

Christa KAUNE; Irene JUST, Osnabrück

Spuren kognitiver Strukturen in Schülerlösungen einer Bewegungsaufgabe

Bewegungsaufgaben sind seit vielen Jahrzehnten fester Bestandteil der Schulmathematik. Erfahrene Lehrer berichten, dass diese als schwierig gelten und manche Schüler, obwohl sie sie fehlerfrei lösen können, eine Abneigung gegen diese Aufgabenart entwickeln. Es wird gezeigt, dass dieser „Befund aus der Praxis“ vor dem Hintergrund der Theorie von Schwank (2003) erklärt werden kann und außerdem, wie Hilfen für Schüler mit Präferenzen für unterschiedlichen kognitive Strukturen aussehen können.

Sjuts (2002) analysierte die folgende Aufgabe und einige Schülerlösungen:

Um 10.40 Uhr läuft aus dem Emdener Hafen ein Frachter aus. Er fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 Meilen pro Stunde. Um 11.15 Uhr wird der Zoll benachrichtigt, dass der Frachter Schmuggelware an Bord hat. Um 11.20 Uhr nimmt ein Zollkreuzer die Verfolgung auf. Der Kreuzer erreicht durchschnittlich 25 Meilen pro Stunde. Der Kapitän des Zollkreuzers weiß dies alles und fragt sich, ob er den Frachter noch innerhalb der 30-Meilen-Grenze einholt.

Er stellte an Hand der Bearbeitungen zwei unterschiedliche mentale Konstruktionen bei den Schülern fest: „Die eine Vorgehensweise ist zunächst gekennzeichnet durch das Hineinversetzen in die Situation, womöglich in die Rolle des Zollkreuzerkapitäns.“ Die Rechnungen sind situationsgesteuert. „Die andere Vorgehensweise nimmt die Gesamtsituation in den Blick. Hier dominiert nicht das Hineinversetzen, sondern die Außenbeobachtung. Gesucht ist eine Beschreibung, die die Fahrt der beiden Schiffe erfasst. [...] Hier ist nicht situationsbezogen ein Denken zu organisieren, hier ist eine situationsunabhängige Kompetenz einzusetzen.“ Lösungshinweise zu Bewegungsaufgaben in Schulbüchern legen den zweiten Weg nahe.

Im Folgenden sollen die beiden nachstehenden Fragen beantwortet werden:

1. *Lassen sich die von Sjuts (2002) postulierten Vorgehensweisen, insbesondere die dynamische Beschreibung des Vorgangs der Verfolgung, in anderen Lerngruppen wieder finden?*
2. *Können die Vorgehensweisen den unterschiedlichen Denkstrukturen nach Schwank (2003) zugeordnet werden?*

Um die erste Frage zu untersuchen, wurden zwei unterschiedliche Versuchsgruppen aus verschiedenen Bundesländern herangezogen: Gesamtschüler einer Klasse 11 und Gymnasiasten einer Klasse 11.

Nachstehende **Lösung von Max** aus der ersten Gruppe zeigt, dass man auch außerhalb der Gruppe der Schüler von Sjuts die Vorgehensweise fin-

den kann, die durch das Hineinversetzen in die Situation beschrieben werden kann. Max fixiert zunächst den Standpunkt des Zollkreuzers, das bedeutet, er fixiert *seinen* Standpunkt („Ich: 25 Meilen pro Stunde“), offensichtlich ist er selbst Teil des in der Aufgabe beschriebenen Geschehens.

~~Schiff~~ Ich: 25 Meilen pro Stunde
Er: 15 Meilen pro Stunde + 10 Meilen Vorsprung

1 Stunde später

10 Meilen Vorsprung

25 Meilen/h eigene Geschwindigkeit	
15 Meilen/h andere Geschwindigkeit	
10 Meilen/h aufgeholte Strecke $\hat{=}$ Vorsprung	

Wenn jeder also eine Stunde fährt, wird der Vorsprung erst 25 Meilen vom Hafen entfernt getilgt.

