Hans HUMENBERGER, Dortmund

Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen – entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen

Hier soll es insbesondere darum gehen, einen möglichst genetischen Weg zu diesem Problemkreis aufzuzeigen: Phänomene, Begründungen und mögliche Umsetzung im Schulunterricht. In der Literatur sind Begründungen meist entweder „ziemlich zahlentheoretisch-technisch“ (*proofs that only prove*, statt *proofs that also explain*) oder gar nicht vorhanden.

John Farey war kein Mathematiker, sondern ein englischer Geologe (1766 – 1826), der eine erstaunliche Eigenschaft von *gekürzten* Brüchen aus [0 ; 1] entdeckte: Die Farey-Reihe (genauer eigentlich eine *Folge*) F_n für eine feste natürliche Zahl n besteht aus den *der Größe nach geordneten gekürzten Brüchen aus* [0 ; 1] *mit Nenner* $\leq n$:

z. B. $F_5 := \left(\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}\right)$. In solchen „Reihen“ ist Farey aufgefallen, dass jeder innere Bruch dieser Reihe denselben Wert hat wie $\frac{\text{Summe der Nachbarzähler}}{\text{Summe der Nachbarnenner}}$ (in manchen Fällen muss gekürzt werden!).

Wir werden im Folgenden dieses Problem *nicht direkt* weiter verfolgen, sondern die Lösung quasi *indirekt* durch andere Betrachtungen mit Brüchen erhalten. Diese müssen nicht notwendig in „Farey-Reihen” münden bzw. durch Farey-Reihen motiviert sein, sie sind auch für sich genommen interessant und laden zu Erkundungen, Entdeckungen und Begründungen ein. Dies auch im normalen Schulunterricht! Mathematisch handelt es sich fast ausschließlich um den Bereich der *elementarsten Bruchrechnung*. Nur ganz zum Schluss *kann* das Prinzip der *vollständigen Induktion* einfließen.

Nachbarbrüche

Bei der Berechnung von Differenzen von Brüchen passiert es oft, dass der Zähler 1 ist, sogar ohne Kürzen, z. B. 1/3 1/4 = 1/12. Eine kleinere Differenz als 1/12 können n/3 und m/4 nicht haben, so dass es plausibel ist, solche Brüche als *Nachbarbrüche* zu bezeichnen.

Definition: Zwei Brüche $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ heißen *Nachbarbrüche* (NB),

wenn $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd}$ d. h. $bc - ad = 1$ gilt.

In diesem Zusammenhang sind natürlich auch andere „Namen“ dafür denkbar: „Partnerbrüche“, „minimal benachbarte Brüche“ (vgl. Müller/ Steinbring/Wittmann 2004, S. 328[1]) etc.
Mit dem neu geschaffenen Begriff soll nun auch gearbeitet, seine Struktur also genauer studiert werden. Dies ist ja eine typische mathematische Tätigkeit, die hier auf schuladäquatem Niveau exemplarisch durchgeführt werden kann. Solche den neuen Begriff erforschende Tätigkeiten können durch geeignete Fragestellungen angeregt werden (möglichst nicht in der Form: „Man beweise, dass . . .“), die interessant, motivierend, nicht zu eng und nicht zu weit formuliert sind.

Hier eine kleine Auswahl von Fragestellungen, die geeignet sind, den neuen Begriff besser zu „begreifen“ (auch andere, von Lernenden gemachte Beobachtungen und Vermutungen bzw. gestellte Fragen sind oft interessant und einer näheren Betrachtung wert):

1. Wie sehen NB von ganzen Zahlen aus?
2. Gibt es zu jedem vorgegebenen Bruch einen NB?
3. Kann es zu einem vorgegebenen Bruch mehrere NB geben? Wenn ja, finde möglichst viele zu 2/5. Wer findet am meisten (den grö ten)?
4. Kann es einen Bruch geben, der genau einen oder genau 2 NB (einen „links“ und einen „rechts“) hat?
5. Welche Brüche *a*/5 und *c*/7 sind NB? Kann man NB auch bei beliebigen Nennern, z. B. *a*/6 und *c*/10 finden? Worauf kommt es dabei an?
6. Gibt es *un*gekürzte NB? Diese Frage mündet direkt in:
   Nachbarbrüche sind immer gekürzt[2] ! **(1)**
7. Wie sieht der Bereich zwischen 2 NB aus? Finde zwischen zwei NB weitere Brüche mit *möglichst kleinem* Nenner. Wettbewerb: Wer findet den kleinsten Nenner? Diese Frage führt wieder zu einer Vermutung:

   Zwischen Nachbarbrüchen können nur Brüche mit größerem Nenner liegen. **(2)**

Medianten

Es ist ein besonders häufiger Schülerfehler bei der Bruchaddition analog zur Multiplikation zu verfahren nach der „Regel“: Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner. Vielleicht könnte eine genauere Beschäftigung mit dieser Rechenart (nicht nur: „sie ist falsch bei der Summenbildung“) dazu beitragen, dass dieser Fehler nicht mehr so häufig vorkommt, wenn nämlich dem

---

[1] Dort wird eine *Aufgabe* formuliert, deren Bearbeitung von den Leserinnen und Lesern auf eine Art erwartet wird, die wohl ähnlich dem hier vorgeschlagenen Weg ist.

[2] Die Begründungen von (1) – (6) sind sehr einfach, so dass sie aus Platzgründen hier entfallen. In einer ausführlicheren Version zu diesem Thema werden auch diese enthalten sein.

chen einen *Bruch zwischen ihnen* zu finden. Man kann z. B. mit der Interpretation der Brüche als „Säurekonzentrationen“ leicht einsehen, dass der Wert von $(a+c)/(c+d)$ sicher *zwischen* a/b und c/d liegen muss. Der Term $(a+c)/(c+d)$ erhält sogar einen eigenen Namen (auch oft „Chuquet-Mittel“ genannt, z. B. Hischer 2004):

> **Definition:** $\dfrac{a+c}{b+d}$ heißt *Mediante* zu den Brüchen $\dfrac{a}{b}$ und $\dfrac{c}{d}$;
> sie liegt immer *zwischen* ihnen.

