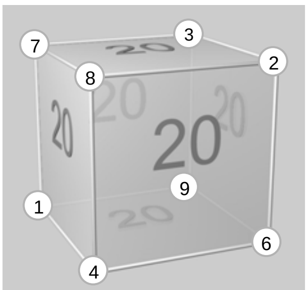
Mutfried HARTMANN, Nürnberg

Variationen des Zauberdreiecks

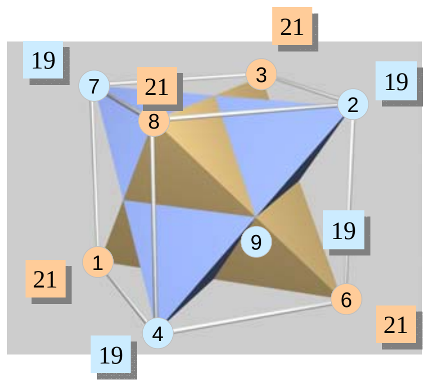
Von Hartmann und Loska (2004) wurde gezeigt, dass Übungsformate wie das Zauberdreieck eine überraschende mathematische Reichhaltigkeit aufweisen und dass sich Vorgehensweisen wie „Phänomene entdecken“, „operativ Vorgehen“ und „Algebraisieren“ als schlagkräftig erweisen, um solche Formate zu analysieren. Auf den Variantenreichtum solcher Formate und die Stärke des Analogisierens bei der Untersuchung solcher Varianten wird ebenfalls von Loska und Hartmann (2005) hingewiesen. Hier soll speziell die Bedeutung der Geometrie und Symmetrie für diese Vorgehensweisen aufgezeigt werden.



Analysiert werden sollen dazu zwei Varianten des Zauberdreiecks: der Zauberwürfel und das Zauberdodekaeder. Ein solcher Polyeder wird dabei so mit irgendwelchen Zahlen belegt, dass die Summe der Eckzahlen für jede Begrenzungsfläche des Polyeders denselben Wert, die so genannte „Zauberzahl“ ergibt.

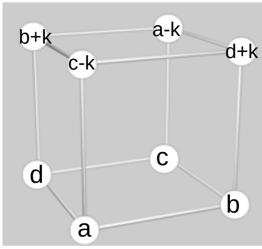
Sucht man nach Phänomenen, also weiteren Invarianten neben der Flächensumme, so erweist es sich als zielführend, die Geometrie bzw. die Symmetrie dieses Körpers zu berücksichtigen. Es ist nahe liegend, im geometrischen Bezug stehende, insbesondere symmetrisch zueinander gelegene Zahlenpaare, -Tripel etc. miteinander zu vergleichen. Man stellt hier eine Reihe von Phänomenen fest:

- Summengleichheit gegenüberliegender Kanten (z.B. 7+3 = 4+6 oder 8+4 = 3+9)
- Differenzgleichheit gegenüberliegender Flächendiagonalen (z.B. 3–1 = 4–2 oder 8–1 = 9–2)
- Differenzgleichheit der Raumdiagonalen (4–3 = 2–1 = 9–8 = 7–6)
- Summengleichheit von jeweils vier der acht Dreibeinsummen (= Summe aus Eckzahl und den drei benachbarten Zahlen, z.B. **2**+8+6+3 = **4**+1+8+6 = **7**+1+8+3 = **9**+1+6+3)

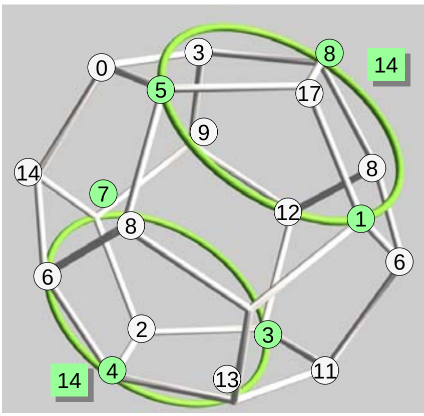


Der Mittelwert der beiden Dreibeinsummen (hier 19 und 21) ergibt die Zauberzahl des Würfels. Prüft man die Verteilung der zu den Dreibeinsummen gehörigen Ecken, so stellt man fest, dass die zu gleichen Summen gehörigen Ecken jeweils einen Innentetraeder des Würfels aufspannen. Nicht nur auf der Suche nach Phänomenen gilt es also geometrische Bezüge zu nutzen, vielmehr ist die räumliche Analyse von Phänomenen auch geeignet, um auf geometrische Sachverhalte, wie die Existenz der Innentetraeder, aufmerksam zu machen.

