht mehr angemessen. So erhält man durch das nichtlineare Materialgesetz im Allgemeinen für die Deformationen eine nicht konvexe Menge (siehe z.B. [90] oder [71]). Zum Lösen dieser Problematik bietet sich zum Beispiel eine Regularisierung der Kontaktbedingung gekoppelt mit einem Newtonverfahren für die entstehenden Gleichungen an, siehe etwa [76]. Alternativ finden Optimierungsmethoden Verwendung. So können die nichtlinearen Probleme mit "SQP trust-region" Verfahren gelöst werden. In [90] werden dabei die inneren quadratischen Probleme mittels Multigrid-Methoden gelöst, um ein effizientes Verfahren zu erhalten.

Die starke Formulierung für Kontaktprobleme zwischen deformierbaren elastischen Körpern ist durch eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit Nebenbedingungen gegeben:

Problem 1. Gesucht wird ein $u \in \mathbf{W}$, so dass

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma^l(u^l) &= f^l \text{ in } \Omega^l, \\ u^l &= 0 \text{ auf } \Gamma_D^l, \\ \sigma_n^l(u^l) &= p^l \text{ auf } \Gamma_N^l, \\ \left. \begin{aligned} [u]_n &\leq 0 \\ \sigma_{nn}^l(u^l) &\leq 0 \\ \sigma_{nn}^l [u]_n &= 0 \end{aligned} \right\} &\text{ auf } \Gamma_C^l \end{aligned}$$

gilt.

Dabei ist der Raum $\mathbf{W} := W(\Omega^1) \times W(\Omega^2)$ gegeben durch

$$W(\Omega) := \left\{ v \in \left(H^1(\Omega) \right)^d \mid \sigma(v) \in H(\operatorname{div}, \Omega), \gamma(u) = 0 \text{ auf } \Gamma_D \right\}.$$

Durch partielle Integration erhält man die äquivalente Variationsungleichung 1. Art:

Problem 2. Finde

$$a(u, v - u) \leq f_{\text{ext}}(v - u) \quad \forall v \in \mathbf{K},$$

mit der äußeren Kraft

$$f_{\text{ext}}(v) := \sum_{l=1}^2 (f^l, v^l) + (p^l, v^l)_{\Gamma_N^l}.$$

Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist gegeben durch

$$a(v, w) = \sum_{l=1}^2 \int_{\Omega^l} \sigma(v^l) : \varepsilon(w^l) \, dx, \quad v, w \in \mathbf{H}_D^1$$

und die konvexe Menge der zulässigen Verschiebungen ist

$$\mathbf{K} = \left\{ v \in \mathbf{H}_D^1 \mid [v]_n \leq 0 \right\}.$$

Dabei ist eine Lösung der Variationsungleichung mit genügender Regularität auch Lösung der starken Formulierung, siehe dazu zum Beispiel [56]. Gemäß Kapitel 2.1 kann diese Variationsungleichung in eine gemischte Formulierung überführt werden, in der der Lagrange-multiplikator λ die Rolle der Kontaktkräfte in Normalenrichtung übernimmt. Die Bilinearform, die die Kontaktnebenbedingung beinhaltet, ist gegeben durch

$$b(v, w) : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C^1) \times \mathbf{H}_D^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$b(v, w) = \langle v, [w]_n \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.$$

Damit erhält man mit $\Lambda_n := H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C^1)$ das folgende Problem:

Problem 3. Finde $(u, \lambda) \in \mathbf{H}_D^1 \times \Lambda_n$, so dass

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(\lambda, v) &= f_{\text{ext}}(v) & v \in \mathbf{H}_D^1 \\ b(\mu - \lambda, u) &\leq 0 & \mu \in \Lambda_n \end{aligned}$$

Damit sind mit der Notation aus Kapitel 2.1 die Funktionale $\Phi_0(v, \mu) := b(\mu, v)$ und $\Phi_1 := 0$ gegeben und das Sattelpunktproblem hat somit eine eindeutige Lösung. Im Allgemeinen ist das Multiplikatorfunktional durch $\Phi_0 = \langle v, [w]_n - g \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ gegeben. In diesem Abschnitt ist jedoch immer $g = 0$. Wenn (u, λ) ein Sattelpunkt ist, so ist die erste Komponente u Lösung der Variationsungleichung. Grundlegend hierfür ist die Surjektivität des Sprungoperators $[\cdot]_n$. Diese ist für genügend glatte Gebiete, mittels des Spuroperator γ_n gegeben, vgl. [71]. Für eine genaue Herleitung sei ferner auf [56, Chapter III, Theorem 9.4] verwiesen.

3.1.2 Reibungsbehafteter Kontakt

Reibungsbehaftete Kontaktprobleme erfordern eine zusätzliche Nebenbedingung an die Tangentialkräfte im Kontaktbereich. Diese Nebenbedingung führt auf eine Variationsungleichung 2. Art der Form 2.2 aus Kapitel 2.1. Als Grundlage der Modellierung von Reibung wird das Reibgesetz nach Tresca verwendet, welches lautet:

Reibungsbedingungen werden modelliert unter der Annahme, dass kein Gleiten auftritt, solange der Betrag der Tangentialkräfte unter einem kritischen

Wert liegt, der durch eine Funktion s gegeben ist. Sobald dieser kritische Wert erreicht wird, tritt Gleiten in Richtung der Tangentialkräfte auf.

Bei Problemen in 3D erhält man in der Reibbedingung Tangentialkräfte in 2 Komponenten, dann ist statt des Betrages die euklidische Norm, hier auch mit $|\cdot|$ bezeichnet, zu wählen. Die starke Formulierung des reibungsbehafteten Kontaktproblems lautet:

Problem 4. Finde die Funktion $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ mit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma^l(\mathbf{u}^l) &= \mathbf{f}^l \text{ in } \Omega^l, \\ \mathbf{u}^l &= 0 \text{ auf } \Gamma_D^l, \\ \sigma_n^l(\mathbf{u}^l) &= q^l \text{ auf } \Gamma_N^l, \end{aligned}$$

und der Kontakt-Nebenbedingung

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{u}]_n &\leq 0 \\ \sigma_{nn}^l(\mathbf{u}^l) &\leq 0 \\ \sigma_{nn}^l[\mathbf{u}]_n &= 0 \\ |\sigma_{nt}(\mathbf{u})| &\leq s \\ |\sigma_{nt}(\mathbf{u})| < s &\Rightarrow [\mathbf{u}]_t = 0 \\ |\sigma_{nt}(\mathbf{u})| = s &\Rightarrow \exists \zeta \in \mathbb{R}_{\geq 0} : [\mathbf{u}]_t = -\zeta \sigma_{nt}(\mathbf{u}) \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Gamma_C.$$

Dieses Problem ist äquivalent zu der Variationsungleichung zweiter Art

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} s (|[v]_t| - |[u]_t|) \, d\Gamma \leq \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$. Das Funktional $j : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch $j(\mathbf{v}) = (s, |[v]_t|)_{0, \Gamma_C}$, definiert und kann durch

$$j(\mathbf{v}) = \sup_{\mu_t \in \Lambda_t} (\mu_t, [v]_t)_{0, \Gamma_C}$$

mit der konvexen Teilmenge Λ_t

$$\Lambda_t := \left\{ \mu \in \left(L^2(\Gamma_C) \right)^{d-1} \mid |\mu_t| \leq s \right\}$$

beschrieben werden. Mit diesen Definitionen ergibt sich nach Kapitel 2.1 das Sattelpunktproblem:

Problem 5. Finde $(\mathbf{u}, \lambda_n, \lambda_t) \in \mathbf{H}_D^1 \times \Lambda_n \times \Lambda_t$, so dass

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_D^1 : \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}_n(\lambda_n, \mathbf{v}) + \mathbf{b}_t(\lambda_t, \mathbf{v}) &= \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{v}) \\ \forall (\mu_n, \mu_t) \in \Lambda_n \times \Lambda_t : \\ \mathbf{b}_n(\mu_n - \lambda_n, \mathbf{u}) + \mathbf{b}_t(\mu_t - \lambda_t, \mathbf{u}) &\leq 0 \end{aligned}$$

gilt.

Die Bilinearform b_n ist die Bilinearform aus Problem 3 und die Bilinearform b_t ist definiert als

$$b_t(\mu_t, v) := (\mu_t, [v]_t)_{0, \Gamma_C}.$$

Gemäß Abschnitt 2.1 hat mit $\Phi_0(v, \mu_n) := b_n(\mu_n, v)$ und $\Phi_1(v, \mu_t) := b_t(\mu_t, v)$ das Problem hat eine eindeutige Lösung. Dies folgt aus der Surjektivität der Sprungoperatoren $[\cdot]_n$ und $[\cdot]_t$, siehe Abschnitt 2.2.

Couloumb Reibung

In der Praxis findet häufiger das Reibgesetz nach Coulomb Verwendung. Dieses ergibt sich als Spezialfall der Tresca-Reibung, indem man die Funktion s als Betrag der Normalkräfte multipliziert mit einem Reibungskoeffizienten ξ wählt. Damit erhält man die Beziehung

$$s := \xi \cdot |\sigma_{nn}(u)|.$$

Zur Lösung dieses erweiterten Problems kann eine Fixpunktiteration genutzt werden, siehe dazu auch [20, 57, 58]. Die Fixpunktiteration wird in Abschnitt 3.2.6, Bemerkung 11 erläutert.

3.1.3 *Kontaktprobleme mit Abstand in der Referenzkonfiguration*

Ist in der Referenzkonfiguration ein Abstand g zwischen den Körpern gegeben, kann man die obige Formulierung nicht verwenden, da der Schnitt der Abschlüsse der Gebiete leer ist. Stattdessen führt man eine genügend glatte Bijektion $\delta : \Gamma_C^1 \rightarrow \Gamma_C^2$ ein. Diese Funktion übernimmt die Zuordnung $\delta(x^1) = x^2$ für $x^1 \in \Gamma_C^1$ und $x^2 \in \Gamma_C^2$, wenn im deformierten Zustand $x^1 + u^1(x^1) = x^2 + u^2(x^2)$ gilt. In [41] wird dieses Problem analysiert und gezeigt, dass für Gebiete mit genügend glattem Rand die folgende Definition eine gute Approximation an die geometrische Nichtdurchdringungsbedingung darstellt.

Zunächst wird ein Normalenvektor auf dem Kontaktrand mittels

$$n_\delta := \begin{cases} \frac{\delta(x) - x}{|\delta(x) - x|} & , \text{wenn } x \neq \delta(x) \\ n^1(x) = -n^2(x) & , \text{wenn } x = \delta(x) \end{cases}$$

definiert. Damit ergibt sich für die Nichtdurchdringungsbedingung 3.1 für $x \in \Gamma_C^1$:

$$[u]_{n, \delta}(x) = u^1(x) \cdot n_\delta(x) - u^2(\delta(x)) \cdot n_\delta(x) \leq g. \tag{3.2}$$

Die Funktion g gibt dabei den Abstand der Kontaktländer durch

$$\Gamma_C^1 \ni x \rightarrow g(x) = |x - \delta(x)| \in \mathbb{R}$$

an.

Bemerkung 4. Im Vergleich zur Definition der Nichtdurchdringungsbedingung (3.1) aus Abschnitt 3.1.1 fällt auf, dass die Addition durch eine Subtraktion ersetzt wurde. Das folgt jedoch direkt aus der Definition der äußeren Normalenvektoren. In (3.1) gilt $n^2 = -n^1$, entsprechend ist in der Gleichung (3.2) der Normalenvektor n_δ einmal mit positiven und einmal mit negativen Vorzeichen zu verwenden.

Mit dieser Notation ergibt sich die starke Formulierung des reibungsfreien Kontaktproblems analog zu Problem 1 durch

Problem 6. Finde $u \in \mathbf{W}$, so dass

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^1) &= \mathbf{f}^1 && \text{in } \Omega^1 \\ \mathbf{u}^1 &= 0 && \text{auf } \Gamma_D^1, \\ \sigma_n(\mathbf{u}^1) &= \mathbf{p}^1 && \text{auf } \Gamma_N^1, \\ \sigma_{n_\delta}(\mathbf{u}^1) &= -\Theta^* \sigma_{n_\delta}(\mathbf{u}^2) && \text{auf } \Gamma_C^1, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_{n_\delta n_\delta}(\mathbf{u}^1) &\leq 0 \\ [\mathbf{u}]_{n,\delta} &\leq g \\ \sigma_{n_\delta n_\delta}(\mathbf{u}^1) \cdot ([\mathbf{u}]_{n,\delta} - g) &= 0 \end{aligned} \right\} && \text{auf } \Gamma_C^1 \end{aligned}$$

gilt. Die Spannungen in Normalenrichtung σ_{n_δ} sind bezüglich des Normalenvektors n_δ definiert.

Die vierte Zeile von Problem 6 besagt, dass die Kontaktkräfte auf dem Rand übereinstimmen sollen. Dazu sei der Transferoperator $\Theta : L^2(\Gamma_C^2) \rightarrow L^2(\Gamma_C^1)$ definiert durch $\Theta(v^2)(x^1) := v^2(\delta(x^1))$ und Θ^* sei der zu Θ adjungierte Operator. Dann ergibt sich die 4. Zeile

$$\sigma_{n_\delta}(\mathbf{u}^1) = -\Theta^* \sigma_{n_\delta}(\mathbf{u}^2)$$

aus der Gleichheit der Kontaktkräfte, die durch

$$\int_{\Gamma_{C_1}} \sigma_{n_\delta}(\mathbf{u}^1(x)) \cdot \Theta(v^2)(x^1) \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_{C_2}} \sigma_{n_\delta}(\mathbf{u}^2(x)) \cdot v^2(x^1) \, d\Gamma \quad \forall v^2 \in H^{1/2}(\Gamma_{C_2})$$

definiert ist, vgl. Eck [41].

Analog zu Abschnitt 3.1.1 ergibt sich so die variationelle Formulierung und die gemischte Formulierung durch

Problem 7. Finde $(u, \lambda) \in \mathbf{H}_D^1 \times H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$, so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(u, v) + \mathbf{b}_{n_\delta}(\lambda, v) &= \langle \mathbf{f}_{\text{ext}}, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{H}_D^1 \\ \mathbf{b}_{n_\delta}(\mu - \lambda, u) &\leq \langle \mu - \lambda, g \rangle \quad \forall \mu \in H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \end{aligned}$$

gilt.

Dabei ist \mathbf{b}_{n_δ} nun definiert über den hier eingeführten Sprung als

$$\mathbf{b}_{n_\delta}(\mu, v) := \langle \mu, [v]_{n,\delta} \rangle.$$

Bemerkung 5. Es bleibt anzumerken, dass die Funktion δ in der Praxis unbekannt ist. Um das Problem diskretisieren zu können, ist eine geeignete Approximation der Funktion nötig. Unter Annahme linear elastischer Deformationen kann hier eine lineare Projektion $P : \Gamma_{C_1} \rightarrow \Gamma_{C_2}$ in Normalenrichtung verwendet werden:

$$\Gamma_{C_2} \ni x_2 = P(x_1) := x_1 + n^1(x_1) * a,$$

dabei ist a der Abstand zwischen x_1 und x_2 . Für die praktische Realisierung der Abstandsberechnung siehe auch Anhang A.1.

3.2 DISKRETISIERUNG VON KONTAKTPROBLEMEN

Im vorherigen Kapitel wurde die Modellierung von statischen reibungsfreien und reibungsbehafteten Kontaktproblemen vorgestellt. Die Diskretisierung wird mittels der in Kapitel (2.4) vorgestellten Finite Elemente Methode diskretisiert. Dafür wird die gemischte Formulierung aus Problem (3), beziehungsweise Problem (5) genutzt. Der kritische Punkt bei der Diskretisierung von gemischten Problemen ist die Erfüllung der inf-sup-Bedingung (Theorem 5, Kapitel 2.1) für die gewählten endlichdimensionalen Ansatzräume. In den folgenden Abschnitten werden zunächst die gemischten diskreten Probleme vorgestellt. Anschließend wird die Stabilität der Probleme untersucht. Grundlegend ist hier eine Ausbalancierung der Räume für die primale und duale Variable. Abschließend wird eine a-priori Fehlerabschätzung für das reibungsfreie Kontaktproblem vorgenommen.

In dieser Arbeit wird die Stabilität der gemischten Formulierung durch eine geeignete Wahl der Ansatzräume realisiert, dadurch erhält man keine zusätzlichen Bedingungen an den Kontaktbereich, wie sie etwa bei Diskretisierungen mittels des Mortar-Ansatzes auftreten, siehe[14]. Auch ist es nicht nötig das Problem über zusätzliche Terme zu stabilisieren, wie es zum Beispiel in [60] vorgeschlagen wird. Der Diskretisierungsansatz wurde für das Signorini Problem in [59, 55] vorgestellt. In [94, 91] wurde die Erweiterung auf Ansatzräume höherer Ordnung vorgenommen. Für Ansatzräume niedriger Ordnung wurde in [78] die Diskretisierung auf Zweikörperkontaktprobleme angewandt. Hier wird nun die Erweiterung auf das allgemeine Kontaktproblem und mit Diskretisierungen höherer Ordnung vorgenommen.

Für Ansatzräume höherer Ordnung ist insbesondere die Wahl eines geeigneten Raums für den Lagrangemultiplikator zu diskutieren. So ist für stückweise konstante oder lineare Funktionen die geforderte Positivität $\lambda \geq 0$ einfach zu erfüllen. Für Ansätze höherer Ordnung ist das jedoch nicht mehr der Fall. Stattdessen kann man einen nichtkonformen Ansatz wählen, der in [22] vorgestellt wird. Hier wird die Positivität nur punktweise in genügend vielen Gausspunkten gefordert, so dass man ein anwendbare Problemformulierung erhält. Der nichtkonforme Ansatz wird in Abschnitt 3.2.3 behandelt.

3.2.1 Diskretisierung

Seien im Folgenden der endlich dimensionale Teilraum $V_h \subset \mathbf{H}_D^1$ definiert durch

$$V_h := \left(S^p \left(\mathbb{T}_h^0 \right) \right)^d \times \left(S^p \left(\mathbb{T}_h^1 \right) \right)^d \times \dots \times \left(S^p \left(\mathbb{T}_h^{k-1} \right) \right)^d,$$

wobei \mathbb{T}_h^l eine Vernetzung des Gebietes Ω^l ist.

Weiterhin sind die endlich dimensional Teilmengen

$$\Lambda_{n,H} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \text{ und } \Lambda_{t,H} \subset \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \right)^{d-1} \text{ gegeben durch}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,H} &:= M_+^{qn}(\mathbb{T}_{H,n}) \\ \Lambda_{t,H} &:= \left\{ \mu \in \left(M^{qt}(\mathbb{T}_{H,t}) \right)^{d-1} \mid \|\mu\| \leq s \right\} \end{aligned}$$

mit den Vernetzungen $\mathbb{T}_{n,H}$ und $\mathbb{T}_{t,H}$ des Kontaktrandes Γ_C . Zunächst können unterschiedliche Tringulierungen und Polynomgrade für die

Mengen $\Lambda_{n,H}$ und $\Lambda_{t,H}$ gewählt werden. In der Praxis ist eine einheitliche Wahl einfacher zu realisieren, insbesondere bei der Erweiterung zu Kontaktproblemen mit Coulomb-Reibung. Mit $M_+^q(\mathbb{T}_{\cdot,H})$ wird der positive Halbraum von $M^q(\mathbb{T}_{\cdot,H})$ bezeichnet. Damit ergeben sich die diskreten gemischten Probleme analog zu Problem 3, bzw. Problem 5 durch

Problem 8. (Diskretes reibungsfreies Kontaktproblem)

Finde $(u_h, \lambda_H) \in \mathbf{V}_h \times \Lambda_{n,H}$, so daß

$$\begin{aligned} a(u_h, v) + b_n(\lambda_H, v) &= f_{\text{ext}}(v) \quad v \in \mathbf{V}_h \\ b_n(\mu - \lambda_H, u_h) &\leq 0 \quad \mu \in \Lambda_{n,H}. \end{aligned}$$

Dabei sind a , b_n und f_{ext} analog zu 3 definiert.

Problem 9. (Diskretes reibungsbehaftetes Kontaktproblem)

Finde $(u_h, \lambda_{n,H}, \lambda_{t,H}) \in \mathbf{V}_h \times \Lambda_{n,H} \times \Lambda_{t,H}$, so dass

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbf{V}_h : \\ a(u_h, v) + b_n(\lambda_{n,H}, v) + b_t(\lambda_{t,H}, v) &= f_{\text{ext}}(v) \\ \forall (\mu_n, \mu_t) \in \Lambda_{n,H} \times \Lambda_{t,H} : \\ b_n(\mu_n - \lambda_{n,H}, u_h) + b_t(\mu_t - \lambda_{t,H}, u_h) &\leq 0. \end{aligned}$$

Dabei ist nach Kapitel 2.1 für beide Probleme die erste Komponente u_h das eindeutige Minimum des Minimierungsproblem $(H + j_{hH})(u_h) = \min_{v_h \in K_{hH}} (H + j_{hH})(v_h)$ mit

$$K_{hH} := \{v_h \in V_h \mid \forall \mu_{n,H} \in \Lambda_{n,H} : b_n(v_{hH}, \mu_{n,H}) \leq 0\}$$

und $j_{hH} := \sup_{\mu_{t,H} \in \Lambda_{t,H}} b_t(v_h, \mu_{t,H})$, bzw. $j_{hH} = 0$ für reibungsfreie Kontaktprobleme.

Es existiert ein diskreter Sattelpunkt, wenn eine diskrete inf-sup-Bedingung für die Familie $(V_h, M_{n,H}, M_{t,H})$ von Finite-Elemente-Räumen analog zu Theorem 5 aus Kapitel 2.1 erfüllt ist.

Theorem 6. Es existiert ein Sattelpunkt $(u_h, \lambda_{n,H}) \in V_h \times \Lambda_{n,H}$, wenn es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ unabhängig von h^l, H und p^l, q gibt, so dass

$$\alpha \|\mu_H\|_{-1/2} \leq \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|=1} b_n(\mu_H, v_h),$$

für alle $\mu_H \in \Lambda_{n,H}$ erfüllt ist.

Für das reibungsbehaftete Kontaktproblem gilt das Theorem:

Theorem 7. Es existiert ein Sattelpunkt $(u_h, \lambda_{n,H}, \lambda_{t,H}) \in V_h \times \Lambda_{n,H} \times \Lambda_{t,H}$, wenn es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ unabhängig von h^l, H und p^l, q gibt, so dass

$$\alpha \left\| (\mu_{n,H}, \mu_{t,H}) \right\|_{-1/2} \leq \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|=1} (b_n(\mu_{n,H}, v_h) + b_t(\mu_{t,H}, v_h)),$$

für alle $(\mu_{n,H}, \mu_{t,H}) \in \Lambda_{n,H} \times \Lambda_{t,H}$ erfüllt ist.

Der Beweis zu Theorem 6 und Theorem 7 findet sich zum Beispiel in [71, Lemma 3.2].

Die Norm für $(\mu_{n,H}, \mu_{t,H}) \in \Lambda_{n,H} \times \Lambda_{t,H}$ ist definiert über

$$\left\| (\mu_{n,H}, \mu_{t,H}) \right\|_{-1/2} := \left(\|\mu_{n,H}\|_{-1/2}^2 + \|\mu_{t,H}\|_{-1/2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In Abschnitt (3.2.4) wird die Existenz dieser Bedingung für die beschriebenen endlich dimensionalen Ansatzräume hergeleitet.

Bemerkung 6. Der Sattelpunkt in Theorem 7 ist nach Bemerkung 2 aus Abschnitt 2.1 eindeutig mit $\beta_0 := [\cdot]_n$ und $\beta_1 := [\cdot]_t$.

3.2.2 Kontaktprobleme mit Abstand in der Referenzkonfiguration

Bei Kontaktproblemen mit einem Abstand in der Referenzkonfiguration ergibt sich analog zu Problem 8 mit den Definitionen aus Abschnitt 3.1.3 das folgende diskrete Problem.

Problem 10. (Diskretes Kontaktproblem mit Abstand g).

Finde $(u_h, \lambda_H) \in V_h \times \Lambda_{n,H}$, so dass

$$\begin{aligned} a(u_h, v) + b_{n_\delta}(\lambda_H, v) &= f_{\text{ext}}(v) \quad v \in V_h \\ b_{n_\delta}(\mu - \lambda_H, u_h) &\leq \langle \mu - \lambda_H, g \rangle \quad \mu \in \Lambda_{n,H}. \end{aligned}$$

Dabei sind a , b_{n_δ} und f_{ext} analog zu Problem 7 definiert. Das reibungsbehaftete Problem ergibt sich analog. Es ist anzumerken, dass die Definition von n_δ und b_{n_δ} für das diskrete Problem nur bedingt nutzbar ist, da die Funktion δ im Allgemeinen nicht bekannt ist, vgl. Bemerkung 5. In dieser Arbeit wird die Zuordnung der Kontaktränder über eine Projektion in Normalen-Richtung realisiert. Siehe dazu auch Anhang A.1.

3.2.3 Diskretisierungen höherer Ordnung

Wie in der Einleitung des Diskretisierungskapitels erwähnt, treten bei Diskretisierungen höherer Ordnung für den Lagrangemultiplikator in der Praxis Probleme auf. Die in Abschnitt 3.2.1 eingeführte zulässige Menge für den Lagrangemultiplikator $\Lambda_{n,H} = M_+^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n})$, ist zwar eine richtige Wahl zur Diskretisierung der kontinuierlichen Probleme. Allerdings ist es in der Praxis schwierig für Funktionen $\mu \in M^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n})$, die Bedingung $\mu(x) \geq 0$ für alle $x \in T$, $T \in \mathbb{T}_{H,n}$ zu erfüllen, wenn $q_n \geq 2$ ist. Im Folgenden wird hier der in [22] vorgestellte nichtkonforme Ansatz erläutert. Die numerischen Untersuchungen für Ansätze mit $q \geq 2$ erfolgen dementsprechend mit der in diesem Abschnitt vorgestellten Diskretisierung.

In der gemischten Formulierung der Probleme wird für $q \geq 2$ die folgende Menge eingeführt:

$$\widetilde{M}_+^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n}) := \left\{ \mu \in L^2(\Gamma_C) \mid \forall T \in \mathbb{T}_{H,n} : \forall x \in \mathcal{C}_q : \mu|_T(\Psi_T(x)) \geq 0 \right\}.$$

Dabei ist $\mathcal{C}_q \subset [-1, 1]^{d-1}$ die endliche Teilmenge der $(q+1)^{d-1}$ Gausquadraturpunkte. Dann wird für die gemischten Probleme 8,9 und 10 die zulässige Menge durch $\widetilde{\Lambda}_{n,H} := \widetilde{M}_+^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n})$ definiert. Auf diese Weise wird ein nichtkonformer Ansatz betrachtet, in dem die Positivität nur punktweise gefordert wird. Da Polynome \hat{P} vom Grad $2q+1$ auf $[-1, 1]^{k-1}$ durch die zugehörige Quadraturformel exakt integriert werden können, gilt für die polynomialen Ansatzfunktionen $\mu \in \widetilde{M}_+^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n})$ auf jedem Element $T \in \mathbb{T}_{H,n}$

$$\int_T \mu(x) dx = \sum_{\hat{x} \in \mathcal{C}_q} \beta_{\hat{x}} \mu(\Psi_T(\hat{x}))$$

mit $\beta_{\hat{x}} := \alpha_{\hat{x}} \left| \det \nabla \Psi_T(\hat{x})^T \nabla \Psi_T(\hat{x}) \right| \geq 0$, $\hat{x} \in \mathcal{C}_q$.

Dabei sind $\alpha_{\hat{x}}$ positive Gewichte, für die $\int_{[-1,1]^{k-1}} \hat{P}(\hat{x}) \, d\hat{x} = \sum_{\hat{x} \in \mathcal{C}_q} \alpha_{\hat{x}} \hat{P}(\hat{x})$ gilt. Über diese Eigenschaft lässt sich die Konvergenz des nicht konformen Ansatz zeigen. Für genaue Details siehe [22].

Bemerkung 2. Die Definition für den zulässigen Bereich für reibungsbehafteten Kontakt $\tilde{\Lambda}_{t,H}$ erfolgt analog:

$$\tilde{\Lambda}_{t,H} := \left\{ \mu \in (M^{q_t}(\mathbb{T}_{H,t}))^{d-1} \mid \forall T \in \mathbb{T}_{H,n} : \forall x \in \mathcal{C}_q : |\mu(x)| \leq s \right\}$$

Die numerische Realisierung des nichtkonformen Ansatzes führt zu zusätzlichen Nebenbedingungen für jeden Gausspunkt $\hat{x} \in \mathcal{C}_q$, die sicherstellen, dass der Lagrangemultiplikator λ im zulässigen Bereich $\tilde{M}_+^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n})$ liegt. Diese Methode wurde bereits in [94] für einseitige Kontaktproblem untersucht und wird in [91] für Mehrkörperkontaktprobleme vorgestellt. In Abschnitt 3.2.6 wird der Lösungsmechanismus auch für diesen Ansatz erläutert.

3.2.4 Stabilität

In diesem Abschnitt werden Kriterien für die Stabilität der diskreten Probleme 8 und 9 hergeleitet. Die Beweise folgen dabei im Wesentlichen der Argumentation aus [56] und [91] für Signorini Probleme mit und ohne Reibung, sowie [22] für Mehrkörperkontaktprobleme ohne Reibung. Die Untersuchung der Stabilität für Mehrkörperkontaktprobleme erfordert eine Kopplung des Spuraumes mit dem Produktraum \mathbf{H}_D^1 , bzw. \mathbf{V}_h . Die Stabilität wird für die Funktionale b_n, b_t einzeln gezeigt. Aus der Stabilität für b_n folgt die Eindeutigkeit des diskreten reibungsfreien Kontaktproblems. Aus der Stabilität bezüglich b_n und b_t ergibt sich die Eindeutigkeit des reibungsbehafteten Kontaktproblems. Die FE-Diskretisierungen (\mathbb{T}_h^1, p^1) auf Ω^1 und (\mathbb{T}_H, q) auf Γ_C seien quasiuniform mit konstanten Polynomgradverteilungen p^1, p^2 und q .

Zunächst seien die Interpolationsräume $H^{1+\theta}(\Omega^1)$ und $H^{-1/2+\theta}(\Gamma_C^1)$ definiert durch

$$H^{1+\theta}(\Omega^1) := [H^1(\Omega^1), H^2(\Omega^1)]_{\theta,2},$$

sowie

$$H^{-1/2+\theta}(\Gamma_C) := [H^{-1/2}(\Gamma_C^1), H^{1/2}(\Gamma_C)]_{\theta,2}.$$

Die zugehörigen Normen werden mit $\|\cdot\|_{1+\theta, \Omega^1}$ und $\|\cdot\|_{-1/2+\theta, \Gamma_C^1}$ bezeichnet, wobei $0 < \theta \leq 1$ ist, siehe dazu auch [102, 79]. Weiterhin gilt:

Lemma 2. Sei $\vartheta_m : \mathbf{H}_D^1 \rightarrow (H^{1/2}(\Gamma_C))^m$, mit $1 \leq m \leq d$ eine stetige, surjektive Funktion. Dann gilt

$$C_1 \inf_{v \in \mathbf{H}_D^1, \vartheta_m(v) = w \in (H^{1/2}(\Gamma_C))^m} \|v\| \leq \|w\|_{1/2, \Gamma_C}$$

für eine Konstante $C_1 > 0$.

Beweis. Die Funktion

$$\hat{\vartheta}_m : \mathbf{H}_D^1 / \ker \vartheta_m \rightarrow \left(H^{1/2}(\Gamma_C) \right)^l$$

mit $\hat{\vartheta}_m([v]) := \vartheta_m(v)$ und dem Repräsentanten $[v] := v + \ker \vartheta_1$ ist bijektiv und stetig. Da \mathbf{H}_D^1 und $\left(H^{1/2}(\Gamma_C) \right)^m$ Banachräume sind, ist auch die Inverse $\tilde{\vartheta}_m^{-1}$ stetig.

Sei

$$\|\tilde{\vartheta}_m^{-1}\| := \sup_{w \in H^{1/2}(\Gamma_C), \|w\|_{1/2, \Gamma_C} = 1} \|\tilde{\vartheta}_m^{-1}(w)\|$$

mit $\| [v] \| := \inf_{w \in \ker \vartheta_m} \|v + w\|$ für $[v] \in \mathbf{H}_D^1 / \ker \vartheta_m$ und sei

$$\mathbf{V} := \left\{ v \in \mathbf{H}_D^1 \mid \|v\| \leq \|\tilde{\vartheta}_m^{-1}\| \|\vartheta_m(v)\|_{1/2, \Gamma_C} \right\}.$$

Die Menge \mathbf{V} ist nicht leer, denn es gilt:

Sei $w \in \left(H^{1/2}(\Gamma_C) \right)^m$ und $v \in \mathbf{H}_D^1$ mit $\tilde{\vartheta}_m^{-1}(w) = [v]$. Wenn $\bar{z} \in \ker \vartheta_m$ ist, so dass $\|v - \bar{z}\| = \inf_{z \in \ker \vartheta_m} \|v - z\|$ und $v^* := v - \bar{z}$ ist, dann folgt

$$\vartheta_m(v^*) = \vartheta_m(v - \bar{z}) = \vartheta_m(v) = \hat{\vartheta}_m([v]) = w. \quad (3.3)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|v^*\| &= \inf_{z \in \ker \vartheta_1} \|v - z\| \\ &= \|\hat{\vartheta}_m^{-1}(w)\| \\ &\leq \|\hat{\vartheta}_m^{-1}\| \|w\|_{1/2, \Gamma_C} \\ &= \|\hat{\vartheta}_m^{-1}\| \|\vartheta_1(v^*)\|_{1/2, \Gamma_C}, \end{aligned}$$

woraus $v^* \in \mathbf{V}$ folgt.

Weiterhin existiert ein $v^* \in \mathbf{V}$ für jedes $w \in \left(H^{1/2}(\Gamma_C) \right)^m$, so dass (3.3) erfüllt ist, also ist $\vartheta_m(\mathbf{V}) = \left(H^{1/2}(\Gamma_C) \right)^m$.

Also gilt

$$\inf_{v \in \mathbf{H}_D^1, \vartheta_m(v) = w} \|v\| \leq \|v^*\| \leq \|\hat{\vartheta}_m^{-1}\| \|\vartheta_m(v)\|_{1/2, \Gamma_C}.$$

Die Annahme folgt mit $C_1 := \|\hat{\vartheta}_m^{-1}\|^{-1}$. \square

Die Sprungoperatoren $[\cdot], [\cdot]_n, [\cdot]_t$ sind surjektiv. Dies folgt aus der Surjektivität der Spurooperatoren und der Definition des Sprungs, vgl. Abschnitt 2.2. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2 für diese Operatoren erfüllt. Im Folgenden sei ϑ_m wie in Lemma 2 definiert.

Lemma 3. Für eine beliebige Funktion $\mu \in \left(H^{-1/2}(\Gamma_C^1) \right)^l$, existiert eine Funktion $u^\mu = (u^{\mu,1}, u^{\mu,2}) \in \mathbf{H}_D^1$, so dass

$$\sum_{l=1,2} \left(\epsilon(u^{\mu,l}), \epsilon(v^l) \right)_0 + (u^{\mu,l}, v^l)_0 = \langle \mu, \vartheta_m(v) \rangle \quad (3.4)$$

für alle $v = (v^1, v^2) \in \mathbf{H}_D^1$ gilt. Zusätzlich ist $C_1 \|\mu\|_{-1/2, \Gamma_C} \leq \|u^\mu\|$.

Beweis. Die Existenz von $u^\mu \in \mathbf{H}_D^1$ wird durch das Lax-Milgram Lemma garantiert. Mittels der Cauchy Ungleichung gilt für $w \in \left(H^{1/2}(\Gamma_C^1)\right)^m$

$$\langle \mu, w \rangle = \sum_{l=1,2} \left(\epsilon \left(u^{\mu,l} \right), \epsilon \left(v^l \right) \right)_0 + (u^{\mu,l}, v^l)_0 \leq \|u^\mu\| \|w\|$$

für alle $v = (v^1, v^2) \in \mathbf{H}_D^1$ mit $\vartheta_m(v) = w$. Damit erhält man

$$\langle \mu, w \rangle \leq \|u^\mu\| \inf_{v \in \mathbf{H}_D^1, \vartheta_m(v)=w} \|v\|.$$

und durch Lemma 2 ergibt sich

$$C_1 \langle \mu, w \rangle \leq \|u^\mu\| \|w\|_{1/2, \Gamma_C^1}.$$

Aus der Definition der dualen Norm folgt die Behauptung. \square

Lemma 4. Sei $v = (v^1, v^2) \in \mathbf{H}_D^1$ mit $v^l \in H^{1+\theta_l}(\Omega^l)$, $0 < \theta_l \leq 1$ gegeben, dann existiert eine Funktion $\tilde{v}_h^p \in \mathbf{V}_h^p$ und eine von v , h und p unabhängige Konstante $C_2 > 0$, so dass

$$\|v - \tilde{v}_h^p\| \leq C_2 \sum_{l=1,2} (h_l/p_l)^{\theta_l} \|v^l\|_{1+\theta_l}.$$

Beweis. Zunächst benötigt man folgende Interpolationsaussage. Für $v^l \in H^{1+\theta_l}(\Omega^l)$ existiert ein $\tilde{v}_h^{p,l} \in S_{h_l}^{p,l}(\mathbb{T}_h)$, für das gilt

$$\|v^l - \tilde{v}_h^{p,l}\|_{1,\Omega^l} \leq C_2^l h_l^{\min(\theta_l, p_l)} / p_l^{\theta_l} \|v^l\|_{1+\theta_l}.$$

Für $\theta_l > 1/2$ ist der Beweis zum Beispiel in [15, Thm. 5.9] zu finden. Für den Fall $0 < \theta_l \leq 1/2$ ergibt sich die Aussage mit den Argumenten aus [5, Sect. 4.2], dabei ist das Gebiet Ω^l als Lipschitzgebiet vorauszusetzen. Sei nun $\tilde{v}_h^p := (\tilde{v}_h^{p,1}, \tilde{v}_h^{p,2})$, so erhält man

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}_h^p\|^2 &= \sum_{l=1,2} \|v^l - \tilde{v}_h^{p,l}\|_{1,\Omega^l}^2 \\ &\leq \max\{C_2^1, C_2^2\}^2 \sum_{l=1,2} (h_l/p_l)^{2\theta_l} \|v^l\|_{1+\theta_l}^2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mittels $C_2 := \max\{C_2^1, C_2^2\}$. \square

Lemma 5. Es existiert eine Konstante $C_3 > 0$, die unabhängig von H und q ist, so dass

$$\|\mu_H^q\|_{-1/2+\theta, \Gamma_C^1} \leq C_3 \frac{\max\{1, q\}^{2\theta}}{H^\theta} \|\mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1}$$

für alle $\mu_H^q \in (M_H^q)^1$ gilt.

Beweis. Siehe [50, Thm. 3.5., Thm. 3.9]. \square

Offensichtlich ist das Variationsproblem 3.4 äquivalent zu

$$\begin{aligned} \left(\epsilon \left(u^{\mu,1} \right), \epsilon \left(v^1 \right) \right) + (u^{\mu,1}, v^1)_0 &= \langle \mu, \vartheta_m(v^1, 0) \rangle \\ \left(\epsilon \left(u^{\mu,2} \right), \epsilon \left(v^2 \right) \right) + (u^{\mu,2}, v^2)_0 &= \langle \mu, \vartheta_m(0, v^2) \rangle \end{aligned}$$

für alle $v^l \in H_D^1(\Omega^l)$. Das Variationsproblem 3.4 heißt $1 + \theta_l$ -regulär, wenn $u^{\mu,l} \in H^{1+\theta_l}(\Omega^l)$ für ein $0 < \theta_l \leq 1$, und

$$\|u^{\mu,l}\|_{1+\theta_l,\Omega^l} \leq C_4^l \|\mu\|_{-1/2+\theta_l,\Gamma_C^l} \quad (3.5)$$

für alle $\mu \in \left(H^{-1/2+\theta_l}(\Gamma_C^l)\right)^l$ und Konstanten $C_4^l > 0$ gilt. Weiterhin gilt $C_4 := \max\{C_4^1, C_4^2\}$. Für Aussagen zur Regularität von elliptischen Randwertproblemen können Resultate aus [36, 51] und [52, Kapitel 9] genutzt werden.

