Stefan GÖTZ, Wien

Unmögliche Würfel

Würfelt man mit zwei fairen Würfeln und betrachtet die Augensumme, so sind die einzelnen Ausprägungen $2, 3, \ldots, 12$ bekanntlich nicht gleichwahrscheinlich. Die Frage ist nun, ob die beiden Würfel (oder nur einer davon) so manipuliert werden könnten, dass sich die Gleichwahrscheinlichkeit für die Augensumme einstellt. **Die Antwort ist negativ** (nach [PL], S. 91 f.). Um dies einzusehen, müssen wir sogenannte **(wahrscheinlichkeits)erzeugende Funktionen** kennenlernen (nach [BOS], S. 80 f.):

Definition: Eine diskrete Zufallsvariable (ZV) X habe den Wertevorrat $W_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und besitze die Verteilung $[i, \mathrm{P}(X = i)]$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Dann heißt $G_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot \mathrm{P}(X = i)$ *erzeugende Funktion* G_X der Zufallsvariablen X.

Wir sehen $|G_X(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = i) = 1$ für $|t| \leq 1$ ein, woraus wir $G_X(0) = \mathrm{P}(X = 0)$ $(t^0 = 1!)$ folgern. Einmal Differenzieren ergibt $G'_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot t^{i-1} \cdot \mathrm{P}(X = i)$, für $t = 0$ ist $G'_X(0) = \mathrm{P}(X = 1)$. Nochmals Differenzieren zeigt $G''_X(t) = \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdot t^{i-2} \cdot \mathrm{P}(X = i)$, woraus $G''_X(0) = 2 \cdot \mathrm{P}(X = 2)$ folgt. *Allgemein* ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$ $G_X^{(n)}(0) = n! \cdot \mathrm{P}(X = n)$, G_X beschreibt also die ZV X! Weiters ist der *Erwartungswert* von X $\mu = \mathrm{E}(X) = G'_X(1)$ und die *Varianz* von X $\sigma^2 = \mathrm{D}^2(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$.

Bemerkung: Entscheidend ist es, eine *geschlossene Form* von G_X zu finden!

Die Zufallsvariablen X_1, X_2 beschreiben nun die (geworfenen) *Augenzahlen* der beiden Würfeln. Sie sind (stochastisch) *unabhängig* voneinander: $\mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathrm{P}(X_1 = i) \cdot \mathrm{P}(X_2 = j)\ \forall i, j \in \{1, \ldots, 6\}$. Wir setzen $\mathrm{P}(X_1 = i) =: p_i$ und $\mathrm{P}(X_2 = j) =: q_j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$; aus rechentechnischen Gründen sei $p_i = q_j = 0$ sonst festgelegt. Damit sind $G_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot t^k$ und $G_{X_2}(t) = \sum_{l=1}^{6} q_l \cdot t^l$ jeweils *Polynome sechsten Grades* in t.

Jetzt gehen wir auf die *Augensumme* $X_1 + X_2$ los:
$r_m := \mathrm{P}(X_1 + X_2 = m) = \sum_{n=1}^{m-1} \mathrm{P}(X_1 = n, X_2 = m - n) = \sum_{n=1}^{m-1} \mathrm{P}(X_1 = n) \cdot \mathrm{P}(X_2 = m - n) = \sum_{n=1}^{m-1} p_n \cdot q_{m-n}$. Damit ist $G_{X_1+X_2}(t) = \sum_{m=2}^{12} r_m \cdot t^m = \sum_{m=2}^{12} \left(\sum_{n=1}^{m-1} p_n \cdot q_{m-n} \right) \cdot t^m = \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot t^k \cdot \sum_{l=1}^{6} q_l \cdot t^l = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t)$ die zugehörige *erzeugende Funktion.*

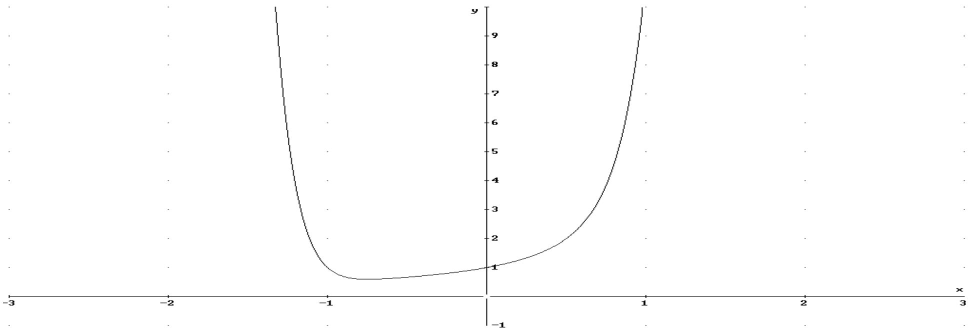

Abbildung 1: Die Funktion f hat keine Nullstelle.

