

Michael MEYER, Münster

## Entdecken und Begründen – Unterrichtsanalysen

Sowohl das Entdecken als auch das Begründen spielen in den letzten Jahren innerhalb der mathematikdidaktischen Diskussion eine große Rolle. In meinem Forschungsprojekt werden in Fallstudien Entdeckungen und Begründungen von Schülern im Mathematikunterricht rekonstruiert. Als Analysemittel dienen zwei Modelle aus der Philosophie. Zur Argumentationsanalyse wird das Schema von S. E. Toulmin (1975) verwendet. Die Analyse der Entdeckungen bzw. Gesetzesfindungen erfolgt mit Hilfe des Abduktionsschemas von Ch. S. Peirce (1839-1914).

### 1. Entdecken als Abduktion

Die Abduktion ist ein drittes elementares Schlussverfahren, neben der Deduktion und der Induktion. Sie wurde von Ch. S. Peirce in die wissenschaftliche Debatte eingeführt. Innerhalb der Mathematikdidaktik wurde sie bisher hauptsächlich zur Beschreibung der Theorieentwicklung innerhalb der empirischen Forschung benutzt (vgl. Beck/Jungwirth 1999 und Voigt 1984, S. 83ff). Auch wird der Begriff der Abduktion zur Beschreibung des Mathematiklernens allgemein (Hoffmann 2002) bzw. in Bezug auf das entdeckende Lernen (Voigt 2000) verwendet.

Die generelle Form der Abduktion beschreibt Peirce folgendermaßen (vgl. CP 5.189, 1903):

*“The surprising fact,  $F$ , is observed.  
But if  $H$  were true,  $F$  would be a matter  
of course.  
Hence, there is a reason to suspect that  
 $H$  is true.”*

Resultat: $F(x_i)$
Gesetz: $\forall x_i: H(x_i) \Rightarrow F(x_i)$
<hr/>
Fall: $H(x_i)$

Zu einer gegebenen Beobachtung, dem *überraschenden Resultat*, wird ein allgemeines *Gesetz* gesucht, welches die Beobachtung erklären könnte. Das Gesetz wird also verwendet, um das Resultat auf den zugrunde liegenden *Fall* zurückzuführen. Da auch andere Fälle unsere Beobachtung erklären könnten, handelt es sich bei der Abduktion um einen hypothetischen Schluss.

Zur Konkretisierung kann Keplers Entdeckung der elliptischen Umlaufbahnen dienen: Tycho Brahe konnte beobachten, dass die Positionen des Mars von der von Kepler zunächst angenommenen Kreisbahn um die Sonne abwichen. Kepler löste das Problem, indem er in Übereinstimmung zu den Beobachtungsdaten Brahes das allgemeine Gesetz der elliptischen Um-

laufbahnen der Planeten um die Sonne aufstellte. Keplers Abduktion kann folgendermaßen rekonstruiert werden:

Resultat:	Die empirischen Werte von Tycho Brahe.
<u>Gesetz:</u>	Die Planetenbahnen um die Sonne sind elliptisch.
Fall:	Der Mars bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne.

Nach Eco (1985) bzw. Bonfantini und Proni (1985) lassen sich u.a. drei Arten von Abduktionen unterscheiden:

- Bei einer *übercodierten Abduktion* ist das Gesetz, welches die Resultate auf die sie erklärenden Fälle zurückführt, bekannt und liegt quasi auf der Hand. Um eine solche Abduktion handelt es sich beispielsweise, wenn ein Schüler im Mathematikunterricht in einer Aufgabenstellung ein kurz zuvor eingeführtes Gesetz erkennt, welches nicht explizit erwähnt wurde.
- Bei einer *untercodierten Abduktion* ist das Gesetz ebenfalls bekannt, jedoch liegt es nun nicht mehr auf der Hand. Es muss beispielsweise aus einer Reihe von gleichwahrscheinlichen Gesetzen ausgewählt werden.
- Bei *kreativen Abduktionen* wird die erkenntniserweiternde Funktion dieses Schlusses besonders deutlich. Das Gesetz, welches die Resultate erklären soll, muss neu erschaffen werden. Erst mit Hilfe dieses neuen Gesetzes können wir den unseren Resultaten zugrunde liegenden Fall erschließen.

## 2. Begründen von Entdeckungen

Wenn ein Schüler im Mathematikunterricht eine Abduktion vollzieht und diese erläutert, hat er damit nur eine Hypothese plausibel gemacht, aber nicht bewiesen. Es ist ja nicht selbstverständlich, dass gerade dieses Gesetz angewendet werden muss bzw. dass es die mit diesem Gesetz erschlossenen Fälle sind, welche die Resultate haben entstehen lassen. Auch das Gesetz selber kann falsch sein. Um der Abduktion eine größere Sicherheit geben zu können, bieten sich generell zwei Möglichkeiten an; eine eher empirische und eine eher theoretische:

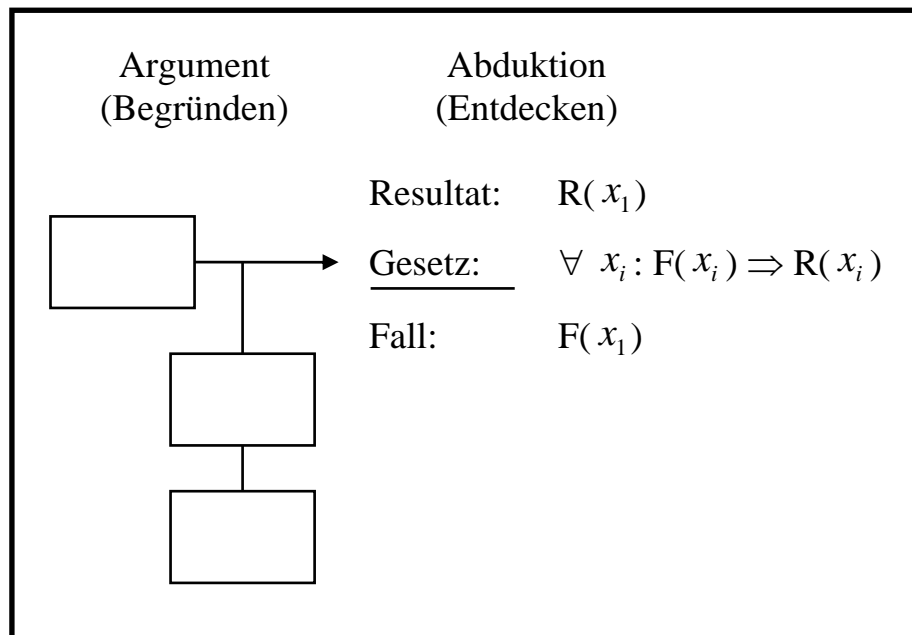
- A Peirce beschreibt das Vorgehen einer Hypothese mehr Plausibilität zu verschaffen mit einem Dreierschritt bestehend aus der Abfolge Abduktion – Deduktion – Induktion. Nachdem abduktiv eine neue Hypothese aufgestellt wurde, deduzieren wir die

Konsequenzen aus dieser und testen diese anschließend induktiv. Ausgehend von seiner Hypothese der elliptischen Umlaufbahn könnte Kepler Positionen des Mars zu gewissen Zeitpunkten errechnet haben. Der folgende induktive Test würde darin bestehen, dass Kepler neue Positionsbestimmungen vollziehen lässt, um diese anschließend mit den vorausgesagten abzugleichen.

- B Besonders bei kreativen Abduktionen ist es sinnvoll, das neu eingeführte Gesetz zu begründen. Dies geschieht mittels eines tiefer liegenden Gesetzes, bei Toulmin Regel genannt. Eine solche Begründung ist allerdings nicht immer möglich. So konnte Kepler etwa das Gesetz der elliptischen Umlaufbahnen selber nicht beweisen. Dies gelang erst wesentlich später mit Hilfe der Newtonschen Mechanik.

Möglichkeit A wurde von Peirce genauer ausgearbeitet. Allerdings hat die Mathematik einen Wahrheitsanspruch, der mit einer (unvollständigen) Induktion nicht befriedigt wird. Somit erscheint gerade Möglichkeit B wichtig für das Fach Mathematik.

Hinsichtlich des Begründens folgt meine Studie der Arbeit von R. Schwarzkopf (2000): Die Rekonstruktion von Schülerargumenten erfolgt mit dem Schema des Wissenschaftsphilosophen S. E. Toulmin. Das Zusammenspiel der beiden Modelle von Peirce und Toulmin zur Begründung eines abduktiv gewonnenen Gesetzes kann folgendermaßen aussehen:



### 3. Empirische Untersuchung

Den mathematischen Schwerpunkt meiner Studie bildet der Funktionsbegriff. Zur Verwirklichung dieses Vorhabens wurden Aufgaben ausgewählt und entwickelt, die das Entdecken funktionaler Zusammenhänge und deren anschließende Begründung ermöglichen sollten. In insgesamt sieben Klassen (Grundschule und Sekundarstufe I) wurde der Mathematikunterricht mittels Audio- und Videoaufnahmen dokumentiert.

Ein Beispiel aus dem Vortrag: In einer 10. Klasse waren vor der Untersuchung nur Quadratfunktionen behandelt worden. In der vorgestellten Mathematikstunde entdecken die Schüler an einem ungewohnten Graphen die Potenzfunktion höheren Grades. Sie begründen ihre Hypothese mit algebraischen Regeln und Regeln der Übertragung arithmetischer Zusammenhänge in geometrische Anschauung. An der dokumentierten Unterrichtsszene werden sowohl Abduktionen als auch induktive und deduktive Elemente von Begründungen rekonstruiert.

### 4. Literatur

- Beck, Ch. & H. Jungwirth (1999): Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. In: JMD 20, S. 231-259
- Bonfantini, M. und G. Proni (1983): Raten oder nicht raten? In: Eco, U. und T.A. Sebeok (Hrsg.): The sign of the Three – Dupin, Holmes, Peirce. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press
- Eco, U. (1983): Hörner, Hufe, Sohlen. Einige Hypothesen zu drei Abduktionstypen. In: Eco, U. und T.A. Sebeok (Hrsg.): The sign of the Three – Dupin, Holmes, Peirce. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press
- Hoffmann, M. (2002): Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz. Dresden: Philosophische Fakultät der Technischen Universität
- Peirce, Ch. (CP): Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Cambridge, Mass.: Harvard UP
- Schwarzkopf, R. (2000): Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien. Hildesheim: Franzbecker
- Toulmin, S.E. (1975): Der Gebrauch von Argumenten. Kronberg: Scriptor
- Voigt, J. (1984): Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Fallstudien. Weinheim: Beltz
- Voigt, J. (2000): Abduktion. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker, S. 694-697