

Sebastian KUNTZE, Augsburg

## **Förderung von Wissensaufbau zu Problemlösetechniken und Beweisstrategien mit heuristischen Lösungsbeispielen <sup>1</sup>**

Eine Ursache für die beträchtlichen Schwächen deutscher Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Aufgaben, die mehrschrittiges Beweisen oder Begründen erfordern, kann darin gesehen werden, dass Techniken und Strategien der Beweisentwicklung für die Lernenden oft nicht verfügbar sind (Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Die Förderung von Wissens- und Kompetenzaufbau in diesem Bereich ist das Ziel der so genannten heuristischen Lösungsbeispiele (Reiss & Renkl, 2002). In dieser schülerzentrierten Lernumgebung vollziehen Schülerinnen und Schüler anhand von Beispielen Entwicklungsprozesse von Beweisen nach. In den Materialien sollen Selbsterklärungsprozesse der Lernenden durch Prompts angeregt werden (vgl. Groß, 2003). Die heuristischen Lösungsbeispiele knüpfen an Befunde zu algorithmischen Lerninhalten an, nach denen mit Lösungsbeispielen bessere Lernergebnisse als in konventionellen Lernumgebungen erzielt wurden (Renkl, 1997, 2001). Aktuelle quantitative Untersuchungen deuten darauf hin, dass sich beim Lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen die Beweis- und Argumentationskompetenz in Experimentalgruppen signifikant stärker steigerte als in Referenzgruppen (z.B. Heinze & Rudolph, 2004). Vor dem Hintergrund dieser Befunde ist von Interesse, mit welchem Wissenszuwachs im Bereich von Strategien und Arbeitstechniken der Beweisentwicklung diese Kompetenzzuwächse einhergehen.

Die heuristischen Lösungsbeispiele orientieren sich in ihrem Aufbau am Beweisentwicklungsmodell von Boero (1999). Dieses Modell beschreibt sechs Phasen (vgl. Abb. 5), die beim Generieren von Beweisen durch Experten durchlaufen werden können. Ein ganz wesentlicher Aspekt dieses Beweisprozessmodells ist der hohe Stellenwert von Tätigkeiten des Explorierens im Umfeld des Beweisproblems, die daher auch in den heuristischen Lösungsbeispielen eine große Rolle spielen. Wissen von Schülerinnen und Schülern zu Entwicklungsprozessen von Beweisen bzw. zu Strategien der Beweisgenerierung in der Mathematik ist als Teilbereich eines verschiedenen Aspekte von Meta-Wissen über das Beweisen in der Mathematik vereinenden beweispezifischen wissenschaftstheoretischen Grundverständnisses der Lernenden anzusehen (vgl. Kuntze, 2004). Hinweise darauf, welches Wissen zu Beweisentwicklungsprozessen die Lernenden in ihrer Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen aufbauen, können auch der Ein-

---

<sup>1</sup> Die Durchführung der Studie wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität von Schule“ unterstützt (RE 1247/4).

schätzung und der Weiterentwicklung der in der Lernumgebung verwendeten Lösungsbeispiele dienen. Erkenntnisse sollen also zur folgenden Frage gewonnen werden:

Welches Wissen zum Entwickeln von Beweisen und zu entsprechenden Problemlösetechniken bauen Schülerinnen und Schüler beim Lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen auf?

### Untersuchungsmethoden

Wissen zu Prozessen und Strategien der Beweisentwicklung, das die Lernenden bei ihrer Arbeit mit den heuristischen Lösungsbeispielen aufbauen, wurde in dieser Studie anhand von textlichen Eigenproduktionen untersucht, die von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe verfasst wurden. Die Schüler dreier Gymnasialklassen in NRW erhielten den Auftrag, nach dem Lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen Themenstudien zum Beweisen und Argumentieren zu verfassen (vgl. Kuntze, 2004). Äußerungen zur Beweisentwicklung, die in den schriftlichen Arbeiten enthalten waren, konnten mit Hilfe einer Referenzgruppe von sechs Klassen zugeordnet werden, die ohne heuristische Lösungsbeispiele nur Themenstudien erarbeitet hatten. Die Schüleräußerungen wurden danach kodiert, ob einzelne Phasen des Beweisprozessmodells von Boero und insbesondere explorative Strategien angesprochen worden waren.

Die offenen Bedingungen bei der Erstellung der Themenstudien brachten es mit sich, dass die Lernenden Vorstellungen, die in den heuristischen Lösungsbeispielen aufgebaut wurden, eigeninitiativ ansprachen.

