

Lucas AMIRAS, Weingarten

Von den Grundlagen der Geometrie zur Sinngebung geometrischer Grundbegriffe

(Dem Vortrag liegt die Habilitationsschrift des Vortragenden zu Grunde (Amiras 2006). Deren Ergebnisse werden in einer erweiterten Version des vorliegenden Vortrages demnächst veröffentlicht.)

1. Zum Stand der Behandlung geometrischer Grundbegriffe in der Schule und Hochschule

Anknüpfend an einen früheren Beitrag (Amiras 2003) lassen sich anhand von Schulbüchern zwei Typen der Behandlung geometrischer Grundbegriffe in der Orientierungsstufe unterscheiden:

1. Es wird eine (im günstigen Fall) durch zeichnerische Handlungen geometrischer Grundobjekte oder durch konkrete Beispiele von geformten Objekten unterstützte Namengebung bzw. **Festlegung einer Terminologie** betrieben (z.B. im Fall von Strecke, Strahl und gerader Linie). Diese Objekte werden als anschaulich bekannt vorausgesetzt.

2. Es werden vielfältige konkrete Operationen (insb. Falten, Zeichnen und andere Erzeugungsverfahren) vorgeschlagen, als Basis einer durch manuelle Handlungen unterstützten Begriffsbildung. (Vgl. z.B. Gamma 5, Welt der Zahl 5) Dabei wird versucht, den Schülern **Erfahrungsbereiche** zu eröffnen, indem (durch Vergegenwärtigung oder Aktionen) auf die Praxis der Herstellung und Verwendung von Geraden und Ebenen Bezug genommen wird.

Auffällig am Vorgehen nach Typ 2 ist der folgende Umstand, hier am Beispiel der Behandlung der Geraden exemplifiziert: Geraden werden durch unterschiedliche Verfahren erzeugt bzw. realisiert. Die Frage, was für ein Merkmal an diesen empirischen Gegenständen mit dem Begriff „gerade“ bezeichnet wird, bleibt jedoch unbeantwortet. Auch Fragen nach der besseren oder hinreichenden Realisierung von Geraden kommen in diesem Zusammenhang nicht immer ins Blickfeld. Im Hinblick auf eine Stufung des Begriffslernens scheint hier zwar ein unverzichtbarer Anfang vorzuliegen (Begriff der Geraden als Phänomen); die nächste Stufe jedoch (Geradenbegriff als Träger von Eigenschaften) wird an dieser Stelle nicht mehr besprochen, jedenfalls nicht im Hinblick auf technische, relative Eigenschaften von geraden Linien zueinander (z.B. das Passen von geraden Kanten in jeder Lage aneinander). Geraden erscheinen somit als empirische Gegenstände (gegeben als Kanten, Striche auf dem Papier, gespannte Schnüre, Lichtstrahlen usw.), die „anschaulich“ wohl etwas gemeinsam haben; was

das aber ist, bleibt unausgesprochen. Eigenschaften geometrischer Grundformen in den Tätigkeiten der Schüler können also mit geometrischen Begriffen nicht beschrieben werden, da der Bezug der dazu verwendeten technischen zur geometrischen Terminologie nicht ersichtlich ist.

Ein Blick auf die fachdidaktische Literatur zur Orientierungsstufe oder gar auf Hochschullehrbücher zur Geometrie bringt im übrigen auch keine befriedigende Antwort zu diesem Fragenkomplex. (Dazu Amiras 2006) Diese Schwierigkeiten verweisen ausnahmslos auf ein traditionelles, ungelöstes, grundlagentheoretisches Problem: Die Begründung bzw. Konstitution der Geometrie als Figurentheorie.

2. Protogeometrie - Grundlagen der Geometrie als Figurentheorie

In der ersten Hälfte des 20. Jhdts versucht zuerst Hugo Dingler die euklidische Elementargeometrie als Figurentheorie auf operativer Grundlage (also auf der Basis einer begrifflich-normativen Explikation technischen Handelns) zu begründen, was in Anfängen stecken bleibt. Paul Lorenzen und seine Schule setzen diese Bemühungen seit 1961 (bis etwa 1985) später im Rahmen eines umfangreicheren Programms zur den Grundlagen der Physik („**Protophysik**“) fort, zuletzt unter der Bezeichnung „**Protogeometrie**“. Seit 1978 schließt auch die Geometriedidaktik in umfangreicher Weise an diese Grundlagenbemühung an, durch die „**Operative Geometriedidaktik**“ von Peter Bender und Alfred Schreiber (vgl. Bender/Schreiber 1985), sowie Entwürfe zur Behandlung geometrischer Grundbegriffe in der Orientierungsstufe von Konrad Krainer (1982) und Dieter Volk (1984). Die Protogeometrie im Rahmen der Protophysik kommt währenddessen über Dinglers Ansätze nicht wesentlich hinaus, verbleibt relativ wirkungslos und hinterlässt seit etwa 1985 ein sehr uneinheitliches Bild.

Seit vielen Jahren versucht nun der Vortragende - nach einer kritischen Aufnahme aller bisherigen Bemühungen (Amiras 2000) - mit einem neuen Ansatz eine kritische Fortsetzung der Protogeometrie und eine Weiterentwicklung der operativen Entwürfe zur Sinngebung geometrischer Grundbegriffe in Übereinstimmung mit den Ansätzen der operativen Geometriedidaktik von Bender und Schreiber. Das Ergebnis dieser Forschungen stellt die genannte Habilitationsschrift dar.

