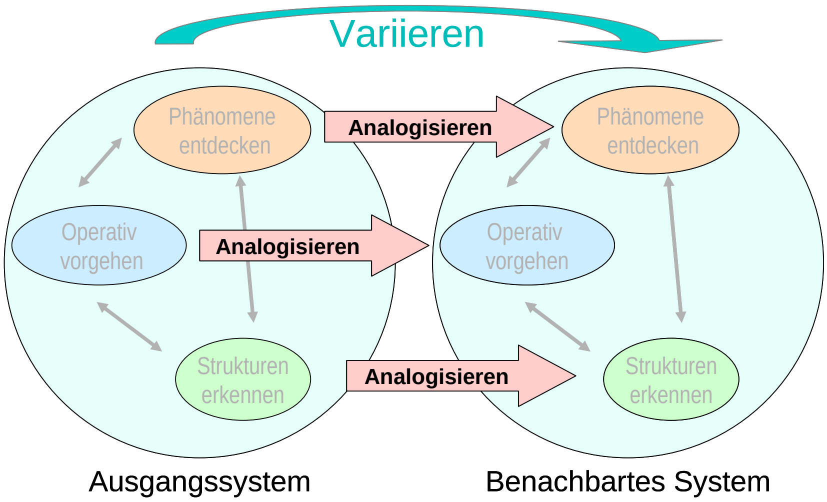
Rainer LOSKA und Mutfried HARTMANN, Nürnberg

Bedeutung der Variation von Übungsformaten

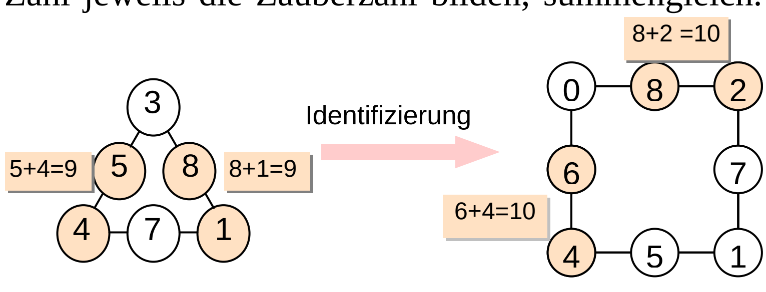
Wesentliche Bestandteile wissenschaftlichen Vorgehens sind das Entdecken von Phänomenen, operative Vorgehensweisen und das Finden einer geeigneten strukturellen Beschreibung. Hat man ein System weitgehend analysiert, bietet es sich an, nicht gänzlich neue, sondern ähnliche Systeme zu untersuchen. Es ist vernünftig anzunehmen, dass sich Analogien vorfinden, und durch *bewusstes Analogisieren* auffinden lassen. Betrachtet man ein geeignetes Übungsformat als System, lassen sich "benachbarte Systeme" durch systematisches *Variieren* konstruieren.



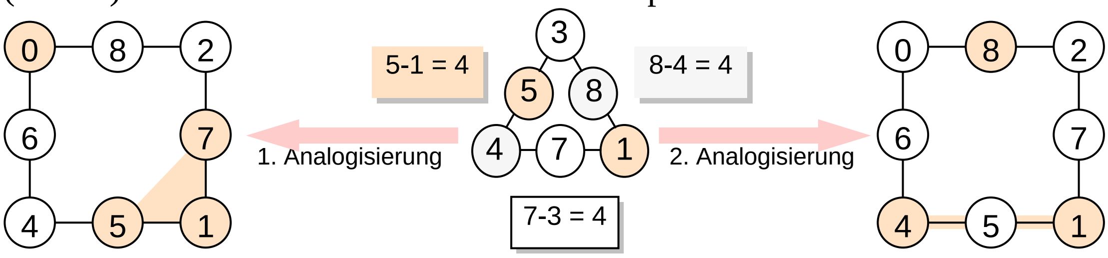
Orientiert man sich im Sinne einer Propädeutik bei der Arbeit mit Übungsformaten und deren Varianten am wissenschaftlichen Vorgehen, so lässt sich die Schlagkraft des Analogisierens auch in der Schule erfahrbar machen.

Im Folgenden gehen wir vom Übungsformat "Zauberdreieck" aus und nutzen das Werkzeug Analogisieren bei der Untersuchung der Varianten "Zauberviereck" und "Zaubertetraeder". Von Zauberfiguren sprechen wir, wenn bei Polygonen oder Polyedern die auf den Seiten bzw. Kanten liegenden Zahlen jeweils dieselbe Summe ergeben.