Durch Anwendung von Lemma 3, Lemma 4 und Lemma 5 und der Regularitäts-Annahme 3.5 für u^μ folgt das Theorem:

Theorem 8. *Das Variationsproblem 3.4 sei regulär für $\theta_l \leq 1/2$ und es gelte*

$$\Pi(h, H, p, q) := \sum_{l=1,2} \left(h_l H^{-1} \max\{1, q\}^2 p_l^{-1} \right)^{\theta_l} \leq \varepsilon < C_1 (C_2 C_3 C_4)^{-1} \quad (3.6)$$

für ein $\varepsilon > 0$, dann ist die diskrete inf-sup-Bedingung, Theorem 6, für eine Konstante $\alpha > 0$ unabhängig von h, H, p und q erfüllt.

Beweis. Sei $\mu_H^q \in \left(M_{H,+}^q\right)^l$ und $u_h^{\mu_H^q, p} = (u_h^{\mu_H^q, p, 1}, u_h^{\mu_H^q, p, 2}) \in \mathbf{V}_h^p$ eindeutig definiert durch

$$\sum_{l=1,2} \left(\varepsilon \left(u_h^{\mu_H^q, p, l}, \varepsilon \left(v_h^{p, l} \right) \right) + (u_{h,i}^{\mu_H^q, p, l}, v_{h,i}^{p, l})_0 \right) = (\mu_H^q, \vartheta_m(v_h))_{0, \Gamma_C^l}$$

für alle $v_h^p = (v_h^{p, 1}, v_h^{p, 2}) \in \mathbf{V}_h^p$. Durch Ausnutzung der Galerkin Orthogonalität, Lemma 4, der Regularitätsannahme and Lemma 5 ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\| u^{\mu_H^q} - u_h^{\mu_H^q, p} \right\| \\ & \leq \left\| u^{\mu_H^q} - \tilde{u}_h^{\mu_H^q, p} \right\| \\ & \leq C_2 \sum_{l=1,2} (h_l/p_l)^{\theta_l} \|u^{\mu,l}\|_{1+\theta_l,l} \\ & \leq C_2 C_4 \sum_{l=1,2} (h_l/p_l)^{\theta_l} \|\mu_H\|_{-1/2+\theta_l,\Gamma_C^l} \\ & \leq C_2 C_3 C_4 \sum_{l=1,2} (h_l/p_l)^{\theta_l} (\max\{1, q\}^{2\theta_l} / H^{\theta_l}) \|\mu_H\|_{-1/2,\Gamma_C^l} \\ & = C_2 C_3 C_4 \Pi(h, H, p, q) \|\mu_H\|_{-1/2,\Gamma_C^l}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 3, folgt

$$\begin{aligned}
& \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h^p \setminus \{0\}} \frac{(\mu_H^q, \vartheta_m(v_h))_{0, \Gamma_C^1}}{\|v_h^p\|_1} \\
& \geq \frac{(\mu_H^q, \vartheta_m(u_h^{\mu_H^q, p}))_{0, \Gamma_C^1}}{\|u_h^{\mu_H^q, p}\|_1} \\
& = \left\| u_h^{\mu_H^q, p} \right\| \\
& \geq \left\| u^{\mu_H^q} \right\| - \left\| u^{\mu_H^q} - u_h^{\mu_H^q, p} \right\| \\
& \geq C_1 \|\mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C} - \left\| u^{\mu_H^q} - u_h^{\mu_H^q, p} \right\| \\
& \geq (C_1 - C_2 C_3 C_4 \Pi(h, H, p, p_C)) \|\mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\
& \geq (C_1 - C_2 C_3 C_4 \varepsilon) \|\mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1}.
\end{aligned}$$

Mit $\alpha := C_1 - C_2 C_3 C_4 \varepsilon > 0$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 7. Theorem 8 liefert keine genaue Aussage wie die Räume gewählt werden können, um Stabilität zu garantieren. In der Praxis zeigt sich, dass das Verhältnis $q = \max\{p^l\} - 1$ und $H = 2 \cdot \max\{h^l\}$ zu stabilen Diskretisierungen führt. Im Kapitel 3.3 wird dies verdeutlicht. Weiterhin stellt sich die Frage, ob die Regularitatsannahme 3.5 erfüllt ist. Dies ist zum Beispiel für konvexe Gebiete gegeben.

Bemerkung 8. Aus Theorem 8 folgt die Stabilität der Diskretisierung für das reibungsfreie Kontaktproblem mittels der Wahl $\vartheta_l = [\cdot]_n$. Die Stabilität bezüglich des tangentialen Sprungoperators folgt durch $\vartheta_l = [\cdot]_t$. Die Stabilität für das reibungsbehaftete Problem 9 ergibt sich direkt aus der Stabilität bzgl. der einzelnen Operatoren, wie folgendes Lemma zeigt

Lemma 6. Die Variationsprobleme 3.4 bezüglich $[\cdot]_n$ und $[\cdot]_t$ seien regulär für $\theta_l \leq 1/2$ und Theorem 8 sei für beide Probleme erfüllt. Dann ist die diskrete inf-sup-Bedingung aus Theorem 7 für eine Konstante $\alpha > 0$ unabhängig h, H, p und q erfüllt.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \|(\mu_{0,H}, \mu_{1,H})\|^2 \\
& \leq \|\mu_{0,H}\|^2 + \|\mu_{1,H}\|^2 \\
& \leq \left(\frac{1}{\alpha_0} \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h, \|v_h\|=1} \langle \mu_{0,H}, [v_h]_n \rangle \right)^2 \\
& \quad + \left(\frac{1}{\alpha_1} \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h, \|v_h\|=1} \langle \mu_{1,H}, [v_h]_t \rangle \right)^2 \\
& \leq \left(\frac{1}{\alpha_0} \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h, \|v_h\|=1} (\langle \mu_{0,H}, [v_h]_n \rangle + \langle \mu_{1,H}, [v_h]_t \rangle) \right)^2 \\
& \quad + \left(\frac{1}{\alpha_1} \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h, \|v_h\|=1} (\langle \mu_{1,H}, [v_h]_t \rangle + \langle \mu_{0,H}, [v_h]_n \rangle) \right)^2 \quad (*) \\
& \leq \left(\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\alpha_1^2} \right) \left(\sup_{v_h \in \mathbf{V}_h, \|v_h\|=1} (\langle \mu_{0,H}, [v_h]_n \rangle + \langle \mu_{1,H}, [v_h]_t \rangle) \right)^2
\end{aligned}$$

Damit folgt mit $\alpha := \left(\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\alpha_1^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ die Behauptung.

Die vorletzte Ungleichung (*) ergibt sich direkt aus der Orthogonalität der Sprungoperatoren, denn für eine Funktion $v_h = v_{h,n} + v_{h,t}$ mit $v_{h,n} = n \cdot (n^\top v_h)$ und $v_{h,t} := v_h - v_{h,n}$ ist $\langle \mu_{0,H}, [v_h]_n \rangle = \langle \mu_{0,H}, [v_{h,n}]_n \rangle$. Für das Supremum v_h^* muss $v_h^* = v_{h,n}^*$ gelten damit folgt (*) mittels:

$$\begin{aligned}
& \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h, \|v_h\|=1} \langle \mu_{0,H}, [v_h]_n \rangle \\
& = \langle \mu_{0,H}, [v_{h,n}^*]_n \rangle \\
& = (\langle \mu_{0,H}, [v_{h,n}^*]_n \rangle + \langle \mu_{1,H}, [v_{h,t}^*]_t \rangle) \\
& \leq \sup_{v_h \in \mathbf{V}_h, \|v_h\|=1} (\langle \mu_{0,H}, [v_h]_n \rangle + \langle \mu_{1,H}, [v_h]_t \rangle).
\end{aligned}$$

□

3.2.5 A priori Konvergenz

In diesem Kapitel wird der a priori Fehler für das reibungsfreie Kontaktproblem für Ansätze niedriger Ordnung abgeschätzt. Es ist nicht zu erwarten, dass Kontaktprobleme eine hohe Glattheit besitzen, so dass Ansatzräume höherer Ordnung nur im Rahmen adaptiver Methoden sinnvoll sind. Die Abschätzung liefert unter entsprechenden Regularitätsannahmen eine optimale Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(h)$, wie sie etwa auch für die Mortar Diskretisierung nachgewiesen wurde [14, 34, 65]. Es ist anzumerken, dass in der Praxis diese Konvergenzrate nicht zu erwarten ist. Im Allgemeinen liegt die Konvergenzrate eher bei $\mathcal{O}(h^{3/4})$, vgl. auch [34]. Im Abschnitt 3.3 finden sich Konvergenzstudien, die unter anderem auch nahezu asymptotisch optimale Konvergenz liefern. Der Beweis folgt den Argumenten aus [34, 78, 59, 54, 55] und ist stark an die noch etwas verallgemeinerte Konvergenzaussage aus [22] angelehnt.

Zunächst wird die grundlegende Abschätzung gezeigt, die in der weiteren Fehlerabschätzung die entscheidende Rolle spielt. Dazu werden die Argumente genutzt, die in [78] vorgestellt wurden. Zunächst wird dazu eine zusätzliche L^2 -Projektion von $[u]_n$ eingeführt.

Lemma 7. *Sei $\lambda \in H^\theta(\Gamma_C^1)$ und $[u]_n \in H^{\tilde{\theta}}(\Gamma_C^1)$, $0 \leq \theta, \tilde{\theta} \leq 1$. Dann existiert ein $\tilde{\lambda}_H^0 \in M_{H,+}^0$, so dass*

$$\langle \lambda - \tilde{\lambda}_H^0, [u]_n \rangle \leq C_5 H^{\theta+\tilde{\theta}}.$$

Beweis. Für ein $\kappa \in L^2(\Gamma_C^1)$, sei $\Pi(\kappa) \in M_H^0$ die Standard L^2 -Projektion, definiert durch $\Pi(\kappa)|_{T_C} := H^{-1} \int_{T_C} \kappa \, ds$ für $T_C \in \mathbb{T}_C$. Offensichtlich gilt $\int_{\Gamma_C^1} (\Pi(\kappa) - \kappa) \mu_H^0 \, ds = 0$ für alle $\mu_H^0 \in M_H^0$. Weiterhin gilt $\|\Pi(\kappa) - \kappa\|_{0,\Gamma_C^1} \leq \tilde{C}_5 \|\kappa\|_{\theta',\Gamma_C^1} H^{\theta'}$, falls $\kappa \in H^{\theta'}(\Gamma_C^1)$, $0 \leq \theta' \leq 1$, vgl. [32].

Setzt man nun $\tilde{\lambda}_H^0 := \Pi(\lambda) \in M_{H,+}^0$, so erhält man

$$\begin{aligned} \langle \lambda - \tilde{\lambda}_H^0, [u]_n \rangle &= \int_{\Gamma_C^1} (\lambda - \tilde{\lambda}_H^0) [u]_n \, ds \\ &= \int_{\Gamma_C^1} (\lambda - \tilde{\lambda}_H^0) ([u]_n - \Pi([u]_n)) \, ds \\ &\leq \|\lambda - \tilde{\lambda}_H^0\|_{0,\Gamma_C^1} \| [u]_n - \Pi([u]_n) \|_{0,\Gamma_C^1} \\ &\leq \tilde{C}_5^2 \|\lambda\|_{\theta,\Gamma_C^1} \| [u]_n \|_{\tilde{\theta},\Gamma_C^1} H^{\theta+\tilde{\theta}}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit $C_5 := \tilde{C}_5^2 \|\lambda\|_{\theta,\Gamma_C^1} \| [u]_n \|_{\tilde{\theta},\Gamma_C^1}$. \square

Bemerkung 9. *Im Prinzip kann die Behauptung aus Lemma 7 auf die Menge M_H^q mit $q > 0$ erweitert werden, so dass man $\langle \lambda - \tilde{\lambda}_H^q, [u]_n \rangle \leq C_5 (H/q)^{\theta+\tilde{\theta}}$ für ein $\tilde{\lambda}_H^q \in M_H^q$ erhält. Bedauerlicherweise kann die Bedingung $\tilde{\mu}_H^q \in M_{H,+}^q$, die für das folgende Lemma 8 benötigt wird, nicht garantiert werden.*

Lemma 8. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \|u - u_h^p\|_1^2 &\leq C_6 (\|u - u_h^p\|_1 \|u - v_h^p\|_1 + \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2,\Gamma_C^1} \|u - v_h^p\|_1 \\ &\quad + \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2,\Gamma_C^1} \|u - u_h^p\|_1 + \langle \lambda - \mu_H^q, [u]_n \rangle). \end{aligned}$$

für alle $\mu_H^q \in M_{H,+}^q$ mit einer Konstanten $C_6 > 0$.

Beweis. Da $M_{H,+} \subset H_+^{1/2}(\Gamma_C^1)$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\langle \lambda_H^q - \lambda, [u - u_h^p]_n \rangle \\ &\leq \langle \lambda_H^q - \lambda, -[u_h^p]_n \rangle \\ &\leq \langle \lambda_H^q, -[u_h^p]_n \rangle - \langle \lambda, -[u_h^p]_n \rangle \\ &\leq \langle \mu_H^q, -[u_h^p]_n \rangle - \langle \lambda, -[u_h^p]_n \rangle \\ &= \langle \lambda - \mu_H^q, [u]_n \rangle + \langle \lambda - \mu_H^q, -[u_h^p - u] \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Elliptizitätskonstante \tilde{C}_6 der Bilinearform \mathfrak{a} , folgt

$$\begin{aligned}
& \left| |u - u_h^p| \right|^2 \\
& \leq \tilde{C}_6 (\mathfrak{a}(u - u_h^p, u - v_h^p) + \mathfrak{a}(u - u_h^p, v_h^p - u_h^p)) \\
& = \tilde{C}_6 (\mathfrak{a}(u - u_h^p, u - v_h^p) + \langle \lambda_H^q - \lambda, [v_h^p - u]_n \rangle + \langle \lambda_H^q - \lambda, [u - u_h^p]_n \rangle) \\
& \leq \tilde{C}_6 (\left| |u - u_h^p| \right| \left| |u - v_h^p| \right| + \|\cdot\|_n \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \left| |u - v_h^p| \right| \\
& \quad + \|\cdot\|_n \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \left| |u - u_h^p| \right| + \langle \lambda - \mu_H^q, [u]_n \rangle).
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $C_6 := \max\{\tilde{C}_6, \tilde{C}_6 \|\cdot\|_n\}$. \square

Lemma 9. *Unter den Annahmen von Theorem 8 gilt*

$$\|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \leq C_7 (\left| |u - u_h^p| \right| + \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1})$$

für alle $\mu_H^q \in M_H^q$ mit einer Konstante $C_7 > 0$.

Beweis. Wegen Theorem 8 ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \alpha \|\mu_H^q - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\
& \leq \sup_{v_h^p \in S_h^p, \|v_h^p\|_1=1} \langle \mu_H^q - \lambda_H^q, [v_h^p]_n \rangle \\
& = \sup_{v_h^p \in S_h^p, \|v_h^p\|_1=1} \langle \mu_H^q, [v_h^p]_n \rangle + \mathfrak{a}(u_h^p, v_h^p) - \ell(v_h^p) \\
& = \sup_{v_h^p \in S_h^p, \|v_h^p\|_1=1} \langle \mu_H^q - \lambda, [v_h^p]_n \rangle + \mathfrak{a}(u_h^p - u, v_h^p) \\
& \leq \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} + \left| |u - u_h^p| \right|.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
& \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\
& \leq \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} + \|\mu_H^q - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\
& \leq (1 + \alpha^{-1}) \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} + \alpha^{-1} \left| |u - u_h^p| \right|
\end{aligned}$$

und die Behauptung ergibt sich mit $C_7 := (1 + \alpha^{-1})$. \square

Lemma 10. *Unter den Annahmen von Theorem 8 gilt*

$$\begin{aligned}
& \|u - u_h^p\|_1 + \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\
& \leq C_8 \left(\left| |u - v_h^p| \right| + \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} + \langle \lambda - \mu_H^q, [u]_n \rangle^{1/2} \right)
\end{aligned}$$

für alle $v_h^p \in \mathbf{V}_h^p$ und alle $\mu_H^q \in M_{H,+}^q$ mit einer Konstanten $C_8 > 0$.

Beweis. Aus Lemma 8, Lemma 9 und der Youngschen Ungleichung ($ab \leq (4C_6)^{-1}a^2 + C_6b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$) folgt

$$\begin{aligned} & |||u - u_h^p|||^2 \\ & \leq C_6(|||u - u_h^p||| |||u - v_h^p||| + \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} |||u - v_h^p||| \\ & \quad + \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} |||u - u_h^p||| + \langle \lambda - \mu_H^q, [u]_n \rangle) \\ & \leq (3/4) |||u - u_h^p|||^2 + (C_6^2 + C_6^2 C_7^2 + C_7^2/4) |||u - v_h^p|||^2 \\ & \quad + 2C_6^2 \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1}^2 + C_6 \langle \lambda - \mu_H^q, [u]_n \rangle). \end{aligned}$$

Mit $\tilde{C}_8 := 2 \max\{C_6^2 + C_6^2 C_7^2 + C_7^2/4, 2C_6^2, C_6\}^{1/2}$ erhält man

$$\begin{aligned} & |||u - u_h^p||| + \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\ & \leq (1 + C_7) |||u - u_h^p||| + C_7 \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\ & \leq (1 + C_7) \tilde{C}_8 (|||u - v_h^p|||_1 + \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} + \langle \lambda - \mu_H^q, [u]_n \rangle^{1/2}) \\ & \quad + C_7 \|\lambda - \mu_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also mit $C_8 := (1 + C_7) \tilde{C}_8 + C_7$. \square

Theorem 9. Sei $u^1 \in H^{1+\theta_1}(\Omega^1)$, $0 < \theta_1 \leq 1$. Unter den Annahmen von Theorem 8 und Lemma 7, gilt

$$|||u - u_h^p||| + \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \leq C_6 \left(H^{(\theta+\tilde{\theta})/2} + \sum_{l=1}^2 (h_l/p_l)^{\theta_l} \right).$$

Beweis. Aus der Definition der dualen Norm und der Cauchy Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} & \|\lambda - \tilde{\lambda}_H^0\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\ & = \sup_{w \in H^{1/2}(\Gamma_C^1), \|w\|_{1/2, \Gamma_C^1} = 1} \int_{\Gamma_C^1} (\lambda - \tilde{\lambda}_H^0) w \, ds \\ & = \sup_{w \in H^{1/2}(\Gamma_C^1), \|w\|_{1/2, \Gamma_C^1} = 1} \int_{\Gamma_C^1} (\lambda - \tilde{\lambda}_H^0) (w - \Pi(w)) \, ds \\ & \leq \|\lambda - \tilde{\lambda}_H^0\|_{0, \Gamma_C^1} \|w - \Pi(w)\|_{0, \Gamma_C^1} \\ & \leq \tilde{C}_5^2 H^{\theta+1/2} \|\lambda\|_{\theta, \Gamma_C^1}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus Anwendung von Lemma 4, Lemma 7 und Lemma 10

$$\begin{aligned} & |||u - u_h^p||| + \|\lambda - \lambda_H^q\|_{-1/2, \Gamma_C^1} \\ & \leq C_7 (C_2 \sum_{l=1,2} (h_l/p_l)^{\theta_l} \|v^l\|_{1+\theta_l} + \tilde{C}_5^2 H^{\theta+1/2} \|\lambda\|_{\theta, \Gamma_C^1} \\ & \quad + C_5^{1/2} H^{(\theta+\tilde{\theta})/2}). \end{aligned}$$

Da $\theta + 1/2 \geq (\theta + \tilde{\theta})/2$ ist, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 10. Für das stabile Paar $p_l = 1$, $q = 0$ und $H = 2h$ folgt unter Annahme von $\theta_l = 1$ und $\theta, \tilde{\theta} = 1$ die optimale a priori Konvergenz $\mathcal{O}(h)$. Es bleibt die Frage, ob $\theta = 1$ für den Spurraum garantiert werden

kann. Dies ist sicherlich eine starke Voraussetzung und in der Praxis nicht immer realisierbar. In Kapitel 3.3 wird veranschaulicht, dass die beobachtete Konvergenzordnung niedriger ist. Vergleiche dazu auch die Ergebnisse in [34] für verschiedene Diskretisierungen.

Folgt man den Argumentationen aus [54, 55, 59] so erhält man für den die Abschätzung dominierenden Term $\langle \lambda - \tilde{\lambda}_H^0, [u]_n \rangle$ folgende Abschätzung:

Lemma 11. *Angenommen die Menge der Punkte in Γ_C , auf denen $[u]_n$ vom Negativem zu Null wechselt ist endlich, dann ist die Anzahl der Segmente $\tilde{\mathbb{T}}_C \subset \mathbb{T}_C$, die solche Punkte beinhaltet beschränkt durch $K \in \mathbb{N}$ unabhängig von H . Ist $u^1 \in H^2(\Omega^1; \mathbb{R}^2)$, so gilt entweder $0 = -\sigma_{nn}(u) = \lambda = \tilde{\lambda}_H^0$ oder $[u]_n = 0$ auf $T_C \in \mathbb{T}_C \setminus \tilde{\mathbb{T}}_C$. Ist $[u]_n \in H_\infty^1(\Gamma_C)$. Dann gilt:*

$$\langle \lambda - \tilde{\lambda}_H^0, [u]_n \rangle \leq \mathcal{O}\left(H^{\frac{1}{2} + \theta + 1}\right).$$

Beweis. Da $[u(x)]_n = 0$ für einen Punkt $x \in T_C$ gilt und $[u]_n \in H_\infty^1(T_C)$ ist, gilt $\|[u]_n\|_{L_\infty, T_C} = \mathcal{O}(H)$. Damit lässt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \langle \lambda - \tilde{\lambda}_H^0, [u]_n \rangle &= \sum_{T_C \in \tilde{\mathbb{T}}_C} \int_{T_C} (\lambda - \tilde{\lambda}_H^0) [u]_n \, ds \\ &\leq \left| \sum_{T_C \in \tilde{\mathbb{T}}_C} \int_{T_C} (\lambda - \tilde{\lambda}_H^0) [u]_n \, ds \right| \\ &\leq \sum_{T_C \in \tilde{\mathbb{T}}_C} \left(\|[u]_n\|_{L_\infty, T_C} \int_{T_C} |\lambda - \tilde{\lambda}_H^0| \, ds \right) \\ &\leq \sum_{T_C \in \tilde{\mathbb{T}}_C} \left(\|[u]_n\|_{L_\infty, T_C} \cdot H^{1/2} \|\lambda - \tilde{\lambda}_H^0\|_{L_2, T_C} \right) \\ &= \mathcal{O}\left(H^{\frac{1}{2} + \theta + 1}\right). \end{aligned}$$

□

Auf diese Weise erhält man eine a priori Konvergenz von $\mathcal{O}(h)$ unter der schwächeren Annahme $\theta_1 = 1$ und $\theta = 1/2$. Allerdings ist die Voraussetzung aus Lemma 11 für den Fall 3 dimensionaler Kontaktprobleme schwer zu erfüllen. Denn die Menge der Punkte mit Vorzeichenwechsel ist in diesem Fall im Allgemeinen nicht endlich.

3.2.6 Lösungsmechanismus

Die diskreten Probleme werden mittels der dualen Formulierung der gemischten Formulierung gelöst. Dabei wird der in [49, 58, 34, 91] beschriebene Ansatz benutzt. Die Effizienz des Ansatzes ergibt sich aus der Verringerung der Dimension für den Optimierungslöser, da im allgemeinen die Dimension der dualen Variable deutlich niedriger als die der primalen Variable ist. Andere effektive Lösungsverfahren basieren auf der primalen Formulierung, siehe etwa [75, 65, 40]. Diese Lösungsverfahren sind prinzipiell auf den hier gewählten Lösungsansatz übertragbar, da die Struktur der Probleme gleich ist. Im Folgenden wird der Lösungsansatz für die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Formulierung vorgestellt. Dabei wird die Indizierung aus der allgemeinen Formulierung für Variationsungleichungen aus Kapitel 2.1 übernommen.

Die Kontaktnebenbedingung erhält so den Index 0, die Reibungsnebenbedingung den Index 1. So folgt durch Streichung aller Terme zu b_1 der Lösungsansatz für den reibungsfreien Kontakt.

Sei $\{\varphi_j\}_{0 \leq j < n}$ eine Basis von V_h und $\{\Psi_{ij}\}_{0 \leq j < m_i}$, $i = 0, 1$ eine Basis zu $U'_{0,H} := M^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n})$, bzw. $U'_{1,H} := (M^{q_t}(\mathbb{T}_{H,n}))^{d-1}$ mit den Dimensionen $n := \dim V_h$ und $m_i := \dim U'_{i,H}$. Weiterhin sei die Menge $\bar{\Lambda}_0 := \{z \in \mathbb{R}^{m_0} \mid z_j \Psi_{ij} \in \Lambda_{n,H}\}$ und $\bar{\Lambda}_1 := \{z \in \mathbb{R}^{m_1} \mid z_j \Psi_{ij} \in \Lambda_{t,H}\}$ gegeben. Zusätzlich sei $\bar{\Lambda} := \bar{\Lambda}_0 \times \bar{\Lambda}_1$. Damit lautet die Diskretisierung von Problem 9:

Problem 11. Finde $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\Lambda}$, so dass für alle $z \in \bar{\Lambda}$ gilt:

$$\begin{aligned} Ax &= L - B^T y, \\ (y - z)^T (Bx - \tilde{G}) &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dabei sind die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ und die Vektoren $L \in \mathbb{R}^n$, $G \in \mathbb{R}^{m_0}$ definiert durch $A_{jk} := a(\varphi_j, \varphi_k)$, $B_{i,jk} := \langle \Psi_{ij}, b_i(\varphi_k) \rangle$, $L_j := \langle l, \varphi_j \rangle$, $G_j := \langle \Psi_{0,j}, g \rangle$ und

$$B := \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{G} := \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung von Problem 2.2 ist gegeben durch

$$(u_h, \lambda_{0,H}, \lambda_{1,H}) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_i, \sum_{j=0}^{m_0-1} y_{0,j} \Psi_{0,j}, \sum_{j=0}^{m_1-1} y_{1,j} \Psi_{1,j} \right)$$

Zur Lösung von Problem 11 wird das Schurkomplement angewandt. Das führt zu einem Minimierungsproblem in den Lagrangemultiplikatoren.

Satz 1. Das Paar (x, y) löst Problem 11 genau dann, wenn

$$F(y) = \min_{z \in \bar{\Lambda}} F(z), \quad F(z) := \frac{1}{2} z^T B A^{-1} B^T z - z^T (B A^{-1} L - \tilde{G}) \quad (3.8)$$

und $x = A^{-1} (L - B^T y)$ ist.

Beweis. Löst man die Gleichung 3.7 nach x auf, so erhält man $x = A^{-1} (L - B^T y)$. Ersetzt man nun x in der Ungleichung, so folgt

$$\left(B A^{-1} B^T y - (B A^{-1} L - \tilde{G}) \right)^T (z - y) \geq 0$$

für alle $z \in \bar{\Lambda}$ und durch Anwendung von Theorem 1 aus Kapitel 1.1 ergibt sich die Behauptung. \square

Damit lässt sich das Problem beispielsweise durch quadratische Optimierung lösen, siehe dazu auch [94, 91].

Nach Abschnitt 3.2.3 führt eine höhere Ordnungsdiskretisierung zu Problemen bei der Erfüllung der Bedingung $\lambda \geq 0$. Stattdessen kann der dort vorgestellte nichtkonforme Ansatz verwendet werden. Dieser führt zu zusätzlichen Nebenbedingungen an das Minimierungsproblem 3.8, um $\lambda_0 \in \widetilde{M}_+^{q_n}(\mathbb{T}_{H,n})$ und $\lambda_1 \in \left(\widetilde{M}_+^{q_t}(\mathbb{T}_{H,n}) \right)^{d-1}$ zu garantieren.

ren. Diese Nebenbedingung lassen sich in einer zusätzlichen Matrix sammeln, die als Nebenbedingung in das Optimierungsproblem mit eingeht.

Sei dazu die Randdiskretisierung durch $\mathbb{T}_{H,n} = \mathbb{T}_{H,t} = \{T_0, T_1, \dots, T_{\tilde{m}-1}\}$ gegeben und sei $c_q := (q+1)^{d-1}$ die Anzahl der Gausspunkte in \mathcal{C}_q , (vgl. Abschnitt 3.2.3). Dann definiert man eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{c_q \tilde{m} \times m_0}$ durch die Auswertung aller Basisfunktionen Ψ_j auf den $c_q \tilde{m}$ Quadraturpunkten, also $\Psi_j(x_v^{\tilde{m}})$. Wie bei der üblichen Assemblierung werden dann die Werte Ψ_j bezüglich ihrer Freiheitsgrade in die Matrix C geschrieben, siehe [94, 91] für weitere Details.

Damit sind die zulässigen Mengen $\bar{\Lambda}_{n,H}$ und $\bar{\Lambda}_{t,H}$ gegeben durch

$$\bar{\Lambda}_{n,H} = \{z \in \mathbb{R}^{m_0} \mid Cz \geq 0\}, \quad \bar{\Lambda}_{t,H} = \{z \in \mathbb{R}^{m_1} \mid f(z) \leq s\}$$

mit $m_1 := (m_0)^{d-1}$ und

$$f(z_0, \dots, z_{d-2}) := \sum_{i=0}^{d-2} \left((Cz_i)_j \right)^2$$

für $j = 0, \dots, d\tilde{m} - 1$ und $z \in \bar{\Lambda}_{t,H}$.

Aus dem Minimierungsproblem 3.8 ergibt sich so für höhere Ordnungsdiskretisierungen das modifizierte Problem

$$\begin{aligned} F(y) = \quad & \min & & F(z). \\ & z = (z_0, z_1) \in \mathbb{R}^{m_0} \times \mathbb{R}^{m_1}, \\ & Cz_0 \geq 0, f(z_1) \leq s \end{aligned}$$

Man erhält also zusätzliche lineare Nebenbedingungen für z_0 .

Die Reibungsnebenbedingung führen für den Fall $d = 2$ zu weiteren linearen Nebenbedingungen für z_1 . Für $d = 3$ treten nichtlineare Nebenbedingungen auf, die mit entsprechenden Optimierungsmethoden gelöst werden können. Für die Berechnungen wird in dieser Arbeit dazu die SQP-Bibliothek Snopt, [47], genutzt.

Der Lösungsmechanismus für hohe Polynomansätze wurde schon in [94, 91] vorgestellt. In [94] wurden weitgehende numerische Untersuchungen bei Kontaktproblemen mit starrem Hindernis durchgeführt, in [22] wurde schliesslich der theoretische Hintergrund dieses Ansatzes untersucht.

Bemerkung 11. *Der Lösungsalgorithmus lässt auch die Behandlung von Coulomb Reibung zu, siehe dazu auch [91]. Im Falle von Coulomb Reibung ist die Reibungsfunktion s definiert als $s := \xi |\sigma_{nn}(u)|$ mit einem Reibungskoeffizienten $\xi > 0$. Unter gewissen Regularitätsannahmen stimmt der Lagrange-multiplikator λ_n mit den Kontaktspannungen $-\sigma_{nn}(u)$ überein. Nun fügt man dem oben beschriebenen Lösungsmechanismus folgendes Fixpunktverfahren hinzu:*

Für eine gegebene Funktion $s \in L^2(\Gamma_C)$ mit $s \geq 0$, sei $(u(s), \lambda_n(s), \lambda_t(s))$ der eindeutig bestimmte Sattelpunkt des Kontaktproblems mit Tresca-Reibung. Weiterhin sei der Operator \mathcal{H} definiert durch $\mathcal{H}(s) := \xi |\sigma_{nn}(u)|$. Angenommen der Operator \mathcal{H} besitze einen Fixpunkt $\mathcal{H}(\bar{s}) = \bar{s}$. Dann erfüllt der Sattelpunkt $(u(\bar{s}), \lambda_n(\bar{s}), \lambda_t(\bar{s}))$ das Coloumbsche Reibungsgesetz. Überträgt man dieses Vorgehen auf die diskrete gemischte Formulierung, so ergibt sich $(x(s), y_n(s), y_t(s))$ als Lösung von 3.7 und $\tilde{\mathcal{H}}(s) := \xi |y_{0,j}(s) \Psi_{0,j}|$. Dann erfüllt für einen Fixpunkt \tilde{s} von $\tilde{\mathcal{H}}$ der Sattelpunkt

$(x(\tilde{s}), y_n(\tilde{s}), y_t(\tilde{s}))$ approximativ das Coulombsche Reibungsgesetz. Für weitere Details zu diesem Vorgehen sei ferner auf [57, 58] verwiesen.

3.3 NUMERISCHE ERGEBNISSE

In diesem Abschnitt werden anhand einiger Beispiele die theoretischen Ergebnisse bezüglich Stabilität und Konvergenz untersucht. Zunächst werden Konvergenzstudien für niedrige Ordnung vorgenommen. Anschließend folgen Untersuchungen auf Stabilität. Die numerischen Ergebnisse wurden mit der finite Elemente Bibliothek SOFAR [19] realisiert. Diese Bibliothek nutzt zur Lösung des in Abschnitt 3.2.6 vorgestellten Lösungsverfahrens unter anderem die Softwarebibliothek SQOPT, [46], zur Lösung des Optimierungsproblems. Die Invertierung der Steifigkeitsmatrix kann durch direkte Löser wie Umfpack, [38], oder Mehrgitterverfahren erfolgen. Dabei sind Parallelisierungsmethoden implementiert, um die Steifigkeitsmatrizen zu den einzelnen Gebieten parallel zu invertieren, so dass der Aufwand von dem Gebiet mit den meisten Freiheitsgraden abhängt. Für reibungsbehaftete Kontaktprobleme wird die Bibliothek SNOPT, [47], verwendet.

Für Konvergenzstudien wird hier eine Referenzlösung auf einem feinem Gitter h_{ref} gewählt, für das $h_k > 2 \cdot h_{\text{ref}}$ gilt. Der Lagrange Multiplikator wird in der L^2 -Norm, die Deformationen in der H^1 -Seminorm gemessen. In einem ersten Beispiel wird die postulierte Konvergenzordnung für einige Diskretisierungen untersucht. Nach Bemerkung 10 ist eine optimale Konvergenzordnung nur unter starken Voraussetzungen an den Kontaktrand zu erzielen. Im Folgenden zeigt sich, dass die optimale Konvergenzordnung für globale Verfeinerungen nur annähernd erreicht werden kann.

Beispiel 1. Es seien $\Omega_1 = [0, 10] \times [10, 20]$ und $\Omega_2 = [0, 10] \times [0, 10]$ zwei linear elastische Körper mit inhomogenen Dirichlet Rand auf der oberen Seite von Ω_1 von $d = 5e - 4$. Die Materialparameter sind gegeben durch $E_1 = 15e4$, $E_2 = 20e4$ und $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.4$. Für Gebiet Ω_2 sind Neumannkräfte von $f = (+/- 0.5, -5)$ auf der linken und rechten Seite gegeben. Die Konfiguration ist in Abbildung 2a zu sehen. In Abbildung 2b ist die Kontaktsituation in der von Mises Spannung σ_v (siehe 2.11) zu sehen.

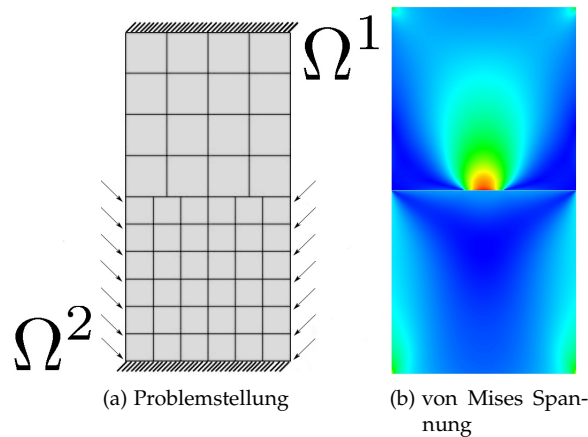
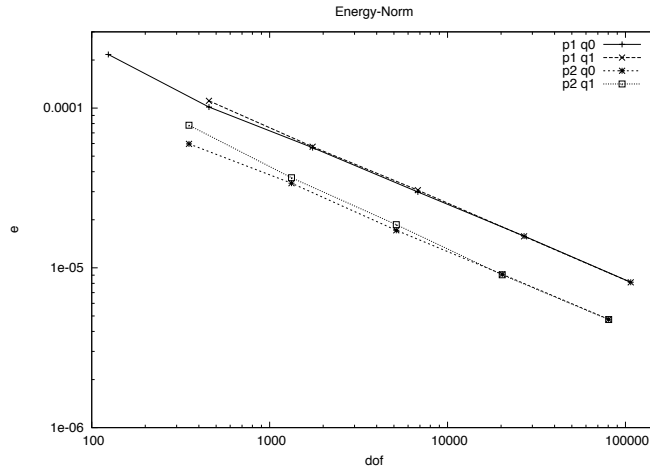
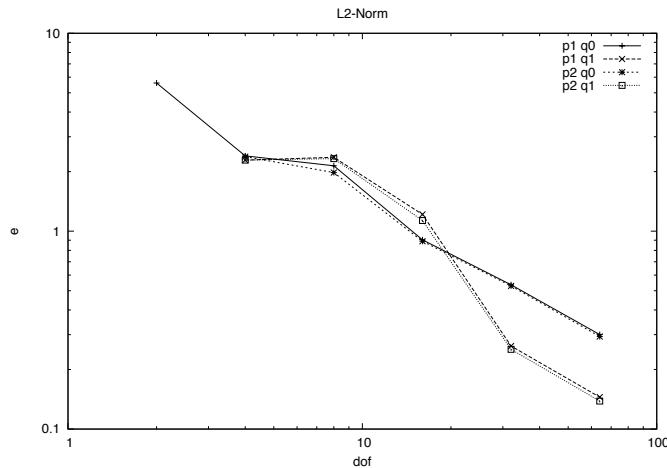


Abbildung 2: Problemstellung und von Mises Spannung zu Beispiel 1

Abbildung 3: Konvergenz von u_h Abbildung 4: Konvergenz von λ_H

Zur Lösung von Beispiel 1 wird Problem 8 mittels der beschriebenen Ansatzräume S_h^p (2.12) und M_H^q (2.13) diskretisiert. Für die Konvergenzanalyse werden stückweise lineare und stückweise quadratische Ansatzfunktionen für die Deformationen gewählt. Nach Bemerkung 7 kann man also für den Lagrangeparameter stückweise konstante, bzw. lineare Ansatzfunktionen auf einem größeren Gitter wählen. Dies liefert die Paarungen $p = 1, q = 0, H = 2 \cdot h$ und $p = 2, q = 1, H = 2 \cdot h$. Als Alternative werden noch zusätzlich die Paarungen $p = 2, q = 0, H = h$ und $p = 1, q = 1, H = 4 \cdot h$ verwendet, die auch stabile Diskretisierungen liefern. In Abbildung 3 sind die Konvergenzgraphen für die Deformationen und in Abbildung 4 den Lagrangemultiplikator zu sehen. Bezüglich der Deformationen ist ein identisches Konvergenzverhalten zu sehen. Der Fehlerverlauf bezüglich der Lagrange Multiplikatoren sieht zunächst nicht optimal aus. Es ist jedoch zu beachten,

dass die adäquate Norm zum Messen des Fehlers die $H^{-1/2}$ -Norm ist. Hier wird jedoch die L^2 -Norm gemessen, da die Auswertung der $H^{-1/2}$ -Norm nicht direkt möglich ist. In den Tabellen 1, 2, 3 und 4 ist der Fehlerverlauf und die Konvergenzrate aufgetragen. Für stückweise lineare Elemente ($p = 1$) erhält man ein annähernd optimales Konvergenzverhalten. Allerdings verbessert sich die Ordnung für höhere Polynomgrade nicht, wie auch in Abbildung 3 für die Verschiebungen u_h und in Abbildung 4 für den Lagrange Multiplikator λ_H zu sehen ist.