Hier wieder einige lohnende „Forschungsfragen“ für Lernende, die die beiden neuen Begriffe verbinden:

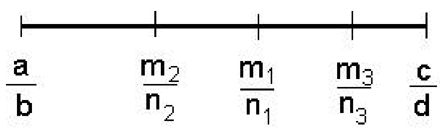
- Die Mediante 2/7 zu den NB 1/4 und 1/3 ist – wie man leicht nachrechnet – ihrerseits NB zu den Ausgangsbrüchen. Ist dies immer so, oder kann man NB finden, so dass deren Mediante *kein NB* zu ihnen ist?
- Hier war die Mediante 2/7 auch ein *gekürzter* Bruch; kann man NB finden, so dass deren Mediante ein *nicht gekürzter* Bruch ist?

> **Die *Mediante* von *Nachbarbrüchen* ist ihrerseits *Nachbarbruch* zu den Ausgangsbrüchen** (und somit nach (1) gekürzt!) . **(3)**

- Gibt es außer der Mediante zwischen 2 NB noch andere Brüche, die NB ? Oder ist die Mediante der einzige solche Bruch? Welche Brüche $1/4 < m/n < 1/3$ sind NB zu 1/4 und 1/3 ?

> **Wenn der Bruch *m/n* zwischen *a/b* und *c/d* liegt und NB zu ihnen ist, so muss er deren gekürzte Mediante sein.** **(4)**

Mediantenreihen bei Nachbarbrüchen



Wir wollen nun ausgehend von zwei *NB* die Mediantenbildung oft hintereinander machen, so dass einige Brüche im Intervall $[a/b\ ;\ c/d]$ entstehen („Teilungspunkte“): der erste ist m_1/n_1, die Mediante von $[a/b\ ;\ c/d]$; als nächstes setzen wir m_2/n_2, die Mediante von $[a/b\ ;\ m_1/n_1]$; dies setzen wir einige Male fort, indem wir immer wieder zu benachbarten Brüchen die Mediante als neuen Teilungspunkt einsetzen (in beliebiger Reihenfolge, d. h. m_3/n_3 könnte auch die Mediante von $[a/b\ ;\ m_2/n_2]$ oder $[m_2/n_2\ ;\ m_1/n_1]$ sein).

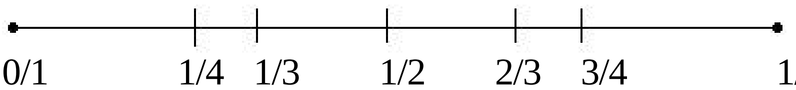
So ein Gebilde heiße *Mediantenreihe.* Wegen (3) und (4) ist dann klar:

In einer Mediantenreihe, die von 2 *Nachbarbrüchen* ausgeht, sind je 2 aufeinander folgende Brüche *Nachbarbrüche* und jeder *innere Bruch* ist die gekürzte *Mediante* seiner beiden Nachbarn. **(5)**

In den obigen Betrachtungen spielte das genaue Zustandekommen der Mediantenreihe keine Rolle. Im Folgenden wollen wir *spezielle* Mediantenreihen M_n betrachten, die durch zwei Bedingungen festgelegt sind:

- Die Start-NB sind 0/1 und 1/1 .
- Wir führen die Mediantenbildung genau so lange durch, als alle entstehenden Nenner $\leq n$ sind.

Die Mediantenreihe M_4 ist z. B. gegeben durch:



Der Reihe nach ergeben sich zunächst die Medianten 1/2, 1/3, 2/3. Nun kann man bei M_4 die Mediantenbildung nur noch in [0/1 ; 1/3] und in [3/4 ; 1/1] fortsetzen (in den anderen Intervallen erhielte man Nenner > 4) und erhält 1/4 und 3/4.

Nach (3) bzw. (1) ist nun klar, dass alle auftretenden Brüche in M_n *gekürzt* sind; aber enthält M_n auch **alle** gekürzten Brüche mit Nenner $\leq n$?
Auch diese Frage kann positiv beantwortet werden:

In M_n liegen *alle* gekürzten Brüche mit Nenner $\leq n$. **(6)**

Streng genommen ist hier ein *Induktionsbeweis* nötig, aber auch ein *exemplarischer* Übergang, z. B. $M_4 \to M_5$, kann hier Einsicht in die „Erblichkeit" der Gültigkeit von (6) verschaffen.
Damit ist $M_n = F_n$ klar, und die Mediantenei genschaft von Farey-Reihen F_n ist mit ganz elementaren Mitteln anschaulich und genetisch begründet.

Literatur

[1] Hischer, H. (2004): Mittelwertfolgen – oder: Mitten inmitten von Mitten. In: Der Mathematikunterricht **50**, 5, 42 – 54.

[2] Müller, G.N; H. Steinbring; E.Ch. Wittmann (Hrsg., 2004): Arithmetik als Prozess. Kallmeyer, Seelze.

[3] Scheid, H. (1994): Zahlentheorie. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.

[4] Pickert, G. (2004): Entdecken und Beweisen bei Farey-Folgen. In: Praxis der Mathematik 46, 4, 161 – 164.

Anschrift des Verfassers: Hans Humenberger, IEEM, FB Mathematik, Univ. Dortmund, D – 44 221 Dortmund. Email: Hans.Humenberger@math.uni-dortmund.de