Karl Josef PARISOT (Salzburg) & Éva VÁRSÁHELYI (Budapest)

Setzt ”Kompetenzen erwerben” ein geändertes ”Bild von Mathematik” voraus?

In den OECD-Richtlinien – die etwa den PISA-Untersuchungen zugrunde liegen, und dem Bildungsprozess der Europäischen Union von Lissabon – steht der Erwerb von Kompetenzen im Mittelpunkt; dabei wird auf mathematische Grundbildung und andere Grundkompetenzen abgezielt im Sinne einer education permanent.

Ein solcher Unterricht soll auf Nachhaltigkeit [Gedächtnis], Verinnerlichung [Vorstellung], Wahrnehmung [Angesprochen-Sein] ebenso ausgerichtet sein, wie auf die Denkweisen [Metatheorie].

1. Ist Stand – kritischer Blick auf Einstellungen

LehrerIn geniert sich:

a) wenn Aufgabe sehr ähnlich (gleiche gibt es nicht), nur Anstieg der Aufgabenstellung zählt (‘Transfer’ ist erst Gekonntes);

b) wenn Schularbeit ‘zu gut’ ausfällt;

c) Die Aufgabe 120 – (4•12 + 2) ist als Standard weniger geeignet als 120 – (2 + 4•12), weil bei der letzteren Form auch ‘Punkt vor Strich’ abgeprüft wird [der Formelschreibweise darf widersprochen werden].

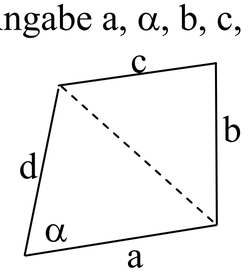
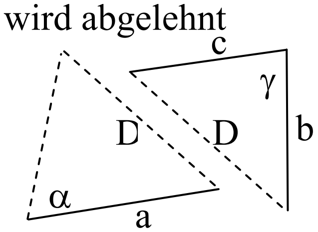
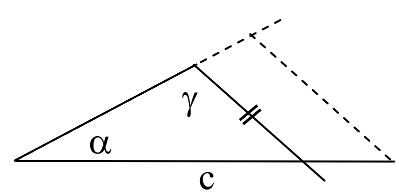
d) Schule lehnt Aufgaben einer Standardüberprüfung ab, weil sie zu leicht sind.

Bild des MU:

• Nur <u>bestimmte</u> Lösungswege zählen (schon bei Vorbereitung der Schularbeit wird Punktesystem nach <u>diesem</u> Lösungsweg überlegt),

• nur <u>explizite</u> Begriffe zählen z.B. von ähnlich zu kongruent zählt nicht am Beispiel Dreieckskonstruktion mit den Angaben c, α, γ. Wenn schon diese Aufgabe vorkommt, dann über den Winkel-Summen-Satz auf β schließen (zumeist über Rechnung).

• Nur <u>geschlossene</u> (algorithmisch determinierte) Verfahren zählen.

Viereckskonstruktion Angabe a, α, b, c, d	die Angabe a, α, b, γ, c wird abgelehnt	Dreieckskonstruktion
		

• Aufgaben bedürfen Fragen. Aus gegebenen Daten und beschriebener Situation sich ”Machbarem” stellen wird als Überforderung eingestuft.
• Nur was ich gelehrt habe, können die SchülerInnen einbringen.
• Anders (‘einfacher’) erklären – das hat kein Niveau.
• Was im Unterricht vorkommt (alles) ist in Prüfung. ⇒ rasch ’Stoff’ dazu.
⇒ Nur abprüfbare Aufgabenstellungen kommen im Unterricht vor.
• Leistung erhöhen bedeutet: noch mehr Inhalte einbringen.

2. Die Operationen a – (b • c + d) in der Längsschnitt-Entwicklung (für Österreich idealtypisch beschrieben)

Grundschule (GS)

Von Einzeloperation und deren Bedeutung zur Abfolge von Einzeloperationen		12 € × 4 48 €
1./2. GS z.B. **Eine Bonboniere kostet 12 €. Die Mutter kauft 4 Stück ein.**		Sie zahlt 48 €. Sie gibt 48 € aus.
3.GS **... und nimmt noch einen Kuchen um 2 € mit.**	48 € + 2 € 50 €	oder 2 € + 48 € 50 € Sie zahlt 50 €.
4.GS **Vor dem Einkauf hatte sie 130 € in der Geldbörse.**		130 € - 50 € 80 €

Nach dem Einkauf sind (sollen noch) 80 € in der Geldtasche (sein).