Allgemein ist bei Kontaktproblemen nicht die Glattheit gegeben, um bei hohen Polynomansätzen eine entsprechende Konvergenzrate zu erhalten, vgl. auch [65, 14, 34]. Bei entsprechend glatten Beispielen lassen sich tatsächlich Ordnungen von etwa 1.2 – 1.3 erhalten, siehe etwa [65]. In Kapitel 5.1 wird gezeigt, dass die optimale Konvergenzordnung auch für Elemente höherer Ordnung durch adaptive Verfeinerungen erreicht werden kann, so dass deren Verwendung sinnvoll ist .

Freiheitsgrade	$H^1, p2, q1$	ratio	$H^1, p2, q0$	ratio
352	7,81E-05	-	5,96E-05	-
1328	3,67E-05	1,092	3,39E-05	0,816
5152	1,86E-05	0,976	1,72E-05	0,979
20288	9,04E-06	1,0428	9,13E-06	0,913
80512	4,75E-06	0,930	4,77E-06	0,937

Tabelle 1: Fehler von u_h in der H^1 -Seminorm für die $p2, q1$ und $p2, q0$ Diskretisierungen:

Freiheitsgrade	$L^2, p2, q1$	ratio	$L^2, p2, q0$	ratio
4	2,286809662	-	2,379908704	-
8	2,326765133	-0,025	1,977253702	0,267
16	1,132186458	1,039	0,889648107	1,152
32	0,252725974	2,163	0,528783398	0,750
64	0,138568776	0,867	0,293620779	0,849

Tabelle 2: Fehler von λ_H in der L^2 -Norm für die $p2, q1$ und $p2, q0$ Diskretisierungen:

Zur Analyse der Stabilität ist anzumerken, dass bei Ansätzen mit $p = 1$ und $q = 0$ die Instabilität durch sogenannte Checkerboards zu erkennen sind, wie sie aus nicht stabilen Diskretisierungen in der Strömungsmechanik bekannt sind. Diese Checkerboards ergeben auf einem 1-dimensionalen Randstück ein oszillierendes Verhalten, siehe etwa [92, 94]. Für Diskretisierungen höherer Ordnung sind diese Instabilitäten schwieriger zu erkennen. Ein hoher Polynomansatz für den Lagrange-Multiplikator liefert mehrere Freiheitsgrade pro Element. Dies führt zu Oszillationen innerhalb des Elements, die nicht erkannt werden, wenn nur einzelne Punkte, wie etwa der Wert im Element-Mittelpunkt ausgewertet werden. Für folgendes Beispiel werden die

Freiheitsgrade	$H^1, p1, q0$	ratio	$H^1, p1, q1$	ratio
124	2,17E-04	-	-	-
456	1,01E-04	1,094	1,11E-04	-
1744	5,65E-05	0,845	5,73E-05	0,955
6816	2,99E-05	0,920	3,06E-05	0,903
26944	1,58E-05	0,917	1,58E-05	0,960
107136	8,13E-06	0,960	8,12E-06	0,957

Tabelle 3: Fehler von u_h in der H^1 -Seminorm für die $p1, q0$ und $p1, q1$ Diskretisierungen:

Freiheitsgrade	$L^2, p1, q0$	ratio	$L^2, p1, q1$	ratio
2	5,60358284	-	-	-
4	2,402275669	1,222	2,284973485	-
8	2,139541598	0,167	2,361125192	-0,047
16	0,904284809	1,242	1,214875243	0,959
32	0,535974039	0,754	0,262727357	2,209
64	0,300179791	0,836	0,145020787	0,857

Tabelle 4: Fehler von λ_H in der L^2 -Norm für die $p1, q0$ und $p1, q1$ Diskretisierungen:

Elemente an mehreren Punkten ausgewertet, um den Verlauf auf einem Element zu skizzieren.

Beispiel 2. In folgendem Beispiel werden 2 Gebiete gegeben durch $\Omega_1 = [-3, 3] \times [4, 8]$ und $\Omega_2 = [-3, 3] \times [0, 4.005]$ betrachtet. Der Kontaktrand ist gegeben durch eine Überlappung der beiden Gebiete. Gebiet Ω_1 ist einer Neumannkraft von $f_1 = (1, 0)$ auf der linken und $f_2 = (1, 0.5)$ auf der rechten Seite unterworfen. Das Youngsche Modul ist gegeben durch $E_l = 500$ $l = 1, 2$ und die Poisson Zahl durch $\nu_l = 0.4$ $l = 1, 2$. Die Konfiguration ist in [5a](#) dargestellt, die resultierende Deformation in y -Richtung ist in [Abbildung 5b](#) zu sehen.

Exemplarisch sind in [Abbildungen 6-8](#) einige stabile und instabile Diskretisierungen zu sehen.

Insbesondere ist zu beachten, dass ein Lagrangemultiplikator hohen Grads einen glatten und stetigen Verlauf erhält, obwohl der Ansatzraum M_H^q Unstetigkeiten zulässt. Mit mehrmaliger Vergrößerung ist auch ein Ansatz $q > p$ möglich, siehe [Abbildung 7b](#).

Bemerkung 12. [Beispiel 2](#) betrachtet die Stabilität bei einer übereinstimmenden Diskretisierung im Kontaktbereich, vgl. [Abbildung 9a](#). Verschiebt man die Ausgangskonfiguration, so dass für eine Diskretisierung die Eckpunkte der Kanten in den Kantenmittelpunkten der anderen Diskretisierung liegen ([Abbildung 9b](#)), so sieht man, dass für nicht zueinander passende Diskretisierungen die Stabilität erhalten bleibt ($p = 1, q = 0, H = 2h$ in [Abbildung 11a](#), $p = 2, q = 1, H = 2h$ in [Abbildung 12](#)) und sogar für eine eigentlich nicht stabile Paarung ($p = 1, q = 0, H = h$ in [Abbildung 11b](#)) ein stabiles Verhalten erzeugt wird. Allerdings zeigt [Abbildung 12](#) für das Paar

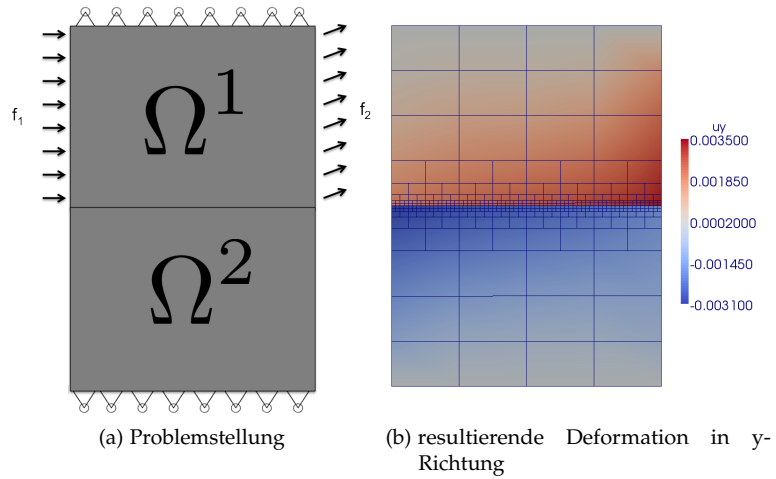


Abbildung 5: Beispiel 2: Problemstellung und Deformation

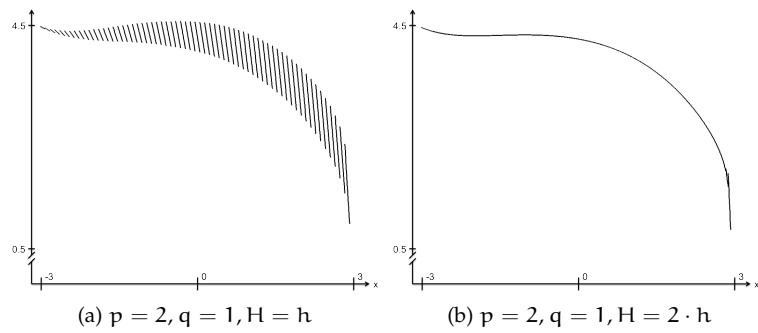


Abbildung 6: Stabilitätsuntersuchung, Beispiel 2

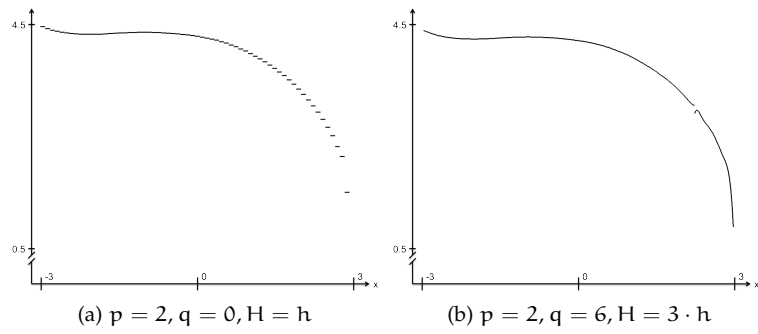


Abbildung 7: Stabilitätsuntersuchung, Beispiel 2

$p = 2, q = 1, h = H$, dass diese stabilisierende Wirkung allgemein nicht zu garantieren ist.

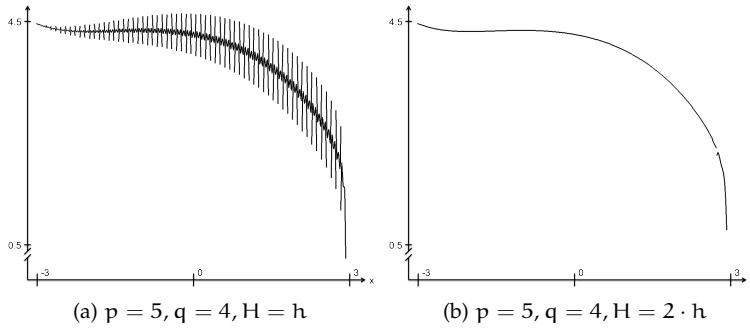


Abbildung 8: Beispiel 2: Stabilitätsuntersuchung,, Beispiel 2

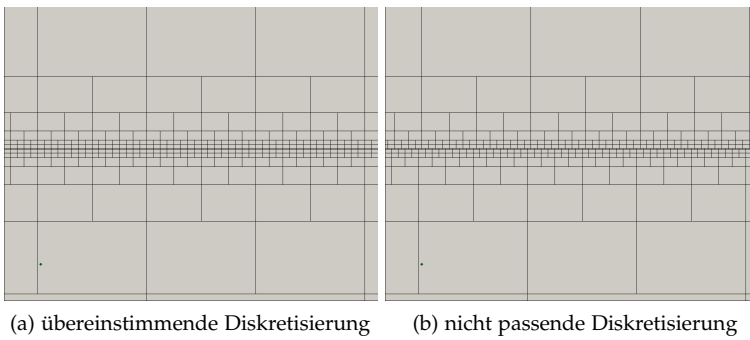


Abbildung 9: Alternative Diskretisierung in Beispiel 2

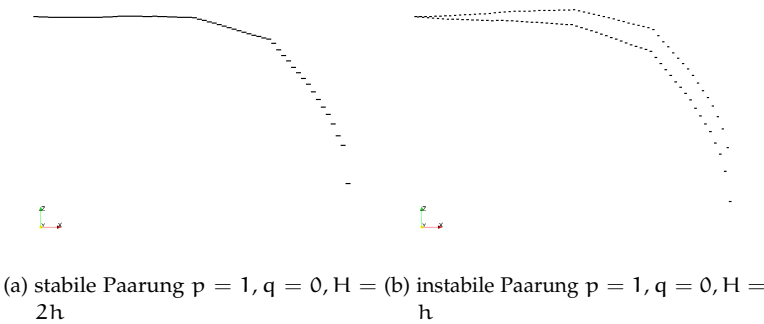


Abbildung 10: übereinstimmende Diskretisierung

Beispiel 3. Es wird das obige Beispiel betrachtet mit der Diskretisierung aus Beispiel 7, um eine nicht übereinstimmende Diskretisierung zu erhalten. Die Konvergenzanalyse zeigt, dass die in Theorem 9 hergeleitete Konvergenz von der Glattheit des Problems abhängt. Die in Beispiel 1 erreichte Konvergenzordnung wird hier auch für höhere Polynomansätze nicht erreicht, wie aus den Tabellen 5 und 7, sowie 6 und 8 hervorgeht. Graphisch ist das in den Abbildungen 13 und 14 zu sehen.

Schließlich wird für den reibungsbehafteten Kontakt das gleiche Beispiel nochmal mit Coulomb Reibung betrachtet.

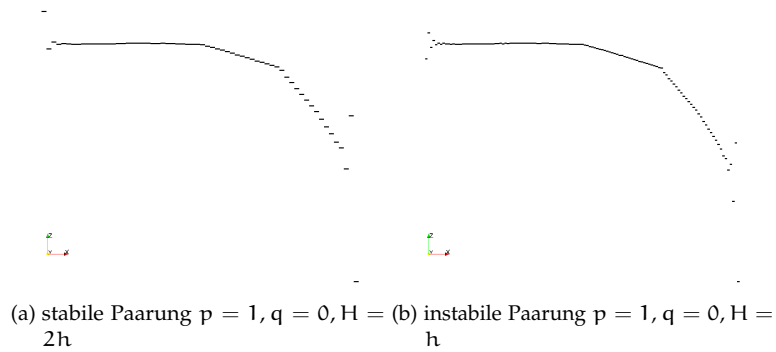
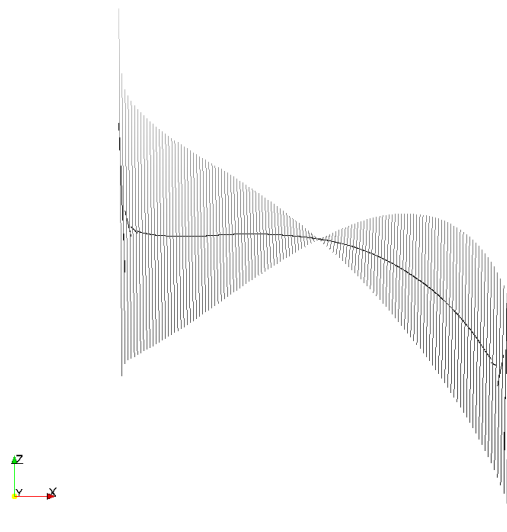


Abbildung 11: nicht zueinander passende Diskretisierung

Abbildung 12: Paarungen $p = 2, q = 1, h = H$, bzw. $H = 2h$

Freiheitsgrade(u_h)	$H^1, p2, q1$	ratio	$H^1, p2, q0$	ratio
352	8.74E-004	-	8.28E-004	-
1328	5.22E-004	0.744	5.11E-004	0.696
5152	3.21E-004	0.702	3.18E-004	0.684
20288	1.95E-004	0.716	1.95E-004	0.709
80512	1.13E-004	0.785	1.13E-004	0.782

Tabelle 5: Fehler von u_h in der H^1 -Seminorm für verschiedene Diskretisierungen

Beispiel 4. Für die Konfiguration aus Beispiel 3 wird mit einem Reibungsfaktor $\xi = 0.3$ das reibungsbehaftete Kontaktproblem (Problem 9) mit Coulomb-Reibung gelöst. In Abbildung 15 ist der deformierte Zustand bei 5facher globaler Verfeinerung zu sehen. Es ergibt sich ein zum reibungsfreien Kontakt ähnliches Konvergenzverhalten, siehe Abbildung 16 und Tabelle 9 für die Deformationen, bzw. Abbildung 17 und Tabellen 10 und 11 für die Lagrange Multiplikatoren.

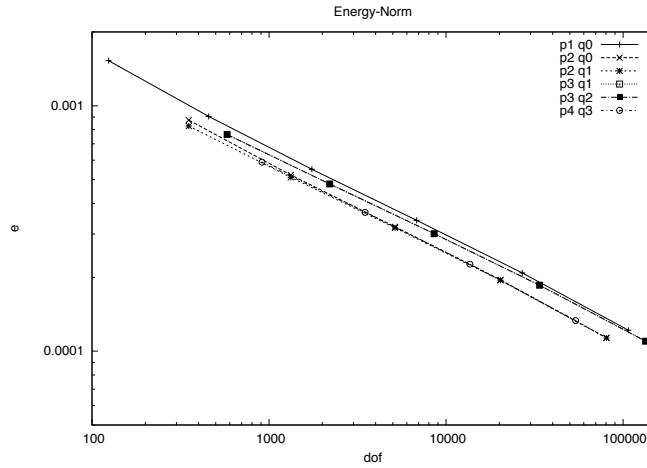


Abbildung 13: Fehler von u_h bezüglich der H^1 -Norm

Freiheitsgrade(λ_H)	$L^2, p2, q1$	ratio	$L^2, p2, q0$	ratio
4	0.87204888	0	0.47893488	0
8	0.5094472	0.775	0.23375764	1.035
16	0.30294822	0.750	0.14324935	0.706
32	0.18682281	0.697	0.09618192	0.575
64	0.11840327	0.658	0.06423668	0.582

Tabelle 6: Fehler von λ_H in der L^2 -Norm für verschiedene Diskretisierungen

Freiheitsgrade(u_h)	$H^1, p3, q1$	ratio	Freiheitsgrade(u_h)	$H^1, p1, q0$	ratio
-	-	-	124	0.0012585	-
580	6.84e-4	-	456	7.86e-4	0.679
2200	4.29e-4	0.672	1744	4.88e-4	0.686
8560	2.69e-4	0.674	6816	3.04e-4	0.683
33760	1.66e-4	0.698	26944	1.86e-4	0.709
134080	9.81e-5	0.758	107136	1.09e-4	0.775

Tabelle 7: Fehler von u_h in der H^1 -Seminorm für verschiedene Diskretisierungen

Bei dreidimensionalen Diskretisierungen, ergeben sich für den zweidimensionalen Kontakttrand die aus der Strömungsmechanik bekannten Schachbrettmuster, wie das folgende Beispiel aus dem *SFB708* zeigt.

Beispiel 5. In diesem Beispiel wird der statische Kontakt zwischen einem Schleifstift und einem freigeformten Werkstück simuliert. Der Schleifstift ist dabei am Ende des Schaftes homogenen Dirichlet Randdaten unterworfen, das Werkstück am unteren Ende. Der Kontakt ergibt sich über die vorgegebene Eingrifftiefe. Für einen genauen Überblick siehe [16]. Abbildung 18 zeigt zunächst

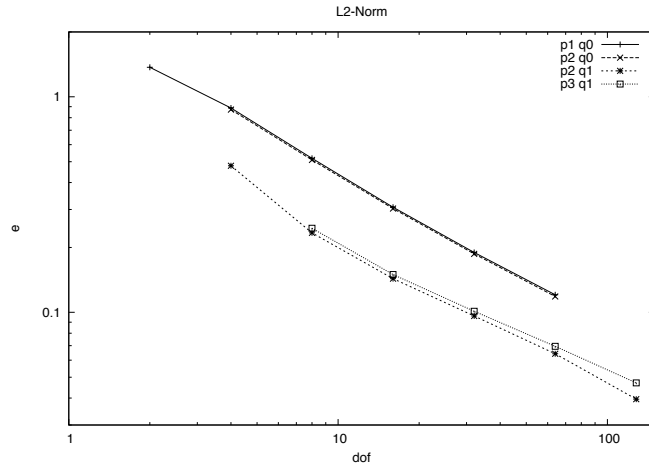


Abbildung 14: Fehler von λ_H bezüglich der L^2 -Norm

Freiheitsgrade(λ_H)	$L^2, p3, q1$	ratio	$L^2, p1, q0$	ratio
2	-	-	1.371422	-
4	-	-	0.88754	0.628
8	0.24567	-	0.518191	0.776
16	0.149806	0.714	0.307335	0.754
32	0.101166	0.566	0.189568	0.697
64	0.069541	0.540	0.120634	0.652
128	0.04705	0.564	-	-

Tabelle 8: Fehler von λ_H in der L^2 -Norm für verschiedene Diskretisierungen

Freiheitsgrade(u_h)	$H^1, p1, q0$	ratio	Freiheitsgrade(u_h)	$H^1, p2, q0$	ratio
124	0.0013718	-	352	7.9793E-4	-
456	8.1729E-4	0.747	1328	4.7245E-4	0.754
1744	4.9585E-4	0.721	5152	2.8932E-4	0.707
6816	3.0659E-4	0.693	20288	1.7579E-4	0.719
26944	1.87271E-4	0.711	80512	1.0193E-4	0.786
107136	1.09362E-4	0.776	-	-	-

Tabelle 9: Fehler von u_h in der H^1 -Seminorm für verschiedene Diskretisierungen

die globale Situation mit adaptiver Vernetzung, Abbildung 19 einen Schnitt durch das Kontaktgebiet. In Abbildung 20a ist die stabile Diskretisierung in 20b die instabile mit Schachbrettmuster zu sehen.

Dabei ist das Verhältnis $H = 2 \cdot h$ bezüglich der Vernetzung auf dem Schleifstift zu verstehen, auf dem auch der Lagrange-Multiplikator definiert ist. Es ist zu beachten, dass für die Stabilität das Verhältnis

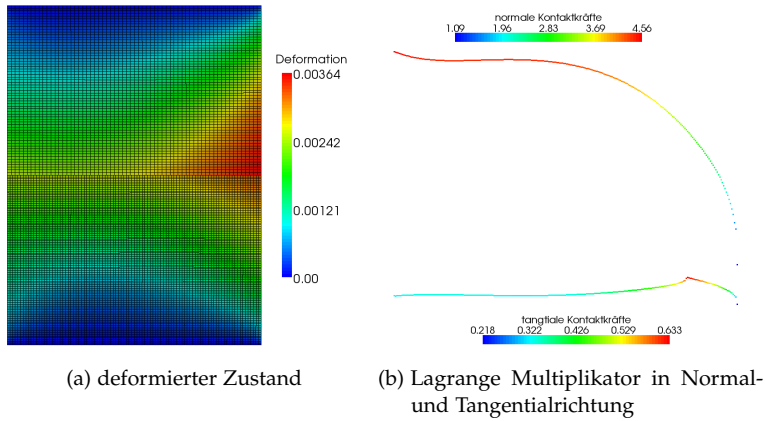


Abbildung 15: Deformierter Zustand von Beispiel 4

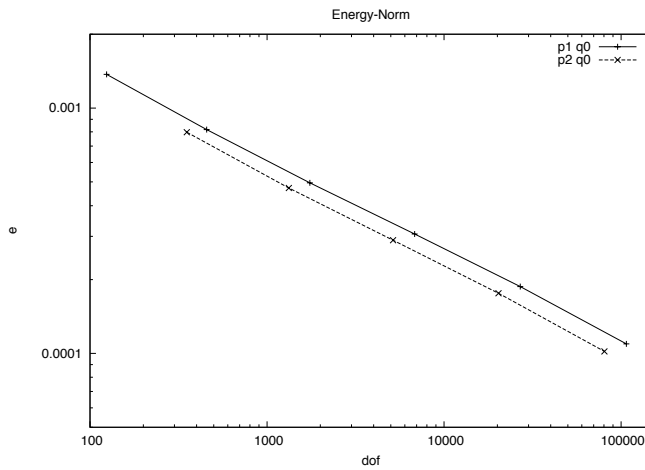
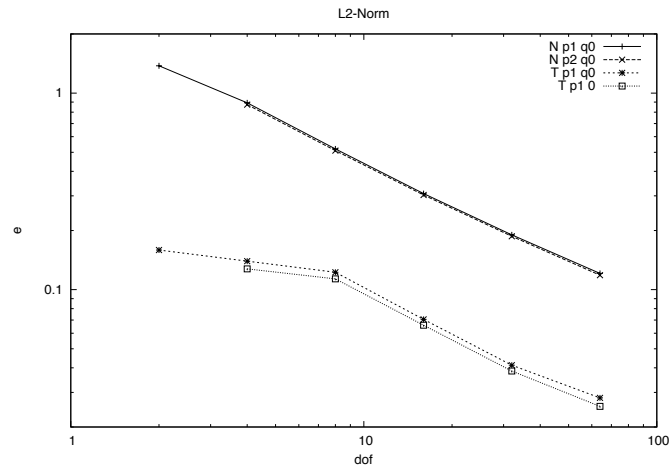


Abbildung 16: Fehler von u_h bezüglich der H^1 -Norm

Freiheitsgrade($\lambda_{,H}$)	$L^2, \lambda_{n,H}$	ratio	$L^2, \lambda_{t,H}$	ratio
2	1.3767	-	0.1591	-
4	0.8919	0.626	0.1395	0.189
8	0.5200	0.778	0.1225	0.188
16	0.3080	0.755	0.0706	0.796
32	0.1900	0.697	0.0412	0.775
64	0.1210	0.651	0.0281	0.552

Tabelle 10: Fehler von λ_H in der L^2 -Norm für $p = 1, q = 0$

$2 \cdot h^2 \approx H \approx 2 \cdot h^1$ gelten muss, da nach Theorem 8 beide Vernetzungen relevant sind. Allerdings zeigt sich in der Praxis auch, daß zusätzlich zum Größenverhältnis, die Lage der Freiheitsgrade im Kontaktgebiet eine Rolle spielt, vgl. Bemerkung 12.

Abbildung 17: Fehler von λ_H bezüglich der L^2 -Norm

Freiheits- grade($\lambda_{,H}$)	$L^2, \lambda_{n,H}$	ratio	$L^2, \lambda_{t,H}$	ratio
4	0.8735	-	0.1276	-
8	0.5099	0.776	0.1134	0.170
16	0.3031	0.750	0.0659	0.783
32	0.1869	0.697	0.0385	0.774
64	0.1184	0.658	0.0256	0.597

Tabelle 11: Fehler von λ_H in der L^2 -Norm für $p = 2, q = 0$

Im dreidimensionalen Fall erhält man bei reibungsbehafteten Kontaktproblemen einen zweidimensionalen tangentialen Lagrangemultiplikator. Dies wird in folgendem Beispiel illustriert.

Beispiel 6. Es wird ein statischer Kontakt mit Coulomb Reibung mit Reibkoeffizient $\xi = 0.1$ betrachtet. Dazu sind zwei Quader $\Omega^1 := [-3, -1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, $\Omega^2 := [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ in der in Abbildung 21a dargestellten Konfiguration gegeben. Die Materialparameter sind identisch und lauten $E^l = 1000, \nu^l = 0.25, l = 1, 2$. Aus den angreifenden Kräften $F_N^1 := (0, 5, 5)$ und $F_N^2 := (-10, 0, 0)$ ergibt sich resultierende Deformation 21b.

Interessanter ist die Verteilung der Normal und Tangentialkräfte. Die Normalkräfte sind in Abbildung 22 dargestellt. Entsprechend ergibt sich die Verteilung der Tangentialkräfte in 23. Hier ist die Norm des Lagrange Multiplikators λ_t farbig dargestellt. Die Vektoren geben die Richtung der Tangentialkräfte an. Man erkennt, dass die Tangentialkräfte im Bereich der höchsten Normalkräfte am größten sind. Die Richtung der Tangentialkräfte ergibt sich aus der Richtung der Deformation.

Fazit der numerischen Untersuchungen

Durch die numerischen Ergebnisse wird die in Kapitel 3.2.5 hergeleitete a priori Konvergenzabschätzung bestätigt. Dabei ist zu beachten, dass

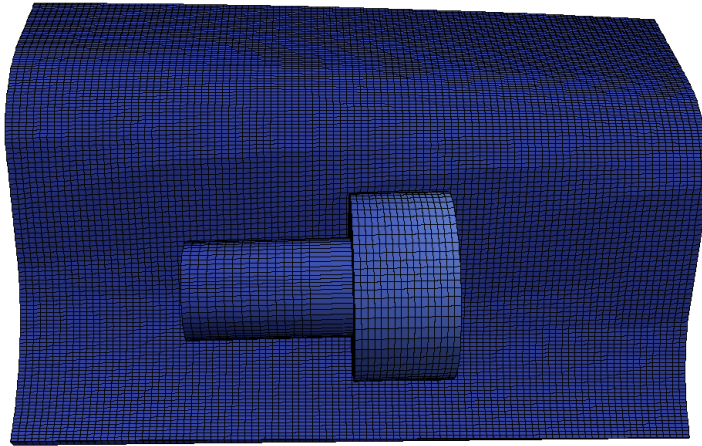


Abbildung 18: Schleifstift und Werkstück im Kontakt

eine Konvergenzordnung nahe an $\mathcal{O}(h)$ wie in Beispiel 1 im Allgemeinen nicht zu erwarten ist. Stattdessen erhält man üblicherweise eine Konvergenzordnung von etwa $h^{3/4}$, wie auch die Untersuchungen in [34] gezeigt haben. Die Stabilität der Diskretisierung ist nach den Untersuchungen aus Beispiel 2 für Paare $q := p - 1$ und $H = 2h$ gesichert. Die Beispiele 5 und 6 zeigen die Zuverlässigkeit der Diskretisierung für Anwendungen in 3d.

Analog zu den Ergebnissen bei einseitigen Kontaktproblemen, siehe zum Beispiel [55, 20, 87], ergibt sich eine stabile Diskretisierung auch durch Paarungen der Form $q := p - 2$ und $H = h$. Im einseitigen Fall ist so die Verwendung der gleichen Diskretisierung möglich, was für die Implementierung eine Erleichterung ist. Bei Mehrkörperkontaktproblemen ist jedoch immer eine Auswertung auf verschiedenen Diskretisierungen nötig, so dass die zusätzliche Vergrößerung nur eine unwesentliche Zusatzaufgabe ist.

Es hat sich gezeigt, dass die Verwendung höherer Polynomansätze nicht zu einer Verbesserung der Konvergenzordnung führt. In Kapitel 5.1.3 wird durch adaptive Verfeinerungsstrategien eine optimale Konvergenzordnung für Ansätze höherer Ordnung erzielt, so dass die Verwendung höherer Polynomansatz durchaus sinnvoll ist.

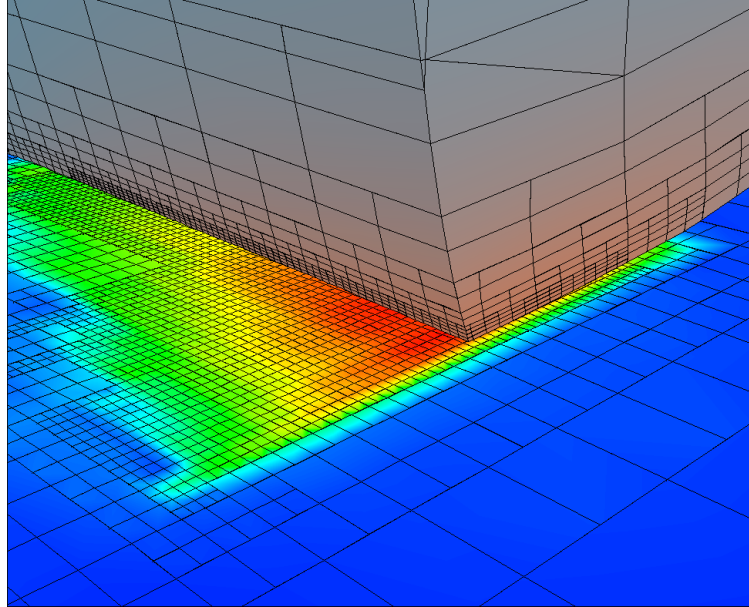
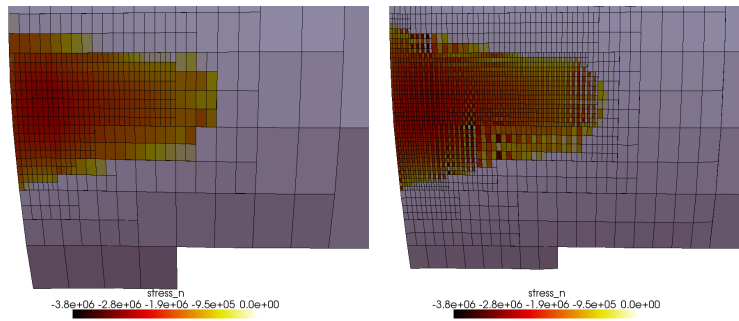
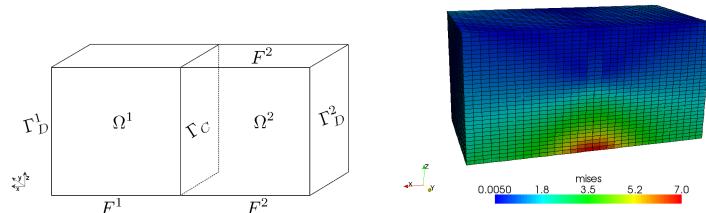


Abbildung 19: Detailaufnahme der Kontaktsituation



(a) Stabile Diskretisierung $p = 1, q = 0, H = 2 \cdot h$ (b) Instabile Diskretisierung $p = 1, q = 0, H = h$

Abbildung 20: Lagrange Multiplikator für verschiedene Diskretisierungen



(a) Problemstellung von Beispiel 5 (b) resultierende Deformation in y -Richtung

Abbildung 21: Beispiel 5: reibungsbehafteter statischer Kontakt

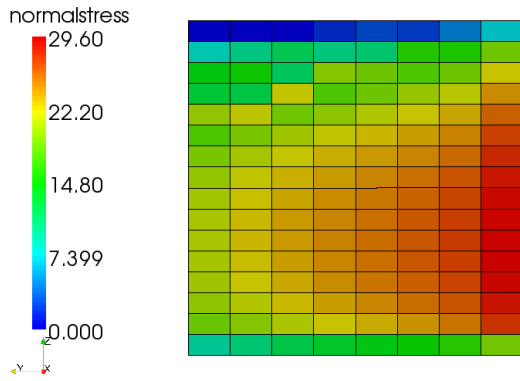


Abbildung 22: Normalkräfte anhand von λ_n

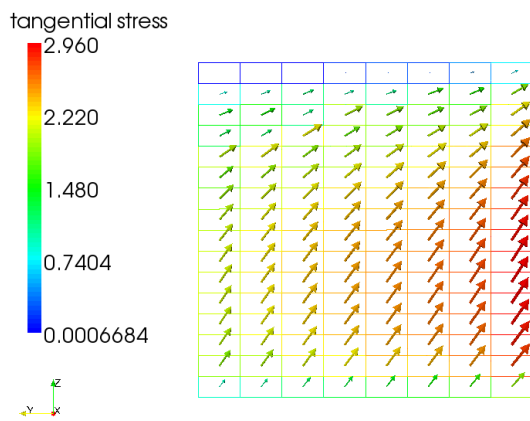


Abbildung 23: Tangentialkräfte anhand von λ_t

Dynamische Kontaktprobleme führen zu hyperbolischen Gleichungen mit Nebenbedingungen. Für die Zeitdiskretisierung von dynamischen Kontaktproblemen sind verschiedene Ansätze in der Literatur zu finden. Algorithmen für dynamische Kontakt/Impakt-Probleme, die auf der Konservierung der Energie und der Momente basieren, sind in [4, 77] beschrieben. Spezielle Kontaktelemente in Verbindung mit Lagrange Multiplikatoren werden in [9] vorgestellt. In [96] wird eine Penalty-Methode genutzt, um die Kontaktsituation aufzulösen. Untersuchungen zu dynamischen Mehrkörperkontaktproblemen mit und ohne Reibung auf Basis der Mortardiskretisierung sind zum Beispiel in [66, 64] zu finden. In [39] wird das Newmarkverfahren für Kontaktprobleme durch eine spezielle L^2 -Projektion stabilisiert.

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die vorgestellten Diskretisierungsansätze aus Kapitel 3 auf dynamische Probleme übertragen werden können. Dazu werden die in [21] vorgestellten Methoden auf Mehrkörperkontaktprobleme übertragen, beziehungsweise die in [67, 64, 39] verwendeten Methoden an die vorgestellte Diskretisierung angepasst. Im folgenden Abschnitt werden zunächst die dynamischen Probleme und deren Diskretisierung vorgestellt. Zum Abschluss werden einige Beispiele gezeigt. In Kapitel 5.2 folgt die Erweiterung auf adaptive dynamische Methoden.

4.1 MODELLIERUNG UND DISKRETISIERUNG DYNAMISCHER KONTAKTPROBLEME

In diesem Kapitel wird die Modellierung und Diskretisierung von dynamischen Kontaktproblemen vorgestellt. Wie im statischen Fall wird zunächst der reibungsfreie Fall betrachtet, und anschließend die Übertragung auf reibungsbehaftete Kontaktprobleme vorgenommen. Die starke Formulierung wird dazu analog zum statischen Fall in eine Variationsungleichung überführt und so in den in Kapitel 2.1 vorgestellten Kontext gebracht.

Wie in Kapitel 3 werden zunächst nur Kontaktprobleme ohne Abstand in der Referenzkonfiguration behandelt. Die Erweiterung zu Kontaktproblemen mit Abstand erfolgt analog zum statischen Fall, vgl. Abschnitt 3.1.3. Für die algorithmische Umsetzung der Kontaktberechnung sei weiterhin auf Anhang A.1 verwiesen. Dort werden einige Bemerkungen zur Berechnung der Kontaktbedingung bei dynamischen Problemen gemacht. Diese muss im Allgemeinen für jeden Zeitschritt neu berechnet werden, da im dynamischen Fall, die Kontaktbedingung vom deformierten Zustand des jeweiligen Zeitschritt abhängt.

4.1.1 *Reibungsfreie dynamische Kontaktprobleme*

Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 wird zunächst die starke Formulierung eingeführt und daraus die schwache und gemischte Formulierung hergeleitet. Wie im statischen Fall wird zur Vereinfachung der Notation der abstandsfreie Fall betrachtet. Die Handhabung des dynamischen

Problems wird zunächst für das reibungsfreie Problem dargestellt. Im anschließenden Abschnitt folgt die Erweiterung auf reibungsbehaftete Kontaktprobleme.

Die starke Formulierung des dynamischen Kontaktproblems lautet

Problem 12. Finde $u \in \mathbf{W}^{2,\infty}(I; \mathbf{H}^1 \cap \mathbf{H}^2)$, so dass

$$\begin{aligned} \rho^l \ddot{u}^l - \operatorname{div}(\sigma(u^l)) &= f^l && \text{in } \Omega^l \times I \\ u^l &= 0 && \text{auf } \Gamma_D^l, \\ \sigma(u^l)n^l &= p^l && \text{auf } \Gamma_N^l, \\ &&& \text{und} \\ \sigma_{nn} &\leq 0 && \text{auf } \Gamma_C^l \\ [u]_n &\leq 0 && \text{auf } \Gamma_C^l \\ \sigma_{nt}(u^l) \cdot [u]_n &= 0 && \text{auf } \Gamma_C^l \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $u^0 = u_s$, $v^0 = v_s$.

Dabei wird die erste Ableitung nach der Zeit mit einem, die zweite Ableitung mit zwei Punkten gekennzeichnet. Die Funktion ρ^l beschreibt die Dichte im Gebiet Ω^l , und $I := (0, T)$ ist das Zeitintervall.