### Ergebnisse

Äußerungen der Schülerinnen und Schüler zur Entwicklung und zu Strategien des Beweises, die auf der Basis des Vergleichs mit den Arbeiten der Referenzgruppe den heuristischen Lösungsbeispielen zugeordnet werden konnten, fanden sich in 35 der 62 textlichen Eigenproduktionen der Experimentalgruppe. Ein Beispiel für eine solche Äußerung zur Entwicklung von Beweisen ist in Abb. 1 wiedergegeben. Alexandra beschreibt in Form eines „wichtigen“ Hinweises Strategien der Beweisgenerierung, die auch den heuristischen Lösungsbeispielen zugrunde liegen. Dabei spricht

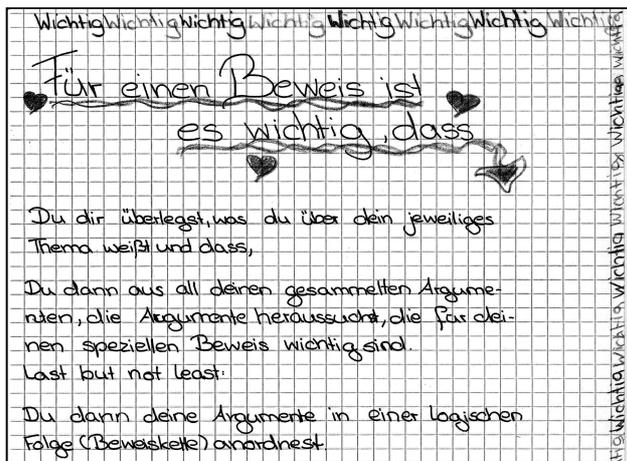


Abb. 1: Äußerung von Alexandra

die auch den heuristischen Lösungsbeispielen zugrunde liegen. Dabei spricht

sie explorative Schritte, die Auswahl von Argumenten und deren Anordnung in einer deduktiven Kette an. Ähnliche Vorstellungen zu Techniken

**So macht man einen Beweis:**

Um einen Beweis zu machen, muss man erstmal eine Voraussetzung haben. Man muss auch wissen was man beweisen möchte. Dann kann man sich Gedanken über die Voraussetzung machen und Beispiele zeichnen oder rechnen. Zunächst schreibt man auf, was man über das Thema weiß und auch wissen sollte. Bücher oder Internet (und viele andere) helfen dabei auch weiter. Man liest sich alles nochmal durch und sortiert überflüssige Punkte aus (weil man sie zu diesem Beweis nicht braucht). Später fasst man die übriggebliebenen sinnvollen Text zusammen. Danach arbeitet man eine Beweisidee aus, damit man eine Idee hat, wie man das Thema beweisen kann. Jetzt muss man nur noch den Beweis aufschreiben.

Abb. 2: Äußerung von Friederike

und Strategien der Beweisfindung äußert Friederike (vgl. Abb. 2). Sie betont im Vergleich zu Alexandra auch Prozesse der Klärung der Voraussetzungen und der Behauptung. Mit eigen-

nen Worten schildert Friederike explorative Beweisgenerierungsphasen. Die Auswahl von Argumenten ist bei ihr offenbar eine „Negativ-Auswahl“ des Aussortierens „überflüssiger Punkte“. Nach dem Zusammenfassen der „übriggebliebenen“ Argumente wird nach Alexandra eine Beweisidee aus-

Ein mathematischer Beweis besteht zuerst aus einem Problem. Danach schreibt man alles auf, was einem bei dem beweisen des Problems helfen könnte. Meistens hat ein Beweis auch Zeichnungen, die den Sachverhalt verdeutlichen. Anschließend versucht man eine Beweisidee durchzuführen. Nachdem man dies getan hat, schmückt man die Beweisidee aus und hat somit den Beweis einer Behauptung.

Abb. 3: Äußerung von Sophie

gearbeitet, die dann zum Beweis führt. Auch Sophie (vgl. Abb. 3) erkennt, dass explorative Schritte bei der Beweisfindung eine Rolle spielen. Eine Beweisidee führt nach ihren Worten durch ein „Ausschmücken“ zum Beweis, wobei Sophie nicht beschreibt, dass dazu eine Argumentationskette aufgebaut werden muss. Frank

(vgl. Abb. 4) zählt Arbeitsschritte der heuristischen Lösungsbeispiele zur Beweisentwicklung auf, die auch explorative Phasen umfassen. Den

Ein mathematischer Beweis besteht aus einer Beweiskette. Das erste Glied der Kette ist die Vermutung, dann kommt die Untersuchung, dann die Behauptung, die Beweisidee und zuletzt der Beweis der Behauptung und die Lösung.

Abb. 4: Äußerung von Frank

Begriff „Beweiskette“ gebraucht er für die Abfolge dieser Arbeitsschritte, was nicht dem üblichen Begriffsverständnis entspricht. Frank scheint noch über keine im Sinne der heuristischen Lösungsbeispiele adäquate Vorstellung vom Auf-

bau einer Argumentationskette durch Zusammensetzen von Argumenten zu verfügen.

