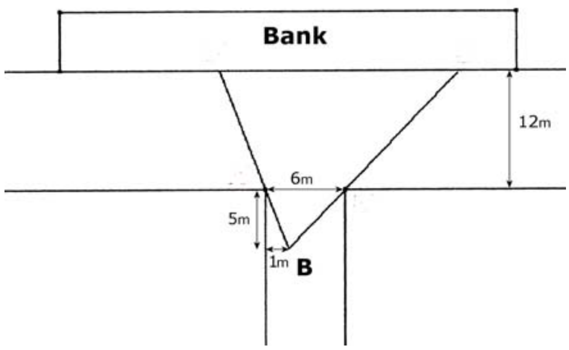
Mathilde GRIEP, Bad Iburg

Bemerkungen zur Kategorie „Aufgaben mit multiplen Lösungswegen“ unter Aspekten kognitiver Mathematik

Vor dem Hintergrund der Bildungsstandards und der Analyse von schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen von PISA-Aufgaben wird am Beispiel einer Klassenarbeitsaufgabe (aus dem Geometrieunterricht der 9. Jahrgangsstufe) analysiert, wie Schüler einer Lerngruppe bei geeigneter Unterrichtsführung ermutigt werden können, ihre individuellen unterschiedlichen Vorstellungen zu verfolgen. Die Lerngruppe wurde nach dem Osnabrücker Curriculum (COHORS-FRESENBORG, 2001) unterrichtet, dem eine kognitionstheoretische Ausrichtung zu Grunde liegt. Die kognitiven Mechanismen bei der Konstruktion mathematischen Wissens <u>in den Köpfen der Schüler</u> und der Prozess der Wissensorganisation und der Wissensverwendung stehen im Zentrum der Aufmerksamkeit. Die Methodik ist geprägt von einem diskursiven Unterrichtsstil (COHORS-FRESENBORG & KAUNE, 2003): die Schüler werden ermuntert, ihre eigenen Vorstellungen zu artikulieren und sich im Diskurs mit den Vorstellungen der Mitschüler auseinander zu setzen. Durch die Unterrichtsführung werden sie angehalten, ihre Vorstellungen zu verfolgen, so dass bei geeignet gewählten Aufgaben vielfältige Lösungswege diskutiert werden können.

<u>Aufgabe:</u> *Ein Bankräuber hat die Absicht, die Bank, die auf der gegenüberliegenden Straßenseite liegt, auszurauben. Er bezieht zunächst einen Beobachtungsposten in einer kleinen Seitenstraße. Wie viel Meter des gegenüberliegenden Bankgebäudes kann er überblicken?*



