Willi DÖRFLER, Klagenfurt

Keine Angst – Mathematik ist nicht (nur) abstrakt

Jede Didaktik und Methodik des Mathematikunterrichts geht aus von einer bestimmten, wenn auch oft unreflektierten Sicht auf Mathematik, also von einer Philosophie der Mathematik und ihrer Gegenstände, sowie allgemeiner von einer Epistemologie mathematischer Tätigkeiten. Ein weit verbreitetes stereotypes Bild von Mathematik, das unterschwellig in Schul- und Lehrbüchern, in Texten und Diskursen wirkt, ist folgendes: Mathematik ist eine mentale Tätigkeit, deren Gegenstände abstrakte nicht-sinnliche Objekte (wie etwa Zahlen, Funktionen, Formen) sind. Man könnte diese „Folklore" als einen naiven Verschnitt von Platonismus und Intuitionismus bezeichnen. Und didaktische Methoden haben das Ziel, den Lernenden den Zugang zu diesen abstrakten Objekten zu ermöglichen, was als deren Rekonstruktion als mentale Objekte angesehen wird. Meine These ist, dass diese Sicht (in vielerlei Varianten) entmutigend bis abschreckend auf die Lernenden wirkt, die sich mit unerreichbaren Zielen konfrontiert sehen und daher in mechanische Rechenverfahren flüchten. Letztere sind ja zumindest mit wahrnehmbaren Rechenzeichen durchzuführen, wenn man diese auch nicht versteht.

Indikatoren und gleichzeitig Konsequenzen aus einer solchen Sichtweise sind u.a. folgende Aspekte, die weithin im Mathematikunterricht feststellbar sind:

Darstellungen (Visualisierungen, Diagramme) haben den primären Zweck, die abstrakten Objekte einzuführen; sie sind also bloße Mittel, ein Durchgangsstadium zur Verinnerlichung in Form mentaler Konstrukte.

Darstellungen werden kaum selbst zum relevanten Lerngegenstand oder etwas, das in sich schon interessant ist, untersucht werden kann, wichtige Eigenschaften hat, etc.

Darstellungen illustrieren „nur" die eigentlichen mathematischen Objekte. Daher: unterscheide genau zwischen number und numeral, zwischen Funktion und Graph, zwischen Figur und Zeichnung/Bild.

Anhand der Darstellungen sollen die Eigenschaften der abstrakten Objekte gelernt werden.

Darstellungen unterstützen bloß die wesentliche mentale Tätigkeit oder dienen dazu, diese und ihre Ergebnisse auszudrücken. Dazu gehört auch die Sicht, dass Ideen das Primäre sind (in the mind) und erst sekundär durch Darstellungen mitgeteilt werden: „die Idee der Zahl" (oder „Funktion") bestimmt ihre Visualisierungen und Diagramme. Aber Lernende müssen zwangsweise den umgekehrten Weg gehen: von den Darstellungen zur Idee und zum abstrakten Objekt.

Wenige Schüler/innen können die Darstellungen und Diagramme produktiv verwenden und mit ihnen kreativ operieren, weil sie zu keiner intensiven Erfahrung und Beschäftigung damit angehalten sind (außer der Abarbeitung von Algorithmen). Darstellungen sind eben im Mathematikunterricht nur Darstellungen von etwas Anderem, das dann als viel wichtiger als sie selbst aufgefasst wird. Dieses „Andere" bekommen aber die Lernenden nie zu Gesicht, daher empfinden sie Unverständnis, Versagen, Frustration, Ärger und Wut, und viel Angst (mathophobia)) vor diesem abstrakten Unfassbaren.

Die kognitionspsychologisch orientierte Didaktik untersucht die Konstruktion interner Darstellungen vermittels externer durch die Lernenden, sodass letzteren auch dort vorwiegend ein vermittelnder Charakter zugeschrieben wird.

Die von mir vorgeschlagene Alternative hat als eine Wurzel die Konzepte des Diagramms und des diagrammatischen Denkens/Schließens nach Peirce, siehe dazu Dörfler (2004, 2005). Vor diesem Hintergrund ist produktives Lernen von Mathematik die progressive Teilnahme an einer Praxis des Umgangs mit (mathematischen) Diagrammen aller Art, die dadurch ins Zentrum des Mathematikunterrichts rücken, zum wesentlichsten Thema und Gegenstand aller Lernaktivitäten werden. Die Diagramme (auch Formeln) sind dann nicht mehr bloß Darstellungen und methodisches Mittel, sondern ihre Konstruktion, Analyse, Verwendung, Veränderung und Interpretation machen sie zu autonomen Gegenständen und Mitteln des Denkens und damit auch zu den bestimmenden Gegenständen des Mathematikunterrichts. Das trifft sich eng mit vielen Vorschlägen, die in Arbeiten zur Stoffdidaktik vorgelegt wurden. Beispiele könnten sein: number sense als intime Vertrautheit mit den numerals und anderen Darstellungen (figurierte Zahlen, Zahlentafeln, magische Quadrate, Rechenvorteile, Teilerregeln, Umwandlungen, verschiedene Zählmethoden); Funktionsbegriff als Praxis des Umgangs mit den sog. Darstellungen (auch im Rahmen des Operativen Prinzips: Was geschieht, wenn?), besonders auch mit Hilfe von CAS (wir untersuchen nicht Eigenschaften von Funktionen per se, sondern wir erforschen Diagramme und ihre Beziehungen auf der Basis festgelegter Operationen und ihrer Regeln). Neben der Untersuchung fertiger (Standard)Diagramme ist auch der Entwurf von Diagrammen etwa im Rahmen von Mathematisierungen eine wichtige Erfahrung für Schüler/innen.