Einen Gesamtüberblick über die Häufigkeit von Nennungen, die einzelnen Phasen von Boero zugeordnet werden können, bzw. entsprechender Techniken der Beweisgenerierung durch die Schüler gibt Abb. 5. Explorative Strategien der Beweisentwicklung werden in gut zwei Dritteln der 35 Schülerarbeiten angesprochen, die die Beweisentwicklung thematisieren.

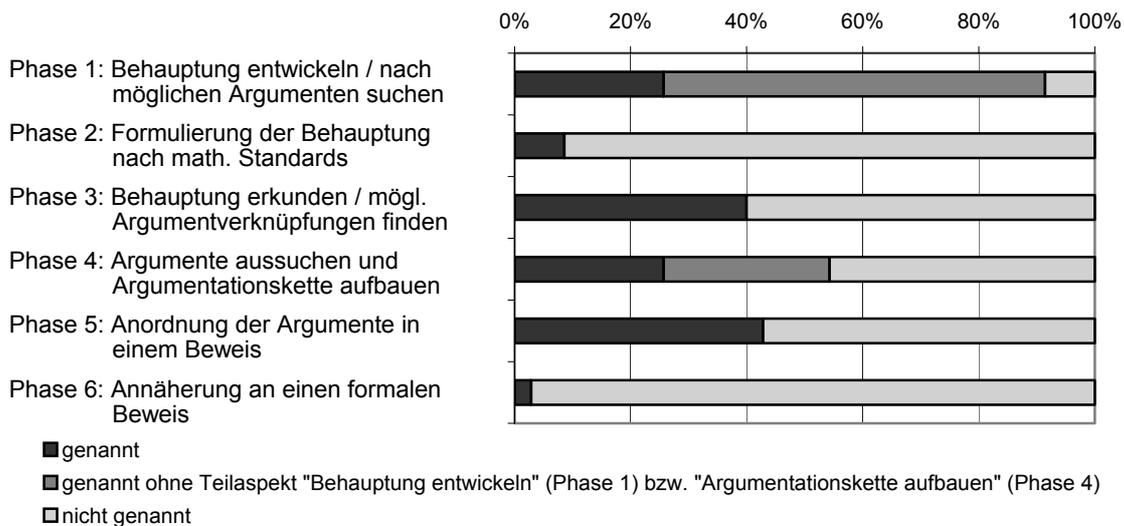


Abb. 5: Von Lernenden angesprochene Phasen der Beweisentwicklung (N=35)

## Diskussion

Insgesamt zeigen diese Ergebnisse, dass diejenigen Schülerinnen und Schüler, die Merkmale des Entwickelns von Beweisen bzw. Techniken der Beweisgenerierung beschreiben, mit großer Häufigkeit explorative Arbeitsschritte thematisieren. Insofern sind im Vergleich mit der Referenzgruppe deutliche Wissenszuwächse im Bereich der Beweisentwicklung erkennbar, die offenbar auf das Lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen zurückgehen. Solcher Wissensaufbau ist eines der Hauptziele dieser Lernumgebung. Verbesserungspotentiale für die heuristischen Lösungsbeispiele scheinen sich im Zusammenhang mit Wissen über das Generieren von Argumentationsketten abzuzeichnen. Hier könnte sich etwa eine stärkere Anregung der Lernenden, selbsttätig Argumente zusammensetzen, positiv auswirken.

## Literatur

- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 1999, S. 7-8.
- Groß, C. (2003). Beweisen lernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In: H.-W. Henn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003* (S. 257-260). Hildesheim: Franzbecker.
- Heinze, A. & Rudolph, F. (2004). Beweisen lernen: Erste Ergebnisse einer Interventionsstudie in der Jahrgangsstufe 8. Vortrag auf der 65. Tagung der AEPF, Nürnberg, 20.09.2004.
- Kuntze, S. (2004). Wissenschaftliches Denken von Schülerinnen und Schülern bei der Beurteilung gegebener Beweisbeispiele aus der Geometrie - Ergebnisse einer Untersuchung textlicher Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums. *JMD*, 25(3/4), 245-268.
- Kuntze, S. & Esper, N. (2003). Eigene Schritte zum Beweisen in der Geometrie - Erfahrungen mit Lernumgebungen für selbständige Lernprozesse in der Unterrichtspraxis. Vortrag im Rahmen der Tagung des GDM-Arbeitskreises Geometrie, Soest, 10.-12.10.2003.
- Reiss, K.; Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), 45. Beiheft zur *Zeitschrift für Pädagogik* (S. 51-64). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to Prove: The Idea of Heuristic Examples. *ZDM*, 34 (1), 29-35.
- Renkl, A. (1997). Learning from worked-out examples. *Cognitive Science* 21, 1-29.
- Renkl, A. (Hrsg.). (2001). Lernen aus Lösungsbeispielen. *Unterrichtswissenschaft*, 29, 1-95.