Stephan, HUSSMANN, Dortmund; Timo LEUDERS, Freiburg

Mathematik treiben, authentisch und diskret - eine Perspektive für die Lehrerausbildung

Schule soll Lernende befähigen, mathematisches Wissen in verschiedenen Situationen flexibel einzusetzen. Dazu müssen sie grundlegende Konzepte verstanden haben, Routineverfahren in bekannten Situationen anwenden aber auch Probleme, zu deren Bearbeitung kein Routineverfahren zur Verfügung steht, erfolgreich bearbeiten können. Hierfür braucht es Lehrpersonen, die diese Kompetenzen vermitteln und fördern können. Das können sie aber nur – und das ist eine Banalität – wenn sie selbst solche Kompetenzen erworben und entsprechende Lernprozesse erlebt haben.

In Veranstaltungen des Lehrerstudiums wird oft bekannter Schulstoff von einem höheren Standpunkt aus vertieft vermittelt. Wenn es schlecht läuft, werden nur Standarddefinitionen und -verfahren reproduziert oder die mit Diplomstudierenden gemeinsam gehörte Vorlesung wird auswendig gelernt. Wenn es gut läuft, werden die grundlegenden Ideen des jeweiligen Gebietes elementar und von einem höheren Standpunkt durchdrungen. Ein solcher Blick- bzw. Standortwechsel ist jedoch meist ein Glücksfall.

Die Einführung in ein *neues* Themengebiet hingegen kann den Studierenden die Möglichkeit bieten, unvoreingenommen und selbsttätig einen neuen Teil der Mathematik zu erkunden. Wenn dieses Gebiet zudem herausfordernde, interessante und leicht zugängliche Fragestellungen anbietet, deren Bearbeitung einen nicht nur tief in das Wesen der Mathematik schauen lässt, sondern auch die Entwicklung der oben genannten Kompetenzen am eigenen Leib erfahrbar macht, so befinden sich die zukünftigen Lehrer und Lehrerinnen auf einem guten Weg, ihr Fach und seine Eigenheiten von innen zu durchdringen und als Lehrperson vorzuleben.

Mit der diskreten Mathematik eröffnet sich ein solches „unverbrauchtes“ Gebiet: “Discrete mathematics offers a new start for students. For the student who has been unsuccessful with mathematics, it offers the possibility for success. For the talented student who has lost interest in mathematics, it offers the possibility of challenge. Discrete mathematics provides an opportunity to focus on how mathematics is taught, on giving teachers new ways of looking at mathematics and new ways of making it accessible to their students. From this perspective, teaching discrete mathematics in the schools is not an end in itself, but a tool for reforming mathematics education” (Rosenstein 1997).

Die besondere Kraft der diskreten Mathematik lässt sich durch folgende Aspekte darstellen:

- Die Fragestellungen sind häufig leicht zugänglich
- Sie haben einen hohen Aufforderungscharakter, lösen aktive Problemlöseprozesse aus und lassen sich auf jedem Niveau bearbeiten
- Die Nähe von Modell und Realität ist groß, so dass Modellbildungsprozesse selbstständig und einsichtsvoll durchgeführt werden können
- Die mathematischen Begriffe entspringen dem handelnden Umgang mit realen Objekten
- Der formale Aufbau erfolgt erst nach umfassendem Ausloten möglicher Begriffsbildungen, also genetisch.

Um diese Qualitäten zu entfalten, muss man die Fragestellungen der diskreten Mathematik in Form von Lernumgebungen präsentieren, in denen die Lernenden die Probleme selbstständig bearbeiten können und die Lernprozesse im Sinne einer sozial-konstruktivistischen Lerntheorie begleitet werden. Solche Lernumgebungen zeichnen sich durch Zugänglichkeit der Fragestellungen, durch begriffsgenetisches Lernen, durch Orientierung an fundamentalen Ideen und durch die Anregung von mathematischen Prozessen wie Argumentieren, Problemlösen, Modellieren und Begriffsbilden aus.

In den USA beispielsweise ist die diskrete Mathematik seit 1989 Teil der Standards. Erfahrungsberichte über die Rolle in der Hochschul- und Schulausbildung wie der folgende, sind keine Seltenheit.

