Andreas STAHEL
Hochschule für Pädagogik und Soziale Arbeit beider Basel CH

Das Isoperimetrische Problem in der Ebene

Üblicherweise finden Sie folgende übliche Aufgabe in einem üblichen Lehrbuch:
Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck hat den Umfang 18 cm. Berechne seinen Flächeninhalt.
Wir sehen: Die Aufgabe ist geschlossen. Es existiert eine eindeutige Lösung. Das Ziel liegt fest. Die Aufgabe, die auch eine Prüfungsaufgabe sein könnte, erfüllt den Zweck bestimmte Kenntnisse und Fertigkeiten einzutrainieren. Immerhin sind es mehrere Fertigkeiten, die gefordert sind: Eine Skizze ist anzufertigen und sinnvoll zu beschriften, Gleichungen sind aufzustellen und ein lineares Gleichungssystem ist zu lösen, der Satz des Pythagoras muss angewendet oder die Formel für die Diagonale im Quadrat muss erinnert werden. Wenigstens bietet die Aufgabe eine Verknüpfung von Geometrie und Algebra. Trotzdem bleibt sie langweilig. Stellt man sie aber in einen grösseren Zusammenhang, so kann sie durchaus ihren Sinn haben. Für Schülerinnen und Schüler am Ende des 9. Schuljahres stelle ich folgende

Partnerarbeit

"isoperimetrisch" heisst "mit dem gleichen Umfang".
iso (griechisch) = gleich; *Perimeter* (griechisch) = Umfang

In Pionierzeiten, als Land im Überfluss vorhanden, sonst aber alles sehr knapp war, besass eine Familie im mittleren Westen der Vereinigten Staaten hunderte von Morgen (ein altes Feldmass: ursprünglich das Land, das ein Gespann an einem *Morgen* pflügen kann) flachen Graslandes, aber nur 100 m Stacheldraht. Die Farmerfamilie wollte mit diesem Draht ein Stück Land einzäunen.

Frage: Welche Flächenform würdet Ihr dieser Familie empfehlen, wenn Ihr den Inhalt der eingezäunten Fläche in Quadratmetern berechnen müsst?

Lernziele: Repetition der ganzen Flächenlehre des 8. und 9. Schuljahres.
Anwenden der Flächensätze (Pythagoras usw.).
Training der algebraischen Fertigkeiten.

Aufgaben:

1. Wählt Euch mindestens 8 verschiedene Flächenformen aus, die man mit 100 m Stacheldraht umzäunen kann. Die Flächenstücke sollen sich wesentlich voneinander unterscheiden, d.h. zum Beispiel lauter Rechtecke sind nicht erlaubt. Berechnet jeweils den Flächeninhalt A, einerseits nummerisch auf ganze Quadratmeter gerundet, andererseits algebraisch als Formel (d.h. als Funktion des Umfangs U und evtl. weiterer Variablen).

2. Ordnet Eure Flächen in einer Tabelle, beginnend mit der grössten Fläche.
3. Zieht möglichst viele Folgerungen aus Euren Berechnungen. Schreibt diese in guter deutscher Prosa auf.

Rahmenbedingungen:

Hilfsmittel:	Schreibzeug, TI-83, Übungsheft, Eure Theoriehefte und evtl. das Geometriebuch (Anschauliche Geometrie 2 und 3), kariertes Papier für die Darstellung Eurer Arbeit.
Zeitbedarf:	4 Lektionen. Falls nötig, sind Teile der Partnerarbeit als Hausaufgaben zu erledigen.
Abgabe:	Jede Zweiergruppe gibt auf kariertem Papier, einseitig beschrieben, ihre Ergebnisse sauber dargestellt ab. Pro Paar reicht ein Exemplar.
Fixpunkt:	Wenn Ihr 3 wesentlich verschiedene Flächenstücke berechnet habt, zeigt Ihr mir bitte Eure Resultate.
Arbeitsort:	Nur im Schulhaus; entweder im Klassenzimmer oder in anderen freien Räumen.
Bewertung:	Die Arbeit ergibt eine halb zählende Note. Bewertet werden: 1. Die mathematische Richtigkeit, 2. Die Darstellung, evtl. 3. Die Originalität.

Damit die Klasse wirklich selbständig arbeiten kann, wird die Partnerarbeit mit einem Lehrervortrag zu einem ausgewählten Musterbeispiel eingeführt. Die gewählte Figur kann z.B. ein gleichseitiges Dreieck mit aufgesetztem Halbkreis sein, damit auch Wissen aus der Kreislehre aktiviert werden muss. Einige SchülerInnen werden dieses Initialproblem natürlich variieren, andere beginnen mit einfachen Figuren wie Rechteck, Kreis, Quadrat, regelmässiges Sechseck usw., wieder andere kreieren vertrackteste neue Gebilde. Das Problem bringt in zweierlei Hinsicht automatisch eine Binnendifferenzierung. Einerseits können die Stärkeren nach der nummerischen Lösung ihre algebraischen Fähigkeiten weiter schulen, indem sie auch versuchen, den Flächeninhalt ausschliesslich als Funktion des Umfangs auszudrücken. Andererseits wählen Schwächere automatisch einfachere Flächenstücke und versuchen nicht, sich in unbekanntes Gelände vorzuwagen. Mir ist diese Fragestellung erstmals begegnet bei

Georg Pólya und seine Pionieraufgaben

Pólya war der Meinung, dass der Mathematikunterricht (MU) die SchülerInnen so weit als möglich mit allen Aspekten mathematischer Tätigkeit vertraut machen soll. Dazu gehören auch selbständige, schöpferische Leistungen, also etwas das an das Erlebnis selbständiger Forschung grenzt. Durch geeignete Auswahl der Aufgaben ist dies sogar mit einer Durchschnittsklasse erreichbar.

