

Bożena ROŻEK, Kraków

Strukturwiedergabe bei Zeilen-Spalten-Systemen in Zeichnungen von Grundschulkindern

Die Rolle des Strukturbegriffs in der mathematischen Bildung

Die vorgestellten Untersuchungen¹ betreffen Strukturierungen in regelmäßigen geometrischen Anordnungen. Die Elemente der Anordnungen formen vertikale parallele Linien, die Spalten, und gleichzeitig horizontale parallele Linien, die Zeilen, deshalb wurde diese Formation das Zeilen-Spalten-Figuren-System (kurz ZSFS) genannt. Der Struktur-Begriff kann als eine Tiefidee angesehen werden (Semadeni, 2002). Mathematikdidaktiker (Freudenthal, 1983; Krygowska, 1979) betonen, dass das Wahrnehmen von Struktur für das Bilden mathematischer Begriffe eine grundlegende Rolle spielt. Freudenthal konstatiert, dass der Mensch die ihn umgebende Wirklichkeit mehr durch Strukturierung als durch das Benützen der sprachlichen Bezeichnungen wahrnimmt. Krygowska hält Strukturierung und Schematisierung für die beiden fundamentalen Komponenten mathematischer Aktivität. Van Hiele (1986) führt über den Struktur-Gedanken einen ausgedehnten Diskurs, wobei er zusätzlich eine Unterscheidung in "starke" und "schwache" Strukturen einführt. Die Analyse der bisherigen Untersuchungen (Rożek, 2002; 2003) hat für ZSFS zur Unterscheidung in gewisse Strukturtypen geführt: *Konfigurationenstrukturen, Anzahlstrukturen, Numerierungsstrukturen, Flächenstrukturen, Sequenzstrukturen*.

Beschreibung der Untersuchung

In dieser Forschungsetappe geht es um die Sequenzstruktur bei Zeilen-Spalten-Systemen. Das Forschungsziel war die Suche nach Antworten auf die folgende Frage: Auf welche Weise unterscheiden Kinder verschiedene Strukturen von Zeilen-Spalten-Systemen? An dieser Etappe haben 30 Kinder im Alter von 10 bis 13 Jahren teilgenommen. Für die Untersuchung haben die Kinder die folgende Aufgabe² gelöst:

Eine kreisförmige "Serviette", ein Kreis (Abb.1), wurde aus unserem gemusterten Papier (im Folgenden "Musterpapier" genannt; Muster siehe Abb.2) ausgeschnitten. Leider fehlen auf dem Kreis viele der gedruckten Kringel. Deine Aufgabe ist es, die fehlenden Kringel dazu zu zeichnen.

¹ Die Untersuchungen wurden teilweise von der Polnischen Forschungsgemeinschaft KBN in den Jahren 2003-2006 finanziert.

² Während der Untersuchung bekamen die Kinder noch drei weitere Aufgaben (Rożek, 2003), hier wird nur die vierte Aufgabe besprochen.

