Gerald WITTMANN, Schwäbisch Gmünd

Zum Zusammenhang von Lösungswegen und Beliefs in der Bruchrechnung

Die Frage, welchen Einfluss die Beliefs von Schülern (ihre Vorstellungen von Mathematik und Mathematikunterricht sowie daraus resultierende Einstellungen) auf deren Leistungen haben, wird immer wieder diskutiert. So beschreibt Grigutsch (1996) eine Korrespondenz von Selbstbild und Mathematikbild, während Köller u.a. (2000) von einem Mediatorenmodell mit Fachinteresse, Kurswahl und Lernstrategien als vermittelnden Variablen ausgehen.

Berechne: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$

Gib einen Bruch an, der kleiner als $\frac{1}{8}$ ist.

Wie viele Brüche liegen zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$?

Untersuchungsdesign

Auch die vorliegende *qualitative Studie* verfolgt diese Frauge. Konkret wird der *Zusammenhang von Lösungswegen und Beliefs bei Hauptschülern am Beispiel der Bruchrechnung* untersucht. Hierbei werden sowohl *Standardaufgaben*, die eine kalkülhafte Rechnung zulassen, als auch offene *Aufgaben zur Erhebung von Grundvorstellungen* einbezogen (s. Kasten). Der Aufbau adäquater Grundvorstellungen ist ein wesentliches Element des Bruchenrechenunterrichts (vgl. Padberg 2002); gleichzeitig belegen empirische Befunde, dass nicht adäquate inhaltliche Vorstellungen eine häufige Fehlerursache sind („Brüche bei den Brüchen", Prediger 2004; „Grundvorstellungsumbrüche", Wartha 2005).

In einem offenen *Leitfadeninterview* wird jedem Schüler ein aus 7 bis 9 Aufgaben bestehendes Aufgabenset zur Bruchrechnung vorgelegt. Es umfasst beide oben beschriebene Aufgabenkategorien. Im Interview werden einerseits die *Lösungswege der Schüler* beobachtet („Lautes Denken") und andererseits Fragen zur *Einschätzung der Aufgaben und zur Schilderung von Unterricht* gestellt. Die Auswahl der Probanden erfolgt gezielt („Theoretical Sampling"), wobei Klassen von „Expertenlehrern" einbezogen werden, um auch positive Beispiele zu finden. Insgesamt liegen bislang 41 Interviews vor (Haupt- und Realschule, Jahrgangsstufen 6 und 8).

Untersuchungsergebnisse

Bei den Standardaufgaben fallen die Bearbeitungen sehr unterschiedlich aus – von raschen, sicheren Lösungen bis hin zur bekannten Fehlerstrategie „Zähler plus Zähler durch Nenner plus Nenner" bei der Addition von Brüchen. Überraschend sind vor allem der hohe Zeitaufwand, den manche Schüler bei diesen Aufgaben benötigen, und die enorme Anstrengung, die sie ihnen abverlangen. Nicht zuletzt wird die eigentliche Bruchrechnung von Problemen bei den Grundrechenarten überlagert – auch das Erweitern zu einem Hauptnenner 12 gelingt nicht immer sicher und fehlerfrei.

Die Lösungsschemata bei Standardaufgaben sind häufig instabil. So fällt es Schülern vielfach schwer, innerhalb der Schemata mathematisch wesentliche Elemente von Konventionen (z.B. in welcher Form etwas notiert wird) zu unterscheiden. Die Schemata stellen dann eher eine Belastung denn eine Entlastung dar, wenn die Angst, etwas falsch zu machen, den Bearbeitungsprozess dominiert. Ferner bieten die Lösungsschemata den Schülern keine Kontrollmöglichkeiten: Falsche Schemata werden auf diese Weise nicht identifiziert, sondern – im schlimmsten Fall – sogar gefestigt.

Auch bei den Grundvorstellungen zeigt sich weites Spektrum. Adäquate Vorstellungen sind *Bruch als Teil eines Ganzen* (verbale Beschreibung oder ikonische Darstellung) sowie *Bruch als Quotient* (ansatzweise oder vollständige Umwandlung des gemeinen Bruchs in einen Dezimalbruch). Nicht adäquate Vorstellungen kommen zum Ausdruck in Lösungsansätzen, die für natürliche Zahlen passen, nicht jedoch für Bruchzahlen, sowie in quasikardinalen Argumentationen, die im vorliegenden Fall nicht greifen, weil jeweils ein Übergang zu einem anderen Nenner nötig ist.