“Participants reported changes in their classrooms, in their students, and in themselves. Their successes taught us that discrete mathematics was not just another piece of the curriculum. Many participants reported success with a variety of students at a variety of levels, demonstrated a new enthusiasm for teaching in new ways.” (Rosenstein, 1997)

Dieses Plädoyer für die diskrete Mathematik macht deutlich, dass Fachdidaktik und Fachwissenschaft in der Lehrerausbildung (und nicht nur dort) eng miteinander verwoben sein müssen. Natürlich lassen sich – analog zur diskreten Mathematik – auch für andere Fachgebiete gute Gründe für deren Berücksichtigung finden. Eine Legitimation für solche curricularen Entscheidungen sollte sich aus einer Vorstellung über Ziele von Lehrerausbildung, die heutzutage die Form von Standards annehmen, speisen.

Diskrete Mathematik aus Sicht von Standards für die Lehrerbildung

Während Standards für den bildungswissenschaftlichen Teil der Lehrerbildung (das sind die erziehungswissenschaftlichen und schulpraktischen Anteile) bereits vorliegen (KMK 2004), ist die Entwicklung von Standards für den fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Teil insbesondere der ersten Phase noch nicht auf einem entsprechenden Beschlussstand. Die Gesellschaft für Fachdidaktik als Dachverband der fachdidaktischen Gesellschaften hat ein „Kerncurriculum Fachdidaktik“ vorgelegt (GFD 2004), das unabhängig vom Fach Lehrerkompetenzen umschreibt, die in einem fachdidaktischen Studienanteil erworben werden. Die Diskussion und Verabschiedung von fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Standards, getragen von einem breiten Konsens der Fachwissenschaften und Fachdidaktiken an den Hochschulen, steht noch aus. Dieser Prozess wird sicherlich erschwert durch die noch nicht ausgehandelte Rolle der fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Disziplinen in der Lehrerbildung an den Hochschulen sowie durch die Profilierung der fachdidaktischen Disziplinen als Wissenschaft (vgl. Tenorth/Terhart 2004). Die gemeinsame Spezifizierung von fachlichen und didaktischen Standards für jedes einzelne Fach ist damit umso zentraler für eine erfolgreiche Reform der Lehrerbildung.

Grundzüge solcher Standards deutet die gemeinsame Denkschrift der GDM und DMV (2001) an. Dort wird beispielsweise gefordert: „Bei der fachwissenschaftlichen Ausbildung kommt es für künftige Lehrerinnen und Lehrer zunächst einmal darauf an, dass sie über ausgedehnte Fachkenntnisse verfügen, die das Niveau und den Umfang der Lehrplaninhalte deutlich übersteigen müssen. Nur dann sind sie in der Lage, auf Schülerfragen und -ideen zu reagieren und aus der Situation sich ergebende, weiterführende Fragen adäquat zu beantworten.“ Diese Forderung muss aber im Lichte eines ganzheitlichen Bildes von Mathematik gesehen werden. Die vertieften Kenntnisse müssen sich auch auf die Qualität mathematischer **Prozesse**, wie etwa das **Modellieren**, **Problemlösen** oder **Argumentieren** wie sie in neueren Standards für die Schule aufgeführt werden, und auf die Spezifika mathematischer Begriffsbildung beziehen. Zur Fachsystematik gehört also auch eine Vertrautheit mit den espistemischen Prozessen der Mathematik.

Studierende sollen in den fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Veranstaltungen von Anfang an aktiv forschend tätig sein, mathematische Erkenntnisprozesse erleben und reflektieren und dabei insbesondere ihre eigenen Lernprozesse erforschen. Nur so hat die Lehrerbildung Einfluss auf die spätere Praxis, wenn die praktizierten (nicht die gelehrten) Lernarrangements gelebtes Modell sind und für die Studierenden episodisches Erinnerungspotential besitzen. Auf diese Weise findet jede Wissensaneignung durchweg unter einer reflektierten Perspektive statt. Inhaltlich kommt eine so verstandene Situierung der Lehrerbildung dem Prinzip der Lehre einer (Elementar)mathematik vom höheren Standpunkt aus gleich.

Zum Grundverständnis einer solchen akademischen Lehre gehören Prinzipien wie die folgenden: Lernen im Mathematikunterricht ist nur graduell aber nicht prinzipiell verschieden von mathematischem Erkenntnisgewinn. Auch Schüler sind nicht Anwender mathematischer Expertise sondern erschaffen diese im Lernprozess stets selbst. Künftige Lehrer können und sollten diese Perspektive des forschenden Studierens einnehmen.