Die zugehörige schwache Formulierung führt zu folgender Variationsungleichung

Problem 13. Eine Funktion $u \in \mathbf{K} := \{\varphi \in \mathbf{W} \mid [\varphi]_n \leq 0\}$ ist eine schwache Lösung von Problem 12, wenn für alle $\varphi \in \tilde{\mathbf{K}}$

$$\begin{aligned} \langle \rho \ddot{u}, \varphi - u \rangle + a(u, \varphi - u) &\leq (f, \varphi) && (4.1) \\ (\sigma_n(u), [\dot{u}]_n) &= 0 \\ u(0) &= u_s \\ \dot{u}(0) &= v_s \end{aligned}$$

für fast alle Zeiten $t \in I$ gilt.

Hier ist der Raum W gegeben durch

$$\mathbf{W} := \left\{ \varphi \in L^2(I; \mathbf{H}_D^1) \left| \begin{array}{l} \dot{\varphi} \in L^2(I; \mathbf{H}_D^1), \\ \ddot{\varphi} \in L^2(I; \mathbf{H}_D^{-1}) \end{array} \right. \right\}$$

und die Menge $\tilde{\mathbf{K}}$ durch

$$\tilde{\mathbf{K}} := \left\{ \varphi \in \mathbf{H}_D^1 \mid [\varphi]_n \leq 0 \right\}.$$

Weiterhin seien $f \in L^2(I; \mathbf{H})$, $u_s \in \mathbf{H}_D^1$ und $v_s \in L^2$. Die sogenannte Persistenz-Bedingung (vgl. auch [87, Definition 4.1.1] und [73])

$$(\sigma_n(u), [\dot{u}]_n) = 0 \quad (4.2)$$

entspricht der Forderung nach Energieerhaltung. Eine Lösung der dynamischen Variationsungleichung von Problem 13 erfüllt diese Bedingung automatisch, wie in [73, 72] gezeigt wird. Für Näherungslösungen muss auf die Einhaltung dieser Bedingung jedoch geachtet werden. Für den

theoretischen Hintergrund sei zum Beispiel auf Laursen [76], Wriggers [107], Eck u. a. [42] verwiesen.

Die Diskretisierung der gemischten Formulierung erfolgt mittels der Rothe-Methode. Es wird also zunächst in der Zeit, dann im Raum diskretisiert. Als Lösungsverfahren in Zeitrichtung wird exemplarisch das Newmark-Verfahren [81] mit $\alpha = \beta = 1/2$ und ein stabilisiertes Newmark-Verfahren [73, 72] vorgestellt. Es ist zu beachten, dass bei dynamischen Mehrkörperkontaktproblemen das Newmark-Verfahren zu numerischen Oszillationen im Kontaktbereich führen kann, vgl. etwa [39, 64]. Diese ergeben sich daraus, dass der Prädiktorschritt des Newmarkverfahren nicht im zulässigen Bereich des Kontaktproblems liegen muss. Dadurch können sich falsche Kontaktkräfte ergeben, die Oszillationen hervorrufen. Dieses Phänomen wird in Beispiel 8 verdeutlicht.

Die Verwendung alternativer Zeitschrittverfahren, wie etwa das generalized- α Verfahren [31], ist auch möglich. Solche Zeitschrittverfahren führen zu quasistatischen Problemen des gleichen Typs, so dass die hier vorgestellten Methoden zur Lösung des Problems analog durchführbar sind. So wurden in [87] umfassende Untersuchungen verschiedener Zeitdiskretisierungen unter anderem für einseitige Kontaktprobleme untersucht. Im Allgemeinen muss die Persistenzbedingung 4.2 dann als zusätzliche Nebenbedingung erfüllt werden.

Sei im Folgenden das Zeitintervall I unterteilt in N äquidistante Teilintervalle $I_k := (t_{k-1}, t_k]$ mit der Länge $\tau = t_k - t_{k-1}$ und $0 := t_0 < t_1 < \dots < t_N := T$. Dann ist in jedem Zeitschritt eine Variationsungleichung der Form

$$\left(a^k, \varphi - v^k \right) + a \left(u^k, \varphi - v^k \right) \leq \left(F^k, \varphi - v^k \right) \quad (4.3)$$

zu erfüllen. Dabei ergeben sich die Werte für die Beschleunigung a^k und die Geschwindigkeit v^k aus dem Newmarkverfahren durch

$$\begin{aligned} a^k &= \frac{2}{\tau^2} \left(u^k - u^{k-1} \right) - \frac{2}{\tau} v^{k-1}, \\ v^k &= v^{k-1} + \frac{\tau}{2} \left(a^{k-1} + a^k \right). \end{aligned}$$

Die Startbeschleunigung a^0 ergibt sich dabei aus den Anfangswerten u^0 und v^0 als Lösung von

$$\left(a^0, \varphi \right) + a \left(u^0, \varphi \right) = \left(f(0), \varphi \right),$$

unter der Annahme, dass zu $t = 0$ kein Kontakt auftritt, siehe [68, Kapitel 9.1.1] für weitere Details. Die Variationsungleichung 4.3 lässt sich nach Einsetzen der Updateformeln gemäß Kapitel 2.1 in ein gemischtes Problem überführen:

Problem 14. Finde $(u^k, \lambda_n^k) \in \mathbf{H}_D^1 \times \Lambda_n$, so dass (u^k, λ_n^k) die Lösung von

$$\begin{aligned} c \left(u^k, \varphi \right) + b_n(\lambda^k, \varphi) &= \left(F^k, \varphi \right) \\ b_n \left(\mu - \lambda^k, u \right) &\leq 0. \end{aligned}$$

für alle $(\varphi, \mu) \in \mathbf{H}_D^1 \times \Lambda_n$ ist.

Dabei ergeben sich die Bilinearform c , sowie die rechte Seite F^k aus dem Update des Newmarkverfahrens als

$$c(v, \varphi) := (\rho v, \varphi) + \frac{1}{2} \tau^2 a(v, \varphi)$$

und

$$F^k := \frac{1}{2} \tau^2 f(t_k) + \rho u^{k-1} + \tau \rho v^{k-1}.$$

Bemerkung 13. Zur Vermeidung von numerischen Oszillationen wird in [53] eine Modifikation der Massenmatrix vorgeschlagen. Mit dieser lässt sich durch Problem 14 mit dem Newmark-Verfahren auch die Persistenzbedingung näherungsweise erfüllen. Die Lösungsverfahren aus Kapitel 3 lassen sich direkt auf die statischen Probleme übertragen. Allerdings ist die Erweiterung auf 3D Probleme schwierig, da die Modifikation der Massenmatrix in [53] nur für 2D Probleme betrachtet wird und eine direkte Übertragung nicht ersichtlich ist.

Stattdessen wird zur Vermeidung von numerischen Oszillationen und einer näherungsweisen Einhaltung der Persistenzbedingung nun das in [73, 72] vorgestellte modifizierte Newmark-Verfahren genutzt. Der zusätzliche Projektionsschritt führt hier zu einem etwas veränderten quasistatischem Problem:

Problem 15. Finde $(u^{k+1}, \lambda_n^{k+1}) \in \mathbf{H}_D^1 \times \Lambda_n$, so dass $(u^{k+1}, \lambda_n^{k+1})$ die Lösung von

$$\begin{aligned} & (\rho u^{k+1}, \varphi) + \frac{1}{4} \tau^2 a(u^{k+1}, \varphi) + b_n(\lambda^k, \varphi) \\ &= \frac{1}{4} \tau^2 (f(t^k) + f(t^{k+1}), \varphi) - \frac{1}{4} \tau^2 a(u^k, \varphi) + (\rho u_{\text{pred}}, \varphi) \\ & \quad b_n(\mu - \lambda^k, u^{k+1}) \leq 0. \end{aligned}$$

für alle $(\varphi, \mu) \in \mathbf{H}_D^1 \times \Lambda_n$ ist. Dabei ist der Prädiktorschritt $u_{\text{pred}} \in K^{n+1}$ die eindeutige Lösung von

$$(\rho u_{\text{pred}}, \varphi - u_{\text{pred}}) \leq (\rho u^k + \tau v^k, \varphi - u_{\text{pred}}) \quad \forall \varphi \in K^{n+1} \quad (4.4)$$

mit der konvexen zulässigen Menge K^{n+1} .

Das Geschwindigkeitsupdate ist gegeben durch

$$v^{n+1} = \frac{2}{\tau} u^{n+1} - \frac{1}{\tau} u_{\text{pred}} - \frac{1}{\tau} u^n \quad (4.5)$$

Bemerkung 14. Die Variationsungleichung 4.4 ist die Projektion der Deformation u_{pred} auf den zulässigen Bereich K^{n+1} im aktuellen Zeitschritt. Für mehr Details siehe [73, 72]. Im Gegensatz zum Standardverfahren erhält man also eine zusätzliche Projektion, die in jedem Zeitschritt zu lösen ist. Jedoch müsste in Problem 14 noch zusätzlich die Einhaltung der Persistenzbedingung 4.2 gefordert werden. Diese wird durch den Projektionsschritt im modifizierten Newmark-Verfahren 15 näherungsweise erfüllt. Zusätzlich werden Oszillationen des Lagrangemultiplikators vermieden.

Mit dem in Kapitel 3.2 definierten Raum V_n und der konvexen Menge $\Lambda_{H,n}$ ergibt sich so für jeden Zeitschritt ein quasistatisches Problem:

Problem 16. Finde $(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{H,n}^k) \in \mathbf{V}_h^k \times \Lambda_{H,n}^k$, so dass $(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{H,n}^k)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} & (\rho \mathbf{u}_h^{k+1}, \varphi_h) + \frac{1}{4} \tau^2 \mathbf{a}(\mathbf{u}_h^{k+1}, \varphi_h) + \mathbf{b}_n(\lambda_{H,n}^k, \varphi_h) \\ = & \frac{1}{4} \tau^2 (f(t_k) + f(t^{k+1}), \varphi_h) - \frac{1}{4} \tau^2 \mathbf{a}(\mathbf{u}_h^k, \varphi_h) + (\rho \mathbf{u}_{\text{pred},h}, \varphi_h) \\ & \mathbf{b}_n(\mu_H - \lambda_{H,n}^k, \mathbf{u}_h^{k+1}) \leq 0. \end{aligned}$$

für alle $(\varphi_h, \mu_H) \in \mathbf{V}_h^k \times \Lambda_{H,n}^k$ ist. Der Prädiktorschritt $\mathbf{u}_{\text{pred},h} \in \mathbf{K}^{n+1}$ ist die eindeutige Lösung von

$$(\rho \mathbf{u}_{\text{pred},h}, \varphi_h - \mathbf{u}_{\text{pred},h}) \leq (\rho \mathbf{u}_h^k + \tau \mathbf{v}_h^k, \varphi_h - \mathbf{u}_{\text{pred},h}) \quad \forall \varphi_h \in \mathbf{K}_h^{n+1}. \quad (4.6)$$

Der Index k an dem endlich dimensionalen Raum \mathbf{V}_h^k und dem Halbraum $\Lambda_{H,n}^k$ gibt an, dass für verschiedene Zeitschritte verschiedene Diskretisierungen gewählt werden können. Auf diese Weise lassen sich zeitlich adaptive Vernetzungen realisieren, siehe dazu auch Kapitel 5.2.

4.1.2 Dynamische reibungsbehaftete Kontaktprobleme

Dynamische Kontaktprobleme mit Reibung lassen sich analog zu reibungsfreien Kontaktproblemen behandeln, siehe [21, 35, 83]. Zunächst wird die starke Formulierung vorgestellt und ausgehend von dieser wird die Variationsformulierung hergeleitet. Analog zu Abschnitt 4.1.1 erhält man so nach einer geeigneten Diskretisierung in der Zeit quasistatische Probleme, die in der Struktur den statischen Kontaktproblemen gleichen.

Zunächst ist die starke Formulierung des dynamischen Kontaktproblems gegeben durch:

Definition 1. Finde $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(I; \mathbf{H}^1 \cap \mathbf{H}^2)$, so dass

$$\begin{aligned} \rho^l \ddot{\mathbf{u}}^l - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^l)) &= \mathbf{f}^l && \text{in } \Omega^l \times I \\ \mathbf{u}^l &= \mathbf{0} && \text{auf } \Gamma_D^l, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^l) \mathbf{n}^l &= \mathbf{p}^l && \text{auf } \Gamma_N^l, \\ \text{und} &&& \\ \sigma_n &\leq 0 && \text{auf } \Gamma_C^1 \\ [\mathbf{u}]_n &\leq 0 && \text{auf } \Gamma_C^1 \\ \sigma_{nt}(\mathbf{u}) \cdot [\mathbf{u}]_n &= 0 && \text{auf } \Gamma_C^1 \\ |\sigma_{nt}(\mathbf{u})| &\leq s && \text{auf } \Gamma_C^1 \\ |\sigma_{nt}(\mathbf{u})| < s &\Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}]_t = 0 && \text{auf } \Gamma_C^1 \\ |\sigma_{nt}(\mathbf{u})| = s &\Rightarrow \exists \zeta \in \mathbb{R}_{\geq 0} : [\dot{\mathbf{u}}]_t = -\zeta \sigma_{nt}(\mathbf{u}) && \text{auf } \Gamma_C^1. \end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_s$ und $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}_s$.

Die zugehörige Variationsungleichung ergibt sich wieder durch partielle Integration. Dazu seien analog zum statischen Fall die Reibungsbedingungen durch das nicht differenzierbare Funktional $j(\varphi) = (s, |[\varphi]_t|)_{\Gamma_C}$ gegeben mit der Funktion $s(t, \mathbf{x}) \geq 0$.

Problem 17. Finde eine Funktion $u \in \tilde{\mathbf{K}}$, mit $u(0) = u_s \in \mathbf{H}_D^1$ und $\dot{u}(0) = v_s \in \mathbf{L}^2$, so dass für alle $\varphi \in \tilde{\mathbf{K}}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \rho \ddot{u}, \varphi - \dot{u} \rangle + a(u, \varphi - \dot{u}) \\ + j(\varphi) - j(\dot{u}) \geq (f, \varphi - \dot{u}). \end{aligned}$$

Dabei ist die konvexe Menge $\tilde{\mathbf{K}}$, die in Abschnitt 4.1.1 definierte Menge. Nach einer Diskretisierung in Zeitrichtung mittels des Newmarkverfahrens erhält man durch Einsetzen in Problem 17 wie im reibungsfreien Fall quasistatische Probleme in jedem Zeitschritt. Man erhält so die Variationsungleichung

$$\begin{aligned} (\rho a^n, \varphi - v^n) + a(u^n, \varphi - v^n) \\ + j(\varphi) - j(v^n) \geq (f, \varphi - v^n). \end{aligned}$$

für Funktionen u^n, v^n und a^n , die sowohl die Anfangsbedingungen erfüllen müssen als auch die Update Formeln für die Beschleunigung und Geschwindigkeit aus dem Newmarkverfahren.

Für das modifizierte Newmarkverfahren aus [73, 72] erhält man so für den reibungsbehafteten Fall analog zum reibungsfreien quasistatischen Problem 15 folgendes quasistatische Problem:

Problem 18. Finde $(u^k, \lambda_n^k, \lambda_t^k) \in \mathbf{V}^k \times \Lambda_n^k \times \Lambda_t^k$, so dass $(u^k, \lambda_n^k, \lambda_t^k)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} (\rho u^{k+1}, \varphi) + \frac{1}{4} \tau^2 a(u^{k+1}, \varphi) + b_n(\lambda^k, \varphi) + b_t(\lambda_t^k, \varphi) \\ = \frac{1}{4} \tau^2 (f(t_k) + f(t^{k+1}), \varphi) - \frac{1}{4} \tau^2 a(u^k, \varphi) + (\rho u_{\text{pred}}, \varphi) \\ b_n(\mu - \lambda^k, u^{k+1}) + b_t(\mu_t - \lambda_t^k, v^k) \leq 0. \end{aligned}$$

für alle $(\varphi, \mu_n, \mu_t) \in \mathbf{V}^k \times \Lambda_n^k \times \Lambda_t^k$ ist, wobei u_{pred} die Lösung der Variationsungleichung 4.6 ist.

Dabei sind die Mengen Λ_n^k und Λ_t^k die zulässigen Mengen für die Lagrange Multiplikatoren, vgl. Kapitel 3, Problem 5. Mittels der in Kapitel 3.2 eingeführten Räume erhält man das diskrete Problem

Problem 19. Finde $(u^k, \lambda_n^k, \lambda_t^k) \in \mathbf{V}_h^k \times \Lambda_{H,n}^k \times \Lambda_{H,t}^k$, so dass $(u^k, \lambda_n^k, \lambda_t^k)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} (\rho u_h^{k+1}, \varphi_h) + \frac{1}{4} \tau^2 a(u_h^{k+1}, \varphi_h) + b_n(\lambda_H^k, \varphi_h) + b_t(\lambda_{t,H}^k, \varphi_h) \\ = \frac{1}{4} \tau^2 (f(t_k) + f(t^{k+1}), \varphi_h) - \frac{1}{4} \tau^2 a(u_h^k, \varphi_h) + (\rho u_{\text{pred},h}, \varphi_h) \\ b_n(\mu_H - \lambda_H^k, u_h^{k+1}) + b_t(\mu_{t,H} - \lambda_{t,H}^k, v_h^k) \leq 0. \end{aligned}$$

für alle $(\varphi, \mu_n, \mu_t) \in \mathbf{V}_h^k \times \Lambda_{H,n}^k \times \Lambda_{H,t}^k$ ist, wobei $u_{\text{pred},h}$ eine FEM-Lösung der Variationsungleichung 4.6 ist.

Dabei wird der Prädiktorschritt $u_{\text{pred},h}$, wie im reibungsfreien Fall, mit derselben Diskretisierung wie das eigentliche Problem gelöst. Die Geschwindigkeit ist gegeben durch die Update-Formel 4.5.

Bemerkung 15. Wie im statischen Fall erhält man das Coloumbsche Reibungsgesetz, indem man $s := \xi |\sigma_{nn}(u)|$ mit der Reibungskonstante $\xi \geq 0$ wählt und ein zusätzliches Fixpunktverfahren einführt, siehe Kapitel 3, Bemerkung 11.

4.2 NUMERISCHE ERGEBNISSE

Nun folgen einige numerische Untersuchungen zu den zuvor vorgestellten Diskretisierungen. Insbesondere ist nach den Vorbemerkungen, die Energieerhaltung bei reibungsfreiem Kontakt, sowie das Auftreten numerischer Oszillationen zu beachten. Zur Untersuchung der Energieerhaltung und dem Einfluss von Reibung wird zunächst folgendes Beispiel betrachtet.

Beispiel 7. Gegeben seien zwei 2-dimensionale Blöcke, wobei der obere Block eine abgerundete untere Kante besitzt, um Eckensingularitäten im Kontakt zu vermeiden. Die Ausgangssituation ist in Abbildung 24 zu sehen. Das obere

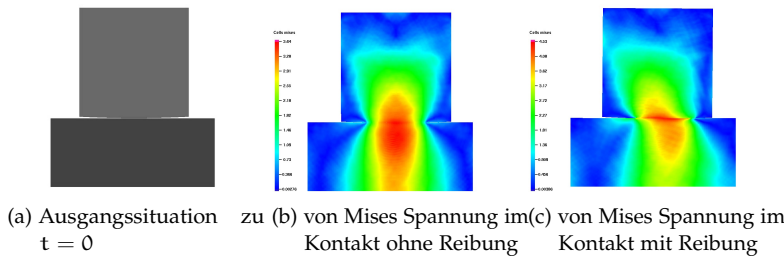


Abbildung 24: Beispiel 7: Ausgangssituation (a), reibungsfreier Kontakt (b), reibungsbehafteter Kontakt(c)

Gebiet ist gegeben durch $\Omega^1 = [4.1, 12.1] \times [0, 8]$, mit einem Teilkreisbogen am unteren Rand, gegeben durch $r = 80, m = (8.1, 80)$. Das zweite Gebiet ist definiert durch $\Omega^2 = [2, 12] \times [-5, -0.02]$. Der untere Rand von Gebiet 2 ist in y-Richtung festgelegt, so dass eine Bewegung nur in x-Richtung möglich ist. Die Gebiete besitzen eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0^1 = (0.2, -0.1)$ bzw. $v_0^2 = (-0.1, 0)$. Der vertikale Geschwindigkeitsanteil von v_0^1 führt zu den in Abbildung 24 dargestellten Kontaktsituationen. Das Zeitintervall I ist gegeben durch $[0, 2]$, die Materialparameter sind $E = 500, \nu = 0.3$ and $\rho = 1$ für beide Gebiete. Die Diskretisierung erfolgt durch eine globale Verfeinerung im Ort mit 16384 Elementen in Gebiet Ω^1 und 32768 Elementen in Gebiet Ω^2 und einer konstanten Zeitschrittweite von $\tau = 0.005$.

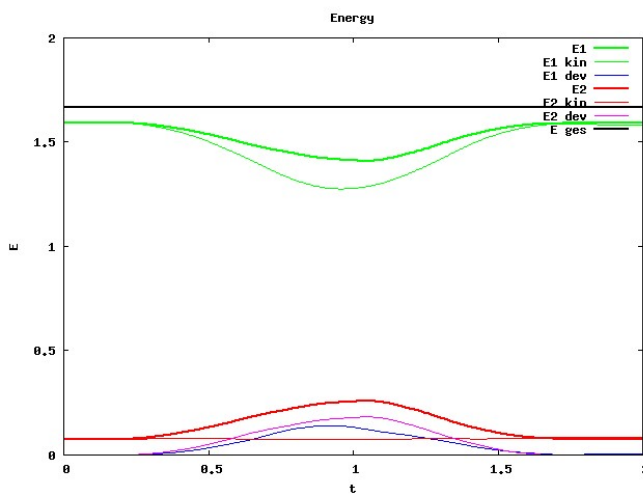
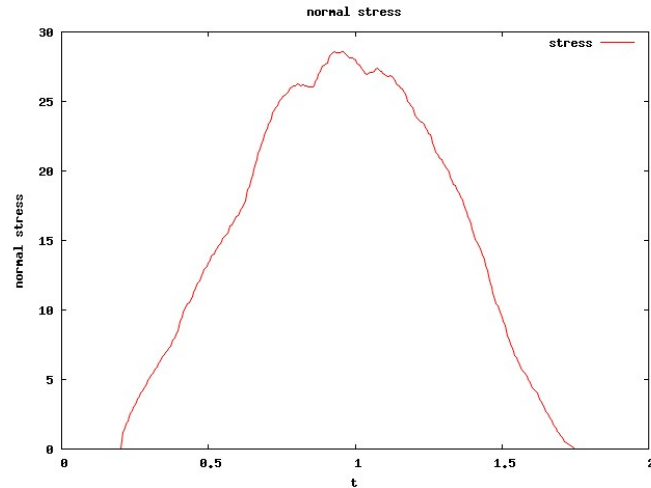
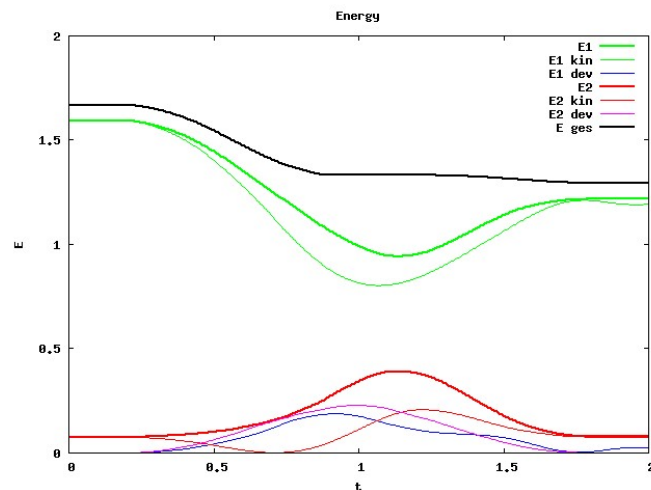


Abbildung 25: Energiediagramm zu Beispiel 7 mit $\xi = 0$

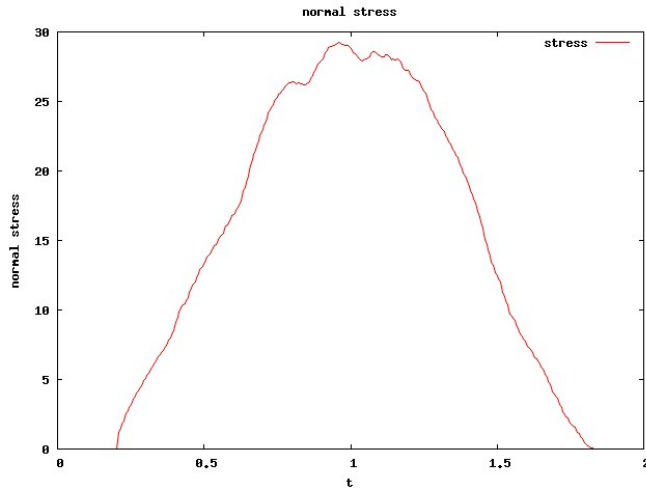
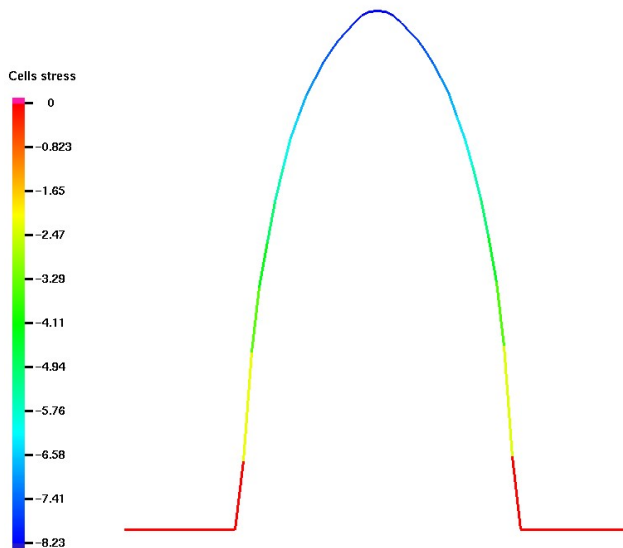
Abbildung 26: Normalspannungen zu Beispiel 7 mit $\xi = 0$

Im reibungsfreien Kontaktfall bleibt die Energie näherungsweise erhalten, siehe Abbildung 25. Die Kontaktkräfte über die Zeit, die durch den Lagrangemultiplikator λ_n repräsentiert werden, sind in Abbildung 26 zu sehen. Hier wird das Integral über den Kontaktrand $\lambda_{\text{tot}} = \int_{\Gamma_C} \lambda_n d\Gamma_C$ über die Zeit angezeigt.

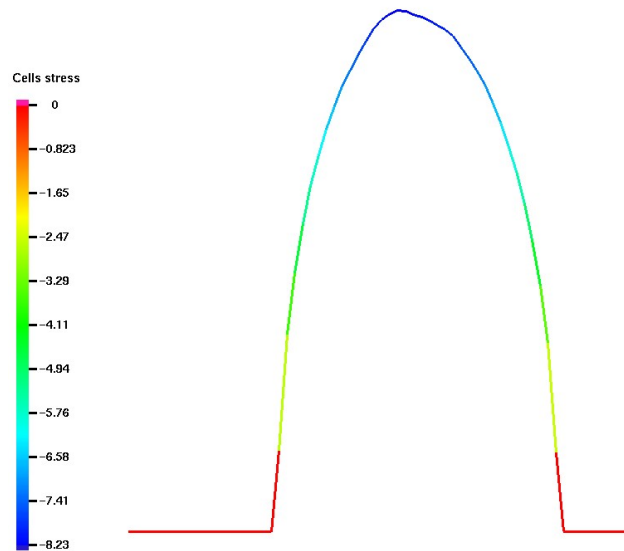
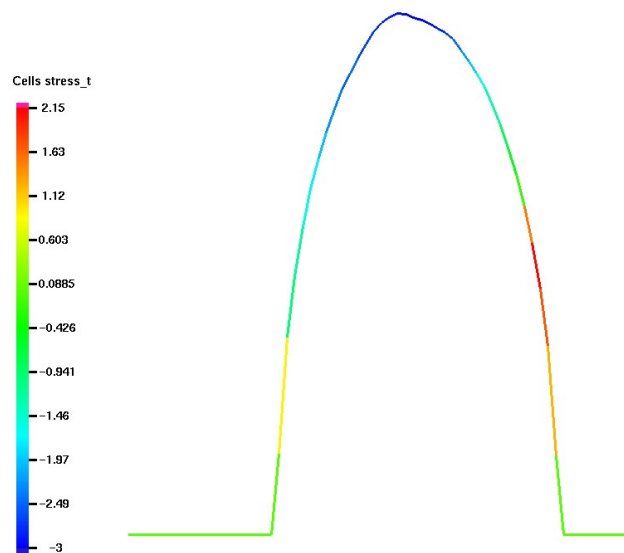
Abbildung 27: Energiediagramm zu Beispiel 7 mit $\xi = 0.5$

Ein reibungsbehafteter Kontakt führt zu Energieverlust. Für Coulomb-Reibung mit Reibungskoeffizient $\xi = 0.5$ ist der Energieverlauf in Abbildung 27 zu sehen. Die Integralwerte des Lagrange Multiplikators λ_n über die Zeit sind in 28 abgebildet. Betrachtet man nur den Integralwert λ_{tot} , so unterscheiden sich die Verläufe für den reibungsfreien und reibungsbehafteten Fall nicht. Jedoch unterscheiden sich die Kontaktkräfte sehr wohl, wie in den Abbildungen 29 und 30 sowie 31 zu sehen ist. Hier ist der Lagrange Multiplikator für den Zeitpunkt $t = 0.52$ dargestellt.

Die vorgestellte Diskretisierung führt also auch für dynamische Kontaktprobleme zu verlässlichen Lösungen. In einem zweiten Beispiel wird die Problematik numerischer Oszillationen dargestellt. Dazu wird das in [39] vorgestellte stabilisierte Newmarkverfahren genutzt.

Abbildung 28: Normalspannungen zu Beispiel 7 mit $\xi = 0.5$ Abbildung 29: λ_n , reibungsfreier Fall

Beispiel 8. Betrachtet wird ein dynamischer Kontakt zwischen 3 Gebieten. Die Ausgangskonfiguration ist in Abbildung 32a dargestellt. Das Gebiet Ω^0 ist durch den äußeren Ring mit einem inneren Radius von $r_0^0 := 2$ und einem äußeren Radius $r_1^0 := 3$ gegeben. Das Gebiet Ω^1 ist durch die innere Scheibe mit $r_0^1 := 0.5$ und $r_1^1 := 1.5$ gegeben und besitzt eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0^1 = (0, -3)$. Die anderen Gebiete besitzen eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0^0 = v_0^2 = 0$. Dadurch wird zunächst ein Kontakt zwischen der inneren und der äußeren Scheibe auftreten und später ein weiterer Kontakt zwischen äußerer Scheibe und Gebiet $\Omega^2 := [-5, 5] \times [-5, -3.05]$. Die Dichte der Gebiete ist gegeben durch $\rho^0 = \rho^2 = 1$ und $\rho^1 = 0.5$. Die möglichen Kontaktränder sind zum einen der äußere Radius von Gebiet Ω^0 und die obere Kante von Gebiet Ω^2 , sowie der äußere Rand von Gebiet Ω^1 und der innere Rand von Ω^0 . Das Problem wird mit einer globalen Verfeinerung und einer festen Zeitschrittweite gelöst. Dabei ist das Zeitintervall gegeben durch $I = [0, 0.5]$ und die Zeitschrittweite beträgt $\tau = 0.000125$. Die Gebiete bestehen aus 16384, 4096, bzw. 16384 Elementen.

Abbildung 30: λ_n , bei $\xi = 0.5$ Abbildung 31: λ_t , bei $\xi = 0.5$

Exemplarisch ist in [Abbildung 33](#) der deformierte Zustand zu verschiedenen Zeitschritten zu sehen.

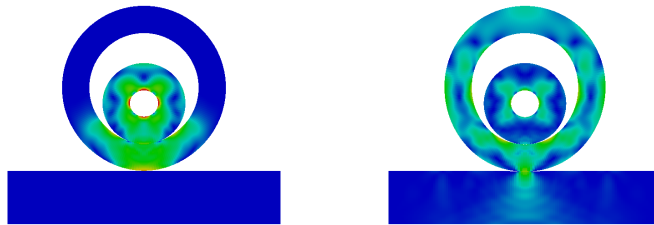
Der Einfluss numerischer Oszillationen lässt sich anhand des Verlaufs des Lagrangemultiplikators λ_{tot} sehen. In [Abbildung 34](#) ist zunächst der Verlauf zwischen 0 und 0.45 zu sehen, in [Abbildung 35](#) ein Detail Ausschnitt. Hier erkennt man deutlich, dass das ungestabilisierte Verfahren den Multiplikator in einem Zeitschritt überschätzt und im nächsten unterschätzt. Dagegen liefert das stabilisierte Verfahren einen besseren Verlauf.

Bemerkung 16. Die [Beispiele 7 und 8](#) zeigen, dass die Kontaktsituation bei dynamischen Problemen korrekt erkannt und wiedergegeben wird. Es ist zu beachten, dass die Zeitschrittverfahren das Problem in der undeformierten Konfiguration betrachten. Zur Berechnung der aktuellen Kontaktsituation ist



(a) Startkonfiguration von Beispiel 8 (b) Deformierter Zustand bei $t = 0.24$
mit von Mises Spannungen

Abbildung 32: Ausgangssituation und deformierter Zustand



(a) Deformierter Zustand bei $t = 0.2$ mit von Mises Spannungen (b) Deformierter Zustand bei $t = 0.26$
mit von Mises Spannungen

Abbildung 33: Deformierter Zustand / von Mises Spannungen

jedoch der deformierte Zustand zu verwenden. Dies erfordert insbesondere bei dynamischen Problemen mit einer zum Kontaktrand tangentialen Bewegung, wie in Beispiel 7, eine zeitabhängige Neuassemblierung der Kontaktnebenbedingung, da die Elemente der Gebiete, die miteinander in Kontakt stehen, sich dynamisch ändern. Eine weitere Herausforderung liegt in der korrekten Abstandsberechnung, wie in Beispiel 8 zu sehen. Eine genauere Erläuterung dieser Problematik ist in Anhang A.1 zu finden.

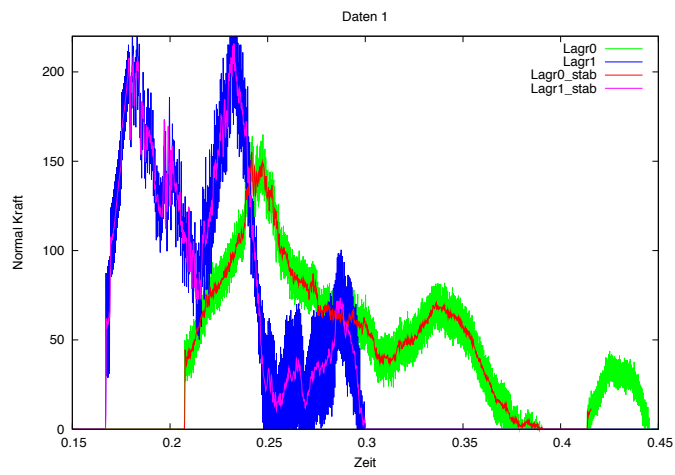


Abbildung 34: Verlauf des Lagrange Multiplikators λ_{tot} .

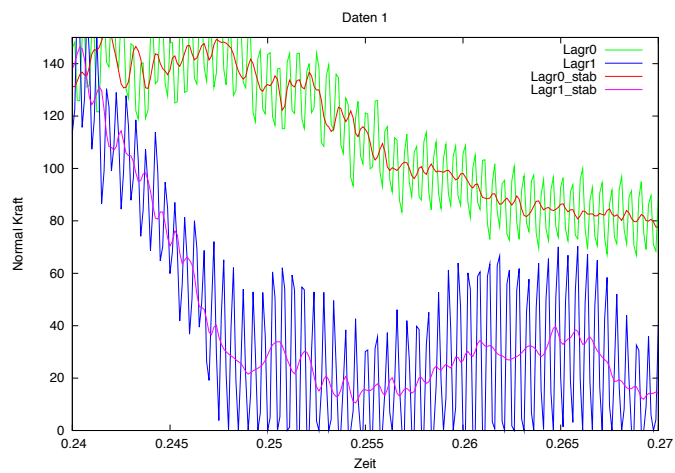


Abbildung 35: Detailausschnitt des Verlaufs aus Abbildung 34

In diesem Kapitel werden adaptive Methoden für statische und dynamische Kontaktprobleme vorgestellt. Unter adaptiven Methoden ist hier eine hierarchische lokale Verfeinerung der Diskretisierung aufgrund eines Fehlerschätzers zu verstehen, der den lokalen Diskretisierungsfehler einer FE-Lösung misst. Häufig messen Fehlerschätzer globale Größen, wie etwa eine Norm der Lösung auf dem gesamten Gebiet, während man an lokalen Größen interessiert ist. Lokale Größen lassen sich mittels dual gewichteten residualen Fehlerschätzern (DWR) abschätzen. Dazu wird für ein beliebiges Fehlerfunktional ein duales Problem gelöst, mit dessen Hilfe sich der lokale Diskretisierungsfehler bezüglich des Funktionals abschätzen lässt.

Zunächst wird in Abschnitt 5.1.2 ein residualer Fehlerschätzer für das reibungsfreie Kontaktproblem hergeleitet, der Herleitung für das reibungsbehaftete Kontaktproblem folgt anschliessend analog. Residuale Fehlerschätzer für Variationsgleichungen sind allgemein bekannt und zum Beispiel in [2, 104] beschrieben. Bei Variationsungleichungen ist bei der Herleitung von Fehlerschätzern die zulässige Menge K zu beachten, so dass der Fehlerschätzer von der Definition dieser Menge abhängt, in dem hier betrachteten Fall also von der Kontaktbedingung. In Abschnitt 5.1.4 wird die dual gewichtete Methode angewandt, um Fehlerschätzer vom "Goal-oriented" Typ herzuleiten. Dazu wird ein geeignetes duales Problem definiert und anschliessend auf dessen Basis ein Fehlerschätzer hergeleitet. Schliesslich wird in Abschnitt 5.2 der Übergang zu dynamischen adaptiven Methoden vorgenommen.

5.1 ADAPTIVE METHODEN FÜR STATISCHE KONTAKTPROBLEME

In Anwendungen ist häufig der Kontaktbereich lokal sehr begrenzt und im Vergleich zum globalen Gebiet klein. Diese Eigenschaften erfordern eine adaptive Vernetzung des Gebietes. Für die hier verwendete gemischte Formulierung von Kontaktproblemen ist sicherzustellen, dass neben der Verbesserung des Ergebnisses die Stabilität des zu lösenden Problems weiter gegeben ist. Neben dieser prinzipiellen Problematik ist die Frage nach geeigneten Fehlerindikatoren zu stellen. Die in dieser Arbeit betrachteten a posteriori Fehlerschätzer geben eine obere Schranke des tatsächlichen Diskretisierungsfehlers an und ermöglichen so eine adaptive hierarchische Verfeinerung. Im Falle der dual gewichteten Methode wird ein Fehlerschätzer hergeleitet, der ohne Ungleichungen auskommt.

Problematisch bei der Herleitung von Fehlerschätzern für Variationsungleichungen ist, daß man im Gegensatz zu Variationsgleichungen keine Galerkinorthogonalität hat. Verschiedene Ansätze für Fehlerschätzer für das Hindernisproblem sind etwa in [27, 70, 63, 30, 103, 82, 8] zu finden. Weitere Ideen finden sich in [3, 98]. Für das Signorini-Problem sind residuale Fehlerschätzer in [62, 94] hergeleitet worden. Fehlerschätzer für den Mortar-Ansatz werden in [105, 106] betrachtet. In Abschnitt 5.1.2 wird auf Basis des Ansatzes aus [27] und [94, 95] ein geeigneter residualer Fehlerschätzer für Mehrkörperkontaktprobleme hergeleitet.