Bemerkung: Das ist ein Spezialfall des folgendes Satzes:
Satz 1 Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen mit zugehörigen erzeugenden Funktionen $G_{X_1}, \ldots, G_{X_n}$. Dann hat ihre Summe $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ die erzeugende Funktion $G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot G_{X_n}(t)$.
Beweisidee: Für $n = 2$ wie eben: das Faltungsprodukt liefert die Verteilung der Summe, dann: vollständige Induktion (siehe z. B. [DEHA], S. 139 f.).
Ang. *Gleichverteilung* für $X_1 + X_2$ ist möglich, dann ist $r_m = \frac{1}{11}$ $\forall m = 2, \ldots, 12$, der eigentliche Beweis verläuft also *indirekt.* Damit ist $G_{X_1+X_2}(t) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{m=2}^{12} t^m$. Andererseits ist $G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t) = \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot t^k \cdot \sum_{l=1}^{6} q_l \cdot t^l$, also muss $\frac{1}{11} \cdot \sum_{m=2}^{12} t^m = \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot t^k \cdot \sum_{l=1}^{6} q_l \cdot t^l$ gelten. TRICK: Division durch $t^2 \neq 0$ liefert $\frac{1}{11} \cdot \sum_{m=2}^{12} t^{m-2} = \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot t^{k-1} \cdot \sum_{l=1}^{6} q_l \cdot t^{l-1}$ (1). Jetzt haben wir also ein Polynom zehnten Grades als Produkt zweier Polynome fünften Grades geschrieben. Insbesondere ist also $p_6 > 0$ und $q_6 > 0$ (**„Koeffizientenvergleich“** für t^{10}), woraus wir $\lim_{t \to \pm\infty} \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot t^{k-1} = \pm\infty$ (**Polynom ungeraden Grades**) erkennen. Daher $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{k=1}^{6} p_k \cdot {t_0}^{k-1} = 0$ (**Nullstellensatz**). Eingesetzt in (1) ergibt sich so $\frac{1}{11} \cdot \sum_{m=2}^{12} {t_0}^{m-2} = \sum_{k=1}^{6} p_k \cdot {t_0}^{k-1} \cdot \ldots = 0$, also $\frac{1}{11} \cdot \frac{{t_0}^{11}-1}{t_0-1} = 0$ (**endliche geometrische Reihe**).
Das ist ein *Widerspruch* in vielerlei Hinsicht:
Erstens bedeutet ${t_0}^{11} = 1$ $t_0 = 1$ in $\mathbb{R}$, aber $\sum_{k=1}^{6} p_k \cdot {t_0}^{k-1} = \sum_{k=1}^{6} p_k = 1 \neq 0$! Die restlichen zehn Lösungen z_l sind echt-komplex: $z_l = (1|\frac{l \cdot 2 \cdot \pi}{11})$ $l = 1, \ldots, 10$ nach dem **Satz von Moivre**.

Zweitens „zeigt“ der **Graph** (mittels *DERIVE*) von $f(t) := \dfrac{t^{11}-1}{t-1}$ keine Nullstelle (siehe Abbildung 1!).
Drittens kann $f(1)$ berechnet werden: $f(1) = \lim_{t \to 1} \frac{t^{11}-1}{t-1} = \lim_{t \to 1} 1 + t + t^2 + \cdots + t^{10} = 11 \neq 0$ (**hebbare Unstetigkeitsstelle**, siehe z. B. [GR6], S. 242 f.).