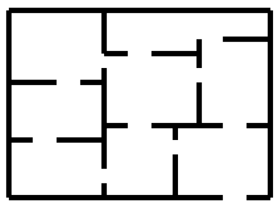
Diskrete Mathematik lernen – Mathematik erleben: Zwei Veranstaltungskonzepte in der Lehrerausbildung

Die beiden vorangehenden Abschnitte münden in die (empirisch durchaus nicht belegte) These: Themen der diskreten Mathematik sind in besonderem Maße für die beschriebene Verzahnung fachdidaktischer und fachwissenschaftlicher Ausbildung geeignet. Hierfür sollen zwei kurze Einblicke aus Veranstaltungskonzepten stehen:

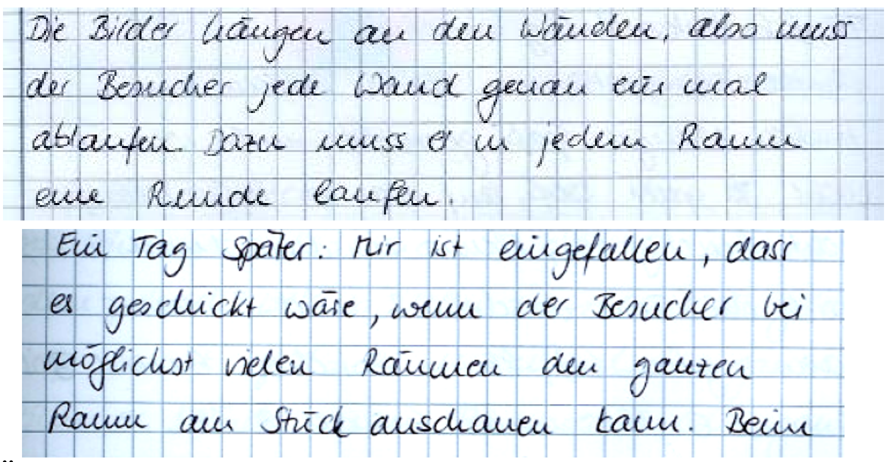
<u>Problemlöseseminar</u>

Die Teilnehmer eines Problemlöseseminars müssen selbstständig ihnen unbekannte Probleme bearbeiten. Es finden keine Vorträge statt, wohl aber Phasen des Austauschs (Du-Phase, Wir-Phase) (vgl. Berger 2004). Erwartetes Produkt ist ein individuelles Forschungsheft im Umfang von 100 Seiten. Eine der Aufgaben lautete:

Sie sollen für ein (eingeschossiges) Museum eine geführte Besichtigung durch alle Säle planen. Dabei sollen die Besucher möglichst an allen Bildern vorbeigehen, ohne ein Bild mehrfach zu passieren. Wie gehen Sie bei der Planung vor? Finden Sie eine möglichst allgemeine Methode zur Rundgangsplanung.

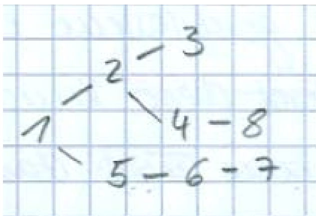


In den Bearbeitungen der Studierenden finden sich dann durchweg Modellierungsüberlegungen, Problemlösestragien und -reflexionen und Begriffsbildungen statt.



Übersetzung in ein Modell und Verfeinerung des Modells aber prüfe, möchte ich zuerst noch eine andere Strategie ausprobieren, die mir eben eingefallen ist. Hierbei werde ich zuerst alle Wege einzeichnen, die gegangen werden müssen (rot) und dann erst die Verbindungen zwischen den Wegen suchen.

Strategiewechsel



Kreise unterbrechen, durch Streichung von Türen. Vorsicht: dabei darf es aber nicht dazu kommen, dass ein Zimmer nicht mehr begehbar ist.

Implizite und explizite Bildung mathematischer Begriffe

(dualer Graph, Kreis), Problemlösung in Modell

Die Verallgemeinerung aus diesen Untersuchungen wäre: Es darf keine „Kreise" in der Zimmer- und Türenanordnung geben, ein Kreis muss durch Nichtbenutzung einer Türe unterbrochen werden.

Verallgemeinerung

Die Studierenden erreichen ein hohes Niveau der Reflexion und haben zudem ein intensives Erlebnis aktiven Mathematiktreibens. Die Inhalte und Prozesse sind anschlussfähig an fachwissenschaftliche Vertiefungen und fachdidaktische Reflexionen.

Mehrfach ist bei mir auch schon der sogenannte „Inkubationseffekt" (habe in einem Psychologie-HSe ein Referat über Problemlösen gehört) aufgetreten. Wenn ich nicht weiterkomme, mache ich irgendetwas anderes. Setze ich mich später wieder an das Problem, finde ich neue und brauchbare Ansätze.