Ein Überblick über die dual gewichtete Methode wird etwa in [10, 11, 12, 7] gegeben. Weitergehende Ansätze für Fehlerschätzer des Goal-Oriented Typs sind in [84, 33, 86, 29, 85] zu finden. Für das Signorini Problem werden Goal-Oriented Ansätze in [25] für die primale Formulierung und für die gemischte Formulierung in [99, 101, 100] vorgestellt. Basierend auf dem Ansatz aus [92] wird in Abschnitt 5.1.4 ein Fehlerschätzer vom Goal-Oriented Typ hergeleitet.

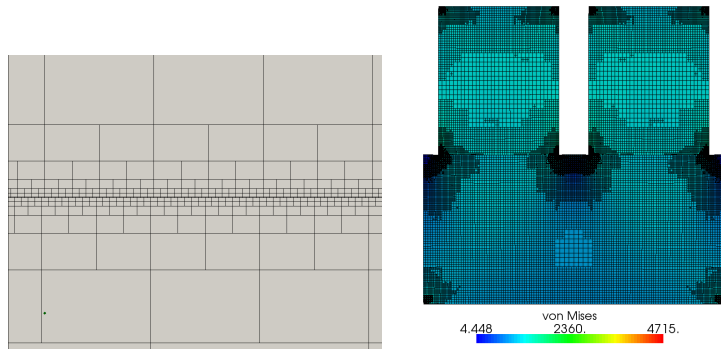
5.1.1 Adaptive Netzverfeinerungen

Vor der Definition geeigneter Fehlerschätzer wird die Problematik adaptiver Verfeinerungsstrategien behandelt. Adaptive Verfeinerungsstrategien liefern auf Grundlage eines Indikators eine lokale Verfeinerung eines bestehenden Netzes. Die Strategie bestimmt dabei welche Elemente verfeinert werden, welche unverändert bleiben und welche eventuell vergrößert werden. Ziel solcher Strategien ist es, den geschätzten Fehler der Diskretisierung zu verkleinern. Einerseits kann solange verfeinert werden, bis eine gewählte Schranke unterschritten wird, andererseits kann durch teilweise Vergrößerung versucht werden, für eine vorgegebene Anzahl an Elementen den Fehler zu minimieren. Ein Überblick über adaptive Strategien findet sich zum Beispiel in [7, Kapitel 4.2] und [104, Kapitel 4.1]. Eine reine Verfeinerungsstrategie heisst h-Strategie. Wird analog statt der Verfeinerung der Polynomgrad der Ansatzfunktionen auf einem Element variiert, so spricht man von p-Methoden. Die Kombination beider Verfahren ist entsprechend die hp-Methode.

In den folgenden Abschnitten wird auf Grundlage der dort hergeleiteten Fehlerschätzer die h-Methode genutzt. Es gibt verschiedene Strategien zur Verfeinerung. So wird bei der "Fixed-Fraction"-Strategie ein fester Prozentsatz der Elemente basierend auf dem gewählten Indikator verfeinert. In dieser Arbeit findet die "Optimal-Mesh"-Methode, [88, 89], Verwendung. Es ist zu beachten, dass bei Mehrkörperkontaktproblemen auch die Verfeinerungsstrategie gekoppelt werden sollte, um gute adaptive Netze zu erhalten, siehe dazu auch die Beispiele in Kapitel 5.1.5.

Bei Mehrkörperkontaktproblemen ist die Stabilität der Diskretisierung gemäß Theorem 8 zu garantieren. Dazu muß die Bedingung lokal erfüllt sein. Mit den Ergebnissen aus 3.3 ist also für eine feste Wahl der Polynomgrade p für die Deformationen und q für den Lagrange Multiplikator lokal sicherzustellen, dass $H = 2 \cdot h$ gilt. Wird also für das Gebiet Ω^1 durch die Verfeinerungsstrategie ein Element im Kontaktbereich verfeinert, so muß das gegenüberliegende Element von Gebiet Ω^2 auch verfeinert werden, um Stabilität sicherzustellen. Bei nicht zueinander passenden Netzen im Kontaktbereich ist diese Bedingung nur schwer sicherzustellen, da eine Überlappung der Elemente über den gesamten Rand so im Zweifelsfall zu einer im Randgebiet uniformen Verfeinerung führen wird (siehe etwa Abbildung 36a). Auf diese Weise ist zwar die Stabilität gesichert, jedoch kann durch diese zusätzlichen Verfeinerungen die Optimalität der Netze bezüglich der betrachteten Fehlergrösse verloren gehen.

In der Praxis zeigt sich, dass lokale Verfeinerungen zu stabilen Diskretisierungen führen, wenn nur die im aktuellen Netz gekoppelten Elemente bei der Stabilisierung verfeinert werden, siehe z.B. Abbildung 36b. Dieses Vorgehen kann dazu führen, dass die Stabilitätsbedingung lokal verletzt wird, allerdings nur für Elemente, die auch mit weiteren



(a) überlappende Diskretisierung aus Beispiel 2 (b) lokale Verfeinerung aus Beispiel 10

Abbildung 36: lokale Zuordnung der Elemente im Kontaktbereich

Elementen gekoppelt sind für die die Stabilitätsbedingung erfüllt ist. Weiterhin zeigt die Stabilitätsuntersuchung in Beispiel 2 aus Kapitel 3.3, dass eine Überlappung der gekoppelten Elemente eine stabilisierende Eigenschaften besitzt, so dass man für lokal nicht stabile Diskretisierungen trotzdem ein stabiles Verhalten erhalten kann. Allerdings ist in diesem Beispiel auch zu sehen, dass dieses Phänomen nicht auf hohe Polynomgrade zu verallgemeinern ist.

Dieses Vorgehen ist insbesondere für die hp-Methode fragwürdig, da man hier nicht nur die Elementgröße, sondern auch den lokalen Polynomgrad anpassen müsste, so daß eine algorithmische Stabilisierung schwierig ist. In Anhang A.2 wird der angewandte Stabilisierungsmechanismus näher erläutert.

5.1.2 Residualer Fehlerschätzer

In diesem Abschnitt wird ein residualer Fehlerschätzer für reibungsfreie Kontaktprobleme hergeleitet. Dazu wird der Ansatz aus [27, 94] auf Mehrkörperkontaktprobleme erweitert. Bei diesem Ansatz wird eine Verbindung zu Variationsgleichungen hergestellt, so dass Fehlerschätzer für Variationsgleichungen zur Abschätzung genutzt werden können. Die Herleitung des Fehlerschätzers kann direkt mit dem allgemeinem Ansatz für elliptische Minimierungsprobleme in [94, Kapitel IV.1] vorgenommen werden. Für das reibungsfreie Kontaktproblem 3 wird dies im folgenden Abschnitt im Detail durchgeführt. Die Herleitung folgt in den wesentlichen Teilen der Herleitung eines Fehlerschätzers für das Signorini Problem in [93] beziehungsweise des vereinfachten Signorini Problems in [95]. Einen Fehlerschätzer für das reibungsbehaftete Kontaktproblem erhält man analog. Dieser wird anschliessend mittels des allgemeinen Ansatzes aus [94, Kapitel IV.1] hergeleitet.

Reibungsfreie Kontaktprobleme

Sei im Folgenden (u, λ) Lösung von Problem 6 und (u_h, λ_H) die Lösung des zugehörigen diskreten Problems 10. Zur Abkürzung der Schreibweise wird hier in allen Termen, in denen bezüglich δ definierte Größen auftreten, wie zum Beispiel des Normalenvektors n_δ , der Index weggelassen.

Die grundlegende Idee besteht in der Betrachtung folgenden Hilfsproblems.

Problem. Finde $u_0 \in \mathbf{H}_D^1$, so dass
 $a(u, v) = f_{\text{ext}}(v) - (\lambda_H, v)_{0, \Gamma_C}$
für alle $v \in \mathbf{H}_D^1$ gilt.

Dabei ist $f_{\text{ext}}(v) := \sum_{l=1}^2 \left((f^l, v^l)_0 + (p^l, \gamma_n(v^l))_{0, \Gamma_N} \right)$ wie in Problem 5 definiert.

Offensichtlich existiert eine eindeutige Lösung u_0 und u_h sei eine finite Elemente Lösung des Problems. Nun kann gezeigt werden, dass die Abschätzung $\|u - u_h\| \lesssim \|u_0 - u_h\| + \mathcal{R}$ gilt, wobei \mathcal{R} Restterme von höherer Ordnung sind und \lesssim kleiner gleich bis auf eine von h und H unabhängige Konstante bedeutet. Auf diese Weise kann man nun einen Fehlerschätzer η_0 für das Hilfsproblem nutzen, um über $\eta := \eta_0 + \mathcal{R}$ einer Abschätzung für die Variationsungleichung zu gewinnen, vgl [24, 94]. Die Bilinearform b_n aus Problem 3 ist definiert als $b_n(v, w) = \langle v, [w]_n \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$. Im Folgenden wird für die Dualpaarung kurz $\langle v, w \rangle := \langle v, w_n \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ geschrieben und für die zu \mathbf{H}_D^1 gehörende Norm $\|\cdot\|$, vgl. Kapitel 2.2, kurz $\|\cdot\|$. Weiterhin sei die Norm $\|\cdot\|'_{1/2, \Gamma_C}$ definiert durch $\|w\|'_{1/2, \Gamma_C} := \inf_{v \in \mathbf{H}_D, [v]_n = w} \|v\|$.

Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 12. *Es gilt*

$$\|u - u_h\|^2 \leq \|u_0 - u_h\| \|u - u_h\| + \langle \lambda, [u]_n - g \rangle.$$

Beweis. Setzt man die Testfunktionen $\mu = 0$ und $\mu = 2\lambda \in H_+^{-1/2}(\Gamma_C)$, sowie $\mu_H = 0$ und $\mu_H = 2\lambda_H \in \Lambda_{H,n}^+(\Gamma_C)$ in die zweite Zeile von Problem 3

$$b(\mu - \lambda, u) \leq \langle g, \mu - \lambda \rangle,$$

bzw. von Problem 8

$$b(\mu_H - \lambda_H, u_h) \leq \langle g, \mu_H - \lambda_H \rangle,$$

folgt $\langle \lambda, [u]_n - g \rangle = (\lambda_H, [u_h]_n - g)_{0, \Gamma_C} = 0$ und weiterhin $(\lambda_H, [u]_n - g)_{0, \Gamma_C} \leq 0$. Mittels der Cauchy Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|^2 \\ &= a(u - u_h, u - u_h) \\ &\leq a(u - u_0, u - u_h) + a(u_0 - u_h, u - u_h) \\ &\leq (\lambda_H, [u - u_h]_n)_{0, \Gamma_C} - \langle \lambda, [u - u_h]_n \rangle + \|u_0 - u_h\| \|u - u_h\| \\ &= (\lambda_H, [u]_n - g)_{0, \Gamma_C} - \langle \lambda, g - [u_h]_n \rangle + \|u_0 - u_h\| \|u - u_h\| \\ &\leq \langle \lambda, [u_h]_n - g \rangle + \|u_0 - u_h\| \|u - u_h\|. \end{aligned}$$

□

Im Allgemeinen ist $\langle \lambda, [u_h]_n - g \rangle = -\langle \lambda, g - [u_h]_n \rangle \not\leq 0$. Um den Ansatz durchzuführen muss also eine Korrektur eingeführt werden.

Theorem 10. Für $\epsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\| \\ & \leq (1 + \epsilon) \|u_0 - u_h\| \\ & + \left(1 + \frac{1}{4\epsilon}\right) \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} \\ & + \left|(\lambda_H, (g - [u_h]_n)_-)_{0, \Gamma_C}\right|^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $d \in W := \{v \in \mathbf{H}_D^1 \mid [v]_n = (g - [u_h]_n)_-\}$ mit der Norm $\|d\| := \inf_{v \in W} \|v\|$. Dann gilt $\|d\| = \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C}$. Darüber hinaus gilt

$$g - [u_h]_n - [d]_n = g - [u_h]_n - (g - [u_h]_n)_- \geq 0$$

auf Γ_C und damit $g - [u_h]_n - [d]_n \in H_+^{1/2}(\Gamma_C)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} & \langle \lambda, [u_h]_n - g \rangle \\ & = -\langle \lambda, g - [u_h]_n - [d]_n \rangle - \langle \lambda, [d]_n \rangle \\ & \leq a(u, d) - (f, d)_0 - (q, [d]_n)_{0, \Gamma_N} \\ & = a(u - u_h, d) + a(u_h, d) - (f, d)_0 - (q, [d]_n)_{0, \Gamma_N} \\ & \leq \|u - u_h\| \|d\| + a(u_h - u_0, d) - (\lambda_H, [d]_n)_{0, \Gamma_C} \\ & \leq \|u - u_h\| \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} \\ & \quad + \|u_0 - u_h\| \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} \\ & \quad + \left|(\lambda_H, (g - [u_h]_n)_-)_{0, \Gamma_C}\right|. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Mit Lemma 12 und Einsetzen von (5.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|^2 \\ & \leq \|u_0 - u_h\| \|u - u_h\| + \langle \lambda, [u_h]_n - g \rangle \\ & \leq \|u - u_h\| \left(\|u_0 - u_h\| + \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} \right) + \\ & \quad \|u_0 - u_h\| \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} + \left|(\lambda_H, (g - [u_h]_n)_-)_{0, \Gamma_C}\right|. \end{aligned}$$

Wegen $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $x \leq a + b^{1/2}$ für $x, a, b > 0$, $x^2 \leq ax + b$ gilt

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\| \\ & \leq \|u_0 - u_h\| + \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} \\ & \quad + \left(\|u_0 - u_h\| \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} + \left|(\lambda_H, (g - [u_h]_n)_-)_{0, \Gamma_C}\right| \right)^{1/2} \\ & \leq (1 + \epsilon) \|u_0 - u_h\| + \left(1 + \frac{1}{4\epsilon}\right) \|(g - [u_h]_n)_-\|'_{1/2, \Gamma_C} \\ & \quad + \left|(\lambda_H, (g - [u_h]_n)_-)_{0, \Gamma_C}\right|^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Damit ergibt sich für den Fehlerschätzer für das Kontaktproblem

Proposition 1. Sei $\eta_0 > 0$ mit $\|u_0 - u_h\| \lesssim \eta_0$ und

$$\eta := \eta_0 + \|(g - [u_h]_n)_-\|_{-1/2, \Gamma_C} + \left|(\lambda_H, (g - [u_h]_n)_-)_{0, \Gamma_C}\right|^{1/2}.$$

Dann gilt $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \lesssim \eta$.

Beweis. Aus Theorem 10, der Äquivalenz von $\|\cdot\|_{1/2}'$ und $\|\cdot\|_{1/2}$ und $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ folgt die Behauptung. \square

Für eine vollständige Fehlerabschätzung ist man daran interessiert auch den Fehler des Lagrangemultiplikators zu erfassen. Folgende Proposition zeigt, dass dies hier auch erfüllt ist.

Proposition 2. *Seien die Annahmen von Proposition 1 erfüllt. Dann gilt*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|\lambda - \lambda_H\|_{-1/2, \Gamma_C} \lesssim \eta.$$

Beweis. Wegen $\|\lambda - \lambda_H\|_{-1/2, \Gamma_C} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|$, siehe [94, Lemma IV.1], folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|\lambda - \lambda_H\|_{-1/2, \Gamma_C} &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \\ &\lesssim 2\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h\| \\ &\lesssim \eta + \eta_0 \lesssim \eta. \end{aligned}$$

\square

Man sieht, dass die zusätzlichen Terme in Proposition 1 den typischen Fehlerquellen bei Kontaktproblemen entsprechen und zwar der Verletzung der Nicht-Durchdringungs-Bedingung durch

$$\|(g - [\mathbf{u}_h]_n)_-\|_{-1/2, \Gamma_C}$$

und der Verletzung der Komplementaritätsbedingung

$$\left| (\lambda_H, (g - [\mathbf{u}_h]_n)_-)_{0, \Gamma_C} \right|.$$

Bemerkung 17. *Zur Berechnung von η ist die Auswertung von $\|(g - [\mathbf{u}_h]_n)_-\|_{1/2, \Gamma_C}$ nötig.*

Da der Sprung der Deformation $[\mathbf{u}_h]_n$ stückweise polynomial und steigt ist, ist $[\mathbf{u}_h]_n \in H^1(\Gamma_C)$. Dann gilt auch $(g - [\mathbf{u}_h]_n)_- \in H^1(\Gamma_C)$, siehe [48, Kap I, Cor. 2.1], wenn $g \in H^1(\Gamma_C)$ liegt. Damit erhält man die Normabschätzung

$$\|(g - [\mathbf{u}_h]_n)_-\|_{1/2, \Gamma_C}^2 \lesssim \|(g - [\mathbf{u}_h]_n)_-\|_{0, \Gamma_C} \|(g - [\mathbf{u}_h]_n)_-\|_{1, \Gamma_C}.$$

Der Beweis für diese Abschätzung findet sich zum Beispiel in [79, Theorem 7.7].

Für die Auswertung des Fehlerschätzers erhält man so also einen Anteil aus einem residualen Fehlerschätzer und dem Kontaktterm. Der residuale Anteil auf dem Gebiet Ω^l ergibt sich dabei etwa durch

$$\eta_0^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left((h_T/p_T)^2 R_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_T} (h_e/p_e) R_{0,e}^2 \right)$$

mit

$$R_{0,T} := \left\| f^l + \operatorname{div} \sigma(u_h^l) \right\|_{0,T}, \quad T \in \mathcal{T}_H$$

$$R_{0,e} := \begin{cases} \frac{1}{2} \|\sigma_n(u_h^l)\|_{0,e}, & e \in \mathcal{E}^\circ, \\ \|\sigma_n(u_h^l) - p^l\|_{0,e} & e \in \mathcal{E}_N, \\ \|\sigma_{nn}(u_h^l) + \lambda_H\|_{0,e} & e \in \mathcal{E}_C. \end{cases}$$

Prinzipiell kann ein beliebiger Fehlerschätzer für Variationsungleichungen gewählt werden. Ein Überblick ist etwa in [2, 104] zu finden. Weitere Details zu diesem Fehlerschätzer finden sich in [2, Sect. 2.2]. Die Auswertung des residualen Fehlerschätzers ist für die Gebiete Ω^l unabhängig. Über den Kontakterm erhält man jedoch eine Kopplung der Gebiete, da man zur Fehlerabschätzung den Sprungterm $[\cdot]_n$ auswerten muss.

Reibungsbehaftete Kontaktprobleme

Einen residualen Fehlerschätzer für reibungsbehaftete Kontaktprobleme erhält man analog. Dazu kann man den allgemeinen Zugang für Variationsungleichungen aus [94, Kap. IV.1] verwenden. Man betrachtet dann das folgende Hilfsproblem.

Problem. Finde $u_0 \in \mathbf{H}_D^1$, so dass

$$a(u, v) = (f_{\text{ext}}, v) - (\lambda_{n,H}, [u]_n)_{0,\Gamma_C} - (\lambda_{t,H}, [u]_t)_{0,\Gamma_C}$$

für alle $v \in \mathbf{H}_D^1$ gilt.

Nun fasst man die Nebenbedingungen b_n und b_t aus dem reibungsbehafteten Kontaktproblem 5 zu $b(\mu, u) := b_n(\mu_n, u) + b_t(\mu_t, u)$ mit $\mu := (\mu_n, \mu_t)$ zusammen. Dann folgt direkt mit Satz IV.3 aus [94, Kapitel IV] für Lösungen $(u, \lambda_n, \lambda_t)$ von Problem 5 und $(u_h, \lambda_{n,H}, \lambda_{t,H})$ von Problem 9 die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|^2 + \|\lambda - \lambda_H\|_{-\frac{1}{2},nt}^2 \\ & \leq \left((\eta^2 + \|d\|_1^2 + |(\lambda_{n,H}, [d]_n)_{0,\Gamma_C}| \right. \\ & \quad \left. + |j(d) - (\lambda_{t,H}, [d]_t)_{0,\Gamma_D}| \right. \\ & \quad \left. + |j(d) - (\lambda_{t,H}, [d]_t)_{0,\Gamma_D}| + |j(u_h) - (\lambda_{t,H}, [u_h]_t)_{0,\Gamma_D}| \right). \end{aligned}$$

Dabei ist d wie im Beweis zu Theorem 10 gewählt, so dass für das reibungsbehaftete Kontaktproblem gilt

Satz 2. Es sei $(u, \lambda_n, \lambda_t)$ Lösung von Problem 5 und $(u_h, \lambda_{n,H}, \lambda_{t,H})$ von Problem 9. Dann existiert ein $C > 0$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|^2 + \|\lambda - \lambda_H\|_{-\frac{1}{2},nt}^2 \leq \\ & C \left(\eta_{nt}^2 + \|(g - [u_h]_n)_-\|_{\frac{1}{2},n}^2 \right. \\ & \quad \left. + |(\lambda_{n,H}, (g - [u_h]_n)_-)_{0,\Gamma_C}| \right. \\ & \quad \left. + |j(u_h) - (\lambda_{t,H}, [u_h]_t)_{0,\Gamma_C}| \right). \end{aligned}$$

Der residuale Fehlerschätzer η_{nt} auf dem Gebiet Ω^1 für das Hilfsproblem 5.1.2 kann analog zum reibungsfreien Fall frei gewählt werden. So erhält man

$$\eta_{nt}^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left((h_T/p_T)^2 R_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_T} (h_e/p_e) R_{0,e}^2 \right)$$

mit

$$R_{0,T} := \left\| f^l + \operatorname{div} \sigma(u_h^l) \right\|_{0,T}, \quad T \in \mathcal{T}_H$$

$$R_{0,e} := \begin{cases} \frac{1}{2} \left\| [\sigma_n(u_h^l)]_e \right\|_{0,e}, & e \in \mathcal{E}^\circ, \\ \left\| \sigma_n(u_h^l) - p^l \right\|_{0,e}, & e \in \mathcal{E}_N, \\ \left\| \sigma_{nn}(u_h^l) + \lambda_{n,H} \right\|_{0,e} + \left\| \sigma_{nt}(u_h^l) + \lambda_{t,H} \right\|_{0,e}, & e \in \mathcal{E}_C, \end{cases}$$

und kann so den Approximationsfehler $\|u - u_h\|^2 + \|\lambda - \lambda_H\|_{-\frac{1}{2},nt}^2$ mittels Satz 2 auswerten.

5.1.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird der residuale Fehlerschätzer aus Abschnitt 5.1.2 getestet. Wie in Kapitel 3.2.5 und 3.3 erläutert wurde, haben Kontaktprobleme in der Regel eine niedrige Glattheit, so dass höhere Finite Elemente Ansätze für global verfeinerte Netze keinen Gewinn in der Konvergenzordnung liefern. Allerdings ist mittels des vorgestellten Fehlerschätzers die optimale Konvergenzordnung erreichbar. Dazu werden zunächst die Beispiele 1 und 2 aus Kapitel (3.3) mit einer adaptiven Verfeinerung verglichen. Dabei zeigt sich, dass der Fehlerschätzer für globale Verfeinerungen die Ordnung korrekt wieder gibt. Die Überschätzung des Fehlers ergibt sich hier daraus, dass der Fehlerschätzer die Spannungen $\sigma(u) - \sigma(u_h)$ abschätzt, während der Fehler in der H^1 -Seminorm der Verschiebungen gemessen wird. Auf diese Weise ergibt sich eine Abhängigkeit des Fehlerschätzers vom E-Modul des jeweiligen Beispiels.

In [94] wurde für den residualen Fehlerschätzer für einseitige Kontaktprobleme gezeigt, dass er die Konvergenzordnung des Problems wiedergibt und die Effektivitätsindizes

$$I_{\text{eff}} := \frac{\|u - u_h\|_1}{\eta}$$

konstant sind. In den beiden folgenden Beispielen aus Kapitel 3.3 wird hier der Fehlerschätzer mit der zuvor erstellten Konvergenzanalyse verglichen.

Beispiel 9. *Es wird die Konfiguration aus Beispiel 1 betrachtet. In den Abbildungen 37 und 38 sind die Verläufe des Fehlerschätzers (η) und den Fehlern der Verschiebungen in der H^1 -Norm und des Lagrange Multiplikators in einer gewichteten L^2 -Norm aufgetragen. Man sieht, dass die Ordnung der globalen Verfeinerung vom Fehlerschätzer wiedergegeben wird. Dies zeigen auch die Effektivitätsindizes in Abbildung 44.*

Für die adaptiven Verfeinerung zeigt sich ein annähernd optimales Konvergenzverhalten, in Abbildung 41 ist die adaptive Vernetzung

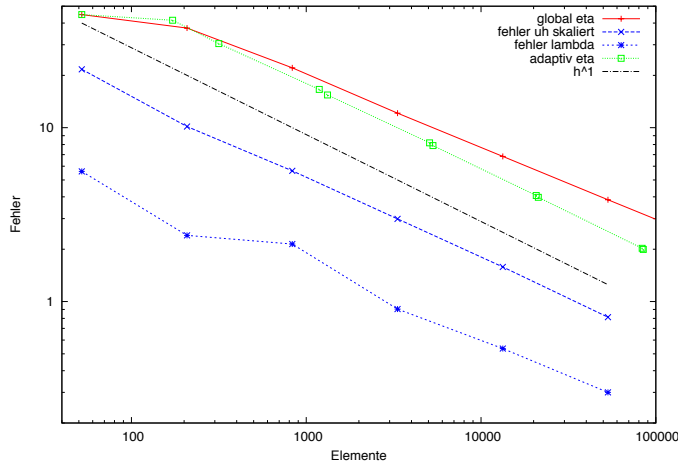


Abbildung 37: Vergleich Fehlerschätzer/Fehler für $p = 1, q = 0$

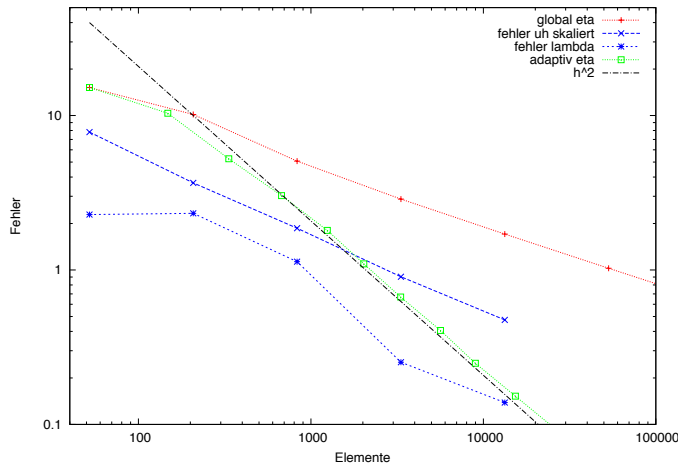


Abbildung 38: Vergleich Fehlerschätzer/Fehler für $p = 2, q = 1$

nach sechs Verfeinerungen für $p = 1, q = 0$ zu sehen. Zum einen wird durch den Fehlerschätzer der Kontaktrand verfeinert und zum anderen die Ecken, wie es zu erwarten ist. Allerdings ist zu bemerken, dass die Stabilisierung der Kontaktränder die optimale Asymptotik der Verfeinerungen zunichte machen kann. In [Abbildung 39](#) ist zu sehen, dass für die Paare $p = 3, q = 2$ noch die optimale Ordnung erreicht wird, jedoch nicht mehr für die Paarung $p = 4, q = 2$. Die nichtstabilisierte adaptive Vernetzung führt sogar zu einer Verschlechterung des Fehlers. Dies ist unter anderem mit lokalen Instabilitäten im Lagrangemultiplikator zu erklären, wie sie in [Abbildung 40](#) für die Verfeinerungsstufen 8 und 9 zu sehen sind.

Im nächsten Beispiel sind die gleichen Beobachtungen zu machen:

Beispiel 10. Mit den Werten aus [Beispiel 3](#) ergibt sich auch asymptotisch optimales Verhalten, wie in den [Abbildungen 42](#) und [43](#) zu sehen ist.

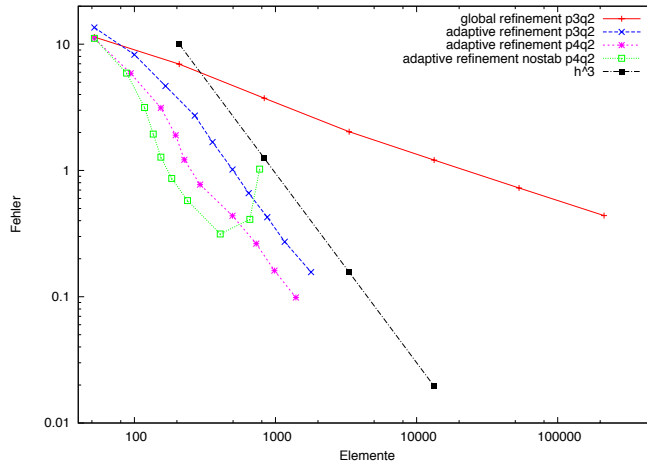


Abbildung 39: geschätzter Fehlerverlauf für adaptive Diskretisierungen

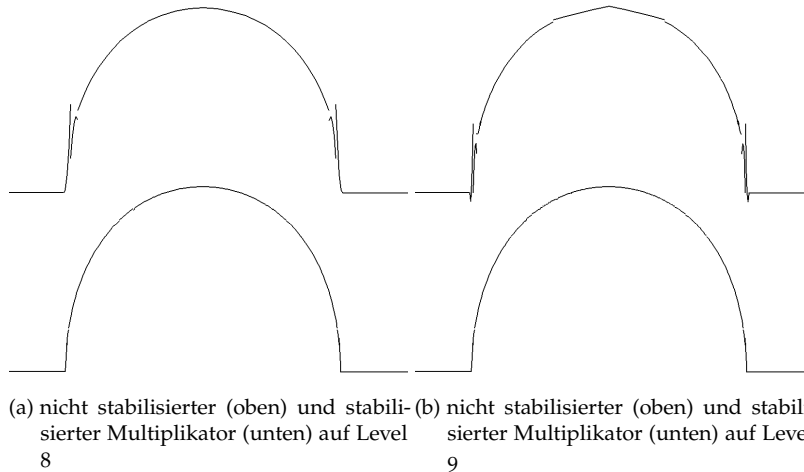


Abbildung 40: lokale Instabilität des Lagrange Multiplikators

In Abbildung 44 und 45 sind die Effektivitätsindizes I_{eff} aufgetragen. Es ist anzumerken, dass die Bestimmung von Effektivitätsindizes bei Kontaktproblemen schwierig ist, da eine analytische Lösung des Problems zur Bestimmung des Fehlers $\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_H\|$ nicht vorliegt. Insbesondere das Abfallen der Effektivitätsindizes für die letzte Vernetzung kann damit erklärt werden, dass die Lösung (u_h, λ_H) zu nahe an der Referenzlösung liegt. Weiterhin ist bei der Größenordnung des Effektivitätsindex zu beachten, dass im Fehlerschätzer η die Spannungen des Problems abgeschätzt werden, so dass im Vergleich zur $\|\cdot\|_1$ Norm die Materialparameter zu dem Größenunterschied in den Werten führen.

Bemerkung 18. Nach den Bemerkungen aus Abschnitt 5.1.1 ist die lokale Erfüllung der Stabilitätsbedingung gemäß Theorem 8 bei adaptiven Verfeinerungen nicht rigoros zu garantieren. So wird die Bedingung nur für das Gebiet, auf dem der Lagrangemultiplikator definiert ist (hier Gebiet Ω^1), rigoros erfüllt. Gilt zusätzlich für alle Elemente auf dem anderen Gebiet Ω^2 die

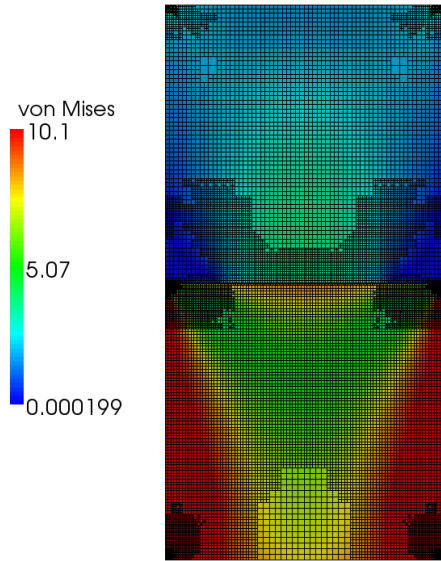


Abbildung 41: Vernetzung und von Mises Spannungen nach 6 adaptiven Verfeinerungen

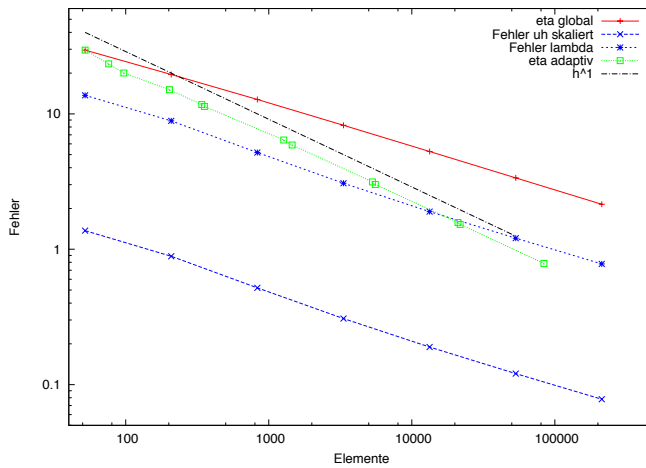


Abbildung 42: Vergleich Fehlerschätzer/Fehler für $p = 1, q = 0$

Bedingung $h^2 \leq h^1$ für alle gekoppelten Elemente, so hat man eine rigorose stabile Diskretisierung. Die Beispiele in diesem Kapitel zeigen jedoch, dass eine lokale Verletzung durch überlappende Elemente mit Verletzung der Stabilitätsbedingung die Stabilität der adaptiven Netze nicht zerstört, sofern diese Elemente noch mit weiteren Elementen gekoppelt sind, für die die Bedingung $h^2 \leq h^1$ erfüllt ist. Zur Problematik der Stabilitätsbedingung bei adaptiven Verfeinerungen sei auch auf den Anhang A.2 verwiesen.

Für Ansätze mit stückweise linearen Funktionen zeigt folgendes Beispiel, dass eine massive Reduktion des Fehlers durch adaptive Verfeinerung erreicht werden kann.

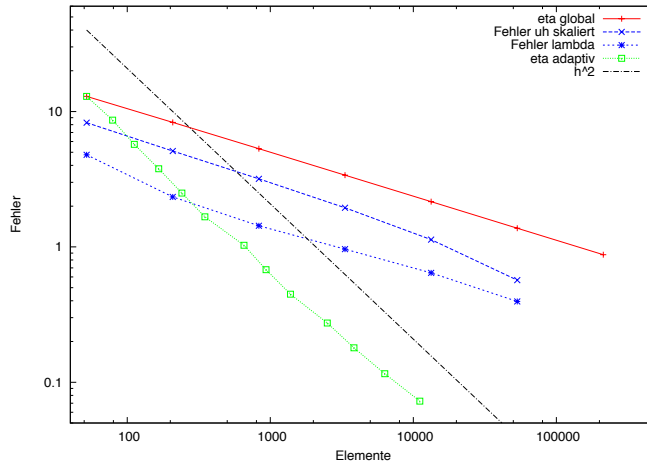
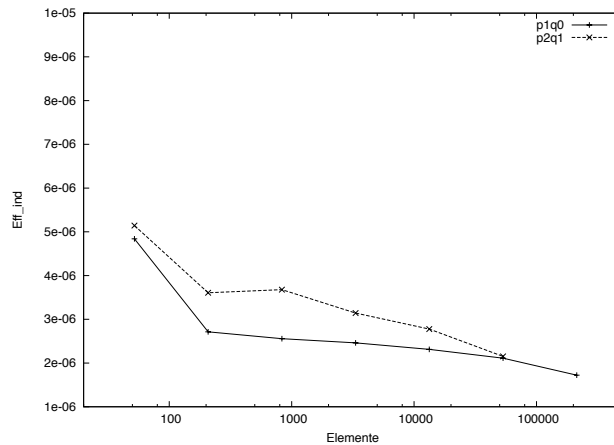
Abbildung 43: Vergleich Fehlerschätzer/Fehler für $p = 2$, $q = 1$ 

Abbildung 44: Effektivitäts-Indizes zu Beispiel 9

Beispiel 11. Gegeben seien drei Blöcke $\Omega^1 := [0, 1] \times [0.5, 1]$, $\Omega^2 := [0.05, 0.45] \times [1, 1.5]$ und $\Omega^3 := [0.55, 0.95] \times [1, 1.5]$ mit den Materialkonstanten $E := 1e5$ und $\nu := 0.25$. Die Gebiete Ω^2 und Ω^3 werden über inhomogene Dirichletranddaten um 0.01 nach unten verschoben, so dass ein Kontakt entsteht. Die Dirichletränder befinden sich jeweils auf der den Kontaktträgern gegenüberliegenden Seite. In Abbildung 46 ist die Kontaktsituation und Vernetzung nach acht adaptiven Verfeinerungen zu sehen. Deutlich ist die adaptive Verfeinerung an den Rändern des Kontaktbereiches zu sehen. Das ist zu erwarten, da der Lagrangemultiplikator an den Rändern seine größten Werte hat. Betrachtet man den geschätzten Fehlerverlauf, so sieht man, dass die adaptive Verfeinerung weit unter der globalen Verfeinerung liegt, da hier die Kontakttränder besser approximiert werden (Abbildung 47).

Ein weiteres Beispiel aus der Anwendung verdeutlicht die Problematik des lokalen Kontakts:

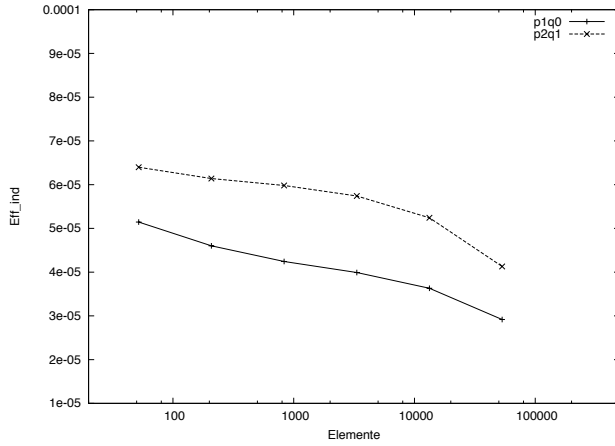


Abbildung 45: Effektivitäts-Indizes zu Beispiel 10

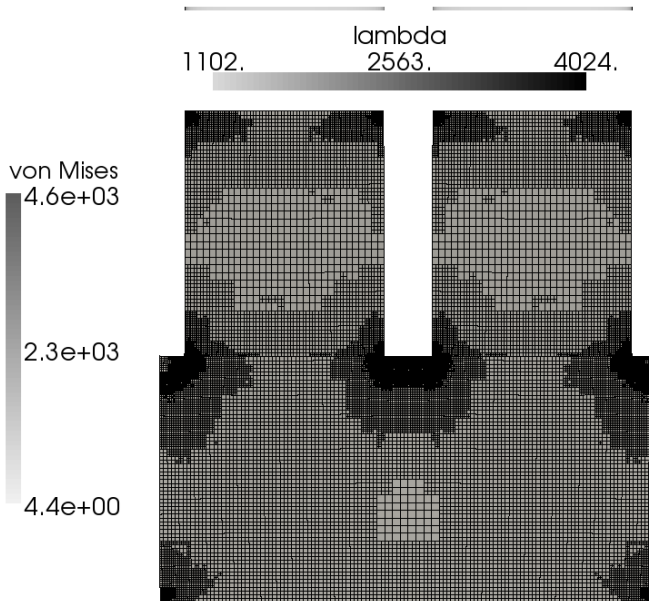


Abbildung 46: Vernetzung und von Mises Spannungen nach 8 adaptiven Verfeinerungen

Beispiel 12. Betrachtet wird der Kontakt zwischen einem Schleifstift und einer freigeformten Fläche. Wie auch in Beispiel 5 wird die freigeformte Fläche aus einer geometrisch-kinematische Simulation importiert. Eine genaue Beschreibung findet sich in [16]. Für dieses Beispiel wurde eine Modellsituation betrachtet, in der die Materialparameter für den Schleifstift durch $E_s = 1 \cdot 10^7$ und $\nu_s = 0.25$ und für das Werkstück durch $E_w = 1 \cdot 10^2$ und $\nu_w = 0.25$ gegeben sind. In der Realität ist insbesondere das Material des Werkstücks als deutlich härter anzunehmen, auch wird man für den Schaft des Schleifstifts andere Materialparameter als für die Schleifschicht wählen.