Wir betrachten zunächst Analogisierungsprozesse beim Suchen nach Phänomenen. Wir kennen das Phänomen der Schenkelsummengleichheit im Zauberdreieck. Die zu zwei Schenkeln gehörenden Zahlenpaare sind, weil sie mit der dritten gemeinsamen Zahl jeweils die Zauberzahl bilden, summengleich. Analog dazu, eigentlich sogar in identischer Weise sind beim Zauberviereck und beim Zaubertetraeder entsprechende Zahlenpaare summengleich. Nehmen

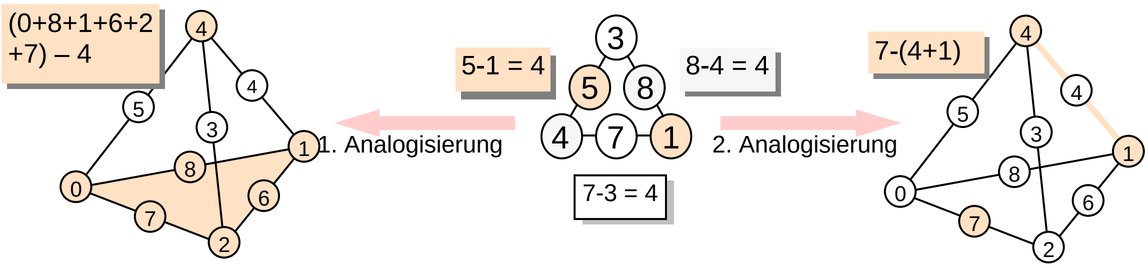


wir für einen weiteren Analogisierungsversuch das Phänomen der Differenzgleichheit von Eck- und gegenüberliegender Mittenzahl. Im Zauberviereck könnte man nun ausgehend von der Eckzahl (0) als Analogon zur gegenüberliegenden Mittenzahl die gegenüberliegende Eckzahl (1) oder eine der schräg gegenüberliegenden Zahlen (5 bzw. 7), oder beide (5+7) oder alle gegenüberliegenden Zahlen (1+5+7) zusammen wählen. Tatsächlich erweist sich letztere Analogisierung als geeignet, da nur hier die entsprechenden Differenzen stets denselben Wert (13) ergeben: (1+5+7)–0 = (2+8+7)–4 = (0+8+6)–1 = (4+6+5)–2. Gehen wir nun in unserem Beispielviereck von einer Mittenzahl

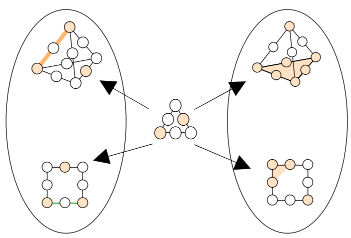


(8) aus und prüfen als mögliches Analogon die Differenzen zu einer gegenüberliegenden Eckzahl 4 bzw. 1, zu deren Summe 4+1 oder zur Summe aller drei Zahlen 4+5+1. Hier erweist sich die Summe der beiden schräg gegenüberliegenden Eckzahlen als geeignet. Es gilt nämlich 8–(4+1) = 6–(1+2) = 5–(2+0) = 7–(0+4). Wir haben jetzt durch unterschiedliches Analogisieren sogar zwei Phänomene entdeckt.

Wir finden in ähnlicher Weise auch zwei Phänomene beim Zaubertetraeder.

