Romualdas KASUBA, Vilnius

Aufgaben und psychologische Aspekte ihrer erfolgreichen Lösung

Die Lösung der mathematischen Probleme ist immer eine Begegnung. Vom ersten Augenblick der Begegnung an hat der Lösende eine Auseinandersetzung mit dem Problem, das ihm vorgeschlagen ist. Wenn man ein bisschen tiefer blickt, insbesondere dann, wenn das Problem nicht so einfach, also wirklich nützlich ist, dann besteht immer die Frage: Wo gibt es einen Weg? Wo führt er hin? Oder anders gesagt: Was ist zu tun?

Andererseits ist auch klar: Jede Aufgabe ist irgendwann einmal verfasst worden und hat einen Autor, der im Fall der Mathematik meistens unbekannt ist und im Verborgenen bleibt Aber es gibt ihn auf jeden Fall, mit aller seiner Kunst, Fantasie und Geschicktheit. Und der Lösende steht gegen ihn und darf, wie die Erfahrung es zeigt, nicht immer gleich mit dem Erfolg rechnen. Manchmal muss man ja die peinliche Situation in Rechnung stellen, dass in der gegebenen Aufgabe kein einziger Schritt vorwärts gemacht werden kann.

Übrigens hinterlässt praktisch jede bessere Aufgabe deutliche Spuren in dem Bewusstsein und hat ihre psychologische Auswirkung. Die Schüler, sogar diese besseren, sind irgendwie daran gewöhnt, die Aufgabe sofort lösen zu können, und die Situation, dass man nicht weiß, welchen Weg man einschlagen soll, ist ungewohnt, also psychologisch fremd und demzufolge unerwünscht.

Standardübungen sind nicht interessant, die Formulierungen sind sich ähnlich wie zwei Tropfen des Wassers; also erscheint auch die Mathematik als Fach langweilig und nicht interessant und am weitesten vom Leben entfernt. Aber man kann fast an jeder Ecke interessante Aufgaben, sogar mit spannenden Formulierungen, finden und sehr schnell wird klar, dass es wie immer viel zu tun gibt für geschickte Hände.

Aber vielleicht gehen wir jetzt zu den konkreten Beispielen über. Das erste ist aus der Belorussischen Olympiade.

Welches von den beiden ist möglich?
Gibt es vier natürliche Zahlen so, dass wir, wenn wir alle möglichen Summen aus zwei von ihnen bilden, die folgenden Zahlen bekommen:

(A) 1, 2, 3, 4, 5, 6?

(B) 1, 2, 3, 4, 5, 7?

Unter psychologischen Gesichtspunkten, wenn wir jetzt an den Autor der Aufgabe denken, könnten wir den folgenden Umstand in Rechnung ziehen: Beide Fälle sind sehr ähnlich und wahrscheinlich will uns der Autor darauf aufmerksam machen, dass es trotzdem im einen Fall möglich ist und im anderen nicht möglich ist, eine Lösung zu bekommen.

Aber in welchem denn? Im ersten, der im Vergleich zum zweiten irgendwie mehr symmetrisch ist, oder umgekehrt? An der Stelle fängt man beinahe mit philosophischen Betrachtungen an: Sind „symmetrische“ Zustände erreichbar?

Die möglichen Summen sind normale alltägliche Zahlen, so könnten wir auch etwas Konkretes unternehmen. Diese vier Zahlen A, B, C, D, wenn es die wirklich gibt, sind alle verschieden (wären sie nicht alle verschieden, so könnten wir nie sechs Summen bekommen), also ordnen wir sie der Größe nach: $A < B < C < D$.

Jetzt gilt immer $A + B < A + C < A + D < B + D < C + D$. Die einzige hier noch nicht erwähnte Summe $B + C$ liegt zwischen $A + C$ und $B + D$.

In beiden Fällen gilt dann $A + B = 1$, $A + C = 2$, folglich $C = B + 1$.

Aber im zweiten Fall muss ja dann auch $B + D = 5$ und $C + D = 7$ gelten oder $C = B + 2$. Dies ist ein Widerspruch, der uns den scheinbar unsymmetrischen Fall (B) verbietet.

Es bleibt nur noch der symmetrische Fall zu beweisen und das gelingt. Wie gesagt, $B + C$ liegt zwischen $A + C$ und $B + D$, folglich ist entweder
$A + C = 2$, $B + C = 3$, $A + D = 4$ und $B + D = 5$,
damit also (A; B; C; D = (0; 1; 2; 4),
oder $A + C = 2$, $A + D = 3$, $B + C = 4$, und $B + D = 5$
und somit (A; B; C; D) = (-0,5; 1,5; 2,5; 3,5).

Hilft jetzt auch die Symmetrie der Angaben?

Verallgemeinern wir also jetzt ein wenig die Situation und stellen die Frage:
Ist es möglich, 5 verschiedene Zahlen zu finden, dass die 10 möglichen Summen aus jeweils zwei dieser Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 sind?

Und wenn es mehr als 2 Fälle sind, was dann?

Wieder einmal eine natürliche Frage mit Aufspaltungen, nun aber nicht mit zwei, sondern schon 3 Fragen. Folgende Aufgabe hat der Verfasser zuletzt in der slowakischen Olympiade gesehen:
Ist es möglich, um einen Kreis herum alle Zahlen von 0 bis 10 so zu schreiben, dass alle möglichen Summen von 3 benachbarten Zahlen kleiner oder gleich (A) 13, (B)14, (C) 15 sind?

Psychologisch gesehen, wenn auch jetzt Ja und Nein als Antworten gegeben werden, so ist zu erwarten, dass (C) eher mit Ja und (A) mit Nein zu beantworten ist. Und wie ist es mit dem Grenzfall (B)?