Ähnlich zusammengesetzte Aufgaben werden auch mit wesentlich größeren Zahlen und anderen Größen behandelt. Manchmal tritt auch bei einfachen Zahlen eine einzeilige Schreibweise auf, wobei mit ⌴ die Vorrangstellung von Operationen markiert wird.

Anderer Weg in 4. GS in Österreich 12 € × 4 = 48 €	130 € - 48 € 82 € 82 € - 2 € 80 €	In der Schweiz wird auch die mehrfache Subtraktion benutzt. 130 € - 48 € - 2 € 80 €

Weiterer Weg in 5. Schulstufe
Zur ‘Einzeiligen’ Notation des Lösungsweges und zum Vergleich von Lösungswegen.

130 € – 12 € • 4 – 2 € =
130 € – (12 € • 4 + 2 €) =

oder

130 € – 2 € – 12 € • 4 =
130 € – (2 € + 12 € • 4) =

Reflexion aus GS: auch Punkt vor Strich und Vertauschung

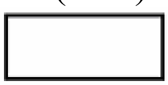
Auch andere Zahlen und Bedeutungen lassen bei den SchülerInnen Gemeinsames erspüren und führen zu einem ‘teilweisen’ meist Kontext- (Sachverhalts-) bezogenem Versprachlichen.
<u>Wir</u> stellen zusammen ”es kommt nicht auf die konkreten Zahlen an”.
Zaubersprache der Mathematik:

$$a – (b \cdot c + d) = a – b \cdot c – d$$
$$a – (d + b \cdot c) = a – d – b \cdot c.$$

Mit Vereinbarung: Multi vor Subtraktion / Addition; Klammer / von links nach rechts / Punkt vor Strich; ”Erstellt zu …” eigene Aufgaben;
Wieviele ‘verschiedene’ Zahlen kommen vor?
Übungsblätter helfen

um Niveau 5 zurück mit Niveau 3 / 4 zu verbinden.
um Grundvorstellung zu erweitern.
um auch mit größeren Zahlen Einsicht in die Bedeutung der Umformungen und der Notation(sregeln) zu vertiefen. z.B.: In allen 4 Fällen zuerst das Produkt $b \cdot c$ rechnen.

Vgl. zu GS: Umfang des Rechtecks
$l + b + l + b$ $(l + b) \cdot 2$ $2l + 2b$ als 3 Lösungsstrategien Lösungswege



Nachher (vorher) im Unterricht:

$$\begin{array}{c} a – (b + c) = a – b – c \\ \Downarrow \quad + \text{Komm.} \quad \Uparrow \\ a – (c + b) = a – c – b \end{array}$$

Oftmals fehlt im Unterricht die Diskussion über Vor- und Nachteile dieser Denkmethoden gegenüber dem bisherigen, z.B.: Verlust: Konkrete Zahlen nutzen (Angaben). Kriterien der Bewertung

- wie ”Vorteilhaftes” Rechnen,
- wie Kopfrechnen (Überschlag),
- wie Vorstellungen aus der Sachsituation, die zu unterschiedlichen Lösungswegen führen,
- Kommunikation in handlungsorientierter, mündlicher gruppenbezogener und schriftlicher Form.

Niveau 5. / 6. Schulstufe (als Übergang zu für die SchülerInnen neuen Denkweisen)

Zahlen und Größen aus , B^+, Dezimalzahlen in den Bedingungen bei
bilden und interpretieren. « | und p e und %

Dies sowohl im hintereinander Ausführen als auch in einzeiliger mathematischer Schreibweise gebrauchen,

- um Lösungswege zu vergleichen.
- um die Gleichheit der Lösung zu zeigen (z.B. Umformen, …).