Auch bei der algebraischen Analyse des Zauberwürfels durch operatives Vorgehen zeigt sich ein enger Bezug zur Geometrie. Da sich die Erhöhung einer Eckzahl auf die Summe der drei benachbarten Flächen auswirkt und sich ein Würfel aus zwei solchen Raumecken aufbauen lässt, geht bei der gleichzeitigen Veränderung der zu einer Raumdiagonale gehörigen Eckzahlen um denselben Wert die Zaubereigenschaft nicht verloren. Es ist auch möglich, die Eckzahlen einer Würfelseite durch abwechselndes Addieren und Subtrahieren einer Zahl k zu verändern, ohne die Zauberzahl zu beeinflussen. Die Hintereinanderausführung der vier Raumdiagonaloperationen und einer „+k“-„–k“-Operation auf einen nur mit Nullen belegten Zauberwürfel ergibt also wieder einen Zauberwürfel. Es lässt sich zeigen, dass jeder Zauberwürfel so erzeugt werden kann, und dass die beobachteten Phänomene mit diesen Operationen verträglich sind, es sich also nicht nur um zufällige Erscheinungen handelt.

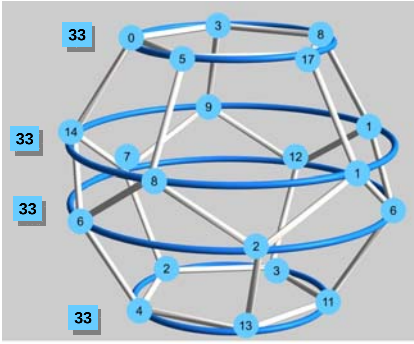


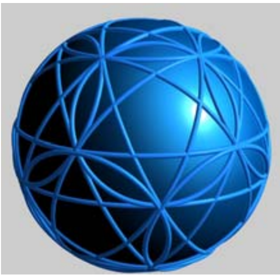
Der Bezug zwischen Geometrie und algebraischer Struktur soll im Folgenden auch noch an einem weiteren Zauberpolyeder, dem Zauberdodekaeder, demonstriert werden. Hierbei wird auch deutlich werden, dass sich der Einsatz und insbesondere die Analyse von Zauberfiguren weit über die Grundschule hinaus erstrecken könnte. Erste Analogisierungsversuche mit Zahlentupeln bei der Phänomensuche wie etwa die Betrachtung von Raumdiagonalen und punktsymmetrisch gelegener Kanten führen nicht zum Erfolg. Damit bietet es sich an, auf die Untersuchung von Zahlentripeln zu wechseln. Auch hier ist es nicht Erfolg versprechend, irgendwelche drei Zahlen zu betrachten. Vielmehr ist es nahe liegend, die drei an eine Ecke angrenzenden Zahlen, die äquidistant auf einem Ring liegen, mit dem gegenüberliegenden Zahlenring zu vergleichen. Es stellt sich dabei heraus, dass gegenüberliegende Ringsummen gleich sind.



Insgesamt gibt es entsprechend der Anzahl gegenüberliegender Eckenpaare 20:2 = 10 solche Ringsummenpaare. Es lassen sich aber noch weitere geometrisch „vernünftige“ Ringe in dem Dodekaeder finden. So bietet es sich an, Ringe mit mehr als drei Zahlen zu betrachten. Wählt man fünf Zahlen, so erscheint ein „geometrisch vernünftiger“ Ring, der um die Ecken einer

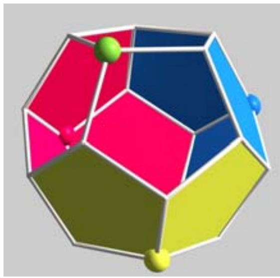
Seitenfläche zu sein. Natürlich hat auch der am Dodekaederzentrum gespiegelte Ring die gleiche Ringsumme. Dies ist schließlich eine unmittelbare Folge der Zauberdefinition. Ein allerdings wirklich überraschendes Phänomen besteht darin, dass die zwei größeren Parallelringe mit ebenfalls jeweils fünf Zahlen, denselben Ringsummenwert besitzen.



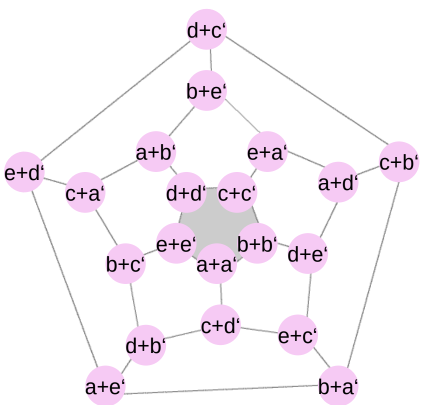


Damit existieren entsprechend der Anzahl der Seitenflächen des Dodekaeders 12:2 = 6 solcher Ringssysteme und damit 4·6 = 24 wertgleiche Fünfer-Ringsummen. Derartige Ringsysteme stellen hochsymmetrische und hochästhetische Muster der Kugeloberfläche dar. Deutlich wird dies, wenn diesen Ringsystemen eine Innenkugel einbeschrieben wird.

