Anke WAGNER, Ludwigsburg

„Die 39er-Reihe Reihe“ haben wir noch nicht gelernt“ – Zum Kopfrechnen in der Hauptschule

Auf der Suche nach Antworten auf die Frage, was genau unter dem Begriff *Kopfrechnen* verstanden wird, stößt man in der Literatur auf ein breites Spektrum unterschiedlicher Umschreibungen. Das Kopfrechnen

- ist ein schnelles und flexibles sich Bewegen durch die Welt der Zahlen (Buys 2001, 121),
- findet ohne jegliche Notation im Kopf statt (Krauthausen/Scherer 2003, 40; Reys u.a 1995, 304),
- ist nicht auf das bloße Abrufen von Ergebnissen aus dem Gedächtnis zu reduzieren, sondern es erfolgt vielmehr auch ein Prozess des Nachdenkens (Treffers 1997, 20),
- kann nicht auf einen bestimmten Zahlbereich (Beispiel: kleines 1×1) reduziert werden (Buys 2001, 121).

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit genau dieser Thematik und berichtet von einer Studie in dem bislang noch wenig erforschten Bereich der Hauptschule.

Die Studie gliedert sich in 3 Teile. In einer *Untersuchung 1* (U1) wurden zunächst die Kopfrechenleistungen von Hauptschülern der Orientierungsstufe ermittelt. In einem zweiten Teil wurde ein *Unterrichtskonzept* entwickelt und in der Praxis evaluiert. Der letzte Teil der Studie, eine *Nachuntersuchung* (U2), soll Aufschluss darüber geben, ob in der Versuchsklasse im Vergleich zu einer Kontrollklasse ein Leistungszuwachs beobachtet werden konnte.

An der U1 nahmen 5 Schulen mit je 2 fünften Klassen teil (n = 185). In allen Klassen wurden 4 schriftliche Tests durchgeführt. Im Anschluss daran folgten klinische Interviews in je einer der beiden Klassen einer Schule (n = 90). Das Unterrichtsexperiment fand in einer der untersuchten Klassen (n = 22) statt. In der U2 wurden alle Tests und Interviews der U1 nochmals in der Versuchsklasse und in einer Kontrollklasse durchgeführt.

Die vorgestellten Ergebnisse beziehen sich auf die U1 der Studie. Eine Analyse der Daten zum *kleinen 1×1 und 1:1* ergab folgende *Fehlerschwerpunkte*: die Reihen mit 6, 7, 8 und 9, ebenso Aufgaben mit Nullen. Die Fehlerquote lag hierbei im Schnitt (ausgenommen die Aufgabe 0 · 0) bei 13%. Beim kleinen 1:1 sind Aufgaben mit hohem Divisor bzw. Quotienten stark fehlerbehaftet. Die drei schwierigsten Aufgaben waren 48 : 6 (31%), 48 : 8 und 63 : 9 (je 29%). Aufgaben der Bauart 0 : n (0 : 8) wurden häufig falsch gelöst. Schwierigkeiten bereiteten den Schülern auch Aufgaben der

Art n : n (5 : 5) und Aufgaben mit dem Divisor 1 (8 : 1). Als Hauptursachen für fehlerhafte Lösungen konnten 2 Faktoren bestimmt werden. Zum einen wurde festgestellt, dass Aufgaben mit hohen Faktoren, Divisoren, Quotienten zu Beginn der 5. Klasse von einem Großteil der Schüler noch nicht hinreichend automatisiert worden sind. Die Schüler konnten in der vorgegebenen Zeit (ca. 7 sec) die Ergebnisse der Aufgaben nicht aus dem Gedächtnis abrufen. Andererseits wurden Aufgaben mit einem Faktor gleich 0 (wie $0 \cdot 8$ oder $8 \cdot 0$) scheinbar falsch automatisiert. Dies äußerte sich durch Häufungen bei bestimmten Ergebnissen. So notierten 76,9% der Schüler, die bei der Aufgabe $0 \cdot 8$ ein falsches Ergebnis ermittelten, als Ergebnis die Zahl 8.

Die erhobenen *qualitativen Daten zum großen 1×1*[2] *und 1:1* wurden analysiert im Hinblick auf die von den Schülern verwendeten Strategien und mit Blick auf die Schülerfehler. Dies führte zu folgender Kategorisierung:

Strategien bei Malaufgaben	*Strategien bei Geteiltaufgaben*
• Faktor zerlegen ($3 \cdot 29 = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 9$) • Fortgesetzte Addition ($4 \cdot 36 = 36 + 36 + 36 + 36$) • Faktor aufrunden ($9 \cdot 14 = 10 \cdot 14 - 1 \cdot 14$) • Verdopplung ($125 \cdot 4 = 125 \cdot 2 \cdot 2 = 250 \cdot 2 = 500$) • Mal 10 durch 2 ($17 \cdot 5 = 17 \cdot 10 : 2$) • Ziffernrechnen ($3 \cdot 29$ wird gerechnet: $9 \cdot 3 = 27$, schreibe 7, behalte 2, $2 \cdot 3 = 6$, $2 + 6 = 8$, also 87; oder: $3 \cdot 29 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 9$ (falsch) • Wegstreichen von Nullen ($40 \cdot 30 = 4 \cdot 3$ + 2 Nullen) • Keine Strategie/Sonstiges	• Zerlegen des Dividenden ($39 : 3 = 30 : 3 + 9 : 3$) • Fortgesetzte Addition/Subtraktion (75:15 wird gerechnet: $15 + 15 = 30$, $30 + 15$ …; oder: $75 - 15 = 60$, $60 - 15 = 45$ …) • Dividend aufrunden ($360 : 40$ wird gerechnet: $400 : 40 = 10$, also 9) • Approximation durch Probieren ($96 : 2 = 45$, $45 \cdot 2 = 90$, ist zu wenig; $75 : 15$ wird gerechnet: $4 \cdot 15 = 60$, also $75 = 5 \cdot 15$) • Wegstreichen von Nullen ($360 : 40$, also $36 : 4$) • Ziffernrechnen ($56 : 4 = 5 : 4 = 1$, $1 \cdot 4 = 4$, schreibe 4, $5 - 4 = 1$, schreibe 1, $6 : 4 = 1$, $1 \cdot 4 = 4$ (falsch, Sprechweise der Schüler) • Keine Strategie/Sonstiges

Die erheblichen *Fehlerquoten* beim großen 1×1 und 1:1 (s. exemplarisch nachfolgende Tabelle) weisen auf hohe Defizite hin.

---

[2] Traditionellerweise zählen Aufgaben, deren einer Faktor zwischen 0 und 10 und deren anderer Faktor zwischen 10 und 20 liegt, zum großen 1×1. Der Einfachheit halber wird hier der Begriff auch für Aufgaben verwendet, die darüber hinaus gehen, aber dennoch im Kopf gelöst werden können.

Aufgabe	25 · 5	9 · 14	4 · 36	39 : 3	56 : 4	96 : 2
Fehlerquote	26,7%	34,4%	62,2%	18,9%	47,8%	62,2%

Die Lösungswege wurden auf Fehler hin untersucht: Die Schülerfehler sind in ihrer Gesamtheit sehr heterogen, dennoch konnten Häufungen festgestellt werden.

Bei multiplikativen Aufgaben entstanden die meisten Fehler dadurch, dass die Schüler mit Ziffern rechneten, indem sie sich den schriftlichen Algorithmus im Kopf vorstellten. Nicht selten wurde hierbei die in der Grundschule gelernte Sprechweise verwendet. Der prozentuale Anteil an Fehlern verteilt sich auf folgende Hauptkategorien: Ziffernrechnen (32,8%), Einmaleinsfehler (11,6%), Anwenden der Strategie (11,0%), Additionsfehler (10,6%) und Nullenfehler (10,5%). Betrachtet man die Nullenaufgaben gesondert, so sind mehr als ein Drittel der Fehler (34,4%) auf einen fehlerhaften Umgang mit der Null zurückzuführen. In den Interviews beschrieben Schüler ihre Vorgehensweise mit Floskeln wie „hinzufügen“ oder „wegtun“, ohne erklären zu können, welche mathematische Vorgehensweise sich dahinter verbirgt.

Auch bei Geteiltaufgaben zeigte sich eine Vielfalt unterschiedlicher Schülerfehler. Die Hauptursache kann auf fehlende Strategien zurückgeführt werden (20,2%). Weitere Fehlerhäufungen konnten festgestellt werden beim Aufsagen der Reihe (16,0%), beim Anwenden der Strategie (12,8%), beim Ziffernrechnen (12,5%), durch Nullenfehler (11,7%) und durch fehlerhaftes Zerlegen des Dividenden (9,9%).

Die Ergebnisse der Studie und insbesondere die genaue Analyse von Fallbeispielen zeigen, dass die Beobachtung lernschwacher Schüler produktiv und bereichernd sein kann, da hier durchaus Rückschlüsse auf schulisches Lernen gezogen werden können, und das nicht nur für die Hauptschule, sondern auch für den Primarbereich.

Literatur

Buys, Kees (2001): Mental arithmetic. In: van den Heuvel-Panhuizen, Marja (Hrsg): Children learn mathematics. Freudenthal Institute, Utrecht University, 121–146

Teffers, Adri (1997), Angewandtes Rechnen – Realistischer Mathematikunterricht in den Niederlanden. In: Die Grundschule 29(3), 19–22

Krauthausen, Günther/Scherer, Petra (2003): Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In: Fritz, Annemarie u.a. (Hrsg.): Rechenschwäche. Beltz: Weinheim, 80–97

Reys, Robert E. u.a. (1995): Mental computation performance and strategy use of japanese students in grades 2, 4, 6 and 8. In: Journal for Research in Mathematics Education 26(4), 304–326