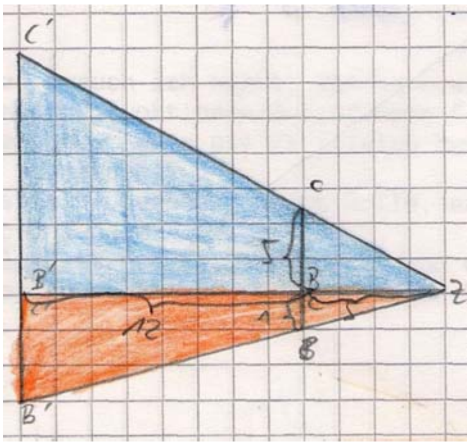
<u>Aufgabenanalyse</u>

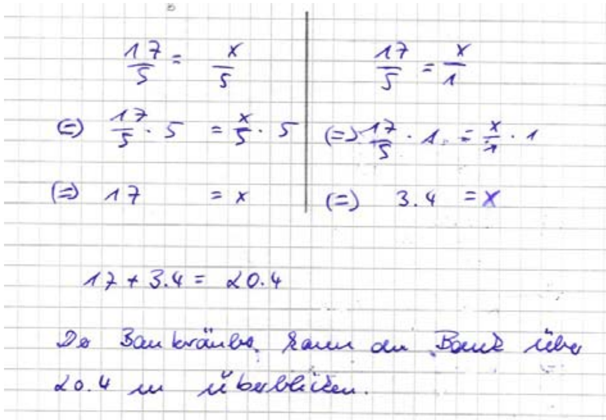
Wer die Aufgabe lösen will, muss ermitteln, welche relevanten Informationen aus einem sprachlich (und auch grafisch) vorliegenden Kontext sich in eine mathematische Beschreibung überführen lassen. Der erste und zweite Satz enthalten keine relevanten Informationen; sie führen dazu, die beiden Straßen und den Punkt B als Beobachtungsposten des Bankräubers zu identifizieren. Die sich anschließende einfache Fragestellung führt zur Kennzeichnung einer Strecke, deren Länge ermittelt werden soll. Somit sind die im Text enthaltenen Informationen nicht für die rechnerische Bearbeitung der Aufgabe von Bedeutung.

Im zweiten Schritt wird analysiert, wie komplex die Denkvorgänge sind, die nach Vorliegen einer <u>Vorstellung</u> von der Aufgabe bewältigt werden müssen. Bevor eine Lösung erfolgen kann, müssen strukturierende Überlegungen die Denkvorgänge begleiten. Diese Strukturierung kann nur an Hand der Skizze erfolgen und zu zwei unterschiedlichen Strategien führen. Zum einen ist denkbar, dass die Skizze zum Aufruf des mathematischen Werkzeugs „Strahlensatz“ führt, zum anderen kann die Skizze ein „Funktionsframe“ (KAUNE, 1995) aufrufen. Beide Werkzeuge ermöglichen zahlreiche verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Ebenso ließen sich drei der anderen vier Aufgaben der Klassenarbeit mit beiden Werkzeugen lösen. Die von den Schülern gewählten Strategien weisen eine erstaunliche Vorliebe für das Werkzeug „Funktion“ auf: 11 setzen stets Funktionen ein, 8 wechseln das Werkzeug und 2 wenden immer Strahlensätze an. Diese Vorliebe zeigt, dass sich die Schüler in ihrer Kompetenz im Umgang mit Funktionen so sicher sind, dass sie diese auch im Kontext von geometrischen Aufgabenstellungen einsetzen (KAUNE, 2001). Sie weist auch daraufhin, dass es im vorhergehenden Unterricht gelungen ist, den Funktionsbegriff so zu verankern, dass er ein zentrales, immer einsetzbares Werkzeug geworden ist.

Führen die strukturierenden Überlegungen zum Aufruf des Werkzeuges „Strahlensatz“, so kann in den Köpfen der Schüler eine geometrische Repräsentation einer typischen Strahlensatzfigur aufgerufen werden: Die Skizze enthält zwei sich in einem Punkt schneidende und zwei parallele Strecken, aber die angegebenen Längen sind nicht direkt den Abschnitten zuzuordnen. Erst das Einzeichnen einer oder mehrer Hilfslinien führt dazu, dass man den Strecken die gegebenen Streckenlängen zuordnen und zwei Rechnungen durchführen kann.

