Henning KÖRNER, Oldenburg

Mit Wachstum durch die Analysis – ein Kurskonzept

„Wie hat es dir auf dem Kramermarkt gefallen?" „Naja, besser als im letzten Jahr." Mona Körner

Klassische Kurskonzepte folgen meist fachsystematisch geprägten Strukturen. Hier wird ein Konzept vorgestellt, bei dem die zunächst außermathematisch motivierte Frage nach dem Änderungsverhalten von Populationen zu einer Folge von Modellierungen führt. Kritik an erarbeiteten Modellen bildet den Motor des Fortgangs. Auf dem Weg zu immer komplexeren Modellen kommt es zu Begegnungen mit den kanonischen Funktionsklassen. Einerseits werden die Standardfunktionen der Sek. 1 unter einem neuen Blickwinkel ‚wiederentdeckt', anderseits werden neue Funktionen erarbeitet und untersucht, die klassischen Inhalte erwachsen aus der Beschäftigung mit einer durchgehenden, außermathematischen, Problemstellung Die einzelnen Modelle werden in unterschiedlichen grafischen Darstellungen betrachtet und untersucht, das Lesen und Interpretieren von Diagrammen hat zentrale Bedeutung. Das Konzept kann in Grund- und Leistungskursen umgesetzt werden. Eine solche Ausrichtung von Kursen hat zwei zentrale Funktionen:

1. Die konstitutive Einbettung der Inhalte in eine durchgängige Problemsequenz hat sinnstiftende Wirkung. Der Gefahr von Desorientierung durch, zumindest von Schülern häufig so wahrgenommener, isolierten Behandlung unzusammenhängender Theorieelemente wird dadurch entgegengewirkt, dass ein immer sichtbarer roter Faden den Zusammenhang verdeutlicht.
2. Es sind gerade solche Problemkontexte, die die Ausbildung von Kompetenzen, wie sie z.B. in den Bildungsstandards formuliert sind, ermöglichen und fördern. Mathematisches Argumentieren, Modellieren, der Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik usw. stehen im Vordergrund, die mathematischen Inhalte im engeren Sinne sind diesen Kompetenzen untergeordnet.

Manchmal weiß man nicht, wie schön etwas war oder wie groß der Bestand von etwas ist, aber man kann Aussagen über die Veränderungen machen. Das Änderungsverhalten ist also häufig eher zugängig und manchmal auch wichtiger als der Bestand, mathematisch formuliert: Die Ableitung ist wichtiger als der Funktionswert. Es ist dann naheliegend, die Beschreibung realer Prozesse auch über das vermutete Änderungsverhalten zu versuchen, wieder mathematisch formuliert: Man weiß etwas über die Ableitung oder über ihre Beziehung zu f(x).

Henning Körner, Oldenburg

Mit Wachstum durch die Analysis – ein Kurskonzept

Folgende Tabelle bildet die Grundstruktur des Konzeptes:

Wachstums-DGL.	Wachstumsfunktion	Relative Wachstums-geschwindigkeit (Intensität)
x-Achse: $y(t)$ y-Achse: $y'(t)$ (Phasendiagramm)	x-Achse: t y-Achse: $y(t)$	x-Achse: t y-Achse: $\frac{y'(t)}{y(t)}$

Modelliert wird die Wachstums-DGL (linke Spalte), daraus werden dann die Wachstumsfunktion und die Intensität abgeleitet. Manchmal ist hier eine Herleitung ‚zu Fuß' möglich, manchmal braucht man ein CAS und manchmal scheitert auch dieses. Wenn kein CAS zur Verfügung steht, können die Wachstumsfunktionen von der Lehrkraft vorgegeben werden, Schüler können dann den Nachweis führen (Übung im Ableitungskalkül). Schön ist es, wenn mit Richtungsfeldern gearbeitet werden kann, weil Schüler dann unmittelbar ihre erdachten Modelle grafisch-numerisch auf Plausibilität prüfen können. Für die klassischen Standardmodelle erhält man dann:

(1) Lineares Wachstum:		
$y'(t) = c$	$y(t) = c \cdot t + y_0$	$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{c}{c \cdot t + y_0}$
Änderung konstant	Lineare Funktion y_0 : Anfangsbestand	Hyperbel
(2) Exponentielles Wachstum		
$y'(t) = k \cdot y(t)$	$y(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$	$\frac{y'(t)}{y(t)} = k$
Änderung proportional zum Bestand (Ursprungsgeraden)	Exponentialfunktion: k: Wachstumsfaktor y_0 : Anfangsbestand	Konstante Funktion (konstante Intensität)
(3) Zeitabhängiges Wachstum		
$y'(t) = k \cdot t$	$y(t) = \frac{k}{2} \cdot t^2 + y_0$	$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{2kt}{kt^2 + 2y_0}$
Änderung ist proportional zur Zeit	Parabeln	Rationale Funktion

Henning Körner, Oldenburg

Mit Wachstum durch die Analysis – ein Kurskonzept

Bemerkungen:

1. Wichtig für Einsicht sind Interpretationen der Kurven. Man sollte immer wieder qualitativ aus Phasendiagrammen die Bestandsfunktionen, aus Bestandsfunktionen die Intensität und umgekehrt, antizipieren lassen. Hierbei kommt es zu intensiver Beschäftigung mit beiden zentralen Aspekten des Funktionsbegriffs, dem Zuordnungsaspekt (gleiche Typen bei unterschiedlichen Modellen) und dem Kovarianzaspekt (wie verhält sich die eine Größe, wenn die andere sich ändert).
2. In (1),(2) und (3) tauchen verschiedene bekannte und auch neue Funktionstypen auf, nicht nach Systematik der Termdarstellung geordnet, sondern nach Sachzusammenhängen. Hier werden dann Ableitungsregeln behandelt, Polstellen, Definitionsbereiche, etc. thematisiert, aber nur so weit wie es zum Erfassen des vorliegenden Sachverhaltes notwendig ist. Da dies alles in den weiteren Modellen wieder auftaucht, ergibt sich zwangsläufig ein Übungseffekt in sinnstiftenden Kontexten.
3. Als festigende Übung bieten sich jetzt Modellierungen des Typs „je mehr desto weniger“ an, also:
(2b) *Die Änderung ist umgekehrt proportional zum Bestand.*
(3b) *Die Änderung ist umgekehrt proportional zur Zeit.*
(2b) führt auf Wurzelfunktionen, (3b) auf die Logarithmusfunktion.
4. Wenn die Integralrechnung behandelt ist, ist (3) Erinnerung, ansonsten kann dieses Modell später zur Einführung in die Integralrechnung benutzt werden. Auch ohne vorgängig behandelte Integralrechnung lösen Schüler die DGL durch ‚Aufleiten’ und erfassen darüber hinaus, dass es unendlich viele Lösungen gibt, wenn man keinen Anfangswert festlegt. Stamm-funktionen bilden ist Lösen einer DGL! Man geht dann nur umgekehrt wie in den üblichen Sequenzierungen vor, hier also: Von der Rekonstruktion des Bestandes aus dem Änderungsverhalten zum Flächenproblem.

Die Bearbeitung verschiedener Probleme, vorzugsweise in Gruppenarbeit, führt dann durch Diskussion, Systematisierung und Strukturierung zum nächsten Modell.

1. Ein Tiergartenbesitzer hat festgestellt, dass ihm seine Zwergnashörner exponentiell wegsterben mit einer Halbwertzeit von 2 Jahren, wenn er keine neuen kauft. Da sich Zuchterfolge nicht einstellen, muss er regelmäßig neue Zwergnashörner dazu kaufen. Wie viele sollte er jährlich kaufen?
   Die Nilpferde vermehren sich dagegen mit einer Verdopplungszeit von 8 Jahren. Wenn man da nicht ständig Ställe bauen will...

Henning Körner, Oldenburg
Mit Wachstum durch die Analysis – ein Kurskonzept

2.	Im Tillysee gibt es 2500 Leckeringe. Es ist bekannt, dass Leckeringe sich unter den Bedingungen, die sie im Tillysee vorfinden, mit einer jährlichen Wachstumsrate von 30% vermehren. Der Angelverein hatte bisher das jährliche Abfischen von 700 Leckeringen erlaubt. Nun drängen Vereinsmitglieder auf eine Erhöhung der Fangmenge auf 800 Leckeringe...
3	Wann ist frisch gebrühter Kaffee trinkbar? Wann lauwarm? Wann kalt? Es wird im Abstand von zwei Minuten gemessen:
4.	Wann ist frisch gebrühter Kaffee trinkbar? Wann lauwarm? Wann kalt? Wann hat der Kaffee Raumtemperatur? *„Je mehr Zeit vergeht, desto langsamer nimmt die Temperatur ab, ...“*
5.	In einen Tank fließt konstant viel Wasser zu. Der Abfluss ist proportional zum Druck, also zur Höhe h des Wasserstandes. Was passiert langfristig?
6.	Wie wächst eine Population, wenn es eine Kapazitätsgrenze gibt?

Zeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T°	95,0	81,5	76	72	68,5	65,5	62,5	60	58	56	54	52,5	51

(4) Zufluss-Abfluss-Modell bzw. Beschränktes Wachstum		
$y' = ay + b$	$y = (y_0 + \frac{b}{a}) \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$	$\frac{y'}{y} = \frac{a \cdot b}{(a \cdot y_0 + b) \cdot e^{a \cdot t} - b} + a$

Kritik am Wachstumsmaximum zu Beginn führt dann zum logistischen Wachstum. Die Parabel des Phasendiagramms erschließen Schüler auf unterschiedliche Weise (qualitative Umsetzung des sigmoiden Verlaufs/ Überlagerung von exponentiellem und begrenzten Wachstum/...), eine direkte Bestimmung der Wachstumsfunktion ist außerhalb ihres Erfahrungshorizontes.

(5) Logistisches Wachstum		
$y' = k \cdot y \cdot (1 - \frac{y}{G})$	$y = \frac{y_0 \cdot G \cdot e^{k \cdot t}}{y_0 \cdot e^{k \cdot t} + G - y_0}$	$\frac{y'}{y} = \frac{(G - y_0) \cdot k}{y_0 \cdot e^{k \cdot t} + g - y_0}$

Alle bisher behandelten Modelle erfassten nur monoton zunehmende bzw. abnehmende Populationen. Bestände können aber auch erst zunehmen, dann abnehmen und sogar aussterben....
Der weitere Verlauf und eine ausführliche Darstellung, auch von konkretem Unterrichtsgeschehen, erscheint 2005 in MU (Themenheft: Kurskonzepte (Hrsg. H. Körner)).