Bernd RECKELKAMM, Bielefeld

e wie Excel
– mit Excel-Funktionen zur *e*-Funktion –

Zusammenfassung: Excel kann beim Erarbeiten von Begriffen sehr unterschiedliche Aufgaben übernehmen. In der vorgestellten Unterrichtssequenz dient das System dazu, empirische Werte zu mitteln, gleichartige Rechnungen parallel (und daher schnell vergleichbar) durchzuführen, Funktionen zu plotten, Parameter in Tabellen und graphischen Darstellungen zu variieren, Folgen zu untersuchen und graphisch darzustellen, sowie erste Ideen über ihr Grenzverhalten zu entwickeln. Der didaktische Mehrwert liegt in der Möglichkeit, in unterschiedlicher Weise experimentell mit Mathematik zu arbeiten und die dabei gewonnenen Vermutungen auf ihre Tragfähigkeit hin zu überprüfen.

0. Unterrichtlicher Vorlauf

Die in diesem Beitrag vorgestellte Unterrichtssequenz geht nur am Rande auf inhaltliche Anwendungen von Exponentialfunktionen ein. Diese können in einem wiederholenden und vertiefenden Vorspann, etwa im Rahmen eines Vergleichs verschiedener Wachstumsmodelle (linear, parabolisch, exponentiell) behandelt werden.

1. Ein experimenteller Weg zur Ableitung von f(x) = 2^x

Die Schüler erhalten eine Kopie mit dem Graphen von f(x) = 2^x auf mm-Papier. Gesucht ist die Ableitungsfunktion f'. Eine rein qualitative Betrachtung zeigt, dass es sich um einen „ähnlichen“ Kurvenverlauf handeln wird: „links außen“ Werte in der Nähe von 0, für wachsende Werte von x kontinuierlich steigend. Für eine erste quantitative Annäherung zeichnen die Schüler in mehreren Gruppen Tangentenstückchen für $x \in \{-2, -1, ..., 2, 3\}$ auf dem Arbeitsblatt ein und berechnen die jeweiligen Steigungen mit Hilfe von Steigungsdreiecken.

Die Ergebnisse werden in einer Excel-Tabelle erfasst. Für jeden x-Wert ergibt sich ein Mittelwert aus den Gruppenwerten. Eine Analyse der Mittelwerte führt zu der Vermutung, dass bei jedem Schritt die gemittelten Werte verdoppelt werden. Da es nicht auf den Startwert ankommt, kann man bei x = 0 starten. Auf diese Weise erhält man als ersten konkreten Vorschlag: $f'(x) = f'(0) \cdot f(x) \approx 0{,}7 \cdot 2^x$.

	-2	-1	0	1	2	3
A	0,14	0,30	0,60	1,30	2,50	5,50
B	0,16	0,40	0,90	1,45	3,00	6,50
C	0,20	0,41	0,80	1,50	2,80	6,00
D	0,16	0,38	0,75	1,35	2,75	5,40
E	0,15	0,35	0,70	1,50	2,80	5,10
F	0,18	0,40	0,65	1,35	2,90	6,10
G	0,21	0,38	0,60	1,43	2,50	5,00
Mittel	0,17	0,37	0,71	1,41	2,75	5,66

2. Die Analyse von Differenzenquotientenfunktionen

Will man den vorgeschlagenen Zusammenhang überprüfen, bietet es sich an, für die obigen x-Werte die jeweiligen Differenzenquotienten zu untersuchen. Dies kann mit Excel parallel geschehen, da mittels der Kopierfunktion sowohl die Minimierung von h (h → 0) als auch die Übertragung des Verfahrens vom 1. Wert auf alle anderen vorgenommen werden kann.