*Didaktischer Kommentar: Unmöglichkeits*beweise — „Zeigen, dass es etwas nicht gibt" — sind schon vom semantischen *Aufbau* her schwierig. Der meist damit verbundene *indirekte* Beweis macht die Sache nicht einfacher: „Ang. das gibt es doch, ...". Die *Widerspruchsfindung* schließlich ist hier nicht eindeutig. Die „**Die Sprache der Mathematik**" muss also hier wenigstens rudimentär beherrscht werden: siehe dazu z. B. das erste Kapitel von [GR5]!
Inhaltlich ist die Problemstellung relativ einfach und klar.
Zur *Methodik:* Auf der Hand läge $\sum_{i=1}^{6} p_i \cdot q_{r-i} = \frac{1}{11}$ $(r = 2, \ldots, 12)$, also *elf* Gleichungen mit *zwölf* Unbekannten, dazu: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1 = \sum_{j=1}^{6} q_j$. Stattdessen: *Erzeugende Funktionen* verlagern das Problem aus der **Wahrscheinlichkeitstheorie** hin zur **Analysis** und „konzentrieren" es in *einer* Gleichung. Es stehen somit (mächtige) Werkzeuge der Analysis zur Verfügung. Es ist aber oft nicht einfach, eine geschlossene Darstellung von G_X zu finden *(Satz von der Erhaltung der Schwierigkeit)!* Hier ist die *Summenformel für die endliche geometrische Reihe* der Schlüssel zum Erfolg.
Bemerkung: Es handelt sich hierbei um ein höchst *endliches* Problem, daher sind die auftretenden Summen überschaubar.
Die Widerspruchsfindung kann auf *unterschiedlicher Argumentationsbasis* passieren: wahrscheinlichkeitstheoretisch, naiv-analytisch oder (profunder-)analytisch.
Eine typische mathematische Tätigkeit ist die Suche nach einer *Verallgemeinerung* (eines Ergebnisses). Dazu betrachten wir folgenden *Spezialfall:* Wie sieht die Sache mit **drei Würfeln** aus? — Dies läuft auf eine Wiederholung des eben gezeigten Beweises mit den Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 (analog definiert) hinaus, dabei ist jetzt zusätzlich $\mathrm{P}(X_3 = k) =: r_k$, $k = 1, \ldots, 6$. Angenommen nun $\mathrm{P}(X_1 + X_2 + X_3 = m) = \frac{1}{16}$ $\forall m = 3, \ldots, 18$. **Satz 1** liefert wieder (nach Divison durch $t^3 \neq 0$) $\frac{1}{16} \cdot \sum_{m=3}^{18} t^{m-3} = \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot t^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{6} q_j \cdot t^{j-1} \cdot \sum_{k=1}^{6} r_k \cdot t^{k-1}$ (2). Nun ist ein Polynom 15. Grades gleich dem Produkt dreier Polynome fünften Grades. Insbesondere ist also wieder $p_6 > 0$, woraus wir $\lim_{t \to \pm\infty} \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot t^{i-1} = \pm\infty$ erkennen. Daher $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{6} p_i \cdot {t_0}^{i-1} = 0$. Eingesetzt in (2) ergibt sich so $\frac{1}{16} \cdot \sum_{m=3}^{18} {t_0}^{m-3} = \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot {t_0}^{i-1} \cdot \ldots = 0$, also $\frac{1}{16} \cdot \frac{{t_0}^{16}-1}{t_0-1} = 0$. Die *einzige reelle Nullstelle* von $f(t) := \frac{t^{16}-1}{t-1}$ ist $t_0 = -1$. Hier muss von obigem Beweis also abgewichen werden: Auch die Polynome $\sum_{j=1}^{6} q_j \cdot t^{j-1}$ und $\sum_{k=1}^{6} r_k \cdot t^{k-1}$ besitzen wenigstens je eine *reelle Nullstelle* t_1 bzw. t_2 (wegen $q_6 > 0$ und $r_6 > 0$). Damit ist aber $f(t_1) = f(t_2) = 0$ und daher $t_1 = t_2 = -1$ (erinnere: f hat *nur eine* reelle Nullstelle). Und so kommen wir doch zu einem *Widerspruch:* Gleichung (2) kann dann so geschrieben werden: $\frac{1}{16} \cdot \frac{t^{16}-1}{t-1} = (t+1) \cdot P(t) \cdot (t+1) \cdot Q(t) \cdot (t+1) \cdot R(t) =$

$(t+1)^3 \cdot P(t) \cdot Q(t) \cdot R(t)$ mit $P(t)$, $Q(t)$ und $R(t)$ Polynome vierten Grades (**Abspaltung von Linearfaktoren**). Das kann aber nicht sein: „Links“ ist -1 **genau einfache Nullstelle**, „rechts“ dagegen **mindestens dreifache**!

Folgerung: n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) Würfel können nicht so verfälscht werden, dass die Augensummen gleich wahrscheinlich werden.

(Mathematisches) Resümee: „Schuld“ ist das **Kreisteilungspolynom**: $z^n = 1$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) hat die einzige(n) reelle(n) Lösung(en) $z_0 = 1$ (n ungerade) bzw. $z_0 = 1$ *und* $z_1 = -1$ (n gerade).

Zum Schluss noch etwas Grundsätzliches: Mathematik ist im Fächerkanon des Gymnasiums wegen ihres Charakters als *Kulturfach:* Deutlich wird dies z. B. im Rahmen von `math space`, einer Initiative von Rudolf Taschner (TU Wien). Als weiteren Grund kann man sicher die vielfältigen *Anwendungen* der Mathematik anführen, wie sie z. B. in den ISTRON-Bänden dargestellt werden. Dieser Beitrag versteht sich zur Stärkung des *autonomen* Aspekts der Mathematik, wie dies im aktuellen österreichischen Lehrplan für die AHS-Oberstufe (Sekundarstufe II des Gymnasiums) ausgedrückt wird: „[...] Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen — von festgelegten Prämissen ausgehend — stringent abgeleitet werden können. Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess.“

Literatur

[BOS] Bosch, Karl: *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.* vieweg studium Basiswissen. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden 1986 (5., durchgesehene Auflage).

[DEHA] Dehling, Herold und Haupt, Beate: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* Springer, Berlin u. a. 2003.

[GR5] Götz, Stefan und Reichel, Hans-Christian (Hrsg.): *Mathematik Lehrbuch 5* von Robert Müller und Günter Hanisch. öbv&hpt, Wien 2004.

[GR6] Götz, Stefan und Reichel, Hans-Christian (Hrsg.): *Mathematik Lehrbuch 6* von Robert Müller und Günter Hanisch. öbv&hpt, Wien 2005.

[PL] Plachky, Detlef: *Mathematische Grundbegriffe und Grundsätze der Stochastik.* Springer, Berlin u. a. 2001.

Anschriften des Verfassers:

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
A-1090 Wien

Akademisches Gymnasium
Wien I.
Beethovenplatz 1
A-1010 Wien

`Stefan.Goetz@univie.ac.at`