Analyse von Schülerlösungen

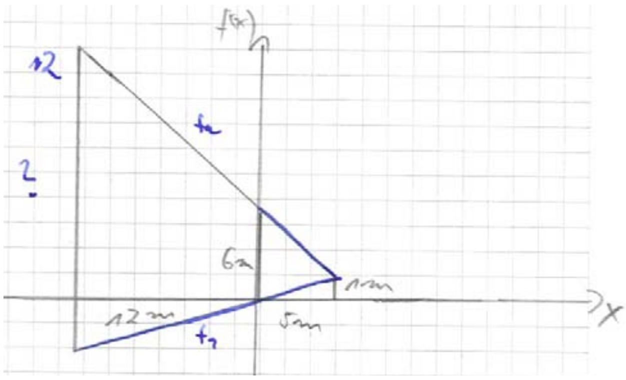


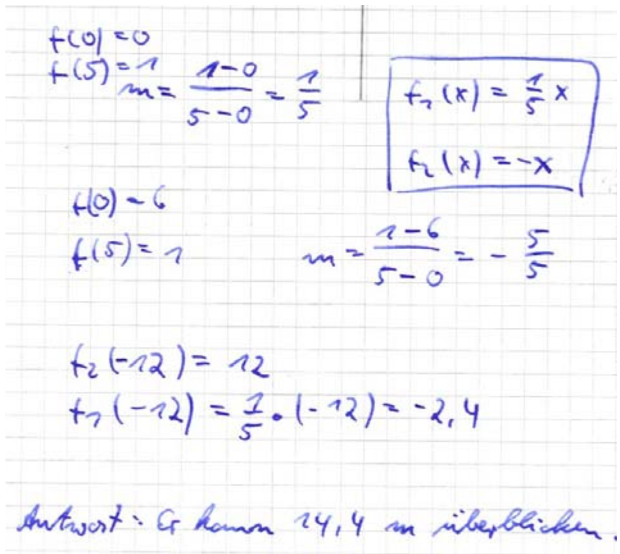


Jonas wählt den gerade beschriebenen Ansatz, er erstellt eine neue Skizze, indem er die vorgegebene Zeichnung um 90° dreht; zusätzlich markiert er Dreiecksflächen. Dann wendet er auf jede Teilfigur mit den zugehörigen Streckenlängen den ersten Strahlensatz an und löst die zugehörigen Gleichungen.

Eine andere Strukturierung wird wohl dadurch ausgelöst, dass die Skizze Geraden enthält, die diese Schüler als Graphen linearer Funktionen auffassen. Bei der kognitiven Analyse wird ein Funktionsframe aufgerufen, der dazu führt, dass ein Koordinatensystem entweder direkt in die Skizze eingetragen oder aber eine Skizze mit einem Koordinatensystem und den relevanten Graphen entwickelt wird. Alle Schüler, die diesen Ansatz verfolgen, haben einen Wechsel der Darstellung vorgenommen. Wahrscheinlich haben sie zuvor auch einen Wechsel der Vorstellung vorgenommen, denn sie müssen vorab bewusst die Entscheidung gefällt haben, ihr Wissen über die Figur mittels linearer Funktionen zu notieren. Bei einer solchen Modellierung ist die erste Entscheidung die Wahl eines geeigneten Ursprungs. Danach lassen sich die Lösungen in Gruppen einsortieren.

- Der **Schnittpunkt der beiden nicht parallelen Geraden** wird als **Ursprung** gewählt, dann ist die Ausrichtung der Achsen noch wählbar, die eingezeichneten Geraden werden aber stets zu Graphen proportionaler Funktionen.
- Die Lösungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Wahl des Ursprungs so getroffen wird, dass mindestens eine Gerade als Graph einer linearen, aber nicht proportionalen Funktion interpretiert werden muss. Gemeinsam ist all diesen Lösungen, dass die **Argument- oder Funktionswertachse mit einer der beiden Begrenzungen der Seitenstraße zusammenfallen.** Diese Wahl dieses Ursprungs führt zu einem deutlich höheren Rechenaufwand.





Simon trägt in die Skizze die Graphen einer proportionalen und einer linearen Funktion ein, bei der Berechnung von f_2 berücksichtigt er den Achsenabschnitt hingegen nicht.

Diese Aufgabe zeigt, dass es gelungen ist, die Schüler mit einem Betriebssystem auszustatten, das sie befähigt multiple Lösungswege zu verfolgen, und nicht dazu führt, gut trainierte Algorithmen zu verwenden. Für jeden einzelnen Schüler ist eine Aufgabe noch nicht gut, weil sie viele Lösungsmöglichkeiten hat, denn für jeden einzelnen Schüler ist es nur wichtig, dass er einen Zugang findet, der zu seinem geistigen Werkzeugen passt. All die unterschiedlichen Lösungen sind Ausprägungen unterschiedlicher Vorstellungen. Nützlich ist diese Vielfalt der Lösungen in dem Sinne, dass jetzt diese unterschiedlichen Vorstellungen selbst zum Thema des Unterrichts werden können.