Hier soll nicht nur durch Nachrechnen sondern durch ‘algebraische’ Argumente die Gleichheit gezeigt werden.
Einzelne Sachsituationen (wie hier Einkaufen) werden diskutiert und damit die Mehrdimensionalität (Argumentation aus der Situation, aus mathematischem Hintergrund; Variation der Werte und der Fragestellungen einschließlich Umkehrungen; Kommunikationsformen einschließlich Notation; …) der Modellbildung angesprochen, sowie Grundvorstellungen vertieft und Standard- Modellbildungen (wie direkter, indirekter Schluß, Prozente) reflektiert.

Niveau 7. / 8. Schulstufe (als ‘*inhaltlicher*’ *Abschluß der Pflichtschulzeit)*
Negative Zahlen und Werte; Potenzen, Quadrat- und Kubikwurzel, auch in Taschenrechner- und EXCELL – Form.
Mehrere Modelle miteinander zu Gesamtmodell verbinden:

- Pyramiden-Berechnungen
- Lohnabrechnung (Sozialversicherung und Steuer),
- Preisangebote –Vergleichen, sozial- und naturwiss. Situationen, …

Dabei sind die auf Niveau 5./6. erworbenen Vorstellungen (auch Kopfrechnen, Abschätzen, erwartete Ergebnisse, Ebene und Raum, …) zu pflegen.

UMFORMUNGEN und GLEICHUNGEN im Sachkontext

$130 - (12 \cdot 48 + 2) =$	Mutter hatte am Morgen 130 € in der Geldtasche.
$A - (B \cdot C + D) = F$	Am Abend hat sie 80 €. Sie hat 2 € für Klopapier
$A = F + B \cdot C + D$	ausgegeben und 4 Bonbonieren eingekauft.

a) Ausgaben	b) Haben am Morgen
$130 - 80 = 2 + 4x$	$2 + 4x + 80 = 130$
$130 - 80 - 2 = 4x$	

$$\frac{130-80-2}{4} = x \qquad x = \frac{48}{4} = 12$$

Eine Bonboniere kostete 12 €.

c) Haben am Abend

	Ausgab<u>en</u>		Ausgab<u>e</u>
80	$130 - x \cdot 4 - 2$	oder	$130 - (4 \cdot x - 2)$

$$80 = 130 - x \cdot 4 - 2$$
$$80 = 128 - x \cdot 4$$

x allein	Österreich: $- x \cdot 4$ zu anderer Seite
$80 - 126 = - x \cdot 4$	Ungarn: $+ x \cdot 4$ zu beiden Seiten

Schülerreaktionen: *Da steht schon etwas, hätte ich nie gemacht. Blödsinn, negativ [im Kontext]; Schmarrn [im Formalen], Math. ist …*

Lehrerhinweis: Das geht doch anders (auch):

$(-1) \bullet \mid\; -48 = -x \bullet 4 \;\mid \bullet(-1)$	$80 - 128 + x \bullet 4 = 0$?	$80 + x \bullet 4 = 128$
$48 = x \bullet 4$	$x \bullet 4 = -(80 - 128)$	$x \bullet 4 = 128 - 80$
$x = 12$	$x \bullet 4 = 48$	$x \bullet 4 = 48$
	$x = 12$	$x = 12$

