

Andreas MARX, Paderborn

„Ein Drittel gleich Null Komma Periode Drei ist ungenau“

Diese Überschrift zitiert Michael, einen Schüler der 10. Klasse, in einem Interview.

Zugang zum Thema des Vortrags

Das Ringen um grundlegende Begriffe, insbesondere den Grenzwertbegriff, ist ein überaus spannender Teil der Geschichte der Analysis: Ausgehend von einem pragmatisch, mit viel „Gefühl“ genutzten Objekt der veränderlichen Größe oder auch der unendlich kleinen Größe, bis hin zu einer Definition der Konvergenz von Folgen mit Hilfe der Epsilontik unter Weierstraß. Assoziationen zum Lernprozess bei Schülern bleiben bei dieser Lektüre nicht aus.

Im Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe in NRW (vgl. Richtlinien und Lehrpläne 1999, 16) ist von einem anschaulich geprägten Grenzwertbegriff ohne die Behandlung von Folgen und Reihen die Rede. Vor diesem Hintergrund gewinnen die Vorkenntnisse und Vorerfahrungen der Schüler mit unendlichen Prozessen in Bezug auf den Analysisunterricht an Bedeutung.

Die Bedeutung der Vorkenntnisse wird weiter gestützt durch den Ansatz des genetischen Unterrichts. Dieser sieht die Vorerfahrungen der Schüler als Ausgangspunkt für weitere Entwicklungen im Unterricht vor.

Die genannten Eckpunkte führen zu der Frage nach Schülervorstellungen zum „Grenzwertbegriff“ vor dem Eintritt in den Analysisunterricht der Oberstufe, also etwa in der 10. Schulstufe.

Die Untersuchung

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurden problemzentrierte, offenen Interviews mit jeweils zwei Schülern geführt. Ausgehend von einer dezimalen Intervallschachtelung für ein Drittel diskutieren Schüler die Fragen: Was ist Null Komma Periode Drei? Ist Null Komma Periode Drei gleich ein Drittel? Ist Null Komma Periode Neun gleich Eins? Sind periodische Dezimalzahlen Punkte auf der Zahlengeraden?

Das Ringen der Schüler mit diesen Fragen wird in dem folgenden Ausschnitt eines Interviews mit Katarina und Daniel deutlich. Die Schüler haben bereits beobachtet, dass $0,3 \cdot 3 = 0,9$ ist. Nun treffen sie darauf, dass ein Drittel mal Drei Eins ist.

- I Wenn ich ein Drittel mit Drei multipliziere kommt Eins raus. Ein Drittel mal Drei ist Eins.
- D Ein Drittel ist aber vielleicht, vielleicht ist ein Drittel gar nicht Null Komma Periode Drei. Ein Drittel ist nämlich genauer, als Null

Komma Periode Drei. Weil bei Null Komma Periode Drei ist ja nie quasi ein Drittel von Eins. Da fehlt ja immer irgendetwas. Deshalb macht man ja, sind Brüche auch so beliebt. Weil ein Drittel ist ein Drittel und Null Komma Periode Drei ist nie ganz ein Drittel, weil immer was fehlt quasi.

I Wieso

K Ja, nee. Null Komma Periode Drei steht ja für dieses alles. Steht dafür, dass es immer weiter geht.

D Ja.

K Ein Drittel steht auch dafür, dass es immer weiter geht.

D Aber ich. Nein!

K Deswegen ist keins von beiden genauer.

D Doch, ein Drittel ist genauer.

K Nein!

D Das haben wir doch gerade bewiesen.

K Dann teil mal Eins durch Drei. Teil mal Eins durch Drei und schreib es auf.

D Ja. ein Drittel.

K Ja, jetzt teils mal dadurch und schreibs als Dezimalzahl.

D Ja, das will ich ja gar nicht, weil dann wird es ja wieder ungenau.

K Dann wird's aber wieder ungenau. Das ist aber genau das.

D Nein, ist es nicht. Das haben wir doch gerade bewiesen. Wir haben doch gerade gesagt Null Komma Periode Drei mal Drei ist Null Komma Periode Neun, aber ein Drittel mal Drei ist Eins. Und das stimmt nun mal.

Der Interviewer lenkt den Blick auf die „Bruchseite“. Ein Drittel mal Drei ist Eins. Für Daniel scheint Null Komma Periode Neun kleiner als Eins zu sein. Er begründet das damit, dass Null Komma Periode Drei kleiner als ein Drittel sei. Dabei scheint Null Komma Periode Drei etwas zu sein, das im Wandel ist. So sehr sich Null Komma Periode Drei auch bemüht „ein Drittel zu werden“, indem es immer mehr Dreien hinten anhängt, es bleibt immer kleiner. Daniel scheint hier einen Veränderungsprozess in der Null Komma Periode Drei zu sehen. Katarina hat die Division Eins durch Drei im Blick. Sie ist der Ansicht, dass sowohl Null Komma Periode Drei als auch auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens ein Drittel dafür steht, dass es immer weiter geht, für einen unendlichen Prozess. Für sie ist ein Drittel eine Anweisung den unendlichen Prozess in Gang zu setzen. Daniel hingegen interpretiert ein Drittel als feste Zahl, und Null Komma Periode Drei als etwas Veränderliches.

Das erste Mal taucht Null Komma Periode Drei in der Schule in der Regel bei der Division von Eins durch Drei auf. Zur Lösung dieser Aufgabe nutzen die Schüler den Divisionsalgorithmus.

