Guido PINKERNELL, Lingen

Einführung in den Integralbegriff: Eine Unterrichtseinheit für Leistungskurse mit Einsatz einer Tabellenkalkulation

1 Begriffsentwicklung und Computereinsatz

Das Lernen analytischer Begriffe kann als ein Prozess beschrieben werden, in dem der Lernende einen Begriff zuerst als eine Tätigkeit erfährt, die bei fortschreitender Vertrautheit sich zu einer mentalen „Blackbox" verdichtet (TALL 1991). So verhält es sich auch mit dem Integralbegriff: Man begegnet ihm zuerst in Form eines Näherungsprozesses, etwa in Form einer Intervallschachtelung durch Riemann-Summen. Das Integralzeichen symbolisiert dann die „Blackbox", d.h. den erfolgreich verlaufenen Näherungsprozess. Und dieses Symbol ist schließlich selbst Objekt anderer Rechentätigkeiten, etwa der Herleitung und Anwendung von Integrationsregeln. Hier wird der dem Integral zugrunde liegende Näherungsprozess nicht notwendigerweise mehr mitgedacht.

Es ist dieser Näherungsprozess, der eine der tragenden Grundvorstellungen der Integration bestimmt. TIETZE, KLIKA und WOLPERS (2000) sprechen hier von dem „Prozess des Aufsummierens". Es erscheint daher zumindest ratsam, die Idee der approximierenden Summation in den Mittelpunkt einer Unterrichtseinheit zu stellen, die den Integralbegriff einführen will.

Und wo mit dem Näherungsprozess ein Algorithmus im Zentrum steht macht der Einsatz einer Tabellenkalkulation Sinn. Die Grundidee – nämlich die Approximation durch Aufsummieren einer wachsenden Anzahl von kleiner werdenden Summanden – ist immer dieselbe. Je nach Aufgabenstellung bedarf der Algorithmus kleinerer Modifikationen, die mithilfe einer Tabellenkalkulation leicht zu realisieren sind. Man darf also erwarten, dass so der rote Faden sichtbar bleibt und sich nicht im Dickicht von Einzelrechnungen verliert.

2 Eine Unterrichtseinheit in Auszügen

Im Folgenden soll eine Unterrichtseinheit vorgestellt werden, die sich an den oben skizzierten Ideen orientiert. Aus Platzgründen werden nur einzelne Stellen aus dem folgenden Ablauf der Einheit besprochen. Die Problemstellungen folgen unmittelbar aufeinander. „Übungsphasen" gibt es nicht um den Eindruck zu vermeiden, es ginge hier um die Anwendung der jeweils entwickelten Formeln. Es geht, um es noch einmal zu wiederholen, um die Auseinandersetzung mit der Idee der approximierenden Summation.

1. Bestandsrekonstruktion: „Der manipulierte Fahrtenschreiber"
2. Definition: „Bestimmtes Integral"
3. Flächeninhaltsbestimmung: „Die fehlende Glasfläche"
4. Rotationsvolumen: „Wie viel fasst das Weinglas?"

5. Bogenlänge: „Wie lang ist der Weg von A nach B?“
6. Mittelwert: „Die mittlere Tagestemperatur“ (Klausuraufgabe)
7. Ein Doppelintegral: „Wie groß ist das Boot?“ (Abituraufgabe)

2.1 Bestandsrekonstruktion „Der manipulierte Fahrtenschreiber“

Den Schülern wird in der ersten Stunde ein Problem vorgelegt, das aus HUSSMANN (2003) bekannt ist. Es zeigt die Abbildung eines Fahrtenschreibers, dessen Graph über einen gewissen Zeitraum eine Lücke aufweist. Der Begleittext berichtet, diese Scheibe sei von der LKW-Fahrerin einer Polizeikontrolle vorgelegt worden mit der Bemerkung, da sei der Schreiber wohl ausgefallen. Man kann eine bewusste Manipulation vermuten, und dies zu überprüfen wird als Aufgabenstellung denn auch von den Schülern selbst formuliert. Da die Scheibe auch die Kilometerzahlen zu Beginn und am Ende der Fahrt zeigt, ist dies auch durch Rekonstruktion der vom LKW gefahrenen Streckenlänge zu bewerkstelligen.