Das Ziel ist die Einstellungsänderung auf: *geil, da gibt's was zu grübeln!*

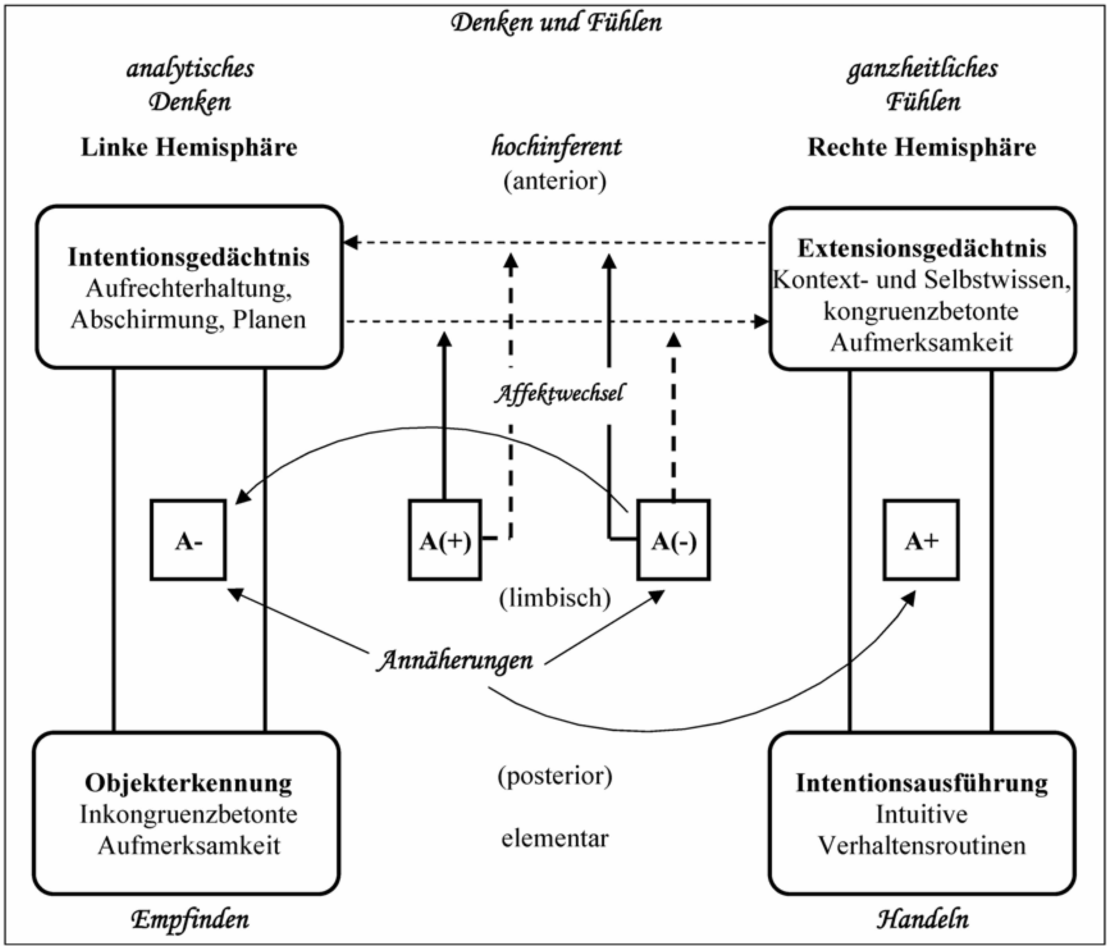
Standpunktwechsel *(Sowohl aus der Charakterisierung des Lernprozesses als auch beim Bild des Mathematikunterrichtens)*

Üben, Üben, Üben	**sich Auseinandersetzen**
Immer neue Aufgaben werden nach falsch / richtig bewertet, solange bis der 'Groschen fällt'; ['fällt Groschen' nicht ⇒ zu dumm], … "nicht genügend" (wie ist dieses zu begründen)	kaum "warum falsch" es wird nur richtig gezeigt es wird auch nicht darauf eingegangen, was Lernender gedacht hat Wenige Aufgaben in Variationen der Lösungsansätze und der Bezüge der Notationen (Kommunikationsformen einschließlich grafischer Darstellungen) der Zahlen mit jeweiliger Begründung. Was möchtest du tun? Warum nicht?
Systemwissen vermitteln	Material aufbauen für Phasen der Reflexion (Ausbau und Einbindung der Grundvorstellungen) Eigenständiges Erkennen und Erlernen
Aufgaben stellen und r / f feststellen Produkt übertragen So macht man dies	Mut machen, Sinn geben (auch mathematischen Sinn) an anerkannten Kriterien, Entwicklung erlernen So gehe ich heran
Kognition	Neurolinguales Programmieren

3. Kognitive, emotionale und motivationale Determinanten von Kompetenzstreben und Kompetenzerwerb (Herber & Vásárhelyi, 2004)**:**

- eine evolutionstheoretisch begründete *Anpassungsstrategie* (genetische Determination) an spezifische Lebensbedingungen;
- *frühe Lebenserfahrungen*, die das neuronale Netzwerk formen, "Was gebraucht wird, entwickelt sich und will weiterhin gebraucht werden."
- Lernen: *Emotionale und kognitive Herausforderungen* motivieren, welche Netzwerkverbindungen gefestigt und ausgebaut oder geschwächt werden.