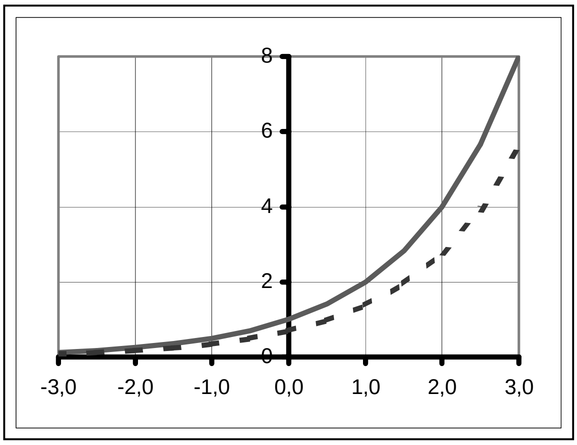
Untersuchungen zur Ableitungsfunktion von x --> b^x,					b =	2		
Stellen, an denen die Tangentensteigungen angenähert werden sollen:						x		
x-Abstand des zweiten Punktes der Sekante:						h		
	df(x)	x						
		-3	-2	-1	0	1	2	3
h	1	0,12500	0,25000	0,50000	1,00000	2,00000	4,00000	8,00000
	0,1	0,08972	0,17943	0,35887	0,71773	1,43547	2,87094	5,74188
	0,01	0,08694	0,17389	0,34778	0,69556	1,39111	2,78222	5,56444
	0,001	0,08667	0,17335	0,34669	0,69339	1,38677	2,77355	5,54710
	0,0001	0,08665	0,17329	0,34659	0,69317	1,38634	2,77268	5,54537
	0,00001	0,08664	0,17329	0,34657	0,69315	1,38630	2,77260	5,54520
	0,000001	0,08664	0,17329	0,34657	0,69315	1,38629	2,77259	5,54518

Das Ergebnis ist einerseits verlässlicher als die grobe empirische Vorgehensweise aus dem 1. Abschnitt, andererseits bestätigt es die dort gewonnene Vermutung.

3. Parametervariation: von 2^x zu 3^x zu e^x

Die Schritte 1 und 2 kann man für $g(x) = 3^x$ schlicht wiederholen. Ergebnis ist die Vermutung: $g'(x) = g'(0) \cdot g(x) \approx 1{,}1 \cdot 3^x$. Unter Excel-Bedingungen haben wir jedoch die komfortable Möglichkeit, die Zahl 2 in der obigen Tabelle einfach zu überschreiben. Dadurch erhalten wir sofort die entsprechende Tabelle der Differenzenquotienten für die Basis b = 3.
Der nächste Schritt ergibt sich nun fast von selbst: Wenn für das Ableiten lediglich die Steigung an der Stelle 0 bekannt sein muss, dann hat diejenige Funktion h, die dort die Ableitung h'(0) = 1 hat eine besonders einfache Ableitung, nämlich sich selbst. Die zugehörige Basis erhalten wir durch Ausprobieren, indem wir in der vorliegenden Excel-Tabelle die Zelle für die Basis b fortlaufend überschreiben und kontrollieren, welchen Wert die Ableitung an der Stelle 0 (näherungsweise) hat. Etwas feiner ausgedrückt, führen wir eine Intervallschachtelung durch. Damit ist ***e*** eingeführt.
Die zentrale Vermutung, dass für die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot b^x$, ist damit natürlich noch nicht bewiesen. Aber der Hintergrund dieser Regel sollte jetzt für die Schüler durchsichtiger sein. Ein exakter Beweis könnte an dieser Stelle erfolgen.

4. Die Interpretation im Koordinatensystem



Schon die Ergebnisse für 2^x bzw. 3^x lassen eine gemeinsame Darstellung von Grundfunktion und Ableitung in einem Koordinatensystem vernünftig erscheinen. Dazu reicht es, die Ableitung an der Stelle 0 mit einem möglichst kleinen Wert für h zu berechnen. Die Ableitung ist dann lediglich das Produkt dieses Näherungswertes mit der Grundfunktion $f(x) = 2^x$. Die Abbildung links zeigt, dass der Graph zu f' unterhalb zu dem von f verläuft. Da der Faktor einen Wert von ca. 0,7 hat, ist dies nicht überraschend. Entsprechend springt der Ableitungsgraph auf die „andere Seite der Grundfunktion“, wenn wir statt der Basis b = 2 die Basis b = 3 wählen. Schließlich hat der Faktor (die Ableitung an der Stelle 0) in diesem Fall einen Wert von ca. 1,1.