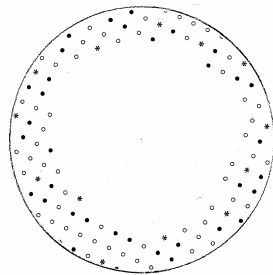


Abb. 1

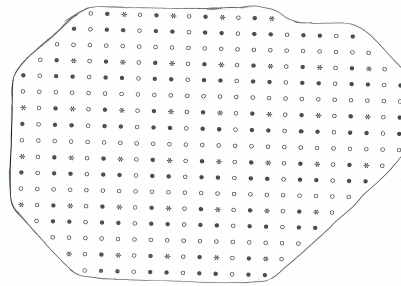


Abb. 2

Verfahren der Zeichnungsentstehung

- **Musterpausen**; die Kinder legen den Kreis auf das Musterpapier und drehen ihn so lange, bis die auf dem Kreis vorgegebenen Kringel die entsprechenden Kringel des Musterpapiers genau überlagern. Dann pausen sie das Muster durch.
- **Abzeichnen einzelner Kringel aus dem Musterpapier**; die Kinder legen den Kreis neben das Musterpapier, suchen dann die unvollständig vorgegebenen Kringelmengen auf dem Musterpapier (z.B. zeigen sie mit dem Finger auf die entsprechenden Kringel des Musterpapiers) und zeichnen dann die einzelnen Kringel des Musters ab.
- **Ausnützen der Regelmäßigkeiten auf dem Musterpapier**; die Kinder bemerken die Regelmäßigkeit des Musters auf dem Musterpapier, dann suchen sie die passende Stelle des Musters auf dem Kreis und benutzen beim Zeichnen die entdeckte Regelmäßigkeit.
- **Analysierung des Musterfragments auf dem Kreis**; die Kinder bemerken die Regelmäßigkeit des Musterfragments, das auf dem Kreis vorgegeben ist. Sie setzen das Kringel-Muster auf dem Kreis fort, ohne auf das Musterpapier zu schauen.

Typen der Sequenzstrukturdarstellung

- **Berücksichtigung der zweidimensionalen Sequenzstruktur**; die Schüler erkennen richtig die dreierlei Rhythmen: erste Reihe – „der Kringel, der Tupfen, der Stern“, zweite Reihe – „der Kringel, der Tupfen, der Tupfen“ und dritte Reihe „lauter Kringel“. Beim Zeichnen berücksichtigen sie die Zeilen-Spalten-Struktur und produzieren eine korrekte Lösung.
- **Berücksichtigung der eindimensionalen Sequenzstruktur bei Zeilen-Spalten-Anordnung**; die Kinder zeichnen z. B. die Spalten und berücksichtigen dabei die Koordination mit der Struktur in horizontaler Richtung. Aber sie machen einen einzelnen Fehler im Rhythmus. Pawel (Abb. 3) zeichnet in der fünften Spalte zwei leere Kringel statt einen.

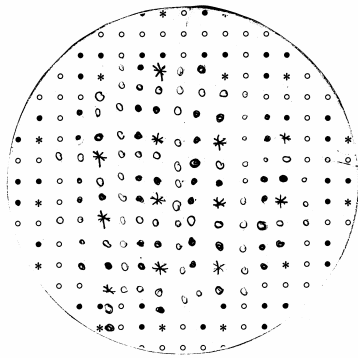


Abb. 3: Paweł (13 Jahre; 1 Monat)

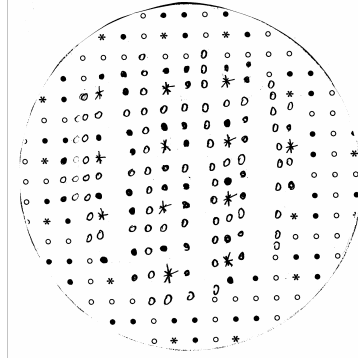


Abb. 4: Rafał (13 Jahre)

- **Berücksichtigung der eindimensionalen Sequenzstruktur nur bei den Spalten (oder nur bei den Zeilen);** Die Schüler erkennen den Rhythmus in einer Richtung der Struktur (z. B. der vertikalen) korrekt, aber sie beachten die Koordination mit der zweiten Richtung nicht. Auf diese Weise bekommt Rafał (Abb. 4) nur die eindimensionale Rhythmusstruktur.
- **Partielle Berücksichtigung der eindimensionalen Sequenzstruktur (mit oder ohne Zeilen-Spalten-Anordnung);** die Kinder konzentrieren sich nur auf einen ausgewählten Teil des Rhythmus und wiederholen ihn in jeder Reihe. Kasia (Abb. 5) zeichnet in jeder vertikaler Reihe derselben Sequenz mit dem Stern.