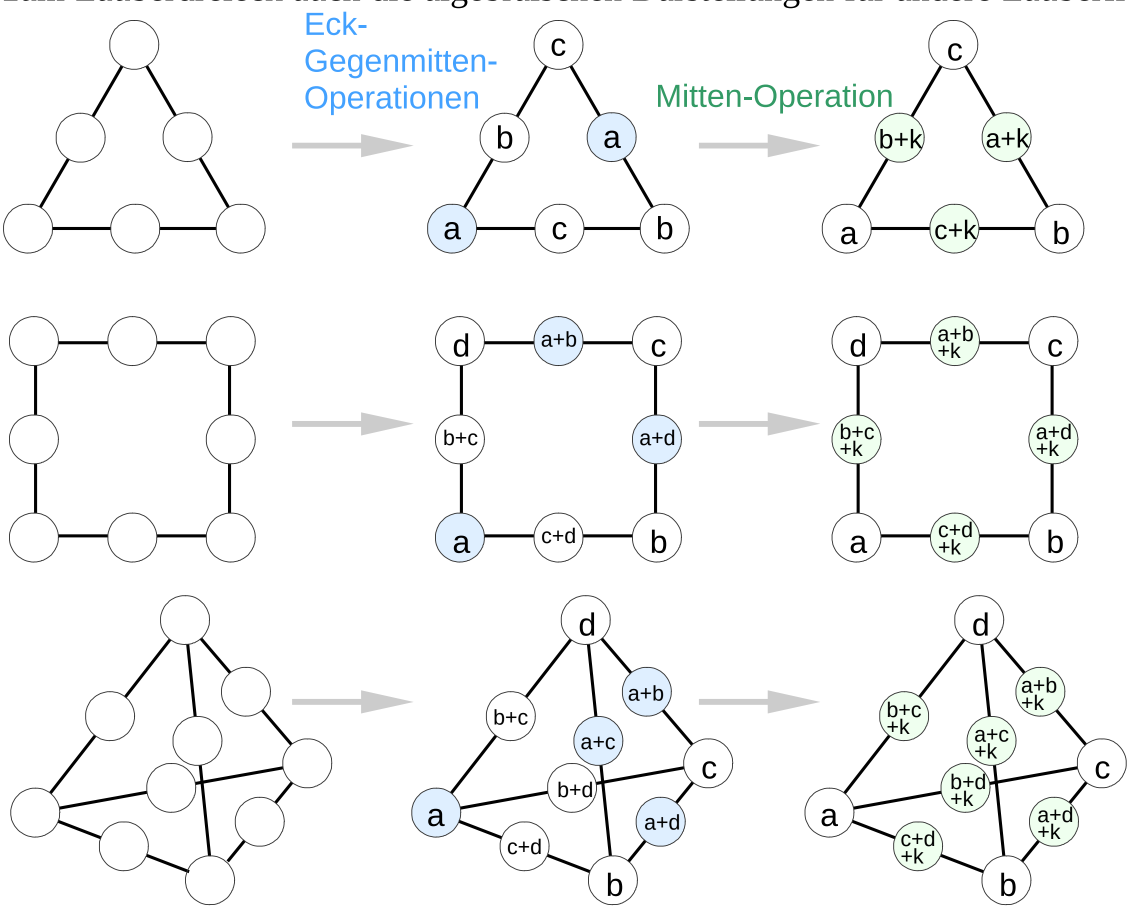


Die Differenz aus einer Eckzahl und der Summe aller Zahlen des jeweils gegenüberliegenden Dreiecks ergibt stets denselben Wert. Man kann aber auch wie beim Zauberviereck von der Mittenzahl ausgehen. Als geeigneter Minuend erweist sich hier die Summe der beiden gegenüberliegenden Eckzahlen.



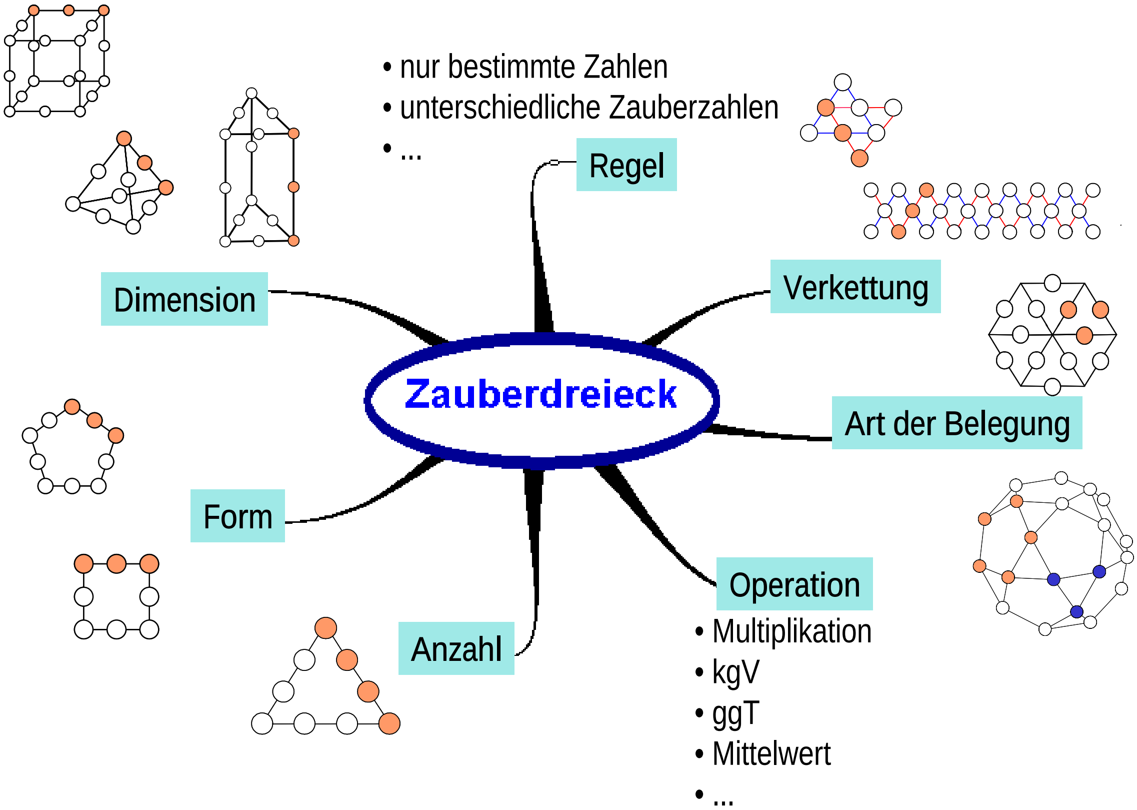
Interessanterweise bestehen zwischen den beiden variierten Formaten noch engere Analogien, als zwischen diesen und dem Ausgangsformat. Wir haben sowohl im Zauberviereck als auch im Zaubertetraeder das Phänomen der Differenzgleichheit zwischen Mitte und Gegenecken bzw. Ecke und Gegendreieck. In beiden variierten Formaten finden wir auch ein Phänomen, das nicht durch Analogisieren aus dem Ausgangsformat erschlossen werden kann. Gegenüberliegende Mitten sind nämlich jeweils summengleich. Dies zeigt, wie fruchtbringend es auch sein kann, Analogisierungsversuche zwischen den Formatvarianten anzustellen.