Pionieraufgaben illustrieren die wissenschaftliche Methode „Erraten und Prüfen“. Sie zeigen, dass Beobachtungen zu Entdeckungen führen. Oder mit den Worten von Charles Hermite (1822 bis 1901):
„Beobachtung ist eine unerschöpfliche Quelle der Entdeckung in der Welt subjektiver Wirklichkeiten, ebenso wie in der Welt der durch die Sinne erfassbaren Erscheinungen.“

Mathematik hat eben auch eine beobachtende, eine experimentelle Komponente. Die Beobachtung sollte an dem beobachteten Material eine gewisse Regelmässigkeit, eine typische Struktur oder Gesetzmässigkeit enthüllen.
Z.B. Von allen umfangsgleichen Vierecken hat das regelmässige Viereck – das Quadrat – den grössten Flächeninhalt.

Ich zitiere Pólya:

- Beobachtung hat mehr Aussicht, lohnende Ergebnisse zu zeitigen, wenn sie von irgend einem führenden Gedanken, von irgend einer Einsicht, geleitet wird.
- Beobachtung liefert nur vorläufige Verallgemeinerungen oder Vermutungen, aber nicht Beweise.
- Man prüfe seine Vermutung: Man untersuche Sonderfälle und Konsequenzen.
- Jede Bestätigung (jedes Sich-als-wahr-Herausstellen) eines Sonderfalls oder einer Konsequenz trägt zu der Glaubwürdigkeit der Vermutung bei.
- Man unterscheide sorgfältig zwischen Plausibilität und Beweis, zwischen Vermutung und Tatsache.
- Man vernachlässige die Analogien nicht: Sie können zu Entdeckungen führen.
- Man prüfe extreme Fälle nach.

Pólya’s Pionieraufgaben erinnern stark an den heutzutage üblicheren Begriff der offenen Aufgabe oder der offenen Problemstellung. Sie betonen aber den Forschungsaspekt stärker; man könnte sie deshalb auch „Forschungsaufgaben“ nennen. Aktuelleres zum Thema „Aufgaben als Instrumente im MU, speziell Instrumente zur Qualitätssicherung“ findet man bei Leuders. Ein wichtiger Gesichtspunkt des vorliegenden Problems wurde bis jetzt ausser Betracht worden:

Optimieren

Es handelt sich um ein Optimierungsproblem, noch dazu um ein historisch verbürgtes. Der mythische Ursprung des isoperimetrischen Problems liegt fast 3000 Jahre zurück. Am Anfang steht die phönizische Prinzessin Dido (ca. 900 bis 800 v. Chr.), die auf der Flucht die nordafrikanische Küste erreichte und den dortigen Herrscher um Land für sich und ihre Leute bat. Dieser gewährte ihr soviel, wie sie mit einem Ochsenfell (Ochsenhaut, Büffelhaut) umspannen könne (vgl. Vergil: Äneis; 70 bis 19 v. Chr.). Dido liess das Fell in Streifen schneiden und verknoten und umspannte mit der so gewonnen Schnur einen Kreis, als die maximal grosse Fläche, auf der dann Karthago erbaut worden sein soll. Heute spricht man statt vom Problem der Dido vom isoperimetrischen Problem. Es wird mathematisch so formuliert:

Man bestimme unter allen ebenen, geschlossenen Kurven gleicher Länge diejenige, die den grössten Flächeninhalt einschliesst.

Schon der antike Mathematiker Zenodurus (ca. 200 v. Chr.) hat angeblich bewiesen:

1. Von allen regelmässigen n-Ecken ist das das Grösste, das die meisten Winkel besitzt.
2. Der Kreis als Grenzfigur regulärer Polygone mit immer grösser werdender Eckenzahl, schliesst eine grössere Fläche ein als jedes regelmässige Polygon gleichen Umfangs.

Weiter lassen sich in der Mittelschule folgende Spezialfälle beweisen: Unter allen Dreiecken hat das Gleichseitige maximalen Inhalt, unter allen Rechtecken sowie unter allen beliebigen Vierecken das Quadrat, und unter allen n-Ecken mit vorgegebener Eckenzahl das regelmässige n-Eck.

Da Optimieren auch zu den fundamentalen Ideen in der Mathematik, vielleicht sogar zu den Archetypen menschlichen Handelns überhaupt, gehört, gehören Extremwertprobleme in den Schulunterricht, und zwar nicht erst wenn Differenzialrechnung zur Verfügung steht. Nach dem Prinzip der tragfähigen Zwischenabschlüsse dürfen grundlegende Konzepte nicht nur Endziel sein. Auch SchülerInnen, die die Schule nach neun Jahren verlassen, müssen mit solchen Konzepten vertraut sein. Meine bisherigen Erfahrungen zeigen, dass das vorgelegte Problem von den SchülerInnen mit viel Engagement und sehr guten Resultaten bearbeitet wird.

Literatur

Dunham W.: Mathematik von A bis Z; Birkhäuser 1996
Hildebrandt / Tromba: Kugel, Kreis und Seifenblasen; Birkhäuser 1996
Leuders T.: Qualität im Mathematikunterricht; Cornelsen Scriptor 2001
Pólya G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben; Birkhäuser 1967
Schupp H.: Optimieren; BI Wissenschaftsverlag 1992