Vorlesung/Übung Diskrete Mathematik

Am Beispiel des ‚Begriffsbildens' soll ein erprobtes und in mehreren Schritten modifiziertes Vorlesungskonzept vorgestellt werden. Der Titel dieser Veranstaltung lautet, „Diskrete Mathematik - Graphentheorie und kombinatorische Optimierung", womit allerdings nur das Spektrum der behandelten *Inhalte* umrissen wird.

Anders als in Hochschulen besteht für schulische Lernprozesse weitgehend Konsens darüber, dass Lernen nicht allein vom richtigen Erklären und Weitergeben abhängt, sondern dass Wissen von jedem einzelnen Subjekt aktiv aufgebaut werden muss. Auf Freudenthal geht die Idee zurück, für das Lernen von Mathematik Stufen der Abstraktion zu formulieren, die bei praktischen Erfahrungen beginnen und Stufe für Stufe zu theoretischen Abstraktion dieser Erfahrungen aufsteigen. Auf der Basis einer konstruktivistischen Lerntheorie und empirischen Untersuchungen im schulischen Kontext (Hußmann 2001) wurde eine Veranstaltung konzipiert, die den Begriffsbildungsprozess wesentlich in die Hand der Studierenden legt.

Zu Beginn erhielten die Studierenden so genannte Intentionale Probleme (ebd.), auf deren Basis sie die zur Lösung notwendige mathematische Theorie entwickeln sollten. Diese wurden in Forschungsheften festgehalten, wobei auch mathematische Strukturvorgaben wie z.B. Definition, Satz genutzt werden konnten. Beispiele für derartige Problemstellungen sind Fragen nach optimalen Touren für Postboten oder das schon genannte Museumsproblem (vgl. auch Hußmann/Lutz-Westphal 2006). Die Veranstaltung war dadurch gekennzeichnet, dass neben langen Phasen selbstständigen Arbeitens Zwischenergebnisse präsentiert und diskutiert wurden. Im letzten Drittel der Veranstaltung wurde auf Grundlage der Arbeitsprozesse die „fertige Mathematik" durch den Dozenten präsentiert.

Die Forschungshefte zeigten, dass die Studierenden ausgehend von einzelnen Beispielen und Verfahren, Konzepte entwickelten, die sie auf andere Situationen übertragen und anwenden konnten. Sie zeigten, dass sie eigene Fehler erkennen und korrigieren konnten. Bei der Formalisierung der von ihnen entwickelten Mathematik traten jedoch Schwierigkeiten auf. Nur einige Studierende zeigten sich in der Lage, die mathematische Sprache derart zu verwenden, dass sie die Argumente und Strukturen klar und präzise darlegen konnten. So verwendeten sie Definitionen und Sätze aus der Literatur, die sie bruchstückhaft mit ihren eignen Erkenntnissen verknüpften. Dieser Eindruck bestätigte sich noch in späteren Lernstandserhebungen, in denen die mathematischen Prozesse sehr erfolgreich rekonstruiert werden konnten, die formale Beschreibung jedoch im Bereich des Zufälligen und Auswendiggelernten verblieb. Insofern kann konstatiert werden, dass ein tieferes Verständnis zwar erlangt wurde, Formalisierungen jedoch nur in Ansätzen durchgeführt werden konnten.

Aus diesem Grund erhielt die Veranstaltung beim zweiten Durchgang ein verändertes Kleid. Statt den Studierenden zu Beginn alle Fragestellungen als Gesamtpaket zu geben und nur eine Präsentationsphase ans Ende der Veranstaltung zu platzieren, erhielten die Studierenden inhaltlich systematisierte Fragestellungen, die über einen gewissen Zeitraum eigenständig bearbeitet wurden. Begleitend stand den Studierenden ein Skript zur Verfügung, das ebenfalls in Teilgebiete gegliedert war. Diese Skriptteile gab es am Ende jedes Abschnittes, mit dem Auftrag, die dort dargestellte Mathematik mit ihren eigenen Darstellungen in Einklang zu bringen. Aber auch in diesem Fall zeigten Prüfungen, dass prozessuale Aspekte der Mathematik den Leitfaden für die Rekonstruktion des Gelernten lieferten. Zwar wurde der formale Teil vielfach verstanden reproduziert, jedoch waren nur in einigen Fällen Verknüpfungen zwischen Prozess und formaler Darstellung erkennbar. Als Möglichkeit zum Erwerb eines Leistungsnachweises bestand in dieser Veranstaltung die Möglichkeit, eine Ausarbeitung eines eigenen Kapitels zur diskreten Mathematik abzugeben. Die dort entwickelten Problemsituationen und deren Analyse zeigten, dass die Begriffsentwicklung (z.B. durch Gray/Tall (1994) bzw. Sfard (1994) beschrieben) auf der Ebene des Prozesses bzw. der Verdichtung stehen blieben.

