Brigitte LUTZ-WESTPHAL, Berlin[1]

Mit angewandter diskreter Mathematik neue (Denk-)Wege gehen

Warum diskrete Mathematik?

Spätestens seit der Debatte um Bildungsstandards gibt es einen Bedarf an Inhalten, die noch unbelastet durch den Schulalltag und Unterrichtstraditionen sind und gleichzeitig das Potenzial haben, die Schülerinnen und Schüler zum mathematischen Denken und Arbeiten in verschiedenen „Dimensionen“ anzuregen. Anwendungen aus der diskreten Mathematik scheinen hier ideal hineinzupassen und vermitteln gleichzeitig Einblick in aktuelle Forschungsfragen. Ein Unterricht, der bei Alltäglichem wie der Müllabfuhr beginnt, wie von selbst die Notwendigkeit forschenden Suchens, Fragens, Probierens und Beweisens sichtbar macht, und bei großen offenen Problemen der Mathematik endet, erschließt neue Wege des Lernens im Mathematikunterricht.

Mathematik für die Müllabfuhr

Wie kann man die Müllabfuhr optimieren? Neben vielen anderen Aspekten spielt die Länge der gefahrenen Strecken eine wichtige Rolle. Wie also findet man optimale Touren für Müllautos? Gehen wir davon aus, dass das Gebiet, in dem der Müll abgeholt werden soll, bereits feststeht (obwohl das auch eine wichtige Größe für die Optimierung sein kann, weshalb die Gebietszuschnitte von einigen Firmen strikt geheim gehalten werden). Welche Forderungen stellen wir an die Tour eines Müllautos?

Abb. 1 (©Berliner Stadtreinigungsbetriebe BSR)

[1] gefördert von der Volkswagenstiftung

So könnte Unterricht zum Chinesischen Postbotenproblem, einem klassischen Problem der kombinatorischen Optimierung, beginnen. Innerhalb kürzester Zeit finden die Schülerinnen und Schüler die wesentlichen Kriterien heraus: Die gefahrene Wegstrecke soll möglichst kurz sein. Jede Straße muss (mindestens einmal) abgefahren werden. Die Tour soll am gleichen Ort beginnen und enden.

Damit ist bereits das Chinesische Postbotenproblem beschrieben, das graphentheoretisch ausgedrückt folgendermaßen lautet: Finde in einem gewichteten zusammenhängenden Graphen eine Rundtour minimaler Länge, die jede Kante mindestens einmal besucht. Diese Problemstellung wurde 1963 von Mei-Go Guan, einem chinesischen Mathematiker, veröffentlicht, der dabei an die Wege von Postboten dachte, daher der Name des Problems. Dass Müll abholen und Post austragen auf die gleiche mathematische Modellierung führen kann, überrascht zunächst vielleicht, ist aber ein Beispiel für die Macht und Schönheit mathematischer Strukturierung und Generalisierung.

Modellierung

Zur Modellierung eignen sich Graphen, die bei der Arbeit mit dem Stadtplan fast von selbst entstehen, weil man sich der Übersicht halber die Straßen, die abgefahren werden sollen, einzeichnet, etwa so:

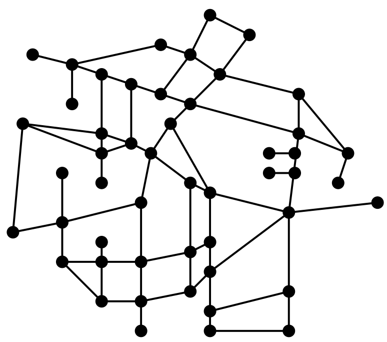

Abb. 2: Ein Graph, der ein Straßennetz darstellt.

Das ist allerdings erst der erste Modellierungsschritt. Es sind eine Menge Entscheidungen zu treffen, wenn man etwas genauer hinsieht. Gibt es in dem betreffenden Gebiet Straßen, die sehr breit sind oder bei denen die beiden Fahrtrichtungen durch einen Grünstreifen getrennt sind? Für diese Straßen müsste man statt einer Kante im Graphen zwei (parallele) Kanten einzeichnen. Wie detailliert sollen Kreuzungen modelliert werden? Einfach nur als ein Knoten oder sollen die verschiedenen Abbiegemöglichkeiten dargestellt werden? Werden Wegstrecken oder Fahrzeiten optimiert? Wie werden diese im Graphen dargestellt?

Graphentheorie

Ist das Modell des Straßennetzes als Graph fertig konstruiert, so gehen die Überlegungen, die Schülerinnen und Schüler jetzt anstellen können, weiter in die mathematische Tiefe. Beispielsweise führt die Frage „Wie sehen Graphen aus, in denen es eine Rundtour durch alle Kanten gibt und man keine Kante doppelt fahren muss?“ direkt auf Eulergraphen und semi-eulersche Graphen.

Im Allgemeinen wird man nicht gerade einen Eulergraphen (ein Graph, bei dem alle Knoten geraden Grad haben) vorfinden. Was ist dann zu tun? Wie macht man aus Knoten ungeraden Grades Knoten mit geradem Grad? Aus diesen Fragen heraus entwickeln die Schülerinnen und Schüler selbst den Satz über die Anzahl der ungeraden Knoten mitsamt einem Beweis und sie finden das paarweise Verbinden von ungeraden Knoten als Mittel, einen Graphen eulersch zu machen. Dass das immer gehen kann, zeigt der selbst gefundene Satz.