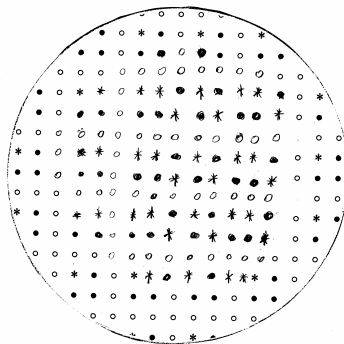


Abb. 5: Kasia (13 Jahre)

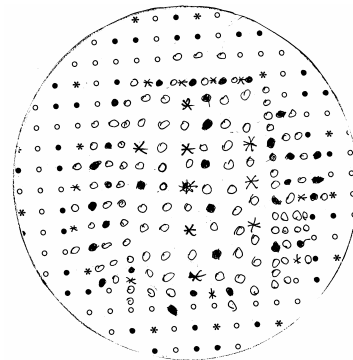


Abb. 6: Piotr (12 Jahre; 5 Monate)

- **Nichtbeachten sowohl der vertikalen als auch der horizontalen Sequenzen;** die Kinder bemerken nur einzelne Elemente, sie bilden keine Zeilen-Spalten-Anordnung und wiederholen auch keinen Rhythmus (Abb 6).

Arten der Strukturanalyse

- **Komplexauffassung;** Die Kinder nehmen die Anordnung ganzheitlich wahr. Die Kinder bemerken den Rhythmus und sie zeichnen die Spalten (bzw. Zeilen) und berücksichtigen dabei die Koordination mit der zweiten Richtung. Anderer zeichnen zuerst alle Reihen mit den leeren Kringeln und passen dann den Rest der Sequenz zwischen die leeren Kringel.

- **Lokalauffassung** - die Kinder konzentrieren sich auf Fragmente der Anordnung. Sie bemerken z.B. den Stern und in seiner Umgebung drei Tupfen. Sie zeichnen zuerst diese Teile und ordnen dann die leeren Kringel darum herum an. Andere Kinder konzentrieren sich nur auf einen Rhythmus und wiederholen ihn in jeder Reihe. Sie können die Struktur nicht als Ganzes analysieren.

Zusammenfassung

Die Forschungsergebnisse zeigen, wie schwer für die Kinder das Reproduzieren eines kompletten abgebildeten Zeilen-Spalten-Systems ist. Wesentlicher Grund für die Schwierigkeit ist die Notwendigkeit des gleichzeitigen Berücksichtigens sowohl der Konfigurationenstruktur als auch der Sequenzstruktur. Die Untersuchung liefert andererseits auch sehr interessante Beobachtungen über die Vielfalt der unterschiedlichen Strukturierungswege, die die Kinder in natürlicher Weise wählen. Das Vorgehen der Kinder bei den Lösungen hat uns manchmal überrascht, aber auf diese Weise haben wir wertvolle Einblicke darüber gewonnen wie im Denken der Kinder Struktur konstruiert wird. Bei der Analyse haben wir zweierlei Typen von Verhalten beobachtet: die Lokalauffassung und die Komplexauffassung. Die offene Frage bleibt: Welche Rolle spielen diese beiden Strukturierungsweisen im mathematischen Unterricht?

Literatur

Freudenthal H.: 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster

Krygowska Z.: 1979, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, WSiP, Warszawa

Rożek B.: 2002, *Denkschema eines Reihen-Kolonnenfigurensystems bei Kindern im Alter von 6 bis 9 Jahren*, Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der Didaktik der Mathematik in Klagenfurt, Verlag Franzbecker

Rożek B.: 2003, *Perception of Rectangular and Skew Structures In Row-Column Arrangement of Figures*, 16 *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica III*, Wyd. Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków, s. 215-221

Rożek B.: 2003, *Strukturbetrachtung in regelmäßiger Figurenanordnung bei den Kindern im Alter von 10 bis 13 Jahren*, Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik, ed. Henn H.-W., Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, s. 549-552

Semadeni Z.: 2002, *Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne*, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* 24, 41-92

Van Hiele, P. M.: 1986, *Structure and Insight, A Theory of Mathematics Education*, Academic Press Inc. London