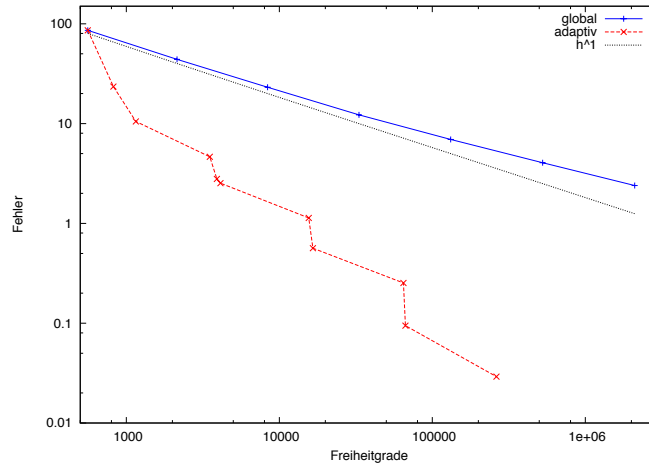


Abbildung 47: geschätzter Fehlerverlauf für Beispiel 11

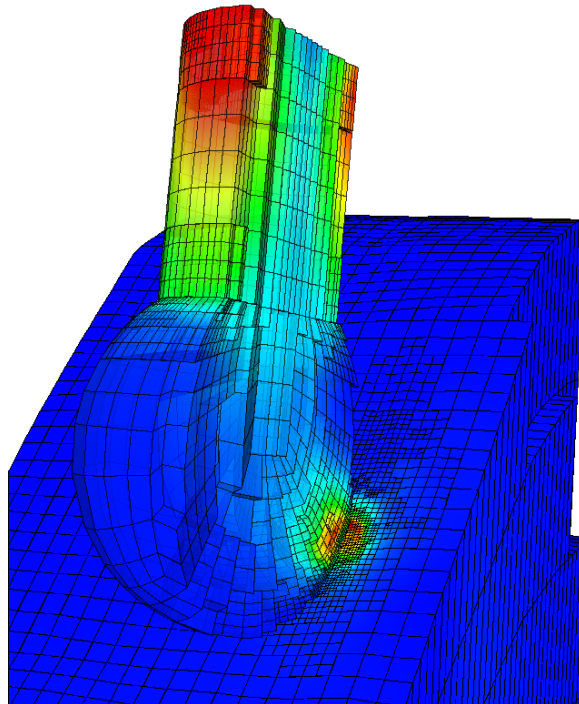


Abbildung 48: Schnitt durch die Kontaktsituation

In *Abbildung 48* ist ein Schnitt durch die Kontaktsituation gegeben, *Abbildung 49* zeigt die adaptive Vernetzung des Schleifstiftes. Es ist zu erkennen, dass sowohl der Kontaktbereich, als auch die Gebiete mit Spannungsspitzen, wie etwa am Dirichlet-Rand am Ende des Schleifstiftschafte adaptiv verfeinert werden. Zu beachten ist, dass durch die Wahl eines weichen Werkstückes der Kontaktbereich größer als in der Praxis ist, da dann die lokale Deformation des Werkstückes geringer wäre. Auch so ist zu erkennen, dass eine globale Verfeinerung den Kontaktbereich nicht gut erfassen kann, siehe das geschätzte Konvergenzverhalten in *Abbildung (51)*.

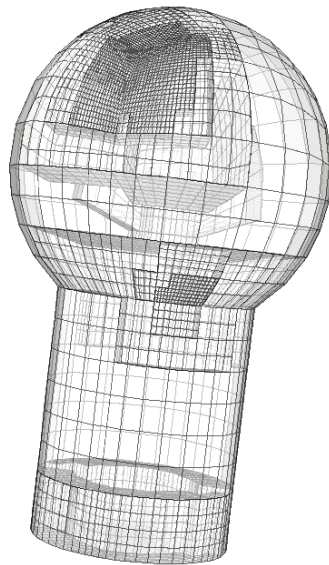


Abbildung 49: Adaptive Vernetzung des Schleifstiftes

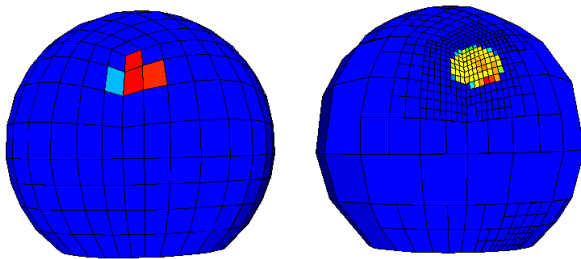


Abbildung 50: Vergleich globale Verfeinerung mit loaler Verfeinerung

In *Abbildung 50* sind die Werte des Lagrange Multiplikators zu sehen. Auf der rechten Seite ist die adaptive Vernetzung nach 3 Verfeinerungen der Ausgangsvernetzung zu sehen, auf der linken Seite ist der Multiplikator nach einer globalen Verfeinerung zu sehen. Man sieht, dass die globale Verfeinerung den Kontaktbereich nicht korrekt wiedergibt, obwohl diese Vernetzung ca. doppelt so viele Freiheitsgrade wie die adaptive Vernetzung besitzt. Dementsprechend zeigt sich auch das geschätzte Fehlerverhalten in *Abbildung 51*.

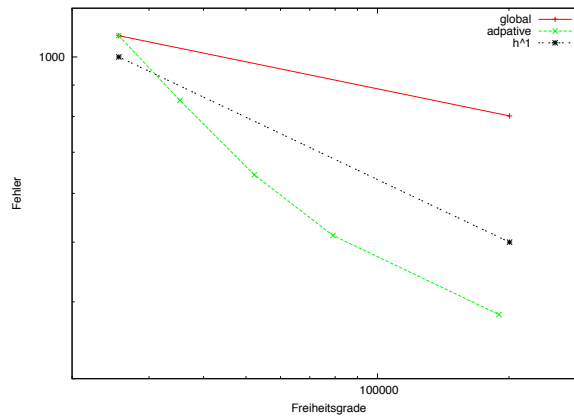


Abbildung 51: Adaptive Vernetzung des Schleifstiftes

Fazit

Die numerischen Untersuchungen zeigen die Verlässlichkeit des Fehlerschätzers anhand der Beispiele aus Kapitel 3.3 durch den Vergleich des Fehlerverlaufs und des geschätzten Fehlers. In Kapitel 3.3 konnte für globale Verfeinerungen nur die a priori hergeleitete niedrige Ordnung, vgl. Theorem 9, erzielt werden. Insofern rechtfertigt erst der Ordnungsgewinn durch adaptive Verfeinerung auf Grundlage des hergeleiteten Fehlerschätzers die Verwendung hoher Polynomansätze.

5.1.4 Dual gewichtete Fehlerschätzer

Während der im vorherigen Abschnitt hergeleitete residuale Fehlerschätzer eine globale Fehlergröße abschätzt, kann mittels der dual gewichteten Fehlerschätzer der Fehler bezüglich eines beliebigen Funktionals J abgeschätzt werden. Auf diese Weise ist auch die Abschätzung lokaler Fehlergrößen möglich, die bei Kontaktproblemen bezüglich der Deformationen definiert sein können und mittels des hier verwendeten Ansatzes insbesondere auch bezüglich des Lagrangemultiplikators. Für einen Überblick über dual gewichtete Methoden siehe zum Beispiel [7, 13, 97]. Die Herleitung des Fehlerschätzers folgt dem in [92] Ansatz für einseitige Kontaktprobleme. Bei der Erweiterung zu Mehrkörperkontaktproblemen ist insbesondere die Definition eines geeigneten dualen Problems von Nöten. Zunächst wird dazu ein Überblick über das allgemeine Konzept aus [97] gegeben. Anschließend wird mit dessen Hilfe ein geeignetes duales Problem hergeleitet und für Fehlerschätzer genutzt.

Allgemeines Konzept

Zur Herleitung von dual gewichteten Fehlerschätzern für Variationsungleichungen ist eine Verallgemeinerung der Galerkinorthogonalität

nötig, wie sie in [97] angegeben ist. Seien zunächst die Variationsungleichungen

$$u \in V : \quad F(u - \varphi) - A(u, \varphi - u) \leq 0 \quad \forall \varphi \in K \quad (5.2)$$

$$u_h \in V_h : \quad F(u_h - \varphi) - A(u_h, \varphi - u_h) \leq 0 \quad \forall \varphi \in K_h \quad (5.3)$$

gegeben.

Lemma 13. Sei $W_h^0 \subset \{z_h \in V_h \mid F(z_h) - A(u_h, z_h) \leq 0\}$. Es gilt die Abschätzung

$$A(u - u_h, z_h) \leq A(u, z_h + u_h - u) - F(z_h + u_h - u)$$

für alle $z_h \in W_h^0$.

Beweis. Siehe [97, Kapitel 7]. □

Die Menge W_h^0 kann folgendermaßen konstruiert werden.

Lemma 14. Sei W_h , mit $K_h \subset W_h \subset V_h$ so konstruiert, dass die Lösung der diskreten Variationsungleichung 5.3 äquivalent durch

$$F(\varphi - u_h) - A(u_h, \varphi - u_h) \leq 0 \quad \forall \varphi \in W_h$$

charakterisiert werden kann. Weiterhin sei $W_h^0 = \{z_h \in V_h \mid u_h + z_h \in W_h\}$. Dann gilt die Abschätzung

$$F(z_h) - A(u_h, z_h) \leq 0 \quad \forall z_h \in W_h^0.$$

Beweis. siehe [97, Kapitel 7] □

Für die Variationsungleichung wird durch

$$z \in G : \quad A(\varphi - z, z) \geq J(\varphi - z) \quad \forall \varphi \in G$$

ein duales Problem mit der Lösung $z \in G$ definiert, wobei die Menge G folgende Eigenschaften erfüllt

$$\begin{aligned} z \in G &\Rightarrow z + u - u_h \in G, \\ G &\subset \{v \in V \mid F(v + u_h - u) - A(u, v + u_h - u) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Damit gilt die folgende Abschätzung mit $\varphi = z + u - u_h$ als Testfunktion für das duale Problem und der verallgemeinerten Orthogonalitätsabschätzung aus Lemma 13

$$\begin{aligned} & J(u - u_h) \\ & \leq A(u - u_h, z) \\ & \leq A(u - u_h, z - z_h) + A(u - u_h, z_h) \\ & \leq A(u - u_h, z - z_h) + A(u, z_h + u_h - u) - F(z_h + u_h - u) \\ & \leq A(u - u_h, z - z_h) + A(u, z + u_h - u) - F(z + u_h - u) \\ & \quad + A(u, z_h - z) - F(z_h + z). \end{aligned}$$

Wegen $z \in G$ folgt $A(u, z + u_h - u) - F(z + u_h - u) \leq 0$ und man erhält:

Theorem 11. Für die diskrete Variationsungleichung gilt die Abschätzung

$$|J(u - u_h)| \leq F(z - z_h) - A(u_h, z - z_h) \quad \forall z_h \in W_h^0.$$

Beweis. Siehe oben. □

DWR für Kontaktprobleme

Auf Basis des allgemeinen Konzept können nun dual gewichtete Fehlerschätzer für Kontaktprobleme hergeleitet werden. Bei Problemen mit starrem Hindernis reicht für die Herleitung des Fehlerschätzers und des dualen Problems die primale Formulierung aus (vgl. [92] u.a.). Im Falle von Mehrkörperkontaktproblemen stellt sich die Frage nach einer adäquaten Formulierung des dualen Problems. Insbesondere stellt sich die Frage nach den richtigen Randbedingungen für das duale Kontaktproblem auf den Kontakträndern Γ_{c_i} des primalen Problems. Es zeigt sich, dass eine Kopplung des dualen Problems, ähnlich der Kontaktbedingung des primalen Problems unausweichlich ist (vgl. Beispiele in Abschnitt 5.1.5). Das allgemeine Konzept aus [97], bzw. Abschnitt 5.1.4 bietet hier einen Ansatz zur Herleitung des dualen Problems über die Dualisierung der gemischten Formulierung.

Im Folgenden wird ein duales Problem mittels des allgemeinen Konzepts hergeleitet. Dabei werden zunächst einige zusätzliche Bedingungen für das primale Problem gestellt, die im Allgemeinen nicht erfüllt sind. Zusätzlich werden einige heuristische Vereinfachungen vorgenommen, um schliesslich zu dem dualen Problem zu gelangen. Wie man am allgemeinem Konzept (Abschnitt 5.1.4) gesehen hat, geht aufgrund der fehlenden Galerkinorthogonalität die unbekannte Lösung U der kontinuierlichen Variationsungleichung des primalen Problems in die Definition des zulässigen Bereiches des dualen Problems ein. Wenn man also ein lösbares duales Problem erhalten möchte, lassen sich heuristische Vereinfachungen nicht vermeiden.

Wie in Kapitel 5.1.2 wird ein Problem mit positiven Abstand in der Referenzkonfiguration betrachtet, die Indizes \cdot_δ zur Abkürzung jedoch weggelassen. Dazu wird das reibungsfreie Kontaktproblem (Problem 7, in Kapitel 3.1)

$$\begin{aligned} a(u, v) + b_n(\lambda, v) &= (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_D^1 \\ -b_n(\mu - \lambda, u) &\geq -\langle \mu - \lambda, g \rangle \quad \forall \mu \in H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \end{aligned}$$

betrachtet. Dieses läßt sich kompakt als Variationsungleichung

$$a(u, v) + b_n(\lambda, v) - b_n(\mu - \lambda, u) \geq (f, v) - \langle \mu - \lambda, g \rangle$$

für alle $(v, \mu) \in \mathbf{H}_D^1 \times H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ schreiben. Mit der Definition $\mathcal{V} := \mathbf{H}_D^1 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ und $\mathcal{K} := \mathbf{H}_D^1 \times H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ und analog für das diskrete Problem 8 in Kapitel 3.2 $\mathcal{V}_h := \mathbf{V}_h \times \Lambda_H$ und $\mathcal{K}_h := \mathbf{V}_h \times \Lambda_H^+$ läßt sich so das allgemeine Konzept anwenden.

Lemma 15. *Seien $(u, \lambda), (u_h, \lambda_H)$ Lösungen von Problem 3, bzw. 8 dann gilt*

$$a(u - u_h, v_h) = -b(\lambda - \lambda_H, v_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{V}_h.$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch Subtraktion der ersten Zeilen der gemischten Probleme für Testfunktionen $v_h \in \mathbf{V}_h$. \square

Gemäß des allgemeinen Ansatzes für Variationsungleichungen wird folgendes duale Problem impliziert:

Problem 20. Suche $(z, \pi) \in G$, so dass

$$J(\varphi, w - \pi) \leq a(\varphi, z) + b_n(w - \pi, z) - b_n(\pi, \varphi) \quad \forall (\varphi, w) \in G$$

gilt.

Zur Verkürzung der Schreibweise ist dabei und im Folgenden

$$A((\mathbf{u}, \lambda), (\varphi, \mathbf{w})) := a(\mathbf{u}, \varphi) + b_n(\lambda, \varphi) - b_n(\mathbf{w}, \mathbf{u})$$

und

$$F((\varphi, \mathbf{w})) := (f, \varphi) - \langle \mathbf{w}, \mathbf{g} \rangle$$

sowie $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \lambda)$, $\mathbf{U}_h = (\mathbf{u}_h, \lambda_H)$, sowie $\mathbf{Z} = (z, \pi)$ und $\mathbf{Z}_h = (z_h, \pi_H)$. Die Menge \tilde{G} sei gemäß des allgemeinen Konzepts durch

$$\begin{aligned} G^1 &= \{v \in \mathcal{V} \mid F(v + \mathbf{U}_h - \mathbf{U}) - A(\mathbf{U}, v + \mathbf{U}_h - \mathbf{U}) \geq 0\} \\ &= \{v \in \mathcal{V} \mid b_n(\mathbf{w} + \lambda_H - \lambda, \mathbf{u}) \geq \langle \mathbf{w} + \lambda_H - \lambda, \mathbf{g} \rangle\} \end{aligned}$$

definiert. Weiterhin sei die Menge G definiert durch

$$G := \{(\varphi, \mathbf{w}) \in \mathcal{V} \mid b_n(\mathbf{w}, \mathbf{u}_h) - \langle \mathbf{w}, \mathbf{g} \rangle \leq 0\} \cap G^1.$$

Um die Fehlerabschätzung vornehmen zu können, wird noch folgendes Lemma benötigt. Dazu sei λ_i die L^2 -Projektion zu λ .

Lemma 16. *Sei $(\varphi, \pi) \in G$ mit der zuvor definierten Menge G . Dann ist auch $\theta := (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \pi + \lambda - \lambda_H) \in G$, wenn für die Lösungen (\mathbf{u}, λ) und $(\mathbf{u}_h, \lambda_H)$ von Problem 3, bzw. 8 zusätzlich $b_n(\lambda - \lambda_i, \mathbf{u}_h) \leq \langle \lambda - \lambda_i, \mathbf{g} \rangle$ gilt.*

Beweis. i) Sei λ_i die L^2 -Projektion zu λ , dann gilt

$$\begin{aligned} & b_n(\pi + \lambda - \lambda_H, \mathbf{u}_h) - \langle \pi + \lambda - \lambda_H, \mathbf{g} \rangle \\ &= b_n(\pi + \lambda - \lambda_i + \lambda_i - \lambda_H, \mathbf{u}_h) \\ & \quad - \langle \pi + \lambda - \lambda_i + \lambda_i - \lambda_H, \mathbf{g} \rangle \\ &= \underbrace{b_n(\pi, \mathbf{u}_h) - \langle \pi, \mathbf{g} \rangle}_I \\ & \quad + \underbrace{b_n(\lambda - \lambda_i, \mathbf{u}_h) - \langle \lambda - \lambda_i, \mathbf{g} \rangle}_{II} \\ & \quad + \underbrace{b_n(\lambda_i - \lambda_H, \mathbf{u}_h) - \langle \lambda_i - \lambda_H, \mathbf{g} \rangle}_{III} \leq 0. \end{aligned}$$

Der Terme I ist aufgrund der Definition von G kleiner oder gleich null. Term II ist nach Voraussetzung kleiner gleich null. Da $(0, \lambda_i)$ eine zulässige Testfunktion der diskreten Variationsungleichung ist, ist auch Term III negativ oder identisch 0. Damit erfüllt θ die erste Bedingung der Menge G .

ii) Mit $\varphi = \mathbf{U}_h$ als Testfunktion in der kontinuierlichen Variationsungleichung und wegen $\mathbf{Z} \in G$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq F(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) - A(\mathbf{U}, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \\ & \quad + F(\mathbf{Z} + \mathbf{U}_h - \mathbf{U}) - A(\mathbf{U}, \mathbf{Z} + \mathbf{U}_h - \mathbf{U}) \\ &= F((\mathbf{Z} + \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) + \mathbf{U}_h - \mathbf{U}) \\ & \quad - A(\mathbf{U}, (\mathbf{Z} + \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) - \mathbf{U}_h - \mathbf{U}). \end{aligned}$$

Also erfüllt θ auch die 2. Bedingung in G . □

Bemerkung 19. *Die Bedingung $b_n(\lambda - \lambda_i, \mathbf{u}_h) \leq \langle \lambda - \lambda_i, \mathbf{g} \rangle$ in Lemma 16 ist sicherlich eine Voraussetzung, die für beliebige Kontaktprobleme nicht*

erfüllt sein wird. Allerdings wird unter weiteren Annahmen an die Menge G , diese Voraussetzung für die praktische Umsetzung wegfallen.

Mit den vorangegangenen Überlegungen gilt folgende Fehlerabschätzung für ein stetiges, lineares Funktional $J : \mathbf{H}_D^1 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \rightarrow \mathbb{R}$:

Theorem 12. Sei $Z = (z, \pi)$ die Lösung des dualen Problems 20 und $Z_h = (z_h, \pi_h)$ eine FE-Lösung des dualen Problems, dann gilt für Problem 3 und 8 die Abschätzung

$$J((u - u_h, \lambda - \lambda_H)) \leq (f, z - z_h) - a(u_h, z - z_h) - b_n(\lambda_H, z - z_h).$$

Beweis. Aufgrund von Lemma 16 ist $(u - u_h, \pi + \lambda - \lambda_H) \in G$. Wählt man diese Funktion als Testfunktion in Problem 20, so folgt:

$$\begin{aligned} & J(u - u_h, \lambda - \lambda_H) \\ & \leq A(U - U_h, Z) \\ & = A(U - U_h, Z - Z_h) + A(U - U_h, Z_h) \\ & \leq A(U - U_h, Z - Z_h) + A(U, Z_h + U_h - U) \\ & \quad - F(Z_h + U_h - U) + b_n(\pi_H, u_h) - \langle \pi_H, g \rangle \quad (*) \\ & = A(U - U_h, Z - Z_h) + \underbrace{A(U, Z + U_h - U) - F(Z + U_h - U)}_{\leq 0} \\ & \quad + A(U, Z_h - Z) - F(Z_h - Z) + b_n(\pi_H, u_h) - \langle \pi_H, g \rangle \\ & \leq F(Z - Z_h) - A(U_h, Z - Z_h) + b_n(\pi_H, u_h) - \langle \pi_H, g \rangle \\ & = (f, z - z_h) - \langle \pi - \pi_H, g \rangle - a(u_h, z - z_h) - b_n(\lambda_H, z - z_h) \\ & \quad + b_n(\pi - \pi_H, u_h) + b_n(\pi_H, u_h) - \langle \pi_H, g \rangle \\ & = (f, z - z_h) - a(u_h, z - z_h) - b_n(\lambda_H, z - z_h) + \underbrace{b_n(\pi, u_h) - \langle \pi, g \rangle}_{\leq 0}, \end{aligned}$$

wobei $b_n(\pi, u_h) \leq \langle \pi, g \rangle$ ist, da $(0, \pi) \in G$ ist. Dabei ergibt sich die zweite Ungleichung (*) durch

$$\begin{aligned} & A(U - U_h, Z_h) \\ & = a(u - u_h, z_h) + b_n(\lambda - \lambda_H, z_h) - b_n(\pi_H, u - u_h) \\ & = \underbrace{(f, z_h) - a(u_h, z_h) - b_n(\lambda_H, z_h)}_{=0} + b_n(\pi_H, u_h) - \langle \pi_H, g \rangle \\ & \quad - (f, z_h + u_h - u) + \langle \pi_H + \lambda_H - \lambda, g \rangle \\ & \quad + a(u, z_h + u_h - u) + b_n(z_h + u_h - u, \lambda) - b_n(u, \pi_H + \lambda_H - \lambda) \\ & \quad - \underbrace{b_n(\lambda - \lambda_H, u) - \langle \lambda_H - \lambda, g \rangle}_{\leq 0} \\ & \quad + \underbrace{a(u, u - u_h) + b_n(\lambda, u - u_h) - (f, u - u_h)}_{=0} \\ & \leq A(U, Z_h + U_h - U) - F(Z_h + U_h - U) \\ & \quad + b_n(\pi_H, u_h) - \langle \pi_H, g \rangle \end{aligned}$$

In der 3. Zeile ist der erste Term identisch 0, wegen des diskreten Problems mit z_h als Testfunktion. Der 2. Term ist kleiner gleich 0, da er die Nebenbedingung des kontinuierlichen Problems mit $\mu = \lambda_H$ als Testfunktion darstellt. Der letzte Term ist identisch 0 da er sich aus dem

kontinuierlichen Problem mit $u - u_h$ als Testfunktion ergibt. Damit gilt die geforderte Abschätzung

$$\begin{aligned} & J(u - u_h, \lambda - \lambda_H) \\ \leq & (f, z - z_h) - a(u, z - z_h) - b_n(\lambda_H, z - z_h) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 20. Ein grundsätzliches Problem der Definition des zulässigen Bereiches G bei Variationsungleichungen ist, dass unbekannte Größen, wie in diesem Fall der Sattelpunkt (u, λ) des kontinuierlichen primalen Problems mit eingehen, so dass das duale Problem in der Praxis nicht gelöst werden kann (vgl. [97]). Vernachlässigt man den Fehler $\lambda - \lambda_H$ und ersetzt in G^1 die unbekannte Größe u durch u_h , so erhält man eine heuristische Approximation der Menge G . Dieses Vorgehen wurde für andere Probleme, wie Hindernis- und Torsionsprobleme, etc., in [97, 74] untersucht und lieferte dort gute Ergebnisse, so dass dieser Ansatz auch für Mehrkörperkontaktprobleme brauchbar scheint.

Setzt man in der Definition der Menge G für den Fehler des diskreten Lagrangemultiplikator $\lambda - \lambda_H = 0$ und $u = u_h$, so ergibt sich

$$\tilde{G} := \{(\varphi, w) \in V \mid b_n(w, u_h) = \langle w, g \rangle\}$$

Auf diese Weise erhält man ein duales Problem, in dessen Definition nur berechenbare Größen eingehen.

Problem 21. Finde $(z, \pi) \in \tilde{G}$ mit

$$J'(u, \lambda)(\varphi, w) = a(\varphi, z) + b_n(w, z) - b_n(\pi, \varphi) \quad \forall (\varphi, w) \in \tilde{G}.$$

Dieses Problem ist eine gemischte Variationsgleichung. Die Lösbarkeit ergibt sich aus der Lösbarkeit des primalen Problems 7: Für den Fall, dass sich die Fréchet-Ableitung durch

$$J'(u, \lambda)(\varphi, w) = J'_1(u, \lambda)(\varphi) + J'_2(u, \lambda)(w)$$

darstellen lässt, erhält man so die zu Problem 21 äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} J'_1(u, \lambda)(\varphi) &= a(\varphi, z) - b_n(\pi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_D^1 \\ b_n(w, z) &= J'_2(u, \lambda)(w) \quad \forall (\cdot, w) \in \tilde{G} \end{aligned}$$

Die Elliptizität der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist klar und die Existenz eines Sattelpunkts hängt von der Bilinearform $b_n(\cdot, \cdot)$ aus dem primalen Problem ab. Man hat also die gleiche Struktur wie bei Problem 7, wenn man die Ungleichungs- durch Gleichungsbedingungen ersetzt. Die Bedingung, dass die Ableitung des Funktionals J durch Anteile bezüglich der primalen und dualen Variable darstellbar ist, ist in der Praxis nicht kritisch da man in der Regel nur an Funktionalen bezüglich einer der beiden Variablen interessiert ist. Dann ist der andere Teil identisch null.

Bemerkung 21. Die Definition von \tilde{G} führt zu einer Kopplung zwischen den Gebieten auf dem aktiven Bereich der primalen Lösung. Das heißt, also nur die Gebiete, die einen aktiven Kontaktrand haben werden dual gekoppelt. Während Gebiete ohne aktiven Kontakt keine Kopplung erhalten. Damit ist also $\tilde{G} = \mathbf{H}_D^1 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{C, \text{active}})$ mit dem aktiven Kontaktrand $\Gamma_{C, \text{active}} \subset \Gamma_C$.

Im Folgenden wird dieses duale Problem verwendet, um einen verlässlichen Fehlerschätzer für Mehrkörperkontaktprobleme herzuleiten.

Folgt man dazu dem in [92] gewählten Ansatz, so kann man für ein beliebiges Fréchet-differenzierbares Funktional $J : \mathbf{H}_D^1 \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C) \rightarrow \mathbb{R}$ den Fehler bezüglich dieses Funktionals über primale und duale Residuen ρ, ρ^* mit

$$\rho(u_h, v) := (f, v) - a(u_h, v) - b_n(\lambda_H, v),$$

$$\rho^*(Z_h, \Phi) := J'(U_h)(\varphi, w) - a(\varphi, z_h) - b_n(w, z_h) + b_n(\pi_H, \varphi)$$

abschätzen. Hier ist J' die Fréchet-Ableitung des Funktionals J und (z_h, π_H) eine FEM-Lösung des dualen Problems.

Dann gilt für das duale Residuum zusätzlich:

Lemma 17. *Seien $(u, \lambda), (u_h, \lambda_H)$ Lösungen von Problem 3 und 10 und sei (z_h, π_H) eine FEM-Lösung von Problem 21. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \rho^*((z_h, \pi_H), (u - u_h, \lambda - \lambda_H)) \\ &= J'(u_h, \lambda_H)((u - u_h, \lambda - \lambda_H)) + b_n(\pi_H, u - u_h). \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt mit Lemma 15 und Einsetzen von $(u - u_h, \lambda - \lambda_H)$ in die Definition des dualen Residuums. \square

Die Differenz zwischen der kontinuierlichen Lösung U und einer FEM-Lösung U_h lässt sich bis auf höhere Ordnungsterme $\mathcal{R}_h^{(3)}(U - U_h)$ angeben durch

$$\begin{aligned} J(U) - J(U_h) &= \int_0^1 J'(U + s(U - U_h))(U - U_h) ds \\ &= \frac{1}{2} (J'(U)(U - U_h) + J'(U_h)(U - U_h)) \\ &\quad + \mathcal{R}_h^{(3)}(U - U_h). \end{aligned}$$

Damit gilt

Theorem 13. *Seien $U = (u, \lambda), U_h = (u_h, \lambda_H)$ Lösungen der primalen Probleme 7 und 8, sowie $Z = (z, \pi)$ eine Lösung des dualen Problems 21 und $Z_h = (z_h, \pi_H)$ eine FEM-Lösung des dualen Problems. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & J(U) - J(U_h) \\ &= \frac{1}{2} (\rho(U_h, z - z_h) + \rho^*(Z_h, U - U_h) + b_n(\pi_H + \pi, u_h - u)) \\ &\quad + \mathcal{R}_h^{(3)}(U - U_h). \end{aligned}$$

Der Beweis folgt aus dem folgendem Lemma:

Lemma 18. *Seien U, U_h, Z, Z_h wie in Theorem 13 definiert. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} & A(U - U_h, Z) + J'(U_h)(U - U_h) \\ &= \rho(U_h, z - z_h) + \rho^*(Z_h, U - U_h) + b_n(\pi_h + \pi, u_h - u). \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt durch Einsetzen und Anwendung von Lemma 15 und Lemma 17:

$$\begin{aligned}
& A(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{Z}) + J'(\mathbf{U}_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \\
&= A(\mathbf{U}, \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_h) - A(\mathbf{U}_h, \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_h) \\
&\quad + J'(\mathbf{U}_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) + A(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{Z}_h) \\
&= \underbrace{a(\mathbf{u}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)}_{=(f, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)} - \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}_H, \mathbf{u}) \\
&\quad - (a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) - \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}_H, \mathbf{u}_h)) \\
&\quad + J'(\mathbf{U}_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \\
&\quad + \underbrace{a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h) + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{z}_h)}_{=0} - \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi}_H, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
&= \underbrace{(f, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) - \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)}_{=\rho(\mathbf{U}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)} \\
&\quad + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + J'(\mathbf{U}_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \\
&= \rho(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \underbrace{J'(\mathbf{U}_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi}_H, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)}_{=\rho^*(\mathbf{Z}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h)} \\
&\quad + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \\
&= \rho(\mathbf{U}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \rho^*(\mathbf{Z}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}_H, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

□

Damit folgt der Beweis von Theorem 13 durch

Beweis. (Theorem 13) Es gilt

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{U}) - J(\mathbf{U}_h) &= \frac{1}{2} \left(J'(\mathbf{U})(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) + J'(\mathbf{U}_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \right) \\
&\quad + \mathbf{R}_h^{(3)}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \\
&= \frac{1}{2} \left(A(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{Z}) + J'(\mathbf{U}_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \right) \\
&\quad + \mathbf{R}_h^{(3)}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \\
&= \frac{1}{2} \left(\rho(\mathbf{U}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \rho^*(\mathbf{Z}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \right) \\
&\quad + \mathbf{b}_n(\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}_H, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + \mathbf{R}_h^{(3)}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h).
\end{aligned}$$

□

Die primalen und dualen Residuen können folgendermaßen ausgewertet werden.

Dazu sei angenommen, dass das Funktional J für $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathcal{V}$ in der Form

$$J(\mathbf{V}) = \sum_{l=0}^1 \left(\int_{\Omega^l} j_{1,l}(x^l, v^l) dx + \int_{\Gamma_N^l \cup \Gamma_C^l} j_{2,l}(x^l, \gamma(v^l)) ds + \int_{\Gamma_C} j_3(x, w) ds \right)$$

vorliegt. Dann zerfällt die Fréchetableitung $J' (u_h, \lambda_H)$ in die Terme $J' (u_h, \lambda_H) = \sum_{l=0}^1 [j'_{1,l} (u_h, \lambda_H) + j'_{2,l} (u_h, \lambda_H)] + j'_3 (u_h, \lambda_H)$

$$j'_{1,l} (u_h, \lambda_H) (x) := \frac{\partial j_1}{\partial x_2} (x, u_h (x), \lambda_H (x)) \text{ in } \Omega^l,$$

sowie

$$j'_{2,l} (u_h, \lambda_H) (x) := \frac{\partial j_2}{\partial x_2} (x, u_h (x), \lambda_H (x)) \text{ auf } \partial \Omega$$

und

$$j'_3 (u_h, \lambda_H) (x) := \frac{\partial j_3}{\partial x_3} (x, u_h (x), \lambda_H (x)) \text{ auf } \partial \Omega.$$

Ferner seien für ein Element T der FE-Vernetzung \mathbb{T}_h^l von Gebiet Ω^l die Kanten geben durch \mathcal{E} , wobei innere Kanten durch \mathcal{E}° , Neumannrand Kanten durch \mathcal{E}^N und Kontaktrandkanten durch \mathcal{E}^C , bzw. \mathcal{E}^{C^*} gekennzeichnet sind.

Es ist zu beachten, dass in der Definition der primalen und dualen Residuen durch den Operator b_n eine Kopplung der Gebiete vorliegt. Um die für einen Fehlerschätzer nötigen elementweisen Beiträge zu erhalten, sind noch folgende Umformulierungen nötig. Im Folgenden bezeichne der Index l die zum Gebiet Ω^l gehörenden Anteile. Es gilt:

$$\begin{aligned} \rho (U_h, v) &= (f, v) - a (u_h, v) - b_n (\lambda_H, v) \\ &= \sum_{l=1}^2 (f^l, v^l) - \sum_{l=1}^2 a (u_h^l, v^l) \\ &\quad + \langle \lambda_H, [v]_n \rangle \\ &= \sum_{l=1}^2 \left((f^l, v^l) - a (u_h^l, v^l) \right) \\ &\quad + \langle \lambda_H, \gamma_n^1 (v^1) + \gamma_n^2 (v^2) \rangle \\ &= \sum_{l=1}^2 \left((f^l, v^l) - a (u_h^l, v^l) + \langle \lambda_H, \gamma_n^l (v^l) \rangle \right). \end{aligned}$$

Nach partieller Integration erhält man so für das primale Residuum ρ^l auf dem Gebiet Ω^l folgende Darstellung:

$\rho^l (U_h, v) = \sum_{T \in \mathbb{T}_h^l} \left((R_T, v) + \sum_{e \in \mathcal{E}(T)} (R_e, v) \right)$ mit den Zell- und Kantenresiduen

$$\begin{aligned} R_T &:= f + \operatorname{div} (\sigma (u_h)) \\ R_e &:= \begin{cases} \frac{1}{2} [\sigma_n (u_h)] & e \in \mathcal{E}^\circ \\ q - \sigma_n (u_h) & e \in \mathcal{E}^N \\ \lambda_H - \sigma_n (u_h) & e \in \mathcal{E}^C. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Anteile des dualen Residuums ergeben sich aus folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \rho^*(Z_h, \Phi) \\
&= J'(\mathbf{U}_h)(\varphi, w) - a(\varphi, z_h) \\
&\quad - b_n(w, z_h) + b_n(\pi_H, \varphi) \\
&= \sum_{l=1}^2 \left(j'_{1,l}(\mathbf{U}_h^l) + j'_{2,l}(\mathbf{U}_h^l) \right) (v^l) - \sum_{l=1}^2 a(v^l, z_h^l) + \langle \pi_H, [v]_n \rangle \\
&\quad + j'_3(\mathbf{U}_h)(w) - \langle w, [z_h]_n \rangle \\
&= \sum_{l=1}^2 \left(j'_{1,l}(\mathbf{U}_h^l) (v^l) - a(v^l, z_h^l) \right) + \left(j'_{2,l}(\mathbf{U}_h^l) (v^l) - \langle \pi_H, \gamma_n^l(v^l) \rangle \right) \\
&\quad + \left(j'_3(\mathbf{U}_h)(w) - \langle w, [z_h]_n \rangle \right) \\
&= \sum_{l=1}^2 \left(j'_{1,l}(\mathbf{U}_h^l) (v^l) - a(v^l, z_h^l) \right) + \\
&\quad \left(j'_{2,l}(\mathbf{U}_h^l) (v^l) - \langle \pi_H, \gamma_n^l(v^l) \rangle \right) + \frac{1}{2} \left(j'_3(\mathbf{U}_h)(w) - \langle w, [z_h]_n \rangle \right).
\end{aligned}$$

Damit sind nach partieller Integration die Fehleranteile gegeben durch

$$\rho^{*,l}(z_h, (v, w)) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left((R_T^*, v) + \sum_{e \in \mathcal{E}(T)} \left((R_{\mathcal{E},v}^*, v) + \frac{1}{2} (R_{\mathcal{E},w}^*, w) \right) \right)$$

mit

$$\begin{aligned}
R_T^* &:= j'_{1,l} + \operatorname{div}(\sigma(z_h)) \\
R_{\mathcal{E},v}^* &:= \begin{cases} \frac{1}{2} [\sigma_n z_h] & e \in \mathcal{E}^\circ \\ j'_{2,l} - \sigma_n z_h & e \in \mathcal{E}^N \\ j'_{2,l} - \pi_H - \sigma_n z_h & e \in \mathcal{E}^{C^*} \end{cases} \\
R_{\mathcal{E},w}^* &:= \frac{1}{2} (j'_3 - [z_h]_n).
\end{aligned}$$

Der noch ausstehende Term $b_n(\pi + \pi_H, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})$ in der Fehlerabschätzung lässt sich mittels der Annahme $\pi \approx \pi_H$ zu $2 \cdot b_n(\pi_H, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})$ vereinfachen.

Bemerkung 22. Auf diese Art ist es möglich auch Funktionale abzuschätzen, die bezüglich des Lagrange Multiplikators λ in der gemischten Formulierung definiert sind. Dies geschieht über den Term $R_{\mathcal{E},w}^*$. Es ist zu beachten, dass über den Sprungterm $[z_h]_n$ eine Kopplung der Gebiete auch bei der Auswertung des Fehlerschätzers stattfindet. Ein Entkoppeln des Terms, wie im Fall $R_{\mathcal{E},v}^*$ auf Kontaktrandelementen würde zu verfälschenden Fehlertermen führen. Denn betrachtet man den einfachen Fall $j'_3(w) = 0$, so liefert das duale Problem direkt $b_n(w, z_h) = 0$. Damit ist der Sprung $[z_h]_n$ zwar klein, jedoch nicht zwingend die Randoerschiebung $\gamma_n^l(z_h^l)$.

Für Funktionale, die nur bezüglich der primalen Variable \mathbf{u} definiert sind, reicht es aus, analog zu [87], nur für die primale Variable ein duales Problem zu definieren.