Vom Kreuzer aus visiert er nun den Frachter an, der mit 15 Meilen pro Stunde und einem Vorsprung von 10 Meilen vor ihm her fährt und stellt fest, dass er ihn eine Stunde nach Abfahrt einholen wird. Die Überlegung, ob er den Frachter innerhalb der 30-Meilen-Grenze stellen wird, erfolgt in seinem Schlusssatz: „Wenn jeder also eine Stunde fährt...“ dabei wählt er als Bezugszeitpunkt die eigene Abfahrt aus dem Hafen, „...wird der Vorsprung erst 25 Meilen vom Hafen entfernt getilgt.“ Man sieht, dass Max für seine Lösung keine besonderen Formalisierungstechniken benötigt.

Die im Folgenden vorgestellten Lösungen stammen von Gymnasiasten, die von Brinkschmidt (2002) auf ihre kognitiven Präferenzen untersucht worden sind. Die Untersuchung (u.a. von Augen-Blickbewegungen) ergaben, dass Tim eine Präferenz für eine funktionale, Timo dagegen für eine prädikative kognitive Struktur hat. Das Wissen um die kognitiven Präferenzen der beiden Schüler ermöglicht die Beantwortung der zweiten gestellten Frage. In Kaune (2003) sind weitere Eigenproduktionen der beiden Schüler analysiert unter dem Blickwinkel: Zusammenhang von kognitiven Präferenzen und dem Vorgehen beim Bearbeiten von Aufgaben.

Sucht man in der folgenden **Lösung von Timo** eine der beiden von Sjuts (2002) vorgestellten unterschiedlichen Beobachtungspositionen, so sieht man, dass Timo die Gesamtsituation in den Blick nimmt, seinen Blick auf beide Schiffe in gleicher Weise richtet. Zur Bearbeitung der Aufgabe setzt er die kognitiven Werkzeuge des Präzisierens und Formalisierens ein: Er erfasst die Fahrt beider Schiffe mittels Funktionsgleichungen und gelangt durch Umformungen zum korrekten Ergebnis. Beim Lösen der Gleichung fällt auf, dass seine Darstellung formal präzise ist, ein Merkmal, das man oft bei Schülern mit einer prädikativen Denkstruktur findet (Just 2004).

Frachter: 15 Meile pro Stunde
 Zoller: 25 Meile pro Stunde

15
 15:60 = 0,25
 25:60 = 0,4166

10 Meilen + x = 15
 11:20 Uhr = 10 Meilen + x = 15
 11:20 Uhr = 25 Meilen + x = 25
 x = Minute

10 + x - 15 = 25 - x
 10 = 25 - x
 10 - 6 = x
 4 = x

Der Kreuzer fährt in Berlin 25 Meilen

Er holt den Frachter bei Meile 25 ein!

Schließlich formuliert er einen korrekten Antwortsatz ("Er holt den Frachter bei Meile 25 ein!"). Es wird deutlich, dass er ohne das im Unterricht erworbene Training im Formalisieren von Wissen diese Aufgabe wahrscheinlich nicht hätte lösen können.

In der **Lösung von Tim** ist zu erkennen, dass er – wie Max – sich in die geschilderte Situation hineinversetzt: Sein erster Satz "fährt auch aus Emden" zeigt, wie er in seiner Vorstellung mit dem Zollkreuzer losfährt.

fährt auch aus Emden

Kreuzer: $\frac{25 \text{ Meilen}}{60 \text{ Minuten}} = 0,41666 \frac{\text{Meilen}}{\text{Minute}}$

30 : 0,4166 = 72
 Kreuzer braucht 72 Minuten
 30 Meilen

10:40 - 11:20 = 15 Meilen / Stunde
 11:20 - = 25 " "

15 Meilen, muss noch 20 Meilen
 60 Minuten / 15 Meilen = 4 Stunden
 20 Meilen : 15 = 1,20 Stunden
 Frachter

Kreuzer nimmt Verfolgung auf.
 Frachter fährt noch 80 Minuten
 Kreuzer " " 72 Minuten