Der neue Ansatz zur Protogeometrie führt (in kritischer Fortsetzung früherer Entwürfe) zunächst zur Explikation von **Funktionseigenschaften** geometrischer Grundformen aus der Praxis ihrer **Verwendung** und versucht sie begrifflich exakt zu fassen. Für Ebene und Gerade z.B. sind dies vor allem Formeigenschaften:

1. **Universelle Passung** (eventuell mit Überlappung) von Matrizen und Kopien (kongruenten Figuren) in jeder festen Berührlage zueinander.
2. **Glattheit** bzw. gegenseitige **Verschiebbarkeit** zueinander bei Passung.
3. **Erweiterbarkeit** (bei Überlappung) unter Beibehaltung von 1. - 2.
4. **Einschränkbarkeit**, d.h. Teilstücke der Figuren erhalten die Eigenschaften 1. - 2.

(1. und 2. formulieren sogenannte **Homogenitäten** von Geraden und Ebenen.)

In der genannten Schrift werden diese Eigenschaften mit Hilfe einer operativ verankerten Terminologie und praktischen Postulaten exakt gefasst. Der Übergang von der Protogeometrie zur geometrischen Theorie erfolgt dann im Sinne einer „Transformation“ auf der Basis methodischer Prinzipien der Theoriebildung, die in der Axiomatik der Geometrie wirksam sind. In geeigneten Axiomatisierungen lassen sich dann die protogeometrischen Eigenschaften der Grundformen in neuer Form wieder finden (insb. die Homogenität von Ebene und Gerade). Was damit gewonnen ist, ist eine bessere Motivierung der Axiomatik, sowie einige wichtige Einsichten in ihre methodischen Vorzüge, aber auch ihre Grenzen.

Neben den systematischen Beiträgen werden in der genannten Arbeit auch historisch-kritische Studien zu den Grundlagen der Geometrie angestellt. Der dritte, umfangreichste Teil ist didaktischen Studien gewidmet, wobei neben der Untersuchung vorliegender Beiträge auch neue Vorschläge gemacht und Verbindungen zu verwandten Bemühungen hergestellt werden.

3. Protogeometrie und die Sinnggebung geometrischer Grundbegriffe

An früherer Stelle wurde über die Unterrichtsentwürfe von K. Krainer und D. Volk berichtet (Amiras 2005). In der genannten Habilitationsschrift werden, nach der kritischen Besprechung und Würdigung dieser Entwürfe, Lernumgebungen auf dem Hintergrund der entwickelten Protogeometrie vorgestellt, die diese Entwürfe wesentlich ergänzen bzw. weiterzuentwickeln versuchen. Die Frage ist nun, wie die Protogeometrie zur Sinnggebung geometrischer Grundbegriffe konkret beiträgt. Am Beispiel der Rede von der **Form von Figuren**, auf welche protogeometrische Bestimmungen von Ebene und Gerade aufbauen, kann dies hier nur kurz erläutert werden:

Auf der Basis einer operationalen Verankerung der Rede von der Form von Figuren (Linien, Flächen) in technischen Verfahren zur Formreproduktion wird in der Protogeometrie eine **vorgeometrische Terminologie** aufgebaut. Diese dient dann zur Formbestimmung von Gerade und Ebene bzw. zur Formulierung der zuvor genannten Eigenschaften. Diese Bestimmun-

gen geometrischer Grundbegriffe und die ihnen zu Grunde liegenden Handlungen sind zugleich eine Antwort auf das eingangs herausgestellte, offene didaktische Problem ihrer Sinngebung.

In der genannten Schrift werden nun u.a. drei Lernumgebungen zur Behandlung geometrischer Grundbegriffe auf diesem Hintergrund vorgeschlagen. Exemplarisch wurde im Vortrag die Lernumgebung zur Form von Figuren vorgestellt, mit Schüleraktivitäten, die an die technischen Verfahren zur Gestaltreproduktion (Kopieren) von Figuren anschließen. Auf die darauf bezogene Rede von der „Gestalt“ oder „Form“ von Figuren können dann die Formbestimmungen von Gerade und Ebene aufbauen. Diesen Grundformen sind zwei weitere Lernumgebungen gewidmet.

4. Ausblick

Am Schluss des Vortrages wurden das Design der vom Vortragenden entworfenen **Protogeometrie-Website** und einige Beispielseiten vorgestellt. Diese Website, die auch in englisch erscheinen wird, soll das ganze Spektrum der Protogeometrie (Grundlagen, Philosophie, Geschichte, Didaktik der Geometrie) erfassen und einer breiten Öffentlichkeit vorstellen. Sie möchte als Informationsquelle und Forum für Lehrende und Lernende (Schule, Hochschule) dienen und allen Interessierten offen stehen. Es ist zu hoffen, dass damit eine bessere Verbreitung und eine Weiterentwicklung der protogeometrischen Entwürfe erfolgen kann.-

Literatur

Amiras, L., 2000: *Protogeometrica. Systematisch-kritische Untersuchungen zur protophysikalischen Geometriebegründung*, Dissertation, Uni Konstanz, Konstanz 2000

Amiras, L., 2003: „Die Behandlung geometrischer Grundbegriffe im Mathematikunterricht aus der Sicht der operativen Geometrie“, in: Henn, H.W. (Hg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003*, S. 65-68.

Amiras, L., 2005: „Protogeometrie und Geometrieunterricht“, in: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*, Bielefeld 2005, S. 57-60.

Amiras, L., 2006: *Protogeometrie. Elemente der Grundlagen der Geometrie als Theorie räumlicher Figuren*. Habilitationsschrift. PH Weingarten. Weingarten.

Bender, P.; Schreiber, A., 1985: *Operative Genese der Geometrie*. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 12. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Krainer, K.1982: *Umwelterschliessung im Geometrieunterricht*. Klagenfurt.

Volk, D., 1984: *Geometrie aus dem Handwerk. Genauer hinschauen beim Mauern und Häuserbauen*. Göttingen.