Problem 22. Finde $z \in G_z$ mit

$$J'(u_h)(\varphi) = a(\varphi, z) \quad \forall \varphi \in G_z$$

Mit diesem Problem folgt mit analogen Schlüssen zu obiger Herleitung:

Theorem 14. Seien $U = (u, \lambda)$, $U_h = (u_h, \lambda_H)$ Lösungen der primalen Probleme 5.2 und 5.3, sowie $Z = (z, \pi)$, $Z_h = (z_h, \pi_H)$ Lösungen der dualen Probleme. Dann gilt

$$\begin{aligned} & J(u) - J(u_h) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\rho}(u_h, z - z_h) + \tilde{\rho}^*(z_h, u - u_h) + b_n(\lambda_H - \lambda, z_h + z)) \\ & \quad + \mathcal{R}_h^{(3)}(U - U_h), \end{aligned}$$

mit primalem Residuum $\tilde{\rho}^l := \rho^l$ und dualem Residuum $\tilde{\rho}^{*,l}$.

Das duale Residuum hängt dabei von der Wahl von G_z ab. Setzt man analog zum einseitigem Kontaktproblem in [87] einfach auf dem Kontaktrand einen freien Neumannrand an, so ist das duale Residuum gegeben durch

$$\tilde{\rho}^{*,l}(z_h, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left((\tilde{\mathcal{R}}_T^*, v) + \sum_{e \in \mathcal{E}(T)} (\tilde{\mathcal{R}}_e^*, v) \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_T^* &:= j'_{1,l} + \operatorname{div}(\sigma(z_h)) \\ \tilde{\mathcal{R}}_e^* &:= \begin{cases} \frac{1}{2} [\sigma_n z_h] & e \in \mathcal{E}^\circ \\ j'_{2,l} - \sigma_n z_h & e \in \mathcal{E}^N \\ j'_{2,l} - \sigma_n z_h & e \in \mathcal{E}^{C*}. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Wahl führt allerdings zu einer Entkopplung der dualen Formulierung zwischen den Gebieten Ω^l und ist für adaptive Methoden nur bedingt geeignet, wie insbesondere das Beispiel 13 im folgenden Kapitel verdeutlicht. Eine alternative Wahl, die der Kopplung zwischen den Gebieten Rechnung trägt, ist, auf dem Kontaktrand $[z]_n = 0$ zu fordern. Dies liefert das in Problem 20 definierte gemischte duale Problem. Damit ergeben sich für $\tilde{\rho}^{*,l}$ die Anteile

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_T^* &:= j'_{1,l} + \operatorname{div}(\sigma(z_h)) \\ \tilde{\mathcal{R}}_e^* &:= \begin{cases} \frac{1}{2} [\sigma_n z_h] & e \in \mathcal{E}^\circ \\ j'_{2,l} - \sigma_n(z_h) & e \in \mathcal{E}^N \\ j'_{2,l} - \pi_H - \sigma_n(z_h) & e \in \mathcal{E}^{C*}. \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung 23. Analog zur gemischten Fehlerschätzung liefert in diesem Fall der Kontaktterm $b_n(\lambda_H - \lambda, z_h + z) \approx b_n(\lambda_H - i_H \lambda_H, 2 \cdot z_h)$ eine Kopplung zwischen den Gebieten in der Auswertung.

Die Fehlerabschätzung in Theorem 13 ist durch das primale Residuum $\rho(u_h, z - z_h)$, das duale Residuum $\rho^*(Z_h, U - U_h)$ und dem Kontaktterm $b_n(\pi + \pi_H, u_h - u)$ gegeben. Die Auswertung dieser Terme

erfordert eine Auswertung des Approximationsfehlers $z - z_h$, $u - u_h$ und $\lambda - \lambda_H$. Diese Auswertung kann nicht direkt erfolgen, da die Lösungen (u, λ) und (z, π) nicht bekannt sind. Stattdessen werden diese Fehler approximativ ausgewertet, indem man die Unbekannten durch Approximationen ersetzt, die potentiell genauer als die finite Elemente Lösungen (u_h, λ_H) und (z_h, π_H) sind. Dazu werden üblicherweise Interpolierende höherer Ordnung der finite Elemente Lösungen verwendet. Für stückweise lineare Elemente kann das durch quadratische Interpolation auf einem Makroelement geschehen. Dazu muss die Diskretisierung eine sogenannte Patchstruktur aufweisen, so dass jedes Element T_h der Diskretisierung eindeutig einem Makroelement \bar{T}_{2h} zugeordnet werden kann. Also einem größeren Element, das etwa durch eine einmalige Vergrößerung des Netzes erhalten werden kann. Eine quadratische Interpolation $i_{2h}^2(v_h)$ auf dem Makroelement \bar{T}_{2h} kann so durch Auswertung der nodalen Freiheitsgrade der i zugehörigen Elemente T_h^i geschehen. Weitere Informationen zur Wahl der Interpolation finden sich zum Beispiel in [7]. Für Interpolation bei Elementen höherer Ordnung sei zum Beispiel auf [61] verwiesen. Der Lagrange Multiplikator λ_H ist bei stückweise linearen Elementen für die primale Variable stückweise konstant zu wählen. Damit erhält man eine Approximation höherer Ordnung, in dem man die lineare Interpolierende von

$$\left(\sum_{T_C \in \mathcal{M}(p)} |T_C| \right)^{-1} \sum_{T_C \in \mathcal{M}(p)} \lambda_H|_{T_C}$$

als Näherung wählt. Dabei ist die Menge $\mathcal{M}(p)$ gegeben durch

$$\mathcal{M}(p) := \{T_C \in \mathbb{T}_{C,H} \mid p \in \bar{T}_C\}$$

für einen Gitterpunkt p von $T_{C,H}$.

Bemerkung 24. Die Interpolation $i_{2h}^2(\cdot)$ ist nicht stetig auf Netzen mit hängenden Knoten. In diesem Fall müssen zusätzliche Nebenbedingungen auf diesen Knoten erfüllt werden. Siehe dazu zum Beispiel [87].

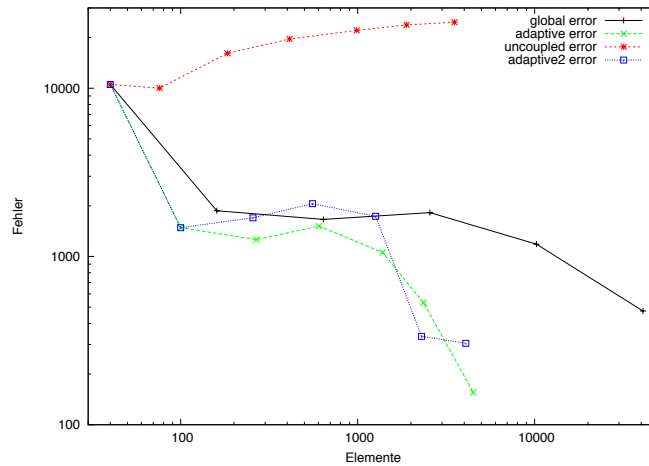
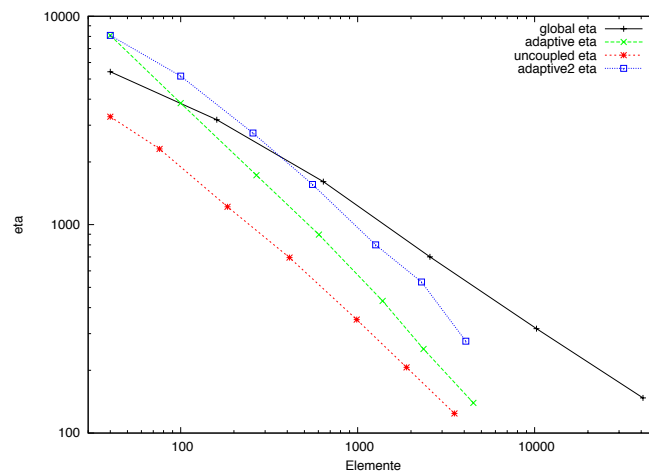
5.1.5 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die im vorherigen Abschnitt vorgestellten dual gewichteten Fehlerschätzer auf einige Beispiele angewendet. Es zeigt sich, dass insbesondere die Wahl des dualen Problems für die Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers eine Rolle spielt. Zur Auswertung des Fehlerfunktionals $J(u)$ wird hier der Wert des Funktionals bezüglich einer Referenzlösung u_{ref} auf einem feinen, global verfeinerten Netz herangezogen.

Beispiel 13. Betrachtet werden die Gebiete aus Beispiel 11 mit modifizierten Parametern: Das E-Modul beträgt nun $E^0 = 10^5$, $E^1 = 10^{15}$ und $E^2 = 10^8$, die Poissonzahl ist gegeben durch $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0.25$. Die Gebiete Ω^1 und Ω^2 sind inhomogenen Dirichletbedingungen von $(0, -0.005)$, bzw. $(0, 0.01)$ unterworfen. Das Funktional J , dessen Fehler kontrolliert werden soll, ist gegeben durch

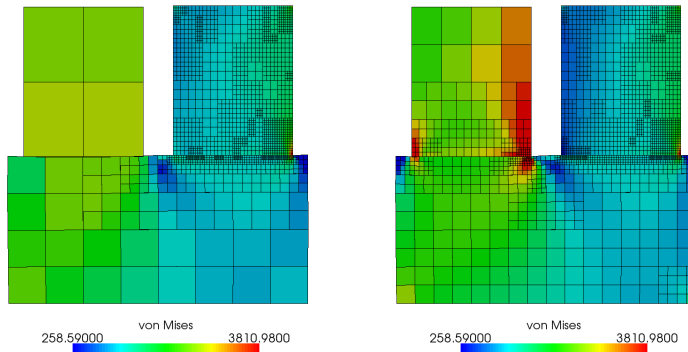
$$J(u) := \frac{1}{|B|} \int_B \sigma_v^2(u) \, dx,$$

mit $B := \Omega^1$. Ziel ist also, die von Mises Spannungen im Gebiet Ω^1 zu kontrollieren. Offensichtlich gilt $J(v) = 0$ für Funktionen $v = (v^0, 0, v^2) \in \mathbf{H}_D^1$. Damit liefert ein Fehlerschätzer auf Grundlage des ungekoppelten dualen Problems 22 keine vernünftige Abschätzung, da die Kopplung der Kontaktbedingung nicht erfasst werden kann. Dagegen liefert die gemischte Formulierung aus Problem 21 eine gute Schätzung des Fehlers und somit eine brauchbare adaptive Verfeinerung.

Abbildung 52: Fehler $J(U) - j(U_n)$ Abbildung 53: Fehlerschätzer η

In Abbildung 52 ist der Fehlerverlauf aufgetragen. Der Fehlerschätzer, der das ungekoppelte duale Problem verwendet, liefert keine brauchbare adaptive Verfeinerung, während Fehlerschätzer auf Basis des gekoppelten dualen Problems eine gute Approximation liefern. Betrachtet man die Werte des Fehlerschätzers in Abbildung 53, so sieht man,

dass der Fehlerschätzer für das ungekoppelte Problem in der Tat nicht zur Abschätzung des Fehlers zu gebrauchen ist, denn während der Fehler konstant bleibt, sinkt der Wert des Fehlerschätzers bei jedem Verfeinerungsschritt. Die Fehlerschätzer “adaptive” aus Theorem 13 und “adaptive2” aus Theorem 14 auf Basis des gekoppelten dualen Problems 21 schätzen den Fehler gut ab. Vergleicht man die adaptiven Vernetzungen nach 5 Verfeinerungen (Abbildung 54), so erkennt man den Grund für das schlechte Verhalten des ungekoppelten Problems. Die Kontaktsituation zwischen Ω^2 und Ω^0 wird durch das ungekoppelte Problem nicht korrekt aufgelöst, so dass dieser Einfluss auf das Fehlerfunktional nicht erkannt wird.



(a) ungekoppeltes duales Problem mit von Mises Spannung σ_v (b) gekoppeltes duales Problem mit von Mises Spannung σ_v

Abbildung 54: adaptive Vernetzung bei Beispiel 13

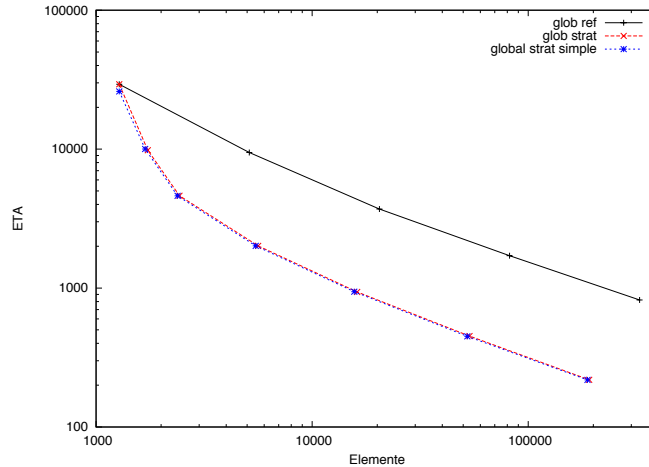
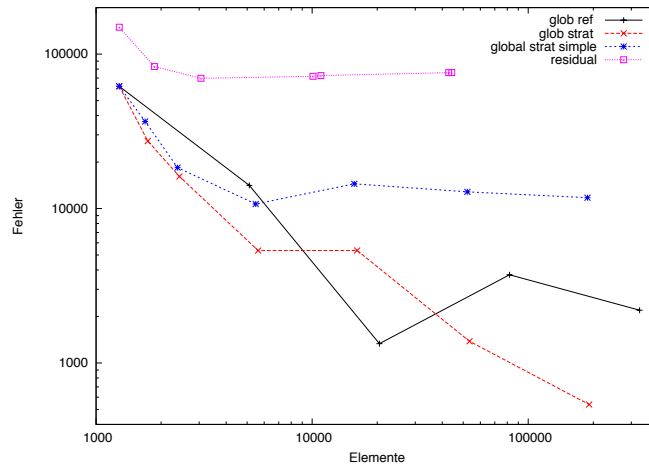
Nach den Überlegungen aus Beispiel 13 ist klar, dass dual gewichtete Fehlerschätzer insbesondere dann gute Ergebnisse erzielen, wenn lokale Funktionale kontrolliert werden sollen.

Beispiel 14. Betrachtet wird der Kontakt zwischen 2 Gebieten im \mathbb{R}^2 . Das erste Gebiet besteht aus einer Kreisscheibe mit innerem Radius $r_0 = 0.2$ und äußerem Radius $r_1 = 2$ um den Mittelpunkt $m = (0,0)$. Das untere Gebiet Ω^1 ist durch einen Block gegeben mit einer unteren Kante $\Gamma_D := [-1.5, 1.5] \times [1.5]$ verbunden mit einem Kreissegment an der oberen Kante, welches durch den Radius $r_{\Gamma_C} = 9$ mit dem Mittelpunkt $m_C = (0, 8.05)$. Die Geometrie ist für adaptiv verfeinerte Netze in Abbildung 57 gegeben. Die Materialparameter sind $E^0 = E^1 = 10^5$ und $\nu^0 = \nu^1 = 0.25$. Der mögliche Kontaktrand entsteht durch eine Überlappung in der Referenzkonfiguration. Auf der unteren Kante von Ω^1 und auf dem inneren Kreisbogen von Ω^0 sind Dirichlet Randdaten vorgegeben. Es wird wieder das Funktional

$$J(\mathbf{u}) := \frac{1}{|\mathbb{B}|} \int_{\mathbb{B}} \sigma_v^2(\mathbf{u}) \, dx,$$

benutzt, wobei die Menge \mathbb{B} durch einen Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r_{\mathbb{B}} = 0.25$ gegeben ist. Damit wird der Fehler der von Mises Spannungen in der Nähe der Aufhängung der Kreisscheibe kontrolliert.

Es ist zu erkennen, dass der Fehlerschätzer auf Grundlage des ungekoppelten Problems den Fehler nicht approximiert (Abb. 56), obwohl der Fehlerschätzer einen richtigen Verlauf anzeigt (Abb. 55). Dies mit dem in Abbildung 58 zu sehenden Verlauf der dualen Lösung zu erklären. Da das Funktional J in Gebiet Ω^2 identisch null ist, wird das Gebiet nur aufgrund von Regularisierungs-

Abbildung 55: Fehlerschätzer η für verschiedene StrategienAbbildung 56: Fehler des Funktionals $J(U_{ref}) - J(U_h)$

strategien verfeinert und bildet so die Kontaktbedingung nur unzureichend ab.

Es zeigt sich weiterhin, dass der in Abschnitt 5.1.2 hergeleitete Fehlerschätzer nicht in der Lage ist lokale Funktionale gut zu approximieren, da dieser Schätzer den Fehler in der Energienorm des gesamten Gebiets abschätzt (vgl. Verlauf von "residual" in Abbildung 56).

Fazit

Die in Abschnitt 5.1.4 hergeleiteten Fehlerschätzer können für zielgerichtete adaptive Verfeinerungsstrategien für Funktionale J verwendet werden. Dabei zeigt sich, dass der in Abschnitt 5.1.2 hergeleitete residuale Fehlerschätzer den dual gewichteten Methoden zur Kontrolle von Zielfunktionalen J unterlegen ist. Weiterhin wird deutlich, dass die

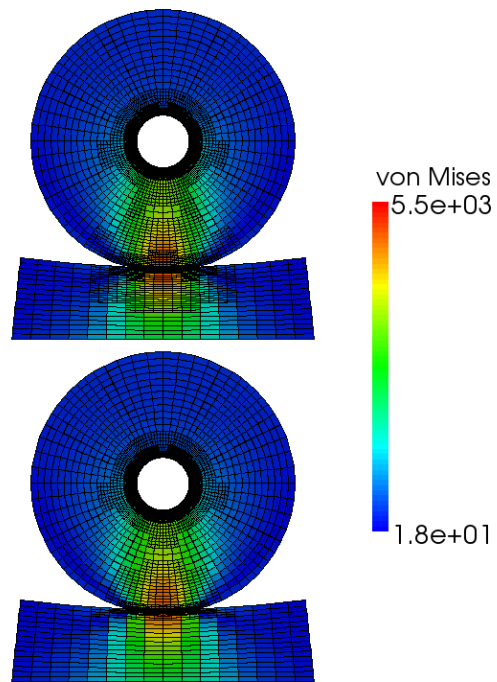


Abbildung 57: von Mises Spannung σ_v für adaptive Vernetzungen bei Beispiel 14

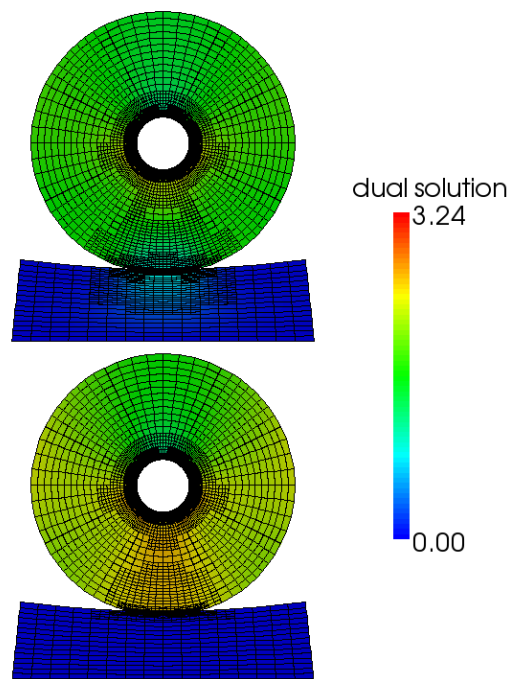


Abbildung 58: duale Lösung z_h bei versch. Strategien für Beispiel 14

Definition eines geeigneten dualen Problems für adaptive Methoden grundlegend für eine effiziente Strategie ist. Verwendet man nur die primale Formulierung des dualen Problems (Problem 22), so kann die nicht gekoppelte Variante zu falschen Verfeinerungsstrategien führen (vgl. Beispiel 13). Zu erklären ist das Phänomen damit, dass die nicht gekoppelte Strategie eine duale Lösung identisch 0 auf allen Gebieten Ω^l mit $J_{|\Omega^l}(u) = 0$ liefert. Dadurch können insbesondere Kontaktsituationen, die einen Einfluss auf die Lösung haben nicht erfasst werden. Dagegen liefern die Fehlerschätzer auf Grundlage des gekoppelten Problems effiziente Strategien, weil sie der Kopplung des primalen Problems Rechnung tragen.

5.2 ADAPTIVE METHODEN FÜR ZEITABHÄNGIGE PROBLEME

Adaptive Methoden für zeitabhängige Probleme führen zu einem Wechsel der Approximationsräume zwischen einzelnen Zeitschritten. Dies führt zu numerischen Fehlern beim Transfer der Lösung für den nächsten Zeitschritt, so dass diese bei der Generierung der Diskretisierung berücksichtigt werden müssen. Die Mechanismen für die Generierung adaptiver Diskretisierungen sind aus [87] übernommen. In dieser Arbeit werden Fehlerschätzer und adaptive Strategien für dynamische Probleme untersucht. Die vorgestellten Verfahren lassen sich auf die hier untersuchten Mehrkörperkontaktprobleme übertragen. Grundlegend dazu ist die Definition eines geeigneten Fehlerschätzers. Möchte man nur den räumlichen Fehler kontrollieren, so kann man wie in [23] vorgeschlagen, einen Fehlerschätzer nur für die quasistatischen Probleme wählen, so dass der zeitliche Fehler nicht berücksichtigt wird. In diesem Kapitel wird die adaptive dynamische Diskretisierung exemplarisch anhand des in Abschnitt 5.1.2 vorgestellten Fehlerschätzer dargestellt. Der Fehlerschätzer muss zunächst auf das quasistatische Problem 14 angepasst werden.

Da in Problem 14 die rechte Seite F^k in der Praxis nicht bekannt ist, muss diese durch F_h^k ersetzt werden, um einen auswertbaren Fehlerschätzer zu erhalten. Dazu wird folgendes Problem betrachtet.

Problem 23. Finde $(\tilde{u}^k, \tilde{\lambda}^k) \in V_k \times \Lambda_k$, so dass für alle $\varphi \in V_k$ und $\mu \in \Lambda_k$ gilt:

$$\begin{aligned} c(\tilde{u}^k, \varphi) + b_n(\tilde{\lambda}^k, \varphi) &= (F_h^k, \varphi) \\ b_n(\mu - \tilde{\lambda}^k, \tilde{u}^k) &\leq \langle \mu - \tilde{\lambda}^k, g \rangle \end{aligned}$$

Es ist zu beachten das der räumliche Fehlerschätzer gilt solange $F_h^k \approx F^k$ ist, was für kleine k und h gelten sollte, siehe dazu auch [23].

Wie im statischen Fall basiert die Herleitung des Fehlerschätzers auf einem Hilfsproblem, dass sich aus der ersten Zeile von Problem 23 ergibt, indem man den Lagrange Multiplikator λ^k durch den diskreten Multiplikator λ_H^k ersetzt.

Problem 24. Finde $u_0^n \in V_k$, so daß

$$c(u_0^k, \varphi) = (F_h^n, \varphi) - b_n(\tilde{\lambda}_H^k, \varphi)$$

für alle $\varphi \in V_k$ gilt.

Wie im statischen Fall kann der Term $\|u_0^k - u_h^k\|$ also durch beliebige Fehlerschätzer für Variationsgleichungen abgeschätzt werden. Damit erhält man analog zum statischen Fall eine Fehlerabschätzung folgender Form

Proposition 3. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von V_h^k und Λ_H^k ist, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{u}^k - u_h^k \right\|^2 + \left\| \tilde{\lambda}^k - \lambda_H^k \right\|^2 \\ & \leq C \left(\left(\eta_0^k \right)^2 + \left\| \left(g^k - [u_h^k]_n \right)_- \right\|_{1/2, \Gamma_C}^2 \right) \\ & \quad + C \left| \left(\lambda_H^k, \left(g^k - [u_h^k]_n \right)_- \right)_{0, \Gamma_C} \right|. \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 5.1.2 erhält man so durch einen residualen Fehlerschätzer

$$\eta_0^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^2 R_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_T} h_e R_{0,e}^2 \right)$$

mit den Zell- und Kantenresiduen

$$\begin{aligned} R_{0,T} & := \left\| F_h^k + \frac{1}{2} \tau^2 \operatorname{div} \sigma(u_h^k) - u_h^k \right\|_{0,T}, \quad T \in \mathcal{T}_H \\ R_{0,e} & := \begin{cases} \left\| -\frac{1}{4} \tau^2 [\sigma_n(u_h)]_e \right\|_{0,e}, & e \in \mathcal{E}^\circ, \\ \left\| \frac{1}{2} \tau^2 (\sigma_n(u_h) - q) \right\|_{0,e} & e \in \mathcal{E}_N, \\ \left\| \frac{1}{2} \tau^2 (\sigma_{nn}(u_h) + \lambda_H) \right\|_{0,e} & e \in \mathcal{E}_C \end{cases} \end{aligned}$$

die Möglichkeit, den Fehler der quasistatischen Variationsungleichung abzuschätzen. Auf Basis dieses Fehlerschätzers erhält man eine zeitabhängige dynamische Diskretisierung durch Anwendung folgender Algorithmen.

Bei diesem Algorithmus wird ausgehend von einem Startnetz zunächst das dynamische Problem komplett gelöst. Anschliessend wird für jeden Zeitschritt auf Basis eines Fehlerschätzers eine Verfeinerung generiert. Vor dem nächsten Verfeinerungsschritt wird nun das Problem mit dieser Vernetzung gelöst. Auf diese Weise ist es möglich die hierarchischen Strukturen der Vernetzung zu nutzen. Insbesondere vermeidet man das Problem einer Vergrößerung des Netzes. Zwar können zwischen verschiedenen Zeitschritten Vergrößerungen auftreten, wenn im nächsten Zeitschritt eine lokal gröbere Vernetzung vorliegt als im vorherigen. Da aber beide Vernetzungen aus adaptiven Verfeinerungen des Startnetzes hervorgegangen sind, sind zur Erstellung des Netzes nur Verfeinerungen nötig. Die so global verfügbare Netzhierarchie lässt sich auch zur Datenübertragung verwenden. Für eine genaue Erläuterung der dynamischen Algorithmen sei auf [87] verwiesen. Kritisch ist hier die Übertragung der diskreten Lösungen zwischen einzelnen Zeitschritten. Dazu sind einerseits Projektionen durchzuführen, andererseits ist eine Regularisierung der Diskretisierung nötig. Insbesondere soll eine zu große Änderung der FE-Netze zwischen 2 Zeitschritten vermieden werden. Dies wird hier sichergestellt, indem man nur einfach hängende Knoten in der Zeit zulässt.

Algorithmus 1. *Adaptiver Lösungsalgorithmus*

- (i) Setze $l=1$.
- (ii) Setze $k=1$ und ermittle die Startwerte $u_{h_1}^0, v_{h_1}^0, a_{h_1}^0 \in V_{h_1}^1$.
- (iii) Bestimme $u_{h_1}^k, \lambda_{h_1}^k$ gemäß Problem 16, sowie $v_{h_1}^k, a_{h_1}^k$ gemäß der Updateformel zum gewählten Zeitschrittverfahren.
- (iv) Werte den Fehlerschätzer η_l^k aus.
- (v) Setze $\mathbb{T}_{l+1}^k = \mathbb{T}_l^k$ und verfeinere \mathbb{T}_{l+1}^k gemäß einer auf Basis von η_l^k gewählten Verfeinerungsstrategie aus.
- (vi) Entferne alle mehrfach hängenden Knoten mittels Algorithmus 2
- (vii) Falls $k < N$ setze $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu Schritt (iii).
- (viii) Entferne alle doppelt hängenden Knoten in der Zeit mittels Algorithmus 3
- (ix) Falls das Abbruchkriterium erfüllt ist, dann stopp. Sonst setze $l \leftarrow l + 1$ und gehe zu Schritt (ii).

Algorithmus 2. *Räumliche Regularisierung*

- (i) Markiere alle Zellen mit mehrfach hängenden Knoten.
- (ii) Falls keine Zellen markiert sind, stopp.
- (iii) Verfeinere alle markierten Zellen und gehe zu Schritt (i).

Algorithmus 3. *Zeitliche Regularisierung*

- (i) Setze $k = 2$.
- (ii) Markiere alle Zellen mit mehrfachen hängenden Knoten rückwärts in der Zeit in \mathbb{T}^k .
- (iii) Verfeinere alle Zellen in \mathbb{T}^k .
- (iv) Falls $k < N$, setze $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu Schritt (ii).
- (v) Setze $k=N-1$.
- (vi) Markiere alle Zellen mit mehrfachen hängenden Knoten vorwärts in der Zeit in \mathbb{T}^k .
- (vii) Verfeinere alle Zellen in \mathbb{T}^k .
- (viii) Falls $k > 1$, setze $k \leftarrow k - 1$ und gehe zu Schritt (vi).
- (ix) Stopp.

In [87] wurde dieser Algorithmus eingehend untersucht. Das folgende Beispiel zeigt seine Verwendung unter Anwendung des in diesem Kapitel hergeleiteten residualen Fehlerschätzers.

Beispiel 15. Es wird der Kontakt zwischen drei Gebieten des \mathbb{R}^2 betrachtet. Die Gebiete sind gegeben durch $\Omega^0 := [-0.5, 0.5] \times [-3.00001, -2.00001]$, $\Omega^1 := [-1.8, 0] \times [-2, -1]$ und $\Omega^2 := [0, 1.8] \times [-2, -1]$. Die Gebiete Ω^1 und Ω^2 sind links, bzw. rechts homogenen Dirichletdaten unterworfen. Gebiet Ω^0 besitzt am unteren Rand homogene Dirichletdaten. Die Ausgangskonfiguration ist in Abbildung 65b zu sehen. Auf die oberen Ränder von Gebiet Ω^1 und Ω^2 wirken Neumannkräfte der Form $F_{neu} = (0, -40)$. Das Zeitintervall ist gegeben durch $I = [0, 25]$, die Materialparameter sind $E^0 = 10^8, E^1 = E^2 = 10^4$ und $\mu^l = 0.3, l = 0, 1, 2$. Die Dichte beträgt $\rho^l = 20, l = 0, 1, 2$. Die Startdiskretisierung besteht aus 4 globalen Verfeinerungen auf jedem Gebiet. Anschließend wird der oben beschriebene adaptive Algorithmus vier mal durchgeführt, um eine adaptive Verfeinerung zu erhalten. Die Zeitschrittweite ist dabei fest gewählt mit $\tau = 0.0025$.

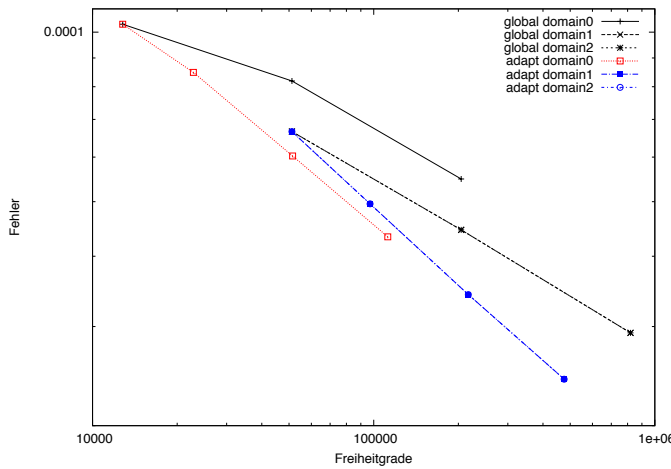


Abbildung 59: Vergleich von adaptiver und globaler Verfeinerung

In Abbildungen 60 bis 65 sind die adaptiven Verfeinerungen zu verschiedenen Zeiten aufgetragen. Man sieht deutlich, dass der benutzte residuale Fehlerschätzer zu symmetrischen Verfeinerungen führt und die dynamische Kontaktsituation richtig auflöst. In Tabelle 12 ist der maximale geschätzte Fehler der räumlichen Diskretisierung über die Summe der Freiheitsgrade aller in allen Zeitschritten für die adaptiven Verfeinerungen der Gebiete aufgetragen. In Tabelle 13 ist der Fehler für globale Verfeinerungen gegeben. Man erkennt die bessere Approximation durch die adaptive Verfeinerung, siehe dazu auch Abbildung 59.

DoF Ω^0	max (η)	DoF Ω^1	max (η)	DoF Ω^2	max (η)
12800	1.033E-4	51200	6.659E-5	51200	6.659E-5
22832	8.484E-5	97100	4.955E-5	97100	4.955E-5
51473	6.028E-5	217073	3.419E-5	217049	3.419E-5
112220	4.33E-5	476210	2.419E-5	476006	2.419E-5

Tabelle 12: geschätzter Fehler bei adaptiver Verfeinerung

DoF Ω^0	$\max(\eta)$	DoF Ω^1	$\max(\eta)$	DoF Ω^2	$\max(\eta)$
12800	1.033E-4	51200	6.659E-5	51200	6.659E-5
51200	8.19E-5	204800	4.456E-5	204800	4.456E-5
204800	5.487E-5	819200	2.924E-5	819200	2.924E-5

Tabelle 13: geschätzter Fehler bei globaler Verfeinerung

Damit veranschaulicht das Beispiel, dass die dynamische Diskretisierung auch adaptive Verfeinerungen korrekt wiedergeben kann. Insbesondere sieht man, dass die Kontaktsituation und Zuordnung der Kontaktträger auch auf dynamischen adaptiven Vernetzungen richtig erkannt wird. Ferner ist die Symmetrie der adaptiven Verfeinerung zu sehen. Dies ist zwar zu erwarten, da das Problem symmetrisch bezüglich der y -Achse ist. Allerdings ist anzumerken, dass der Lagrangemultiplikator λ_n auf einem Kontakttrand definiert ist und die Übertragung der Werte zwischen den Kontaktträgern kritisch sein kann. Insbesondere ist in diesem Beispiel die Übertragung der Kontaktbedingung zwischen Ω^1 und Ω^2 zu beachten. Man sieht, dass die Definition des Lagrangemultiplikators auf einer Seite nicht kritisch ist, und dass der verwendete Fehlerschätzer die Einflussgrößen richtig wiedergibt. Sonst würde hier die Symmetrie verloren gehen.

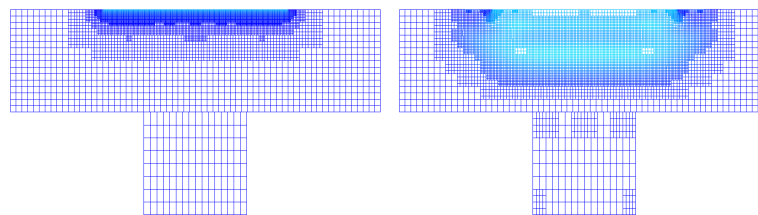
(a) Diskretisierung zu $T = 0$ (b) Diskretisierung zu $T = 10$

Abbildung 60: Adaptive Diskretisierungen zu verschiedenen Zeitschritten

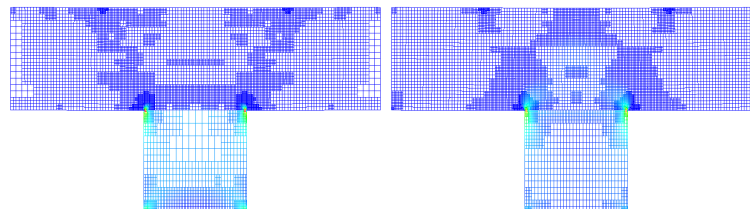
(a) Diskretisierung zu $T = 20$ (b) Diskretisierung zu $T = 30$

Abbildung 61: Adaptive Diskretisierungen zu verschiedenen Zeitschritten

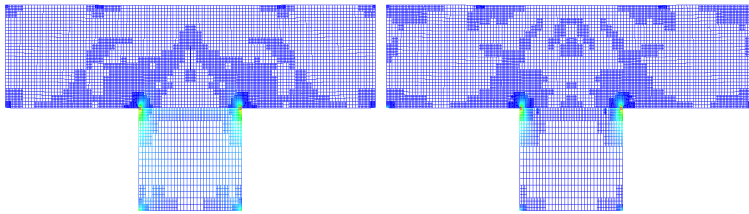
(a) Diskretisierung zu $T = 40$ (b) Diskretisierung zu $T = 50$

Abbildung 62: Adaptive Diskretisierungen zu verschiedenen Zeitschritten

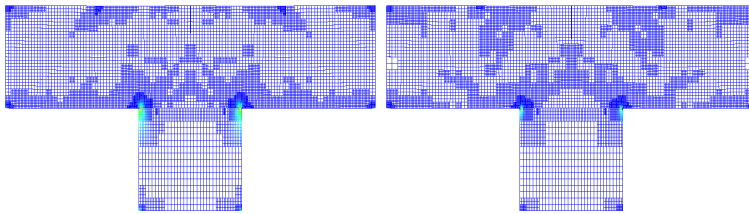
(a) Diskretisierung zu $T = 60$ (b) Diskretisierung zu $T = 70$

Abbildung 63: Adaptive Diskretisierungen zu verschiedenen Zeitschritten

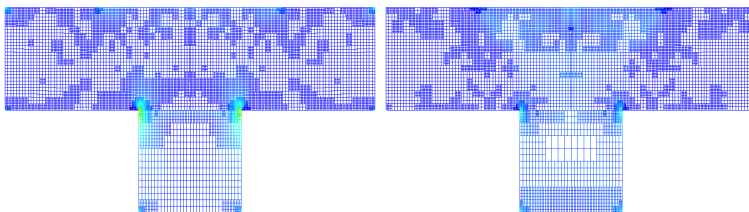
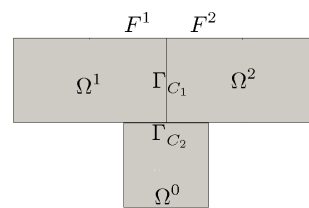
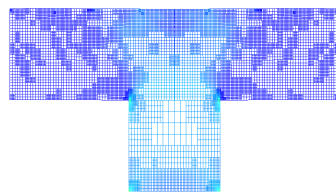
(a) Diskretisierung zu $T = 80$ (b) Diskretisierung zu $T = 90$

Abbildung 64: Adaptive Diskretisierungen zu verschiedenen Zeitschritten



(a) Diskretisierung zu $T = 99$

(b) Startkonfiguration

Abbildung 65: Adaptive Diskretisierungen zu verschiedenen Zeitschritten

In dieser Arbeit wurde die Diskretisierung von Mehrkörperkontaktproblemen untersucht, sowie a posteriori Fehlerkontrolle und Adaptivität für diese Probleme. Es konnte gezeigt werden, dass für höhere Ordnungsansätze auf nicht zueinander passenden Netzen stabile Diskretisierungen erzeugt werden können. Dies ist für anwendungsbezogene Kontaktprobleme von Vorteil, da eine übereinstimmende Diskretisierung in der Praxis oft nicht realisierbar ist, insbesondere bei dynamischen Problemen.

Auf Grundlage der a posteriori Fehlerschätzer aus Kapitel 5 konnten die optimalen Ordnungen für Ansatzfunktionen höherer Ordnung mittels adaptiver Strategien erreicht werden. Damit ist die Verwendung dieser Ansatzräume zu rechtfertigen. Weiterhin wurde mittels dual gewichteter Fehlerschätzer gezeigt, dass man den Diskretisierungsfehler für beliebige Funktionale abschätzen kann und bei einer geeigneten Wahl des dualen Problems gute Approximationseigenschaften erhält.

Offen ist die Frage nach einer rigorosen Stabilitätsabschätzung, da die in Kapitel 3.2.4 hergeleitete Bedingung keine genaue Aussage über die Wahl der Räume liefert. Die in dieser Arbeit verwendeten Paarungen sind auf Grundlage numerischer Untersuchungen und nicht analytisch ermittelt worden. Allerdings zeigen die Untersuchungen, dass die Stabilität für die Paarungen $q = p - 1$ und $H = 2h$ robust sind und nicht etwa von der Geometrie der Problems oder angreifenden Kräften abhängen.