Die Lösung im Fall (B) ist derart interessant, dass man sie als einen Leistungsfähigkeitstest benützen könnte. Nach Überzeugung des Verfassers ist derjenige, der diese Aufgabe selbstständig löst, mehr begabt als er vielleicht selbst von sich glaubt. Und er hat gut lachen.

Neue Nachbarschaftsbeziehungen

Psychologisch gesehen besteht ein großer Unterschied zwischen den Formulierungen „Gibt es eine Zahl …“ und „Finden Sie eine solche Zahl …“, oder auch „Ist es möglich …“ und „Beweisen Sie ...“

Im ersten Fall muss man zuvor noch darüber entscheiden, ob es eine solche Zahl mit den gefragten Eigenschaften geben kann oder ob die gegebene Situation erfüllbar ist, und erst dann sucht man. Im zweiten Fall es ist so gut wie sicher, dass es die Zahl gibt und dass die Situation möglich ist, und es bleibt dann nur, das genannte zu vollziehen. Der erste Fall ist komplizierter, aber auch spannender und demzufolge auch psychologisch interessanter – denn es klingt beinahe wie eine Aufforderung und jugendliche und andere tapfere Leute mögen es.

Die folgende Aufgabe erschien erstmals in der Moskauer Olympiade und wurde später in der Ukraine weiterentwickelt:
Um einen Kreis herum sind alle natürlichen Zahlen von 1 bis 12 geschrieben. Benachbart können jetzt nur die Zahlen genannt werden, die sich unterscheiden um 3, 4 oder 5. Ist es jetzt möglich, eine solche neue Nachbarschaft zu verwirklichen?

Und wie wäre es mit den Zahlen von 1 bis 13? Oder mit den Zahlen von 1 bis 14?

Erst entscheiden, dann realisieren – wie sieht es in der Praxis des Lösenden aus?

In der Praxis ist es gemischt – man versucht das Problem zu lösen und wenn es nicht gelingt, möchte man einen Beweis dazu finden, dass es nicht möglich ist. Wenn ein Beweis nicht vorhanden ist, so sucht man weiter.

Was ist, wenn wir es hier mit 12 Zahlen versuchen und wenn unsere Versuche uns nicht zum Erfolg führen? Dann besteht ein psychologisch äußerst unerwünschter Zustand, wenn der Lösende sich selbst fragt: Geht es wirklich nicht oder es gibt einen Weg, aber der ist nicht für mich? Nicht alle Wege sind zugänglich, aber es ist nicht leicht, sich damit abzufinden.

Sehr oft gewinnt, wer irgendwelche wesentliche Kleinigkeiten einsieht.

Hier zum Beispiel, wenn er entdecken kann: Falls es wirklich möglich ist, die 12 Zahlen im Kreis anzuordnen, dann sind ja sechs Zahlen 1, 2, 3, 10, 11 und 12 nicht benachbart, also nehmen die jede zweite Position an. Dann gibt es ja keinen Platz für 4 (auch für 9), denn 4 muss zwei Nachbarn haben, hat aber nur noch einen (die Zahl 1).

Der Leser möge jetzt selbst entdecken, wie nur noch ein zusätzlicher Satz zum Erfolg führt, wenn wir nicht 12, sondern 13 Zahlen nehmen. Und im Falle von 1 bis 14 erhofft man sich ein Beispiel.

Überraschungen liegen oft sehr nah

Manchmal glaubt man, dass die Überraschungen irgendwo sehr weit weg entfernt liegen. Das mag schon sein, aber auch nicht immer und nicht unbedingt. Psychologisch gesagt, sogar Altbekanntes kann uns sehr wohl überraschen oder auch unter neuen Gesichtspunkten merkwürdig ausfallen. Dazu ein Beispiel aus Südafrika:

Eine natürliche Zahl ist mächtig, wenn sie größer ist als die Summe von allen ihren Teilern, die kleiner als die gegebene Zahl sind. Beispielsweise ist 21 eine mächtige Zahl, weil $21 > 1 + 3 + 7$. Wieviel aufeinander folgende natürliche Zahlen können es maximal sein?

Woraus folgt manchmal die Lösung?

Da kann man manchmal wirklich nur staunen. Diesmal scheint die Aufgabe sehr schwer: Zunächst reden wir über die unendliche Menge von natürlichen Zahlen; das ist nie zu einfach, da bleiben viele einfach klingende Aufgaben seit Jahrhunderten ungelöst und man weiß nie, wie schwer sie sein können.

Doch diesmal scheint es eine der einfachsten Sachen zu sein:

Es ist $(1/2) + (1/3) + (1/6) = 1$. Und wir sind schon fast fertig. Denn dann ist jede Zahl $6n$ klar durch n, $2n$ und $3n$ teilbar, also ist $6n$ keine mächtige Zahl – die Summe schon von diesen drei genannten Teilern $n + 2n + 3n$ ist $6n$. Wir können unsere theoretischen Überlegungen beenden: Jede sechste Zahl ist nicht mächtig, also können wir höchstens 5 hintereinander folgende mächtige Zahlen haben. Jetzt brauchten wir ein Beispiel und das ist sofort zur Stelle – denn mit den Zahlen 7, 8, 9, 10 und 12 haben wir schon 5 solche Zahlen.

Es ist noch anzumerken, dass wir – wenn wir ohne jegliche Theorie am Anfang die ersten natürlichen Zahlen betrachten – schnell entdecken würden, dass jede sechste Zahl bestimmt nicht mächtig ist.

Da kommen einem die berühmten Goethe-Worte in den Sinn: „Grau, teurer Freund, ist alle Theorie …“