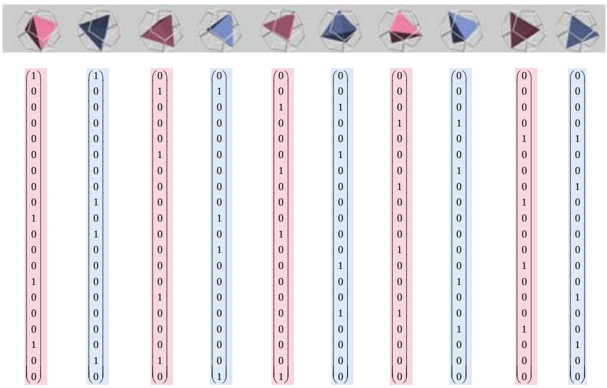
Ausgehend von einem algebraischen Phänomen lassen sich hier auch wieder geometrische Entdeckungen machen. Der Bezug zwischen Geometrie und Arithmetik wird auch bei der algebraischen Analyse deutlich, die zunächst mit der operativen Erzeugung von Zauberdodekaedern begonnen werden soll. Dazu geht man wieder von einem nur mit Nullen belegten Zauberdodekaeder aus. Erhöht man eine Ecke um einen Wert k, so wirkt sich dies auf die benachbarten drei Seitensummen aus. Dadurch geht zunächst die Zaubereigenschaft verloren. Man kann aber in geeigneter Weise insgesamt vier Ecken um k erhöhen, sodass wieder ein Zauberdodekaeder mit der Zauberzahl k entsteht. Die Ecken, die bei dieser zauberinvarianten Operation verändert wurden, spannen einen Innentetraeder des Dodekaeders auf.



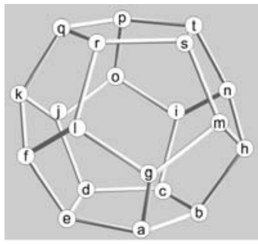
Durch Rotation um eine Symmetrieachse erhält man vier weitere Innentetraeder, durch Spiegelungen jeweils einen zusätzlichen und damit insgesamt zehn solcher Innentetraeder bzw. eben zehn zauberinvariante Operationen. Die algebraische Darstellung dieser so erzeugten Zauberdodekaeder lässt sich am Einfachsten im geplätteten Graphen des Dodekaeders darstellen.



Wenn auch sicherlich jeder Zahlendodekaeder diesen Typs ein Zauberdodekaeder ist, so ist zunächst nicht klar, dass tatsächlich auch jedes Zauberdodekaeder von diesem Typ ist. Um dies nachzuweisen, kann auf das Vektorraumkalkül zurückgegriffen werden. Man macht sich leicht klar, dass die Zahlendodekaeder einen Vektorraum und die Zauberdodekaeder einen Untervektorraum dieses Vektorraums bilden. Ebenfalls ist damit klar, dass die operativ erzeugten Lösungen, also der von den Innentetraedern aufgespannte Raum ein Untervektorraum des Zauberdodekaederraums ist. Haben beide dieselbe Dimension, so sind sie identisch bzw. die obige algebraische Darstellung ist allgemeingültig. Stellt man die zehn „Innentetraeder“-Vektoren bzgl. einer geeigneten Basis des Zahlendodekaederraums dar, so erkennt man, dass diese sich nichttrivial zum Nullvektor linear kombinieren lassen. Ebenfalls ist festzustellen, dass je neun dieser Vektoren linear unabhängig sind. Der Innentetraederraum ist also neundimensional. Das Zauberdodekaeder wird algebraisch durch ein Gleichungssystem mit 12 Gleichungen und 21 Variablen beschrieben. Um die Dimension des Zauberdodekaederraums zu bestimmen, muss geklärt werden, wie viele der 12 Gleichungen linear unabhängig sind. Dazu wird das Gleichungssystem in Matrizenform geschrieben und die Matrix durch elementare Zeilenumformungen und Spaltenvertauschungen auf Dreiecksform gebracht. Damit ist erkennbar, dass alle 12 Gleichungen unabhängig sind und die Dimension des Zauberdodekaederraums 21-12 also ebenfalls 9 beträgt. Alle Zauberdodekaeder lassen sich also allein durch Innentetraeder-Operationen erzeugen. Da, wie man zeigen kann, die beobachteten Phänomene mit den Innentetraederoperationen verträglich sind, handelt es sich also um keine zufälligen Erscheinungen, sondern um echte Zauberdodekaederphänomene.



$$\begin{aligned} a+b+c+d+e&=z\\ a+b+g+h+m&=z\\ &\vdots\\ p+q+r+s+t&=z \end{aligned}$$



Die Auseinandersetzung mit den mathematisch reichhaltigen Zauberpolyedern stellt eine noch bei weitem nicht ausgeschöpfte lohnende Aufgabe dar. Es können dabei Phänomene entdeckt, durch operatives Vorgehen mathematische Analysen angestellt werden und dabei viele geometrische Erfahrungen gewonnen werden.

Literatur

Hartmann, M. und Loska, R. (2004): Mit Übungsformaten arbeiten – Mathematische Analysen für den Unterricht nutzbar machen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker: Berlin, 225-228

Loska, R. und Hartmann, M. (2005): Didaktische Bedeutung der Variation von Übungsformaten. Im selben Band