Die Entwicklung des Systems „Persönlichkeit“ erfolgt durch komplexe Wechselwirkungen von intuitiv-ganzheitlichen und analytisch-reflexiven Prozessen:



System-Interaktionen als Austausch zwischen linker und rechter Hemisphäre
vertikale Doppellinien symbolisieren den affektunabhängigen ipsilateralen Austausch;
gestrichelte Pfeile Hemmungsrelationen; durchgezogene Pfeile = Bahnungsrelationen;
A(+) = Herabregulierung von positivem Affekt;
A(–) = Herabregulierung von negativem Affekt:
Nur der *Affektwechsel* schafft kontralaterale System*verbindungen* (nach Kuhl 2001, 685).

Kompetenzstreben wird gefördert, wenn jedem Lernenden ermöglicht wird, seine individuelle Selbstwirksamkeit zu erproben, abzusichern und auszubauen. Das bedeutet einerseits maximale Freiheit bei der Aufgabenwahl (bezogen auf gleiche Lernziele) und bei den Lösungsüberlegungen, andererseits individualisierte Hilfenahme (Stufen der Hilfe, wie Kontrollstellen, anregende Fragen, Starthilfen, Erinnerungshilfen, Lösungsskizzen, detaillierte Lösungen und dosierte personale Interventionen).

Das *Selbstwirksamkeitsstreben* wird zumindest bei jenen Schülern permanent frustriert und in ”gelernte Hilflosigkeit” (Seligman 1975) umgewandelt, die trotz intensiver Bemühungen kaum einmal eine positiv beachtete Leistung erbringen können.

4. Aufgabenstellungen zur Förderung von Kompetenzstreben und Kompetenzerwerb

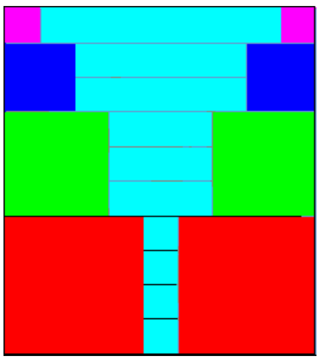
Das nächste Beispiel soll zeigen, wie mit parallel angebotenen didaktischen Zugangswegen verschiedene Kompetenzen bzw. Kompetenzmotivationen angesprochen werden können, indem die Lernenden ihre eigenen Kombinationen von Aufgaben und damit – sachstrukturell abgesichert – individuelle Lösungswege generieren können. Die Erarbeitung der Arbeitsblätter kann durch traditionelle Arbeitsblätter gelenkt und protokolliert werden. Dementsprechend kann man sie z.B. als Aufgabenserie für selbständiges Lernen oder als Hilfestellung bzw. als Ergebniskontrolle für den Problemlöseprozess einsetzen. Darüber hinaus aber werden die mittels Arbeitsblatt gewonnenen ”festen Bilder” durch die damit verbundenen Computeranimationen wieder ”beweglich” gemacht, was u.a. das räumliche Vorstellungsvermögen fördert und insgesamt einen emergenten, dynamischen Umgang mit den geometrischen ”Veranschaulichungen” arithmetischer Problemstellungen ermöglicht. So kann jeder Lernende die benötigten Lernschritte nach seiner Kompetenz (Motivation) jeweils verkleinern bzw. vergrößern. Bei einem Problemlöseprozess wird ein Problem ins Zentrum gestellt und die anderen Aufgaben werden als Hilfestellungen und Aktivierung der Lernvoraussetzungen bzw. als Erweiterung betrachtet.