Diese Rekonstruktion erfolgt durch Abschätzung von Durchschnittsgeschwindigkeiten über verschiedene Zeitintervalle und dann durch Aufsummieren der in diesen Intervallen zurückgelegten Streckenlängen. Jede der präsentierten Schülerlösung ist mehr oder minder tabellarisch strukturiert. Eine solche ist Ausgangspunkt für die Systematisierung einer „Methode der Approximation durch Summation“ (Abbildung 1). Eine Tabellenkalkulation[1] erlaubt die Bestimmung eines Näherungswertes durch sukzessives Verfeinern der Zerlegung. Und dann wird die erfolgreiche Approximation durch einen Integralterm dokumentiert: $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x =: \int_a^b f(x) \delta x$

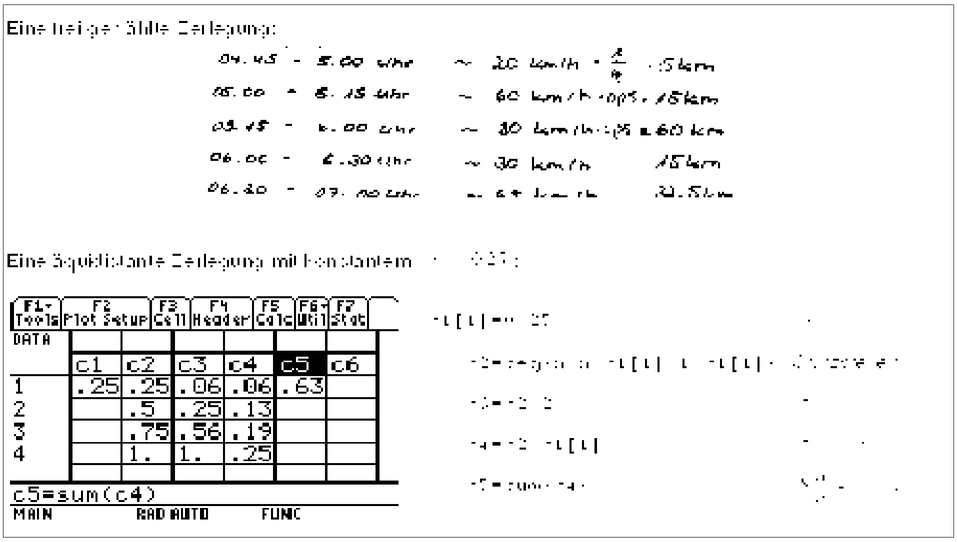

Abbildung 1

2.2 Rotationsvolumen „Wie viel fasst das Weinglas?“

Nach Bearbeitung eines Flächeninhaltsproblems, für dessen Lösung der

1 Anstelle eines TI-89 ist jedes andere Tabellenkalkulationsprogramm verwendbar.

Ansatz aus 2.1 übernommen werden kann, folgt nun mit der Bestimmung eines Rotationsvolumens ein Problem, bei dem die Approximationsmethode deutlicher modifiziert werden muss. Es gilt, den Inhalt eines Weinglases zu bestimmen, dessen Profil durch eine Funktion f gegeben ist.

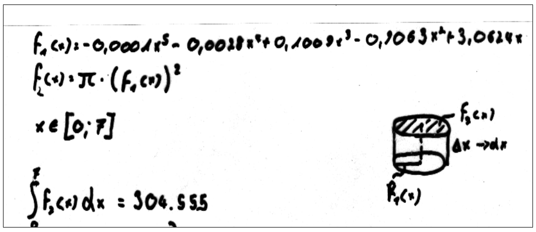

Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt eine Lösung, in der die Berechnungsformel aus 2.1 unverändert übernommen wurde. Ein Vorgehen, das sich beim vorangegangenen Flächenproblem noch bewährt hat, hier aber zu einer offensichtlich falschen Lösung führt. Es ist also notwendig, die „Blackbox zu öffnen“ und die Näherungsprozedur zu modifizieren. Abbildung 3 zeigt eine solche Lösung. Sie orientiert sich an der Tabellenkalkulation aus Abbildung 1: Die Zelle c1[1] enthält die Zerlegungslänge, c2 die Stützstellen. Die Spalte c3 enthält die den Stützstellen zugeordneten Funktionswerte und c4 die Volumen der Zylinderscheiben der Zerlegung, die in c5 aufsummiert werden. Was fehlt, ist die Integralformel. Die aber ist leicht aus der Programmierung der Rechnertabelle entwickelbar.

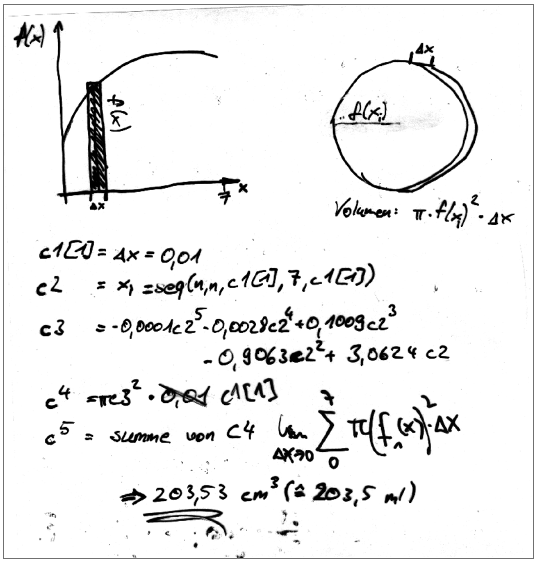

Abbildung 3

2.3 Ein Doppelintegral: „Wie groß ist das Boot“?

Die Bootsbaufirma „Mast- und Schotbruch“ bietet ein 20 Meter langes Boot an, dessen Profil an seiner breitesten Stelle durch die acht Punkte $A(0;0), B(1;1), C(2;3), D(3;4)$ *und* A', B', C', D' *festgelegt ist; die letzten vier Punkte sind dabei die Bildpunkte der ersten vier nach Spiegelung an der x-Achse.*