Die Berechnung der Funktionswerte für $f(x) = b^x$ sowie des Faktors c = f'(0) hängt von einer vorher festgelegten Parameterzelle ab, die den jeweils aktuellen Wert für die Basis b enthält. Es stellt sich nun dieselbe Frage wie in Teil 3: Wie ist der Parameter b (die Basis b der Exponentialfunktion) zu wählen, damit Grundfunktion f (durchgehend oder grün geplottet) und die zugehörige Ableitung (gestrichelt oder rot gezeichnet) deckungsgleich übereinander liegen? Wie in 3. erhält man durch Überschreiben des Zelleninhalts die gesuchte Basis und damit ***e*** – näherungsweise.

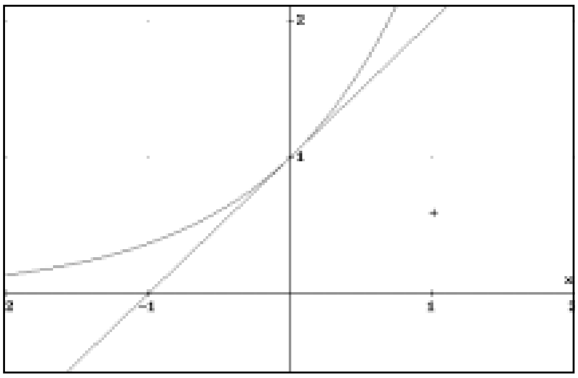
*Anmerkung zur Sequenzbildung: Natürlich ist es möglich und je nach Diskussionslage im Kurs sogar sinnvoll, zunächst die Differenzenquotienten für $y = 2^x$ zu berechnen und die Grundfunktion zusammen mit ihrer Ableitung zu plotten. Erst dann würde man zur Basis b = 3 wechseln und zuletzt die angestrebte Näherung für **e** durchführen. Tabellenanalyse und graphische Analyse im Koordinatensystem würden damit enger zusammenrücken.*

5. Eine alternative Definition von *e*

Der oben geschilderte Zugang zu e ist in sich schlüssig und für Schüler plausibel. Die Frage, für welche Basis b der zugehörige Differenzenquotient an der Stelle 0 den Wert 1 bekommt, liefert ein auch mathematisch befriedigendes Ergebnis. Dennoch mag der Charakter des Zufälligen im Rahmen des Intervallschachtelungsprozesses stören. Hier kann ein Blick auf eine alternative Definition bzw. Berechnungsweise für ***e*** helfen.

Dieser Zugang benutzt die bekannte Grundvorstellung, dass Tangenten in einem Punkt eines Graphen dort die optimale lineare Näherung darstellen. „Nahe 0“ gilt daher für die gesuchte Basis ***e***: $e^x \approx 1\,x + 1$. Ersetzt man das „kleine x“ durch $\frac{1}{n}$ mit „großem n“, erhält man $e^{\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n}+1$, bzw. nach Potenzieren mit n: $e \approx \left(\frac{1}{n}+1\right)^n$. Auf diese Weise ist ein Algorithmus gefunden, der deutlich weniger „zufälligen Charakter“ hat als das oben benutzte Intervallschachtelungsverfahren.

Lässt man Excel die sich hier ergebende Folge für zunehmend größere Werte von n berechnen, zeigen sich zunächst die erwarteten Ergebnisse. Aber schließlich läuft der Prozess aus dem Ruder und die internen Rundungsfehler führen zum Zusammenbruch des Verfahrens.



100	2,70481383
1000	2,71692393
10000	2,71814593
100000	2,71826824
1000000	2,71828047
10000000	2,71828169
100000000	2,71828179
1000000000	2,71828203
10000000000	2,71828205
1E+11	2,71828205
1E+12	2,7185235
1E+13	2,71611003
1E+14	2,71611003
1E+15	3,03503521
1E+16	1
1E+17	1

6. Exkurse und Vertiefungen

An dieser Stelle kann sich ein Exkurs zur finanzmathematischen Deutung des neuen Berechnungsverfahrens anschließen (stetige Verzinsung). Ebenso bietet es sich an, das Konvergenzverhalten der obigen Folge abzuschätzen mit Hilfe von besser überschaubaren Hilfsfolgen. Plottet man diese drei Folgen gemeinsam, gewinnt ein solches Verfahren zusätzliche Überzeugungskraft.

Material

Die in diesem Artikel vorgestellten Materialien, insbesondere die Excel-Dateien, sind zu finden auf der Homepage der Fachschaft Mathematik des Helmholtz-Gymnasiums Bielefeld: `www.helmholtz-bi.de`