Es wurden weiterhin nur linear elastische Probleme betrachtet, so dass die Erweiterung auf nichtlineare Materialmodelle eine offene Frage ist. Dabei ist anzumerken, dass die Stabilität der Räume auch für nichtlineare Materialien gesichert ist, da diese nicht vom Materialgesetz abhängt. Bei Verwendung nichtlinearer Materialgesetze ist die Annahme einer linearen Nicht-Durchdringungs-Bedingung nicht mehr gesichert, so dass der Lösungsalgorithmus für nichtlineare Nebenbedingungen angepasst werden muss, vgl. zum Beispiel [90]. Im Prinzip lassen sich durch die Diskretisierung verschiedenste Probleme behandeln, die eine Kopplung über ein Randstück zwischen mehreren Gebieten besitzen. So lässt sich zum Beispiel an Wärmeübertragung denken und damit auch thermoelastische Materialmodelle.

Weiterhin ist an alternative Lösungsalgorithmen zu denken. So könnten etwa Mehrgittermethoden für Kontaktprobleme, wie zum Beispiel in [40] und [67] beschrieben, auf die hier vorgestellte Diskretisierung angewendet werden. Auch die Anpassung lokaler Mehrgitterverfahren für die Verwendung bei adaptiven Strategien ist weiterführend möglich.

Bei adaptiven Methoden ist an die Entwicklung von Strategien für die hp-Methode denken. Dazu muss die lokale Stabilisierung angepasst werden, so dass Änderungen an der Polynomgradverteilung berücksichtigt werden. Insbesondere sind weiterführende Untersuchungen der adaptiven Strategien bei hohen Polynomansätzen notwendig. Da die Stabilisierung des Kontaktbereiches die Optimalität der adaptiven Vernetzung zunichte machen kann, vgl. Abschnitt 5.1.3, Beispiel 9. Im Falle dynamischer Kontaktprobleme ist an die Entwicklung von

Verfahren höherer Ordnung in der Zeit zu denken, um eine der Ortsdiskretisierung angepasste Strategie zu erhalten.

Als Nebenprodukt lässt sich die entwickelte Diskretisierung auch für Gebietszerlegungstechniken nutzen: Ersetzt man im reibungsbehafteten Kontaktproblem die Nebenbedingungen durch $b_n(\lambda_n, u) = 0$ und $b_t(\lambda_t, u) = 0$, so klebt man die Gebiete aneinander. Dies ist also eine umgekehrte Gebietszerlegung wie sie für Kontaktalgorithmen auf Basis einer Mortar-Diskretisierung zum Beispiel in [40] beschrieben ist. So ist also auch an eine Übertragung der adaptiven Methoden auf Gebietszerlegungstechniken zu denken.

Abschließend ist zu bemerken, dass Mehrkörperkontaktprobleme auf Grund ihrer Relevanz in der ingenieur-technischen Anwendung einen großen Spielraum für Erweiterungen bieten. So bieten sich weiterführende Kopplungen mit Schädigungsmodellen an, oder auch thermoelastische Kopplungen. Auch spielen in der Anwendung häufig Problemstellungen auf verschiedenen Skalen eine Rolle, wie beim Schleifen etwa die Kontaktsituation und die Bestimmung des Abtrages, so dass eine Kopplung mit Mehrskalmethoden von Interesse ist.

A.1 IMPLEMENTATIONSFRAGEN

Implementation der Kontaktrandprojektion

Werden Kontaktprobleme mit positivem Abstand in der Referenzkonfiguration betrachtet, siehe Abschnitt 3.1.3 und Abbildung 66, so ergibt sich das Problem, dass man eine Funktion Φ benötigt, die die Zuordnung zwischen den möglichen Kontakträndern liefert. Diese ist jedoch im Allgemeinen nicht berechenbar, so dass eine Zuordnung auf Grundlage dieser Funktion in der Praxis nicht möglich ist. Stattdessen wird vorgeschlagen, eine Projektion in Normalenrichtung von einem Kontaktrand zum anderen zur Kopplung zu verwenden. Dies ist im Rahmen linear elastischen Materialverhaltens zulässig und wird zum Beispiel in [45] auch für Probleme mit großer Verzerrung genutzt.

Betrachtet man eine Beispielkonfiguration, dargestellt in Abbildung 2a, so sieht man, dass die wirkliche Zuordnung durch die unbekannte Funktion Φ im Allgemeinen nicht durch eine Projektion P in Normalenrichtung des Randes Γ_C^1 geleistet werden kann. Unter Annahme linear elastischen Materialverhaltens sollte jedoch $n^1 \approx n_\Phi$ gelten, mit der Definition des Normalenvektors aus Kapitel 3.1.3, so dass die Projektion in Normalenrichtung eine akzeptable Näherung darstellt.

Die Assemblierung der diskreten Kontaktprobleme erfordert eine Zuordnung der Kontaktelemente und die entsprechenden Werte auf dem Referenzelement des Gebietes, sowie die Bestimmung des Abstandes. Seien nun zwei Elemente $T^1 \subset \Gamma_C^1$ und $T^2 \subset \Gamma_C^2$ auf den möglichen Kontakträndern gegeben. Dann ist zur Assemblierung der Nebenbedingung der Schnitt $T^2 \cap P(T^1)$ paarweise für alle Elemente T^1, T^2 der Kontaktränder zu bestimmen. Dies ist insbesondere auf nicht passenden Diskretisierungen in 3D schwer zu realisieren. Stattdessen werden hier nur die Quadraturpunkte bezüglich des Elementes T^1 , die zur Assemblierung der Nebenbedingungsmatrix B und des Abstandsvektors g benötigt werden, auf ein Element T^2 projiziert. Dabei ist es sinnvoll eine Quadraturformel hoher Ordnung mit vielen Quadraturpunkten zu wählen, da so sichergestellt werden kann, dass das Teilstück $T^2 \cap P(T^1)$ genügend genau erfasst wird. Dieses Vorgehen wird zum Beispiel in [45, Beispiel 4.2] für verschiedene Quadraturformeln untersucht.

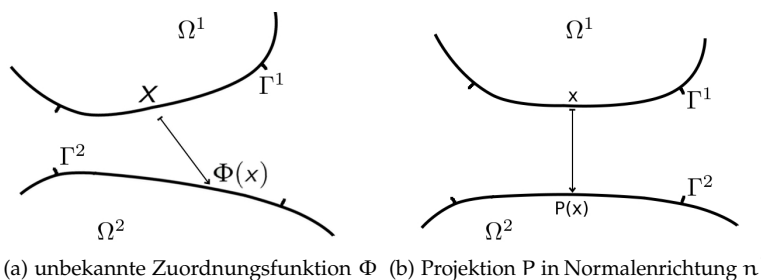


Abbildung 66: Zuordnung der Kontaktränder

Es ist möglich, den projizierten Quadraturpunkt und den Abstand bezüglich dieses Punktes gleichzeitig zu bestimmen. Seien dazu die Transformationen $T_1 : T_{\text{ref}}^1 \rightarrow T_C^1$ vom Referenzelement auf ein Element T_C^1 des möglichen Kontakttrandes gegeben. Dann ist für einen Quadraturpunkt $x^1 \in T_{\text{ref}}^1$ der projizierte Punkt x^2 auf dem Referenzelement T_{ref}^2 zu bestimmen. Man muss also

$$x^2 = T_2^{-1} P \left(T_1 \left(x^1 \right) \right)$$

bestimmen. Die Invertierung der Transformation T_2 ist jedoch nicht direkt möglich, da man Randelemente betrachtet mit $T_{\text{ref}}^1 \subset \mathbb{R}^{d-1}$ und $T_1(T_{\text{ref}}^1) \subset \mathbb{R}^d$. Die Projektion $P : T^1 \rightarrow T^2$ ist gegeben durch

$$P(x) := x + a \cdot n(x)$$

mit $x \in T^1$ und $P(x) \in T^2$ und dem Abstand a . Fügt man die Transformationen vom Referenzelement hinzu, so ergibt sich

$$P \left(T_1 \left(x^1 \right) \right) = T_1 \left(x^1 \right) + a \cdot n \left(T_1 \left(x^1 \right) \right) = T_2 \left(x^2 \right) \quad (\text{A.1})$$

für ein $x^2 \in T_{\text{ref}}^2$. Zu bestimmen sind die Unbekannten x^2 und a . Damit ergibt sich die Lösung als Nullstelle der Funktion

$$f \left(x^2, a \right) = T_2 \left(x^2 \right) - T_1 \left(x^1 \right) - a \cdot n \left(T_1 \left(x^1 \right) \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

für ein festes x^1 . Diese Funktion ist invertierbar, wenn $x^2 \in T_{\text{ref}}^2$ liegt. Ist die Transformation T_2 linear, so kann die Nullstelle durch eine Invertierung einer $d \times d$ Matrix bestimmt werden. Für nichtlineare Transformationen kann etwa ein Newtonverfahren genutzt werden.

Bemerkung 3. Da mit diesem Verfahren die Auswertung der projizierten Elemente nur über einzelne Quadraturpunkte erfolgt, sollte für die Diskretisierung $h^1 \leq h^2$ gelten, da sonst die Elemente auf Γ_C^2 nicht richtig erfasst werden können. Damit ergibt sich mit der Stabilitätsbedingung aus Kapitel 3.2.4 die Forderung $h^1 \approx h^2$. Für Kontaktprobleme ergibt sich diese Forderung allerdings häufig automatisch, um den Kontaktbereich richtig aufzulösen, wie in den numerischen Ergebnissen in den Abschnitten 5.1.3, 5.1.5 und 5.2 zu sehen ist.

Projektion bei dynamischen Kontaktproblemen

Die Zuordnung der Kontakträder ist mit den in Anhang A.1 und A.1 erläuterten Methoden möglich. Allerdings sind einige Dinge zu beachten. Die Projektion P^k in Zeitschritt k muss zu der in diesem Zeitschritt vorliegenden Kontaktsituation passen. Dazu verwendet man die in Zeitschritt $k-1$ bestimmten Deformationen und kann auf diese Weise die deformierte Konfiguration $\tilde{\Omega}_{k-1}^l$ des Gebietes Ω^l berechnen. Dann nutzt man die in A.1 beschriebene Methode mit den Transformationen $\tilde{T}_l : T_{\text{ref}}^l \rightarrow \tilde{T}^l \subset \Omega_{k-1}^l$ und dem Normalenvektor \tilde{n} bezüglich der deformierten Konfiguration.

Allerdings ist bei der Assemblierung des Abstandes g zu beachten, dass dieser im Zeitschrittverfahren bezüglich des undeformierten Zustandes berechnet werden muss. Dass heisst, nach Berechnung des Abstandes a muss die Deformation u_{k-1}^l in der aktuellen Normalen-

richtung \tilde{n}^1 wieder abgezogen werden. So erhält man den richtigen Abstand mittels $\tilde{a} := a - (u_{k-1}^1, \tilde{n}^1) + (u_{k-1}^2, \tilde{n}^1)$.

Zuordnung der Kontaktränder

Neben der in Anhang A.1 beschriebenen praktischen Projektion ist noch die Zuordnung der Elemente T^1 der möglichen Kontaktränder zu bestimmen. Die Bestimmung von Abstand a und Punkt x^2 auf dem Referenzelement über die Funktion f aus Gleichung A.1 ist nur definiert, wenn man eine Zuordnung der Elemente gefunden hat. In der Praxis kann man die möglichen Elementpaare durch "Boundingbox" und Baumsuchmethoden einschränken, vgl. dazu etwa [40]. Hat man die möglichen Paarungen eingeschränkt, so kann man die exakten Zuordnungen finden, indem man versucht eine Nullstelle der Funktion f zu finden. Dabei können folgende Situationen auftreten.

- (i) Der gesuchte Punkt x^2 liegt im Referenzelement. Dann ist die Lösung von Gleichung A.2 der gesuchte Punkt x^2 und der Abstand a .
- (ii) Der gesuchte Punkt x^2 liegt nicht im Referenzelement und die Nullstellensuche A.2 ist erfolgreich. Dann liefert die Nullstellensuche einen Punkt $x^2 \notin T_{ref}^2$. In diesem Fall liegt keine Kopplung zwischen den Elementen bezüglich des genutzten Quadraturpunktes x^1 vor.
- (iii) Der gesuchte Punkt x^2 liegt nicht im Referenzelement und die Nullstellensuche A.2 liefert keine Lösung. Dies passiert, wenn die Gradientenmatrix bestehend aus dem Gradienten der Transformation T^2 und dem Normalenvektor n nicht invertierbar ist. Das ist der Fall, wenn entweder die Elemente so zueinander liegen, dass eine Projektion in Normalenrichtung nicht möglich ist, oder wenn man außerhalb des Referenzelementes T_{ref}^2 liegt. Eine Kopplung der Elemente liegt also nicht vor.

Die Bestimmung der Kontaktränder ist auf diese Weise also möglich. Da man für adaptive Methoden die Kopplung der Kontaktränder häufiger braucht, sollte man diese in einem ersten Schritt erstellen. Auf diese Weise muss man nur einmal eine Suche über den gesamten Kontaktrand vornehmen. Nach einer Eingrenzung der Kopplungspaare über geometrische Methoden, wie "Boundingbox"-Methoden, müssen die verbleibenden möglichen Paarungen gefunden werden. Nun kann für jeden Quadraturpunkt die oben beschriebene Suche durchgeführt werden. Auf diese Weise findet man sicher alle gekoppelten Elemente $\{T_{i,j}^2\}_j$ zu einem Element T_i^1 . Allerdings ist das aufwendig, da man eine hohe Quadraturformel verwendet, also viele Punkte auswerten muss.

Unter der Annahme, dass $h^1 \approx h^2$ im Kontaktbereich gilt, reicht es lediglich für den Mittelpunkt x_m des Elementes T_i^1 ein Kopplungselement T_i^2 zu finden. Anschliessend fügt man der Menge $\{T_{i,j}^2\}_j$ alle Nachbarn des Elementes T_i^2 hinzu. Auf diese Weise erhält man eventuell zu viele mögliche Kopplungselemente, die man beim Assemblierung der Nebenbedingung, oder beim Auswerten von Fehlerschätzern prüfen muss. Weiterhin ist anzumerken, dass die Zuordnung fehlerhaft wird, wenn nur $h^2 < h^1$ gilt.

A.2 LOKALE STABILISIERUNG DER KONTAKTRÄNDER

Die Stabilität der gemischten Diskretisierung von Kontaktproblemen ist durch die inf-sup-Bedingung 6, bzw. 7 gesichert. Bei adaptiven Verfeinerungen stellt sich die Frage, wie diese Bedingung lokal zu erfüllen ist. In der Praxis muss die Bedingung

$$q = p^1 - 1 \text{ und } H \approx 2 \cdot h^1,$$

, beziehungsweise

$$q = p^1 - 2 \text{ und } H \approx h^1$$

für den Kontakt zwischen zwei Gebieten Ω^1 und Ω^2 erfüllt sein (siehe Kapitel 3.3). Ist für eine Diskretisierung eine Vernetzung $(\mathbb{T}_{h,k}^1, p_k^1)$, $(\mathbb{T}_{h,k}^2, p_k^2)$ und $(\mathbb{T}_{H,k}^C, q_k)$ nach k -Verfeinerungsschritten gegeben, so dass die Stabilitätsbedingung erfüllt ist, so muß ein Stabilisierungsalgorithmus dies für den nächsten adaptiven Verfeinerungsschritt sicherstellen. In der Praxis wird dazu der Lagrangemultiplikator auf einem der beiden Kontaktländer definiert, hier o.B.d.A auf dem Rand Γ_C^1 von Gebiet Ω^1 , so dass für das Paar $(\mathbb{T}_{h,k}^1, p_k^1)$ und $(\mathbb{T}_{H,k}^C, q_k)$ die Stabilität gesichert ist. Gilt nun $h_{T_j}^2 < h_{T_i}^1$ für alle mit dem Element T_i gekoppelten Elemente T_j der Diskretisierung $(\mathbb{T}_{h,k}^2, p_k^2)$ von Gebiet Ω^2 , so ist eine stabile Diskretisierung zu erwarten.

Nach einem adaptiven Verfeinerungsschritt müssen also mindestens alle Elemente aus Gebiet Ω^2 verfeinert werden, für die das gekoppelte Element aus Ω^1 verfeinert wurde. Die Kopplung ist dabei wie in Anhang A.1 zu verstehen. Sinnvollerweise ist nach den Überlegungen aus Anhang A.1, Bemerkung 3 jedoch zu fordern, dass $h_{T_j}^2 \approx h_{T_i}^1$ gilt. Insgesamt müssen also zur Sicherstellung einer stabilen Diskretisierung die Randelemente von Ω^1 und Ω^2 paarweise verfeinert werden. Bei einer zueinander passenden Diskretisierung ist so analog zum Vorgehen bei einseitigen Kontaktproblemen, siehe [94], eine stabile Diskretisierung gesichert.

Im Falle von nicht zueinander passenden Diskretisierungen ist die Definition von Paaren schwierig, denn die lokale Überlappung der Elemente lässt eine eindeutige Paarbildung nicht zu. Benutzt man die lokale Zuordnung mittels Quadraturpunkten aus Anhang A.1, so erhält man nur eine lokale Kopplung zwischen Elementen T_i^1 aus $\mathbb{T}_{h,k}^1$ zu Elementen T_j^2 aus $\mathbb{T}_{h,k}^2$, die auf dem Verfeinerungslevel k eine nichtleere Schnittmenge $T^2 \cap P(T^1) \neq \emptyset$ haben. Auf diese Weise erhält man eine stabile Diskretisierung. In Abbildung 67 sind die ersten drei adaptiven Vernetzungen aus Beispiel 9 für das Paar $p = 4, q = 2, h = H$ zu sehen. Auf der linken Seite ist jeweils die Verfeinerung ohne Stabilisierung zu sehen, auf der rechten Seite die mit Stabilisierung. Der Lagrangemultiplikator ist auf dem oberen Gebiet definiert. Also wird schon im ersten Verfeinerungsschritt ohne Stabilisierung die Bedingung $h_{T_j}^2 \leq h_{T_i}^1$ lokal verletzt. In Kapitel 3.3, Beispiel 2 wurde der mitunter stabilisierende Einfluss von nicht passenden Vernetzungen dargestellt, so dass eine lokale Verletzung der Stabilitätsbedingung ohne Folgen für die Diskretisierung sein kann. In Kapitel 5.1.3, Beispiel 9 zeigt sich, dass Instabilitäten erst auftreten, wenn durch wiederholte lokale

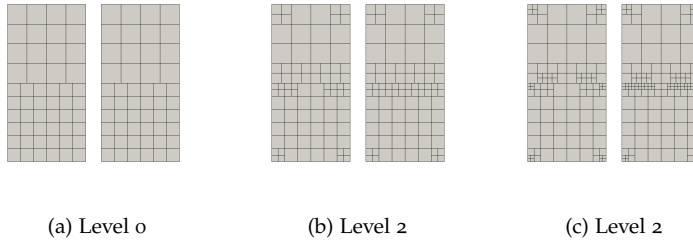
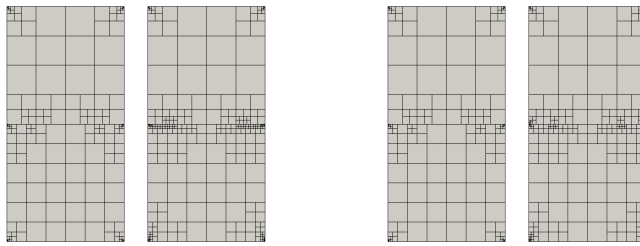


Abbildung 67: Stabilisierung des Kontaktbereiches



(a) Vernetzung auf Level 5, Version 1 (b) Vernetzung auf Level 5, Version 2

Abbildung 68: Stabilisierung des Kontaktbereiches

Verfeinerungen in diesen Gebieten der Größenunterschied zwischen h^2 und h^1 zu groß wird.

Fordert man bei der Stabilisierung das lokal die Bedingung $h^2 \approx h^1$ erfüllt sein muss, was nach Anhang A.1 sinnvoll ist, so muss man im Kontaktbereich immer dann verfeinern, wenn auf einer Seite ein gekoppeltes Element verfeinert wurde. Dies kann allerdings dazu führen, dass eine wesentlich höhere Zahl an Elementen im Kontakt verfeinert werden muss, als der Fehlerindikator vorgibt. In Abbildung 68b (rechts) ist auch zu erkennen, dass in den unteren Ecken des oberen Gebiets verfeinert wurde, obwohl dies der Indikator nicht vorgibt, wie in der linken Vernetzung ohne Stabilisierung zu sehen ist. In diesem Beispiel ist klar, dass diese Vernetzung tatsächlich überflüssig ist, da der aktive Kontaktbereich im Inneren des möglichen Kontaktrandes liegt. Auf diese Weise entstehen zusätzliche Elemente, so dass die Effizienz der adaptiven Vernetzung verloren geht.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ADAMS, R. A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975
- [2] AINSWORTH, M. ; ODEN, J. T.: *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. New York : John Wiley & Sons, 2000
- [3] AINSWORTH, M. ; ODEN, J. T. ; LEE, C. Y.: Local A Posteriori Error Estimators for Variational Inequalities. In: *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 9 (1993), S. 23–33
- [4] ARMERO, F. ; PETŐCZ, E.: Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 158 (1998), S. 269–300
- [5] BABUŠKA, I. ; SURLI, M.: The h-p version of the finite element method with quasiuniform meshes. In: *M2AN* 21 (1987), S. 199–238
- [6] BABUŠKA, I. ; SZABÓ, B.: *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991
- [7] BANGERTH, W. ; RANNACHER, R.: *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Basel : Birkhäuser, 2003
- [8] BARTELS, S. ; CARSTENSEN, C.: Averaging Techniques yield Reliable A Posteriori Finite Element Error Control for Obstacle Problems. In: *Numer. Math.* 99 (2004), S. 225–249
- [9] BATHE, K. J. ; CHAUDHARY, A. B.: A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction. In: *Computers & Structures* 24 (1986), Nr. 6, S. 855–873
- [10] BECKER, R. ; RANNACHER, R.: A feed-back Approach to Error Control in Finite-Element Methods: basic analysis and examples. In: *East-West J. Numer. Math.* 4 (1996), S. 237–264
- [11] BECKER, R. ; RANNACHER, R.: Weighted a posteriori error control in fe methods. Singapore : World Scientific, 1998, S. 621–637
- [12] BECKER, R. ; RANNACHER, R.: An optimal control approach to a posteriori error estimation and mesh adaptation in finite element methods. In: ISERLES, A (Hrsg.): *Acta Numerica 200*. Cambridge University Press, 2001, S. 1–101
- [13] BELGACEM, F.B.: Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element method. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (2000), Nr. 4, S. 1198–1216
- [14] BELGACEM, F.B. ; HILD, P. ; LABORDE, P.: Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact. In: *Math. Models Methods Appl. Sci* 9 (1999), S. 287–303
- [15] BERNADI, C.: Polynomial interpolation results in Sobolev spaces. In: *J. Comput. Appl. Math.* 43 (1992), Nr. 1-2, S. 53–80

- [16] BIERMANN, D. ; BLUM, H. ; KLEEMANN, H. ; MOHN, T.: Einsatz von Schleifstiften auf Bearbeitungszentren zur Herstellung von beschichteten Tiefziehwerkzeugen - Simulation und Praxis. In: TILLMANN, W. (. (Hrsg.): *SFB 708 - 3. öffentliches Kolloquium*, 2009, S. 53–64
- [17] BIERMANN, D. ; BLUM, H. ; MOHN, T. ; KLEEMANN, H.: Grinding of Arc-Sprayed Tungsten Carbide Coatings on Machining Centers - Process Configuration and Simulation. In: *Key Engineering Materials* (2010), Nr. 438, S. 115–122
- [18] BLUM, H. ; BIERMANN, D. ; KLEEMANN, H. ; MOHN, T.: Simulationsgestütztes Schleifen frei geformter, beschichteter Oberflächen mit Hilfe angepasster Schleifstifte. In: *SFB 708 - 2. öffentliches Kolloquium*, ISBN 978-3-89957-072-4, 11 2008, S. 155–165
- [19] BLUM, H. ; KLEEMANN, H. ; LUDWIG, H. ; RADEMACHER, A. ; SCHÄCKELHOFF, M. ; SCHRÖDER, A. ; SCHULZ, O. ; STIEMER, M. ; TAEBL, K. ; WIEDEMANN, S.: *SOFAR: Scientific Object oriented Finite element library for Application and Research*. www.mathematik.tu-dortmund.de/lxx/research/software/sofar/index.html, 2009
- [20] BLUM, H. ; KLEEMANN, H. ; RADEMACHER, A. ; SCHRÖDER, A.: On Solving Frictional Contact Problems Part I: Abstract Framework and the static Case / Fakultät für Mathematik, TU Dortmund. 2008. – Forschungsbericht. – Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik, Nummer 377
- [21] BLUM, H. ; KLEEMANN, H. ; RADEMACHER, A. ; SCHRÖDER, A.: On Solving Frictional Contact Problems Part II: Dynamic Case / Fakultät für Mathematik, TU Dortmund. 2008. – Forschungsbericht. – Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik, Nummer 378
- [22] BLUM, H. ; KLEEMANN, H. ; SCHRÖDER, A.: Mixed finite element methods for two-body contact problems. In: *Preprint* (2011), Nr. 11-02
- [23] BLUM, H. ; RADEMACHER, A. ; SCHRÖDER, A.: Space adaptive finite element methods for dynamic Signorini problems. In: *Comput. Mech.* 44 (2009), S. 481–491
- [24] BLUM, H. ; SCHRÖDER, A. ; SUTTMEIER, F.T.: *A posteriori estimates for FE-solutions of variational inequalities*. Brezzi, Franco (ed.) et al., Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of ENUMATH 2001, the 4th European conference, Ischia, July 2001. Berlin: Springer. 669-680 (2003)., 2003
- [25] BLUM, H. ; SUTTMEIER, F. T.: An adaptive Finite Element Discretisation for a simplified Signorini Problem. In: *Calcolo* 37 (2000), S. 65–77
- [26] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. Berlin : Springer, 2003
- [27] BRAESS, D.: A posteriori error Estimators for obstacle Problems - another look. In: *Numer.Math.* 101 (2005), S. 415–421
- [28] CÉA, J: *Lectures on optimization - theory and algorithms*. Berlin : Springer, 1978

- [29] CHAMOIN, L. ; LADEVÈZE, P.: A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 197 (2008), Nr. 9-12, S. 994–1014
- [30] CHEN, Z. ; NOCHETTO, R.: Residual Type A Posteriori Error Estimates for Elliptic Obstacle Problems. In: *Numer. Math.* 84 (2000), S. 527–548
- [31] CHUNG, J. ; HULBERT, G. M.: A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. In: *J. Appl. Mech.* 60 (1993), S. 371–375
- [32] CIARLET, P.E. ; LIONS, J.L.: *Handbook of numerical analysis (Part 1)*. Bd. Volume II: Finite element methods (Part 1). Amsterdam etc.: North-Holland, 1991
- [33] CIRAK, F. ; RAMM, E.: A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 156 (1998), Nr. 1-4, S. 351–362
- [34] COOREVITS, P ; HILD, P ; LHALOUANI, K ; SASSI, T: Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies. In: *Mathematics of Computations* 71 (2001), Nr. 237, S. 1–25
- [35] CZEKANSKI, A. ; MEGUID, S. A.: Analysis of dynamic frictional contact problems using variational inequalities. In: *Finite Elem. Anal. Des.* 37 (2001), S. 6861–6879
- [36] DAUGE, M.: *Elliptic boundary value problems on corner domains. Smoothness and asymptotics of solutions*. Berlin : Springer Verlag, 1988
- [37] DAUTRAY, R. ; LIONS, J. L.: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology: Evolution Problems I*. Bd. 5. Springer Berlin, 1992
- [38] DAVIS, T. A.: UMFPACK version 4.4 user guide / Dept. of Computer and Information Science and Engineering. University of Florida, 2005. – Forschungsbericht
- [39] DEUFLHARD, P. ; KRAUSE, R. ; ERTEL, S.: A Contact–Stabilized Newmark Method for Dynamical Contact Problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), Nr. 9, S. 1274 – 1290. – Available as INS Preprint No 0602
- [40] DICKOPF, T. ; KRAUSE, R.: Efficient simulation of multi-body contact problems on complex geometries: A flexible decomposition approach using constrained minimization. In: *Intern. J. Numer. Methods Engrg.* 77 (2009), Nr. 13, S. 1834–1862
- [41] ECK, C.: *Existenz und Regularität der Lösungen für Kontaktprobleme mit Reibung*, Universität Stuttgart, Diss., 1996
- [42] ECK, C. ; JARUŠEK, J. ; KRBEC, M.: *Unilateral contact problems. Variational methods and existence theorems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL., 2005

- [43] EKELAND, I. ; TEMAN, R.: *Convex analysis and variational problems*. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1976 (Studies in Mathematics and its Applications)
- [44] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998
- [45] FISCHER, K. ; WRIGGERS, P.: Frictionless 2d Contact formulations for finite deformations based on the mortar method. In: *Comput. Mech.* (2005), Nr. 36, S. 226–244
- [46] GILL, P.E. ; MURRAY, W. ; SAUNDERS, M.A.: User's guide for SQOPT version 5.3: a fortran package for large-scale linear and quadratic programming. / University of California, San Diego and Stanford University. Stanford, 1999. – Forschungsbericht
- [47] GILL, P.E. ; MURRAY, W. ; SAUNDERS, M.A.: User's guide for SNOPT version 7: Software for large-scale nonlinear programming. / University of California, San Diego and Stanford University. Stanford, 2006. – Forschungsbericht
- [48] GLOWINSKI, R.: *Numerical methods for nonlinear variational inequalities*. New York : Springer Verlag, 1984 (Springer Series in Computational Physics)
- [49] GLOWINSKI, R. ; LIONS, J.L. ; TRÉMOLIÈRES, R.: *Studies in mathematics and its applications*. Bd. 8: *Numerical analysis of variational inequalities*. North-Holland Pup. Co., 1981
- [50] GOELEVELN, D. ; MOTREANU, D.: *Variational and Hemivariational Inequalities: Theory, Methods and Applications, Volume II: Unilateral Problems*. Kluwer Academic Publishers, 2003
- [51] GRISVARD, P.: *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman Advanced Pub. Program, 1985
- [52] HACKBUSCH: *Elliptic differential equations: theory and numerical treatment*. Springer Verlag, 1992
- [53] HAGER, C. ; HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B.: A stable energy conserving approach for frictional contact problems based on quadrature formulas. In: *Intern. J. Numer. Methods Engrg.* 73 (2008), S. 205–225
- [54] HASLINGER, J.: Mixed formulation of elliptic variational inequalities and its approximation. In: *Appl. Math.* 26 (1981), S. 462–475
- [55] HASLINGER, J. ; HLAVAČEK, I.: Approximation of the signorini problem with friction by a mixed finite element method. In: *J. Math. Anal. Appl.* 86 (1982), S. 99–122
- [56] HASLINGER, J. ; HLAVAČEK, I. ; NEČAS, J.: Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. In: *Handbook of numerical Analysis* 4 (1996), S. 313–485
- [57] HASLINGER, J. ; KUČERA, R. ; DOSTÁL, Z.: On a splitting type algorithm for the numerical realization of contact problems with coulomb friction. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191 (2002), Nr. 21-22, S. 2261–2281

- [58] HASLINGER, J. ; KUČERA, R. ; DOSTÁL, Z.: An algorithm for the numerical realization of 3D contact problems with coulomb friction. In: *J. Comput. Appl. Math.* 164-165 (2004), S. 387–408
- [59] HASLINGER, J. ; LOVIŠEK, J.: Mixed variational formulation of unilateral problems. In: *Commentat. Math. Univ. Carol.* 21 (1981), S. 231–246
- [60] HEINTZ, P. ; HANSBO, P.: Stabilized Lagrange multiplier methods for bilateral elastic contact with friction. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 195 (2006), S. 4323–4333
- [61] HEUVELINE, V. ; RANNACHER, R.: Duality-based adaptivity in the hp-finite element method. In: *J. Numer. Math.* 11 (2003), Nr. 2, S. 95–113
- [62] HILD, P. ; NICAISE, S.: A posteriori error estimations of residual type for Signorini's problem. In: *Numer. Math.* 101 (2005), Nr. 3, S. 523–549
- [63] HOPPE, R. H. W. ; KORNUBER, R.: Adaptive Multilevel Methods for Obstacle Problems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 31 (1994), S. 301–323
- [64] HÜEBER, S.: *Discretization techniques and efficient algorithms for contact problems*, Universität Stuttgart, Diss., 2008
- [65] HÜEBER, S. ; MAIR, M. ; WOHLMUTH, B.: A priori error estimates and an inexact primal-dual active set strategy for linear and quadratic finite elements applied to multibody contact problems. In: *Appl. Numer. Math.* 54 (2005), S. 555–576
- [66] HÜEBER, S. ; MATEI, A. ; WOHLMUTH, B.: Efficient algorithms for problems with friction. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 29 (2007), S. 70–92
- [67] HÜEBER, S. ; STADLER, G. ; WOHLMUTH, B.: A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with Coulomb friction. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 30 (2008), S. 572–596
- [68] HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method*. Dover Publications, Inc., 2000
- [69] JOHNSON, C.: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1987
- [70] JOHNSON, C.: Adaptive Finite Element Methods for the Obstacle Problem. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2 (1992), S. 483–487
- [71] KIKUCHI, N. ; ODEN, J. T.: *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM, Studies in Applied Mathematics, 1988
- [72] KLAPPROTH, C. ; DEUFLHARD, P. ; SCHIELA, A.: Consistency results for the contact-stabilized newmark method. In: *Zuse-Institut Berlin Preprint* 09-06 (2009)
- [73] KLAPPROTH, C. ; DEUFLHARD, P. ; SCHIELA, A.: A perturbation result for dynamical contact problems. In: *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.* (2009), Nr. 2, S. 237–257

- [74] KLEEMANN, H.: *Dual gewichtete Fehlerschätzer bei elliptischen Variationsungleichungen*. Diploma thesis, University of Dortmund, 2005
- [75] KORNHUBER, R. ; KRAUSE, R.: Adaptive multigrid methods for Signorini's problem in linear elasticity. In: *Comput. Visual Sci.* 4 (2001), Nr. 1, S. 9–20
- [76] LAURSEN, T. A.: *Computational Contact and Impact Mechanics*. Berlin Heidelberg New York : Springer, 2002
- [77] LAURSEN, T. A. ; CHAWLA, V: Design of Energy Conserving Algorithms for Frictionless Dynamic Contact Problems. In: *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 40 (1997), S. 863–886
- [78] LHALOUANI, K. ; SASSI, T.: Nonconforming mixed variational formulation and domain decomposition for unilateral problems. In: *East-West J. Numer. Math* 7 (1999), S. 23–30
- [79] LIONS, J. L. ; MAGENES, E.: *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. Bd. I. ISBN 0387053638 : Springer Verlag, 1972
- [80] MARSDEN, J.E. ; HUGHES, T. J. R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, New Jersey : Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, 1983
- [81] NEWMARK, N. M.: A Method of Computation for Structural Dynamics. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE* 85 (1959), Nr. EM3, S. 67–94
- [82] NOCHETTO, R. H. ; SIEBERT, K. G. ; VEESER, A.: Pointwise A Posteriori Error Control for Elliptic Obstacle Problems. In: *Numer. Math.* 95 (2003), S. 163–195
- [83] PANAGIOTOPOULOS, P. D. ; TALASLIDIS, D.: A Linear Finite Element Approach to the Solution of the Variational Inequalities arising in Contact Problems of Structural Dynamics. In: *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 18 (1982), S. 1505–1520
- [84] PARASCHIVOIU, M. ; PERAIRE, J. ; PATEA, A. T.: A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 150 (1997), Nr. 1-4, S. 289–312
- [85] PARÉS, N. ; BONET, J. ; HUERTA, A. ; PERAIRE, J.: the computation of bounds for linear-functional outputs of weak solutions to the two-dimensional elasticity equations. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 195 (2006), Nr. 4-6, S. 406–429
- [86] PRUDHOMME, S. ; ODEN, J. T.: On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 176 (1999), Nr. 1-4, S. 313–331
- [87] RADEMACHER, A.: *Adaptive Finite Element Methods for non-linear hyperbolic problems of second order.*, TU-Dortmund University, Verlag Dr. Hut, München, available via <http://hdl.handle.net/2003/227214>, Diss., 2009

- [88] RICHTER, T.: *Funktionalorientierte Gitteroptimierung bei der Finite-Elemente-Approximation elliptischer Differentialgleichungen*. Diploma thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2001
- [89] RICHTER, T.: *Parallel Multigrid Method for Adaptive Finite Elements with application to 3D Flow Problems*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Diss., 2005
- [90] SANDER, O.: A fast solver for finite deformation contact problems / DFG Research Center MATHEON. 2006 (319). – Forschungsbericht
- [91] SCHRÖDER, A. ; BLUM, H. ; RADEMACHER, A. ; KLEEMANN, H.: Mixed FEM of higher order for contact problems with friction. In: *Journal Numerical Analysis & modeling* 8 (2011), Nr. 2, S. 302–323
- [92] SCHRÖDER, A. ; RADEMACHER, A.: Goal-oriented error control in adaptive mixed FEM for Signorini's Problem. In: *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 200 (2010), S. 345–355
- [93] SCHROEDER, A.: A posteriori Error Estimation in Mixed Finite Element Methods for Signorini's Problem. In: *Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of ENUMATH 2009*
- [94] SCHROEDER, A.: *Fehlerkontrollierte adaptive h- und hp-Finite-Elemente-Methoden für Kontaktprobleme mit Anwendungen in der Fertigungstechnik*, University of Dortmund, Diss., 2005
- [95] SCHROEDER, A.: Error control in h- and hp-adaptive FEM for Signorini's problem. In: *J. Numer. Math.* 17 (2009), Nr. 4, S. 299–318
- [96] STEIN, E. ; VU VAN, T. ; WRIGGERS, P.: Finite Element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction. In: *Computers & Structures* 37 (1990), Nr. 3, S. 319–331
- [97] SUTTMEIER, F. T.: *Error analysis for finite element solutions of variational inequalities. Professorial dissertation, University of Dortmund.* <http://www-lsx.mathematik.uni-dortmund.de/lxx/paper/habil.ps.gz>, Juli 2001
- [98] SUTTMEIER, F. T.: On a Direct Approach to Adaptive FE-Discretisations for Elliptic Variational Inequalities. In: *J. Numer. Math.* 13 (2005), S. 73–80
- [99] SUTTMEIER, F. T.: On computational methods for variational inequalities. Consistent error estimation of FE-approximation. In: *Comput. Mech.* 35 (2005), Nr. 6, S. 401–408
- [100] SUTTMEIER, F. T.: Adaptive computational methods for variational inequalities based on mixed formulations. In: *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 68 (2006), Nr. 11, S. 1180–1208
- [101] SUTTMEIER, F. T.: On adaptive computational methods: global norms controlling local errors. In: *J. Numer. Math.* 14 (2006), Nr. 2, S. 123–139
- [102] TRIEBEL, H.: *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam : North-Holland Mathematical Library., 1978

- [103] VEESER, A.: Efficient and Reliable A Posteriori Error Estimators for Elliptic Obstacle Problems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (2001), S. 146–167
- [104] VERFÜRTH, R.: *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Technique*. Chichester : Wiley and Teubner, 1996
- [105] WEISS, A. ; WOHLMUTH, B.: A posteriori error estimator and error control for contact problems. In: *Math. Comput.* 78 (2009), Nr. 267, S. 1237–1267
- [106] WOHLMUTH, B. I.: An A Posteriori Error Estimator for Two-Body Contact Problems on Non-Matching Meshes. In: *J. Sci. Comput.* 33 (2007), S. 25–45
- [107] WRIGGERS, P.: *Computational Contact Mechanics*. Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2002
- [108] YOSIDA, K.: *Functional Analysis. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, 1980