Die zentrale Stellung von Diagrammen im Sinne von Peirce belegt ein Blick in jedes Mathematik-Buch. Daher werden nur zwei einfache Beispiele angeführt, an denen die unten angeführten Aspekte deutlich werden.

1. Erkläre warum (z.B.) 1111x1111=1234321. Ein Diagramm dafür basiert auf dem üblichen Multiplikationsverfahren:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

2. $\sum_{i,j=1}^{4} \min(i,j) = 1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^4$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 3 \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
$$

Diese Matrix wird schichtenweise „zerlegt“ in 4x4-Matrix, 3x3-Matrix, 2x2-Matrix und 1x1-Matrix aus jeweils nur der Zahl 1.

In beiden Fällen sind vielfältige weitere diagrammatische Experimente denkbar.

Folgende Aspekte treten bei einer diagrammatischen Sicht auf Mathematik und Mathematikunterricht in den Vordergrund:

Schreiben, Lesen, Beobachten, Experimentieren, Transformieren, Erfinden und Verwenden von/mit Diagrammen (als geschriebene und gezeichnete) sind die wichtigsten Tätigkeiten.

Entdeckungen (an Diagrammen) können gemacht werden und führen zu mathematischen Sätzen.

Arbeiten mit Diagrammen ist kommunizierbar, beobachtbar, erklärbar, imitierbar, ist (auch) empirisch-materiell und beruht oft auf Mustererkennung.

Diagramme, ihre Eigenschaften und Operationsregeln müssen genau gelernt und auch gemerkt werden (hohe Anforderung!).

Diagramme sind oft komplex und müssen nach ihrer Struktur, Form, ihrem Typ verwendet werden (ist schwierig, erfordert Erfahrung und Konzentration).

Im Mathematikunterricht muss ausführlich über die Diagramme gesprochen werden, eine Sprache zur Kommunikation der Erfahrungen mit den Diagrammen muss in der Klasse entwickelt werden.

Diagramme basieren auf materiellen Inskriptionen. Das Abstrakte ist dann eine Sicht auf diese, wenn z.B. Allgemeinheit oder Allgemeingültigkeit zugeschrieben werden (das konkrete Diagramm als „Fall von ...“). Damit wird Abstraktheit als eine Form der Interpretation von Diagrammen verstehbar und so entmystifiziert (sie ist nun a posteriori und nicht a priori).

Die Fokussierung auf die Diagramme (also die Zeichen, Symbole, Inskriptionen, Formeln, Grafen, etc.) ist keine Betonung des Mechanisch-Algorithmischen, sondern erfordert Kreativität, Fantasie, Ausdauer, Konzentration und Gedächtnis.

Lernen von Mathematik gewinnt so (auch) einen handwerklichen Charakter: Geschick und Erfahrung in der Handhabung von Diagrammen als Werkzeuge und Werkstücke (im Sinne von Aristoteles: mehr techné statt episteme).

Ganz allgemein beruht dieser Zugang auf einer Sicht von Mathematik nicht primär als Sprache sondern als ideografische Schrift, auch im Sinne von Rotman (1993), der von der untrennbaren Einheit „scribbling/thinking“ spricht: „Thinking in mathematics is always through, by means of, in relation to the manipulation of inscriptions“ (S. 7). Oder mit den Worten von Peirce: „By diagrammatic reasoning, I mean reasoning which constructs a diagram according to a precept expressed in general terms, performs experiments upon this diagram, notes their results, assures itself that similar experiments performed upon any diagram constructed according to the same precept would have the same results, and expresses this in general terms. This was a discovery of no little importance, showing, as it does, that all knowledge without exception comes from observation (Peirce NEM IV, 47 f.).”

Literatur

Dörfler, W. (2004): Mathematical Reasoning and Observing Transformations of Diagrams. – In: Mathematics and Language (Hg. Ch. Bergsten and B. Grevholm), Proc. MADIF 4, S. 7-19. – Linköping: SMDC.

Dörfler, W. (2005): Diagrammatic Thinking: Affordances and Constraints. – In: M. Hoffmann et al. (Hg.) Activity and Sign - Grounding Mathematics Education. S. 57 – 66. – Springer: New York.

Rotman, B. (1993): Ad infinitum. The Ghost in Turing’s Machine. Stanford Press.

Peirce, CH.S. (1976): The New Elements of Mathematics (NEM), vol. IV (Hg. C. Eisele), Mouton, Den Haag.