Die Beliefs in Bezug auf Mathematikunterricht lassen sich so beschreiben:

- Es dominieren *rezeptive Lerntheorien*. Typisch hierfür ist die Äußerung, dass die Lehrkraft Aufgabenlösungen ausführlich vorbesprechen muss, bevor sie von den Schülern praktiziert werden können. Sie empfinden damit eine hohe Abhängigkeit von der Lehrkraft und klagen über Disziplinprobleme, die den unterrichtlichen Vermittlungsprozess stören.
- Prinzipiell wollen die Schüler *die Lerninhalte verstehen* – dies gilt als eine wesentliche Voraussetzung für „Spaß" – und *Erfolge erzielen*. Begrenzt wird dieses Wollen durch eine niedrige Frustrationsgrenze und vielfältige Probleme (z.B. Konzentrationsschwierigkeiten).
- Häufig *überlagern Versagensängste das fachbezogene Interesse*.
- Es tritt eine *relativ stabile und fachbezogen-globale Selbsteinschätzung* zu Tage, die das Verhalten der Schüler im Unterricht beeinflusst.

Diese Beliefs korrespondieren damit, dass die Schüler in den Interviews Aufgaben häufig danach sortieren, ob sie sie kennen oder nicht. Es tritt von Seiten der Schüler kein Lösungs*prozess* auf – dieser wird, wenn er stattfindet, erst durch Impulse des Interviewers angestoßen.

Diskussion und Folgerungen

Die Untersuchung bestätigt die enorme *Bedeutung von Grundvorstellungen*. Diesbezüglich lassen sich zwei Aspekte unterscheiden:

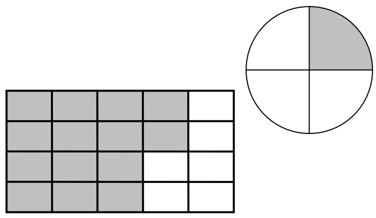
- Sie bilden eine wichtige *inhaltliche Basis zum Lösen offener Aufgaben* in der Bruchrechnung und sind damit eine wesentliche Voraussetzung dafür, dass überhaupt ein Lösungs*prozess* in Gang kommen kann.
- Darüber hinaus sind sie *mit den Beliefs verknüpft*: Durch die Fähigkeit, selbstständig Probleme lösen zu können, gewinnen die Schüler *Vertrauen in ihre eigenen Fertigkeiten und Fähigkeiten*.

Als Konsequenz für den Unterricht ergibt sich die Forderung, adäquate Grundvorstellungen gezielt aufzubauen und auch in der Folge explizit damit zu arbeiten. Aufgaben wie die im Kasten dargestellten finden sich bislang nur in wenigen Schulbüchern, insbesondere nicht in solchen für die Hauptschule. Darüber hinaus gehen offene Impulse, wie die eingangs dargestellten Interviewfragen oder das Schreiben von Rechengeschichten. Hier ist weitere Entwicklungsarbeit nötig, insbesondere um die in der Hauptschule problematische „Sprachlastigkeit“ der Aufgaben zu verringern.

Gib für den gefärbten Teil der Fläche einen Bruch an.

Welcher der beiden Brüche lässt sich kürzen?
Begründe dies anhand der Zeichnung.

Erweitere die Brüche mit 2 und stelle das Erweitern in der Zeichnung dar.



Jedoch müssen sich nicht nur die Aufgaben ändern, sondern auch deren Bearbeitung im Unterricht: Dies lässt sich unter Schlagworten wie „Zielklarheit“ oder „Explizitmachen von Lösungswegen“ zusammenfassen. Das bewusste Lernen von Mathematik, das auch eigene Fertigkeiten und Fähigkeiten offen legt und betont, scheint ein wesentlicher Schritt hin zur Veränderung der passiv-rezeptiven Sichtweise von Mathematikunterricht zu sein.

Literatur

Grigutsch, Stefan (1996): Mathematische Weltbilder von Schülern. Struktur, Entwicklung, Einflussfaktoren. Dissertation: Universität-Gesamthochschule Duisburg

Köller, Olaf u.a. (2000): Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. In: Baumert, J. u.a. (Hrsg.): TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Band 2: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe. Leske + Budrich: Opladen, 229–269

Padberg, Friedhelm (2002): Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche und Dezimalbrüche. Spektrum: Heidelberg (3. Auflage)

Prediger, Susanne (2004): Brüche bei den Brüchen – umschiffen oder aufgreifen? In: mathematik lehren 123, 10–13

Wartha, Sebastian (2005): Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, 593–596