1. *Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Bootes an seiner breitesten Stelle. Das Profil werde dabei durch die Splinefunktion g beschrieben.*
2. *Zum Bug und zum Heck hin verkleinert sich das Bootsprofil. Die vier Punkte und ihre Spiegelpunkte rücken immer näher zur Symmetrieachse. Diese Änderung der Koordinaten wird durch einen Parameter k beschrieben. Beschreiben und begründen Sie ein Verfahren, wie man das Volumen des Bootskörpers berechnen kann. Die konkrete Durchführung Ihres Verfahrens ist nicht verlangt.*

Diese Aufgabe war lange nach Abschluss der Unterrichtsreihe im Rahmen einer Klausur „unter Abiturbedingungen“ zu bearbeiten. Zuvor war die im Aufgabentext erwähnte Splinefunktion g zu berechnen. Das in dieser Aufgabe zu beschreibende Verfahren läuft auf die Formulierung eines Doppelintegrals hinaus, ein Term, der den Schülern bis dahin nicht begegnet ist. Wie diese Aufgabe von einer Schülerin gelöst worden ist zeigen die Abbildungen 4 und 5. Meines Erachtens ist eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe kaum zu leisten, wenn der Unterrichtsgang nicht die Grundvorstellung des Integralbegriffs als „Prozess des Aufsummierens“ in den Mittelpunkt stellt.

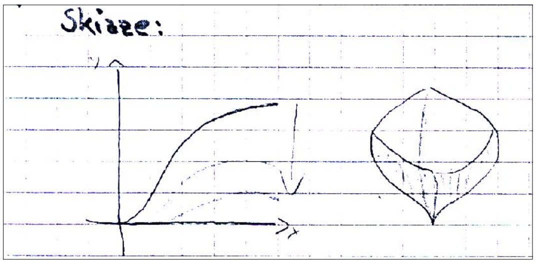

Abbildung 4

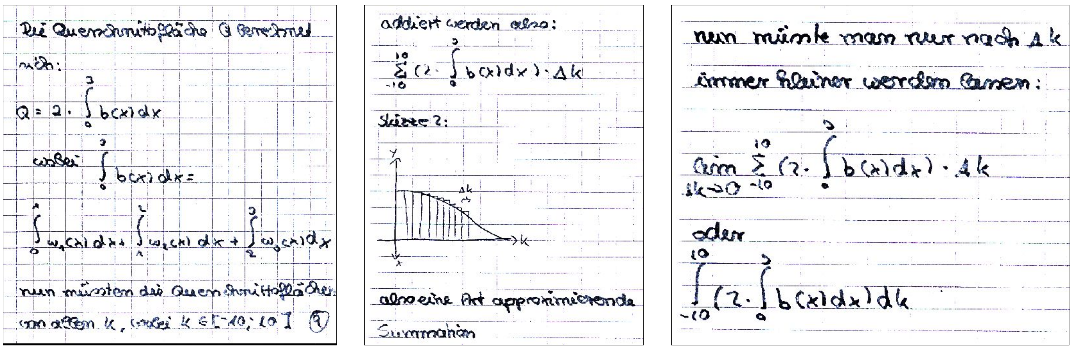

Abbildung 5: Zuvor erläuterte die Schülerin, wie die Splinefunktion b(x) und insbesondere die Teilfunktionen $w_i(x)$ in Abhängigkeit von k zu verstehen sind.

3 Schlußwort

Eingangs wurde der skizzierte Unterrichtsgang lernpsychologisch und didaktisch begründet. Trotzdem handelt es sich hier natürlich nicht um eine empirisch valide Untersuchung, auch wenn mit den Schülertexten empirische Dokumente vorliegen. Sie können nur andeuten, dass dieses Konzept sich lohnen kann. Ein Konzept, das auf eine fundierte Grundlegung des Integralbegriffs mehr Zeit verwendet als vielleicht üblich. Es widersteht dabei der Versuchung, möglichst bald das Rechnen mit Integralen anzuschließen, das häufig nicht mehr ist als ein verständnisloses Hantieren mit Integralsymbolen.

4 Literatur

Stephan Hußmann (2003): Mathematik entdecken und erforschen, Cornelsen, Berlin

David Tall (1991): Reflections, in: Tall (Hrsg.): Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Dordrecht

Uwe-Peter Tietze, Manfred Klika, Hans Wolpers (2000): Mathematik in der Sekundarstufe II, Band 1, Vieweg, Braunschweig