Analyse der Aufgabe im Kontext von PISA-Aufgaben

Die schwierigkeitsgenerierenden Merkmale dieser Aufgabe werden nach einem für PISA-Aufgaben unter dem Stichpunkt „Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen“ (COHORS-FRESEN-BORG & SJUTS &

SOMMER, 2004) vorgelegten Kriterienkatalog analysiert. Nutzt man die vier Merkmale **sprachlogische Komplexität**, **kognitive Komplexität**, **Formalisierung von Wissen** und **Formelhandhabung,** so werden die Aufgaben in jeder Kategorie in einer dreistufigen Skala bewertet. Die analysierte Aufgabe weist in der sprachlogischen Komplexität die Stufe 0 auf, da in einer einfachen Frage die Aufgabe zum Bestimmen einer Streckenlänge gestellt wird. Bezüglich der kognitiven Komplexität ist diese Aufgabe auf Stufe 2 einzuordnen, denn es müssen Denkvorgänge der Bearbeitung vorausgehen und Bearbeitungsschritte vor der Lösung strukturiert und organisiert werden. Bei der Formalisierung von Wissen ist nicht entscheidend, „inwieweit der Modellierungsprozess kompliziert ist in einem mathematisch-technischen Sinne, sondern mehr, in welchem Maße Werkzeuge des Präzisierens, Formalisierens, Abstrahierens und Generalisierens nützlich oder weitgehend unverzichtbar sind“ (COHORS-FRESENBORG & SJUTS & SOMMER, 2004, S.116). Die verschiedenen Lösungen zeigen, dass alle Bearbeitungen erzwingen, formale Darstellungen selbständig zu erbringen: es treten einfache Gleichungen; Gleichungssysteme oder Terme linearer Funktionen auf: die Stufe 2 ist bei der Formalisierung von Wissen erreicht. Die Formeln und Gleichungen, die zu handhaben sind, erfordern lediglich einfache Termumformungen und Lösungsroutinen, die überschaubar bleiben: die Aufgabe ist in der Stufe 1 bei der Formelhandhabung einzuordnen.

Eine solche Aufgabeanalyse kann der Unterrichtende in einem weiteren Schritt dazu nutzen, einzelne Einflussvariablen bei der Konstruktion neuer Aufgaben gezielt zu variieren. Denkbare „Stellschrauben“ bei dieser Aufgabe wären:

- Anfertigen einer maßstabsgetreue Skizze,
- keine Einkleidung der Aufgabe in eine irrelevante Geschichte,
- keine Skizze vorlegen, lediglich Werte im Text beschreiben,
- Länge der zu überblickenden Strecke vorgeben und Entfernung des Beobachtungsposten bestimmen lassen,
- Invarianz der Streckenlänge gegenüber dem Beobachtungsposten nachweisen lassen.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C.: Mathematisches Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 1, S. 5-13, 2001

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C.: Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für „guten“ gymnasialen Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003, Hildesheim, S. 173-180, 2003

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J. & Sommer, N.: Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In: Neubrand, M. (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland – Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. Wiesbaden 2004, S. 109-144

Kaune, C.: Der Funktionsbegriff als ein Fundament für den gymnasialen Mathematikunterricht des Sekundarstufe 1. In: Steiner, H.G. & Vollrath, H.-J.: Neue problem- und praxisbezogene Ansätze in der mathemaikdidaktischen Forschung, Köln, 1995

Kaune, C.: Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse. In: Der Mathematikunterricht 47, Heft 1, S. 14-33, 2001