Dabei scheint bei einigen Schülern eine enge Verbindung zwischen der Rechenaufgabe Eins durch Drei, dem Divisionsalgorithmus und dem Ergebnis Null Komma Drei Drei Drei Punkt Punkt Punkt zu bestehen. Innerhalb dieser Verbindung haben die Schüler die Möglichkeit auf das Ergebnis Einfluss zu nehmen, indem sie den Algorithmus unterschiedlich lange durchführen, bevor sie ihn abbrechen. Dabei unterscheiden Schüler durchaus $0,333\dots$ und $0,33333\dots$. Die Punkte weisen darauf hin, dass man die Division noch weiter durchführen könnte. So kommt es zu verschiedenen Interpretationen, was denn nun Null Komma Periode Drei ist. Ich nenne hier vier Beispiele.

1. Einige identifizieren Null Komma Periode Drei mit Null Komma Drei Drei Drei Punkt Punkt Punkt. Aber in dem Sinne, dass sich Null Komma Drei Drei Drei Punkt Punkt Punkt stets entwickelt. Es baut sich immer weiter auf, indem es Dreien anhängt.
2. Andere machen die Anzahl der Dreien davon abhängig, wie lange der Algorithmus durchgeführt wurde. Die Periode steht dabei für eine ungewisse Anzahl von Dreien. Man kann durchaus Einfluss nehmen, welche Gestalt Null Komma Periode Drei annimmt.
3. Wieder Andere brechen den Divisionsprozess nach jedem Schritt ab und fassen die jeweiligen Teilergebnisse zu einer Menge zusammen. Wobei in diesem Fall wiederum entweder die gesamte Menge als Null Komma Periode Drei angesehen werden kann oder nur ein Element aus der Menge gewissermaßen als Repräsentant.
4. Einige Schüler sehen in periodischen Dezimalzahlen anpassungsfähige Objekte. Je nach Anwendungssituation kann man wählen, wie viele Dezimalen man der Zahl zuschreibt. Sie scheinen daher gut geeignet zu sein, um Prozesse, insbesondere nicht endende Prozesse, zu beschreiben, weil sie sich so gut anpassen können.

Konsequenzen

In den Interviews lässt sich beobachten, dass Schüler häufig mit einer Zahl eine gewisse Zahldarstellung identifizieren. Diese Identifikation von Zahl und Zahldarstellung ist mindestens hinderlich im Hinblick auf die Frage, ob Null Komma Periode Neun gleich Eins ist. Dieser Unterschied zwischen Zahl und Zahldarstellung tritt natürlich nicht erst im Rahmen der Dezimalzahlen auf. Ein Beispiel aus unteren Klassen ist die Potenzdarstellung als Alternative zur Normaldarstellung.

Aber auch bei der Bruchrechnung suchen Schüler nach Argumenten, warum es vernünftig ist die Brüche zwei Drittel und vier Sechstel gleich zu

setzen, sie als die selbe Zahl anzusehen. Gleiches gilt auch für den Bruch drei Zehntel und den Dezimalbruch Null Komma Drei.

Dass eine Zahl ein Objekt ist, welches in unterschiedlicher Weise dargestellt werden kann, ist also schon im Bereich „endlicher Darstellungen“ erfahrbar und sollte zur Sprache kommen. Der zweite Aspekt in diesem Zusammenhang sollte die Frage thematisieren, warum es vernünftig ist, etwa das Objekt ein Drittel mit Null Komma Periode Drei gleich zu setzen.

Dabei wird dann zu klären sein, was unter dem „Ergebnis“ eines unendlichen Prozesses verstanden werden kann. Dazu scheint mir eine Analyse eines endlichen Prozesses mit Ergebnis als Ausgangspunkt und Abgrenzungsmöglichkeit geeignet zu sein.

Eine weitere Unterstützung der Vorstellung, „ein Objekt“ mit Hilfe von unendlich vielen anderen „Objekten“ zu beschreiben, liefern auf schulischer Ebene die Intervallschachtelungen, hier im konkreten Fall z.B. eine dezimale Intervallschachtelung für ein Drittel.

Über diese Thematisierungen in der Mittelstufe hinaus hat für mich die Behandlung der Folgen eine entscheidende Bedeutung. Neben der Bereitstellung des Grenzwertbegriffs für die Analyse von Funktionen im weiteren Verlauf des Analysisunterrichts, kann sie wesentlich zu einer Klärung noch offener Fragen der Mittelstufe beitragen. Erst sie liefert ein Werkzeug, mit dem unendliche Prozesse weitgehend zufriedenstellend beschrieben werden können.

Ich meine, dass Gesprächssequenzen, in denen über mathematisches Handeln nachgedacht wird, einen Teil mathematischen Arbeitens erleben lassen und somit zu einem sachgerechten Bild von Mathematik gehören. Sie geben die Möglichkeit Begriffe, mit denen, in einem durchaus positiven Sinne, „aus dem Bauch heraus“ gearbeitet wurde, zu präzisieren und weiter auszuschärfen oder zumindest das Bewusstsein zu wecken, dass man sie weiter ausschärfen könnte und eigentlich auch müsste. So wird die Mathematik aus dem Licht eines starren, festen Systems herausgerückt. Mathematik wird als Menschenwerk und Errungenschaft unserer Kultur sichtbar. So gerüstet ist die Mathematik und ihr Unterricht in der Lage die Schüler zum Mitgestalten anzuregen und sie auf diesem Weg zu faszinieren.

Literatur

Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik 1999. Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.). Frechen: Ritterbach Verlag.