Martin HENSEL, Siegburg

Am Anfang war die Triade von Peirce...

Um den Vortrag besser einordnen zu können, sollen einige Bemerkungen zum Kontext vorangeschickt werden. Aus der Erfahrung in der Erwachsenenbildung erwuchs die Einsicht, dass Erklärungsversuche mit sprachlichen Mitteln bei mathematischen Themen oft nicht sehr erfolgreich sind. Woran liegt das?

Erwachsene, die sich nie intensiv für Mathematik interessiert haben, leben auf einer Sprachinsel, die sie mit ihrem ,,gesunden Menschenverstand" verteidigen. Dieses Verhalten kann mit Hilfe der Linguistik erklärt werden. Es kann aber auch erklärt werden, dass durch dieses Verhalten häufig Lernfortschritte verhindert werden, denn der ,,gesunde Menschenverstand" ist kein objektiver Konsens, sondern eine hochgradig subjektive Meinungsinstanz, die bei vielen Erwachsenen in den Fortbildungskursen recht unreflektiert benutzt wird.

Nun gilt aber für den Lehrer i. Allg. die Regel, dass er ,,den Schüler dort abholen soll, wo er steht". Er muss sich also auf die Sprachinseln der Kursteilnehmer begeben. Das kann sehr abenteuerlich sein, da nach der oben gemachten Bemerkung die Topographie dieser Inseln recht zerklüftet sein kann. Auch wenn nur eine Insel vorhanden wäre, bedeutet das noch nicht, dass dadurch das Problem gelöst sei. Denn die sprachliche Darstellung eines Sachverhalts muss mit einem verhältnismäßig großen emotionalen Aufwand betrieben werden. In anderer Form hat dies der Sprachphilosoph Cassirer folgendermaßen ausgedrückt:

> *Das Bewußtseinselement verhält sich zum Bewußtseinsganzen nicht wie ein extensiver Teil zum Ganzen, sondern wie ein Differential zu seinem Integral.* [ECW 11, 38]

Durch dieses Zitat wird der lokale Charakter der sprachlichen Möglichkeiten deutlich. Demgegenüber sind die mathematischen Themen oft durch globale Zusammenhänge gegeben und gehen dann über die Darstellungsmöglichkeiten der Linguistik hinaus. Wie kann man nun mit ,,lokalen" Mitteln von der Sprachinsel zum ,,globalen" Denken des mathematischen und naturwissenschaftlichen Kontinents gelangen?

Leider ist es so, dass viele Lehrer und Didaktiker nie den ,,Sprung über die Meerenge" wagen. Sie fürchten wie Ikarus ins Meer zu stürzen. Sie reduzieren die Mathematik lieber auf die Möglichkeiten der Sprachinsel. Will man sich damit nicht zufrieden geben, so muss man eine Expedition von der Insel zum Kontinent wagen? Es bietet sich zunächst eine philosophische Exkursion mit Hilfe der Semiotik an. C. S. Peirce hat durch die Entwicklung seines Triadenkonzepts auf Zeichenniveau eine Möglichkeit vorgestellt, mit der im Folgenden eine „Überfahrt" versucht werden soll. Da die Triaden lokal dynamisch beschrieben werden, ist der „Start von der Insel" möglich (vgl. [JZ] 14: *„Da er [Peirce] annimmt, dass unser Erkenntnisprozess den Evolutionsprozess abbildet, hält er Relationen [Triaden] für ontologisch grundlegender als Individuen und wählt sie deshalb als Ausgangspunkt."*).