Das Nachdenken über Knotengrade kann noch tiefer in die Graphentheorie hineinführen. Gesetzmäßigkeiten können von den Schülerinnen und Schülern durch Ausprobieren an selbst generierten Beispielen gefunden werden und durch schlüssiges Argumentieren bewiesen werden. Hierfür ist kein zusätzliches theoretisches Vorwissen notwendig. Die Arbeit mit Graphen eröffnet die Möglichkeit, unbefangen und spielerisch mathematisch zu forschen und dabei abseits vom ansonsten eher kalkülorientierten Mathematikunterricht mathematische Erfolgserlebnisse zu haben.

In einem nächsten Modellierungsschritt für die Optimierung der Müllautofahrt wird aus der möglichst kurzen paarweisen Verbindung je zweier ungerader Knoten ein Matching auf dem Graphen, der nur die ungeraden Knoten und deren kürzeste Verbindungen darstellt:

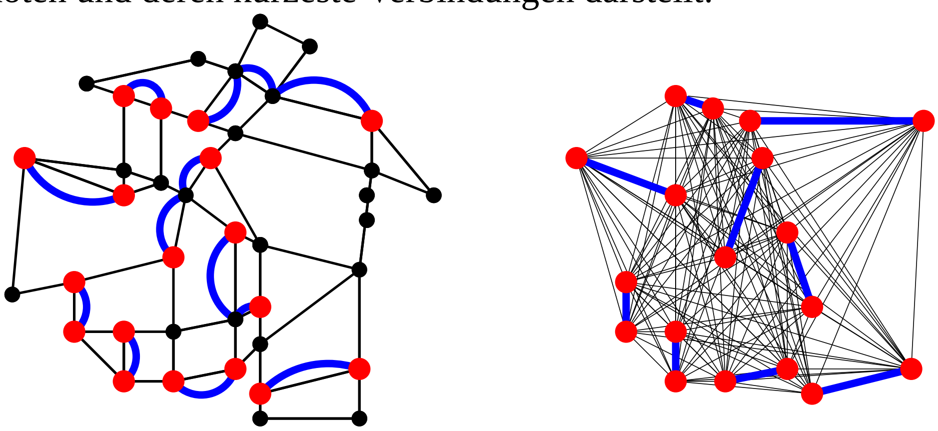

Abb. 3: Der Graph wird zum Eulergraph (links). Das verwendete Matching im kürzeste-Wege-Graph aller ungeraden Knoten (rechts).

Auf diesem Graphen (in der Abbildung rechts) wird nun ein Matching minimalen Gewichts gesucht. Der naheliegenden Methode der Enumeration steht die kombinatorische Explosion entgegen: die Anzahl der verschiedenen maximalen Matchings wird schon bei wenigen Knoten ungeheuer groß: Bei n Knoten gibt es $(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\ldots$ Matchings. Verschiedene Abzählmethoden führen hier zur richtigen Formel.

Algorithmen

Ist festgelegt, welche Straßen doppelt gefahren werden müssen, so bleibt noch, in diesem, nun eulersch gewordenen Graphen eine Eulertour zu konstruieren. Selber Algorithmen dafür zu entwerfen, ist eine lohnende Forschungsaufgabe für die Schule. Sie erfordert einen hoher Präzisionsgrad in der Analyse von Vorgehensweisen, aber auch im sprachlichen Ausdruck (keine Programmiersprachen). Aus dem konkreten Handeln heraus entwickelte Lösungsverfahren werden reflektiert, an verschiedenen Beispielen überprüft und generalisiert. Diese Vorgehensweise entspricht allgemein dem Vorgang des mathematischen Forschens. Der Vorteil hier ist, dass diese generell wichtigen Vorgehensweisen an Beispielen, in denen nicht gerechnet, sehr wohl aber dennoch Mathematik betrieben werden muss, kennengelernt und geübt werden können.

Kompetenzen

Ein handlungs- und problemorientierter Unterricht über kombinatorische Optimierung kann neben dem Ziel einer erweiterten mathematischen Bildung eine ganze Reihe von wichtigen prozessbezogenen Kompetenzen fördern: Problemlösen, Modellieren, mathematisch Argumentieren, um nur einige zu nennen. Daher bieten sich diese Themen ideal als Wahlthemen für den Mathematikunterricht an, was in einzelnen Bundesländern auch realisiert wurde (Hamburg) oder wird (Berlin).

Literatur

P. Gritzmann, R. Brandenberg: Das Geheimnis des kürzesten Weges.
Ein mathematisches Abenteuer, Springer, Berlin, 2. Auflage, 2002

S. Hußmann, B. Lutz-Westphal (Hg.): Mathematik erleben –
Kombinatorische Optimierung lehren und lernen, Vieweg, Braunschweig, 2005

B. Lutz-Westphal: Erlebnis Mathematik – Kombinatorische Optimierung im
Unterricht, in: Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,
Heft 2/2004, S. 78–81, pdf: `http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/projekt/`

M. Nitzsche: Graphen für Einsteiger, Vieweg, Braunschweig, 2004