Er ermittelt zunächst, wie lange der Kreuzer bis zur 30-Meilen-Grenze braucht: 72 Minuten. Dann zieht er einen Strich, als sei ein großer Teil der Aufgabe erledigt. Im zweiten Teil berechnet er den Weg-Vorsprung des Frachters: 10 Meilen, und stellt fest, dass dieser bis zur 30-Meilen-Grenze noch 20 Meilen fahren muss. Seine Formulierung "Kreuzer nimmt Verfolgung auf" zeigt, dass er sich in seiner Vorstellung in der Verfolgungssituation befindet. Er muss nun berechnen, wie lange der Frachter für die 20 Meilen bis zur Grenze noch braucht: 1,20 Stunden. Dies Ergebnis ist formal nicht korrekt, wird aber als 1 Stunde und 20 Minuten korrekt interpretiert und anschließend umgewandelt. Danach schreibt er unter die 80 Minuten, die der Frachter "noch fährt", die oben berechnete Fahrzeit des Kreuzers bis zur 30-Meilen-Grenze und beendet seine Bearbeitung, nachdem er festgestellt hat, dass der Kreuzer die 30-Meilen-Grenze eher erreichen wird als der Frachter. An seiner gesamten Lösung fällt auf, dass er sich nicht an die im Aufgabentext vorgegebene Reihenfolge hält. Es lassen sich auch mehre-

re syntaktische Fehler und Ungenauigkeiten feststellen. Beispielsweise setzt er Gleichheitszeichen zwischen einer Zeitdifferenz und einer Geschwindigkeit, die in diesem Fall die Bedeutungen haben: "fährt der Frachter..." bzw. "fährt der Kreuzer mit einer Geschwindigkeit von". Auch die "Minuszeichen" zwischen den Uhrzeiten sind nicht als Subtraktionszeichen zu verstehen, sondern als Kodierung von "bis". Dieses Phänomen zeigt sich auch in Max' Lösung bei der Verwendung des Additionszeichens.

Ergebnisse

1. *Sowohl die von Sjuts (2002) festgestellten Vorgehensweisen als auch die unterschiedlichen mentalen Konstruktionen beim Bearbeiten der Aufgabe lassen sich in den Lösungen der Schüler wieder finden.*
2. *Während ein funktionaler Schüler einen dynamischen Vorgang, eine Verfolgungsjagd erlebt und die Aufgabe aus der Situation heraus löst, benötigt ein prädikativer Schüler zur Bearbeitung der Aufgabe die Werkzeuge des Formalisierens und Präzisierens.*

Konsequenzen

Lehrer sollten um die unterschiedlichen Vorstellungen, die die Darstellung einer Bewegungsaufgabe bei den Schülern auslösen können, wissen. Dann können sie im Unterricht forschungsbasierte Maßnahmen zur Hilfestellung ergreifen:

- eine gleichmäßige Berücksichtigung beider Denktypen bei der Aufgabenformulierung; Sjuts hat 2002 dazu schon Vorschläge gemacht;
- eine neutrale Bewertung beider Vorgehensweisen; eine Bewertung der Außensicht als die elegantere wird funktionalen Schülern nicht gerecht;
- Schüler mit dem nötigen Handwerkszeug (hier Formalisierungstechnik) ausstatten, dies ist für den Erfolg von leistungsschwächeren prädikativen Schülern von großer Bedeutung.

Literatur

Brinkschmidt, S. (2002): Analyse von Schülereigenproduktionen im Mathematikunterricht mit kognitionstheoretischen Methoden. (Universität Osnabrück, Institut für kognitive Mathematik, unveröffentlichte Staatsarbeit im Fach Mathematik)

Just, I. (2004): Zur Stabilität von kognitiven Strukturen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht – Untersuchung an Hand von ausgewählten Schülereigenproduktionen. (Universität Osnabrück, Institut für kognitive Mathematik, unveröffentlichte Staatsarbeit im Fach Mathematik)

Kaune, C. (2003): Das Wissen um Unterschiede in den kognitiven Strukturen von Schülerinnen und Schülern als Erklärung von Unterrichtsbeiträgen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Jg 35, Heft 3, S. 102 - 109.

Schwank, I. (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. Jg 35, Heft 3, S. 70-78.

Sjuts, J. (2002): Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. In: Journal für Mathematikdidaktik, Jg. 23, Heft 2, S. 106-128.