Auch bei der Suche nach geeigneten operativen Vorgehensweisen erweist sich das Analogisieren als fruchtbar. Für alle drei Formate existieren nahezu die gleichen zauberinvarianten Operationen, die Zauberbelegungen wieder in Zauberbelegungen überführen. Etwa können bei jeder dieser Zauberfiguren alle Eckzahlen, alle Mittenzahlen (Mitten-Operation) oder auch eine Eckzahl und die nichtbenachbarten Mittenzahlen (Eck-Gegenmitten-Operation) um einen Wert k verändert werden, ohne ihre Zaubereigenschaft zu verlieren. Mit Hilfe dieser zauberinvarianten Operationen lassen sich vollkommen analog zum Zauberdreieck auch die algebraischen Darstellungen für andere Zauberfi-



guren gewinnen. Man erzeugt dabei stets aus einer nur mit Nullen belegten Zauberfigur durch mehrfache Eck-Mitten-Operationen eine Zauberfigur mit beliebiger Eckbelegung. Dabei ergeben sich zunächst Zauberfiguren, deren Mittenzahlen jeweils der Summe der nichtbenachbarten Eckzahlen entsprechen. Durch die zusätzliche Anwendung der Mitten-Operation kann schließlich jede beliebige Lösung erzeugt werden.

Die obigen Überlegungen haben aufgezeigt, welch starkes Werkzeug das Analogisieren bei der Analyse benachbarter Systeme darstellt. Um daran zu gehen, dies auch im Unterricht nutzbar zu machen, muss erst ein ausreichend großes Betätigungsfeld geschaffen werden. Das bedeutet, dass nicht nur ein Format unter der Zielsetzung „Phänomene entdecken – operativ vorgehen – Strukturen analysieren“ behandelt wird, sondern auch Varianten des Formats erzeugt und dann ebenfalls mit Hilfe geeigneter Aufgabenstellungen von den Schülern untersucht werden. Zur Gestaltung solcher („forcierenden“) Aufgabenstellungen siehe Hartmann und Loska (2004b). Variiert werden können dabei beim Zauberdreieck z.B. nicht nur die Form, die Anzahl der Summanden, sondern auch die Regel, die Art der Belegung und die Operationen. Bedenkt man, dass diese Variationen auch noch in verschiedenster Weise kombiniert werden können, so erscheint das Potential der Zauberfiguren nahezu unerschöpflich.



Literatur

Hartmann, M. und Loska, R. (2004a): Mit Übungsformaten arbeiten – Mathematische Analysen für den Unterricht nutzbar machen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker: Berlin, 225-228

Hartmann, M. und Loska, R. (2004b): Übungsformate ausloten – Strukturen erkennen. In: Krauthausen, G. und Scherer, P. (Hrsg.) Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik. Franzbecker: Berlin, 225-228

Kießwetter, K. und Rehlich, H. (1990): Zauberdreiecke und andere Zahlenfiguren. mathematik lehren, 40, 23-27

Schupp. H (2002): Thema mit Variationen – Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker: Hildesheim