Die Philosophie dieses Vortrags ist nun die, dass die Triade mit Hilfe des Konzeptes sehr kleiner Drehungen zu einem mathematisch und physikalisch interpretierbaren Operator spezialisiert wird. Durch ständige Iteration dieses Triaden-Operators entsteht eine Fülle von „Eindrücken". Diese verdichten sich und bilden ein Muster. Zur besseren Imagination stelle man sich einen Vogel beim Nestbau vor. Dadurch hat man den oben beschworenen Evolutionsprozess sehr wörtlich auf ein Lebewesen übertragen. Ebenso kann man ein Kleinkind beobachten, dass ein „Urknäuel" mit dem Zeichenstift malt, eine Schar Wespen, die eine filigrane Kugel aus Zellstoff zusammenkleben oder einen Menschen wie er sich eine gemütliche „Wohnhöhle" einrichte. Zum Schluss frage ich nach den globalen Strukturen, die durch die Operationen möglich sind.

Wir überspringen jetzt die Probleme und Gefahren der „Überfahrt". Wir sind an der Küste des Kontinents gelandet. Unsere $Triade(Objekt, Zeichen, Interpretant)$ ist folgendermaßen ausgestattet: Als $Objekt$ betrachten wir einen beliebigen Ortsvektor $\vec{r}$, als $Zeichen$ benutzen wir den symbolischen Vektor $d\vec{\Omega}$ und der $Interpretant$ ist der Vektor

$$\vec{R} = \vec{r} + d\vec{\Omega} \times \vec{r} \qquad ,$$

der mit Hilfe des Kreuzproduktes konstruiert wird (vgl. [HG] 137ff). In Koordinatendarstellung ergibt sich folgender Matrix-Operator:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 1 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nach der Landung an den Gestaden des neuen Kontinents darf man nach der Gesamtheit aller Drehungen fragen, die durch den Matrix-Operator erzeugt werden können. Als Antwort bekommen wir: Es ist die kontinuierliche Drehgruppe $SO(3)$. Sie ist in einem 9-dimensionalen ,,Strukturberg" eingelagert. Wenn man die Gruppenstruktur unterdrückt, kann man die Elemente der $SO(3)$ in einen 3-dimensionalen Projektiven Raum $\mathbf{P(3,\mathbb{R})}$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ einlagern. Doch direkt sichtbar wird dieser Raum nicht, da die Konstruktion mindestens eine Sphäre im 4-dimensionalen Raum erfordert. Diese Hypersphäre wird mit $\mathbf{S^3}$ bezeichnet. Anschaulich wird dieses Gebilde nur durch spezielle Projektionen. Zum Beispiel kann $\mathbf{S^3}$ in eine dichte Packung aus 120 Dodekaedern zerlegt werden und wie eine Traube aus 120 Seifenblasen (vgl. [JMS]) zusammenhängend projiziert werden.

Mit diesem Ergebnis kommt für uns die Ernüchterung. Wir können also die 4-te Dimension nur dynamisch simulieren, z.B. als Film. Eine andere Möglichkeit finden wir z. B. auch beim manuellen Schreiben oder durch körperliche Bewegungen. Besonders das Radfahren ist ein direktes Abbild des Matrix-Operators: Die Drehachse des Vorderrades wird z.B. durch seitliches Kippen nach links zur Erde gedrückt. Durch die Rotation des Rades wird die Achse nach hinten abgelenkt und die Fahrtrichtungsänderung führt zu einer Linkskurve.

Eine weitere Möglichkeit ergibt sich durch das Studium analoger endlicher Modelle. Mathematisch gibt es viele endliche Modelle des 3-dimensionalen projektiven Raumes. Der Kleinste ist $\mathbf{P(3,\mathbb{F}_2)}$. Doch hier holt uns ein altes Dilemma ein: Niemand weiß, welche der vielen Möglichkeiten wirklich wichtig ist.

[ECW] ErnstCassirer. Gesammelte Werke. Hamburger Ausgabe. Hg. v. B. Recki, Hamburg 1998

[JZ] Julia Zink. Kontinuum und Konstitution der Wirklichkeit. Dissertation. München 2004.

[HG] Herbert Goldstein. Klassische Mechanik. Frankfurt am Main 1963.

[JMS] John M. Sullivan. http://torus.math.uiuc.edu/jms/Images/b119.jpeg