Positive ganze Zahlen			
Aufgabe: Bestimmen Sie die			
a) Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen: $1 + 2 + 3 + ... + n = ?$	H	L	E
b) Summe der ersten n positiven geraden Zahlen: $2 + 4 + 6 + ... + 2n = ?$	H	L	E
c) Summe der ersten n positiven ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5 + ... + 2n – 1 = ?$	H	L	E
d) Summe von Quadraten der ersten n positiven ganzen Zahlen: $1^2 + 2^2 +3^2 + ... + n^2 = ?$	H	L	E
e*) folgende Summe: $1·2 + 2·3 + 3·4 + ... + (n – 1) ·n = ?$	H	L	E

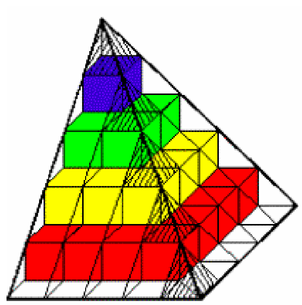
Aufgabenstellung zum Thema “Positive ganze Zahlen” (Vásárhelyi, 2005)

Steht z.B. im Zentrum das Problem, wie man die Summe von Quadratzahlen bestimmen kann [d], dann werden dazu *Lösungswege* [1-4] mit Querverbindungen zu den methodischen und inhaltlichen Lernvoraussetzungen [a - c] mit jeweils mehreren Lösungswegen, zu den *Hilfestellungen*, *Kontrollstellen* (Ergebnisse) und zur additionalen Anwendung der Methode bzw. des Ergebnisses [e*] angeboten. Bei den direkten Hilfestellungen zu den einzelnen Aufgaben ist es wichtig, dass die anregende Frage oder die kurze Information das Problemlösen von den Lernenden nicht wegnehmen darf. Die Ergebnisse sind durch Hyperlinks an den Kontrollstellen direkt erreichbar, falls der Lernende selbständig arbeitet und sich kontrollieren will.

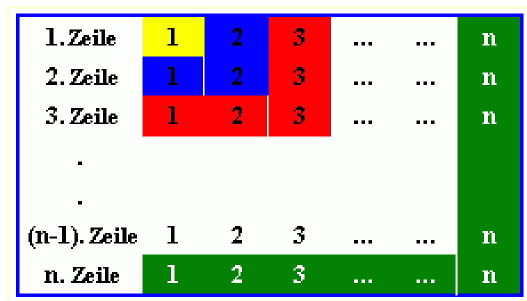
Ein arithmetischer Lösungsweg wird konsequent betreut und zusätzlich werden weitere Lösungswege durch geometrische Interpretation angeboten. Es ist möglich während der didaktisch angeleiteten Erarbeitung zum Problemlösen zurückzukehren, auch wenn der Lernende statt der selbständigen Arbeit das "Lesen" wählt. Die "Animationen" sind interaktive Arbeitsblätter, wo die Lernenden nach Bedarf Hilfe holen können; oft kann die Figur (ein Bildschirmausschnitt aus der Animation) schon genügende Anregung geben, um die Arbeit selbständig fortsetzen zu können (z.B. das Bild Lösungsidee 1).



Lösungsidee 1 zu d)



Lösungsidee 3 zu d)



Lösungsidee 4 zu d)

5. Diskussion

In der Diskussion wurde aus der Sicht mehrerer Länder (Deutschland, Estland, Österreich, Schweiz, Ungarn) der Frage nachgegangen, wie das jeweilige ‚Bild der Mathematik' in Ausbildung (Schule, Universität, Lehrerbildung) und Gesellschaft diesen Zielen entspricht beziehungsweise entgegensteht. Die ungarischen Doktoranden haben in ihrer Forschung Lösungsansätze vorgeschlagen (mehr darüber in diesem Band bei Ambrus, G.; Berta, T.; Maus, P.; Stankov, G.).

Literatur

HAIDER, G. & REITER, C. (Hrgs). (2004). PISA 2003 – Internationaler Vergleich von Schülerleistungen. Nationaler Bericht. Graz: Leykam

HERBER, H.-J. & VÁSÁRHELYI, É. (2004). Kompetenzstreben und Kompetenzerwerb. Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft 8, Heft 2, 5-34

KUHL, J. (2001). Motivation und Persönlichkeit. Interaktionen psychischer Systeme. Göttingen: Hogrefe

SELIGMAN, M.E.P. (1975). Helplessnesss. On depression, development, and death. San Francisco: Freeman

VÁSÁRHELYI, É. (2005). Problemlösen durch geometrische Repräsentation. Url: mathdid.inhun.com