Dies führte dazu, in einem dritten Anlauf, genau diese fachdidaktischen Aspekte zum Inhalt der Veranstaltung zu machen, und zwar im Vergleich von Begriffsbildungsprozessen in der Schulmathematik und in der diskreten Mathematik. Dieser Vergleich von Bekanntem im Blickfeld des höheren Standortes und dem Neuem aus dem ‚Denken im Prozess' heraus, machte die Notwendigkeit der Entwicklung von ‚neuen' mathematischen Objekten und Konzepten transparent und verständlich. Damit war der

201: Wir haben ein Verfahren gefunden, dass egal wo man anfängt,
202: immer den maximalen Fluss liefert. Das heißt, wir haben eine Prozedur
203: in einen Prozess überführt.
204: Der Begriff „der maximale Fluss" ist ein Prozept, denn es ist ein
205: ein Konzept, mit gewissen Eigenschaften und ein Prozess, mit dem
206: sich der maximale Fluss bestimmen lässt.

Schritt zu einer entsprechenden Formalisierung nahezu zwingend. Der in der Abbildung dargestellte Ausschnitt eines Schülerheftes zu einem Problem, bei dem der maximale Fluss in einem Netzwerk bestimmt werden sollte (vgl. Hußmann/Lutz-Westphal 2006), macht diese Reflektion sichtbar. Für die Veranstaltung bedeutete dies, dass die Fachdidaktik in einer Fachveranstaltung zur diskreten Mathematik gleichberechtigt Einzug erhalten hat, auf Kosten einiger Themen, aber mit dem Gewinn eines tieferen Verständnisses der diskreten Mathematik einerseits und in die Funktionsweise von Begriffsbildungsprozessen andererseits.

Fazit

Als Konsequenzen aus den vorstehend geschilderten allgemeinen Überlegungen und konkreten Lehrerfahrungen lassen sich folgende Anforderungen an Lerngelegenheiten für das fachliche Lernen im Lehramtsstudium formulieren: Fachdidaktische und fachwissenschaftliche Veranstaltungen

- müssen hinsichtlich des zukünftigen Berufskontextes situiert sein, d.h. sich auf beruflich relevante Aspekte des Faches beziehen,
- müssen als Lernepisoden Modellcharakter auch für schulisches Lernen besitzen Lernprozesse theoretisch reflektieren, auch und gerade in den fachwissenschaftlichen Anteilen!

Benötigt werden handlungsrelevante und bedeutungsvolle Situationen. Dies kann verwirklicht werden in einer konsequenten Verschmelzung von fachsystematischen und fachdidaktischen Veranstaltungen.

Literatur

Barzel, B./ Hußmann, S./ Leuders, T. (2004). Bildungsstandards und Kernlehrpläne in Nordrhein-Westfalen und Baden-Württemberg Der Mathematisch Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 57/3. 275-286

Berger, P. (2005). Änderung professioneller Einstellungen durch forschendes Studieren. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2004. Franzbecker.

BLK (1997). Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

GFD (2004). Gesellschaft für Fachdidaktik. Kerncurriculum Fachdidaktik vom 09.11.2004 Geladen von www.fachdidaktik.net am 30.80.05

Gray, E./Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 2, 115–141.

Hußmann, S. (2001). Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen. Franzbecker

Hußmann, S./Lutz-Westphal, B. (2006). Kombinatorische Optimierung lehren und lernen. Vieweg.

NCTM (2000). Principles and Standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tenorth, H.E. /Terhard E. (2004): Standards für die Lehrerbildung. www.kmk.org/doc/beschl/standards_lehrerbildung.pdf (23.03.06)

Rosenstein, J.G. (1997). Discrete mathematics in the schools: An opportunity to revitalize school mathematics. In J.G. Rosenstein, D. Franzblau, F. Roberts (Eds.), Discrete mathematics in the schools. (Vol. 36). American Mathematical Society and National Council of Teachers of Mathematics.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions:Reflections on processes and objects as differentsides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, 1–36.