Norbert CHRISTMANN, Kaiserslautern

Mathematik musikalisch gestaltet

Innerhalb der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik der TU Kaiserslautern befassten wir uns in den letzten Jahren auf der Suche nach spannenden Themen für den Mathematikunterricht auch mit den Beziehungen zwischen Mathematik und Musik. Der Zusammenfassung, Ergänzung und Vertiefung dieser Ergebnisse sollte ein entsprechendes Seminar im WS 2005/2006 dienen. Materialien zu diesem Seminar (Ausarbeitungen der Studierenden, Unterlagen zu den öffentlichen Vorträgen und zum Abschlusskonzert) können auf der Lernplattform der TU Kaiserslautern (http://ecampus.uni-kl.de) eingesehen werden. Eines unserer Themen war die musikalische Gestaltung mathematischer Sachverhalte. Die dabei gefundenen drei Grobformen werden in diesem Vortrag kurz skizziert.

1 Lieder über Mathematik

Lieder über die Mathematik entstehen durch Dichten von neuen Texten zu bekannten Melodien (z. B. zum Satz des Pythagoras nach der Melodie zur Loreley), eventuell auch durch eigene Kompositionen (z. B. F. WILLE, Hauptsatzkantate). Besungen wird die Mathematik, die Musik (Melodie) enthält keine erkennbaren Bezüge zum mathematischen Sachverhalt. Ein Beispiel (Mel.: „Komm lieber Mai und mache..“) enthält Bild 1.

Bild 1 (nach W. Lietzmann: Lustiges und Merkwürdiges v. Zahlen und Formen, S. 36)

2 Mathematik musikalisch abgebildet

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Kompositionen, in denen mathematische Sachverhalte „isomorph“ in Musik umgesetzt werden.

Beispiel 1a: Tom Johnson: Tango („Permutationstango“)

Der in Paris lebende Komponist Tom Johnson hat viele mathematische Themen mit minimal–musikalischen Mitteln gestaltet (z. B. Mersennesche Zahlen, Pascal-Dreieck, Euler-Harmonie, Block-Design und in *Narayanas Kühe* die Rekursionsformel a(n+3) = a(n) + a(n+2), weitere Hinweise auf der Homepage des Komponisten). Sein für Klavier komponierter und Yvar Mikhashoff gewidmeter ***Tango*** aus dem Jahr 1984 (Edition 75 Paris) hat die 120 Permuationen einer fünfelementigen Menge zum Thema. Schreibt man die Permutationen in der Reihenfolge

12345	12354	12435	12453	12534	12543
13245	13254	13425	13452	13524	13542
14235	14253	14325	14352	14523	14532
15234	15243	15324	15342	15423	15432

auf und ordnet man nacheinander der 1, 2, 3, 4, 5 die Tonhöhen d’’, f’’, gis’’, a’’, ais’’ zu, so erhält man die im ersten „Satz“ von T. Johnson benutzte Tonhöhenfolge. Die mit 2 (3, 4, 5) beginnenden entsprechenden Permutationen ergeben dann die Folgen der Sätze 2 bis 5. Den Anfang des Werkes (einschließlich Intro und Stimme für die linke Hand) zeigt Bild 2.

Bild 2 T. Johnson: Tango (Anfang)

Beispiel 1b: Der Tango OS

Eine einfache Variante des zuvor beschriebenen Tangos mit etwas mehr harmonischer Struktur erhält man, indem man für die einzelnen Takte eine Akkordfolge festlegt (z. B. einem andern Tango entnimmt) und die Permutation des Taktes dann auf die Töne dieses Akkordes (ergänzt durch ein oder zwei weitere Töne) bezieht. Im Beispiel „Tango OS“ wird die Akkordfolge

$$d^m, d^m, g^m, g^m, a^7, a^7, d^m, d^m, //: d^7, d^7, g, e^m, e^m, a^7, d^m, d^m ://$$

genutzt (Bild 3).

Bild 3: Tango OS (MIDI-File kann beim Autor angefordert werden)

Beispiel 2a: Jörg Schäffer: Fractions I (2000)

Der in München lebende Komponist Dr. Jörg Schäffer – promovierter Diplomchemiker – entnimmt mit der Vertonung mathematisch–naturwissenschaftlicher Sachverhalte die Themen seiner Kompositionen häufig seinem ursprünglichen Beruf (z. B. *periodic system*, *intermittenz I* (Feigenbaum-Diagramm)). In ***Fractions I***, einem für 12 Bläser geschriebenen Werk, werden die Stammbrüche 1/n (n < 47) zum Klingen gebracht.

Die (unendlichen) Dezimalbrüche werden als Zeichenketten über dem Alphabet 0, 1, …9, aufgefasst, durch die einander zugeordneten Paare

(0, Pause), (1,c’), (2,d’), …., (8,c’’), (9,d’’)

werden daraus Tonhöhenketten. Diese Zuordnung beinhaltet zwar eine „Phasenverletzung“ (1 und 8, 2 und 9 erhalten gleiche Tonhöhenklassen), wird aber wegen der im Vergleich zu anderen Zuordnungen besseren Durchschaubarkeit beibehalten. Bei den Notenwerten nutzt der Komponist im Falle ungerader Periodenlänge triolische Strukturen. Um mit 12 Instrumenten auszukommen führt er das Prinzip der „systematischen Auslöschung“ (aus 0.333333 wird 0.333xxx, x für Auslöschung) und Vorrangregeln ein. Die Komposition ist beendet, wenn die Motive der Periode aller periodischen (!) Dezimalbrüche 1/n, n = 1, 2, 3, … wenigstens einmal gleichzeitig mit den Motiven der Perioden aller anderen periodischen Dezimalbrüche 1/m, m = 1, 2, 3, … (mit n $\neq$m, m < n und m, n mit wenigstens einem, zu 2 und 5 teilerfremden Faktor) erklungen sind. Weitere Details findet man in der Beschreibung des Komponisten auf der o.a. Lernplattform (einschließlich MIDI–Einspielung).

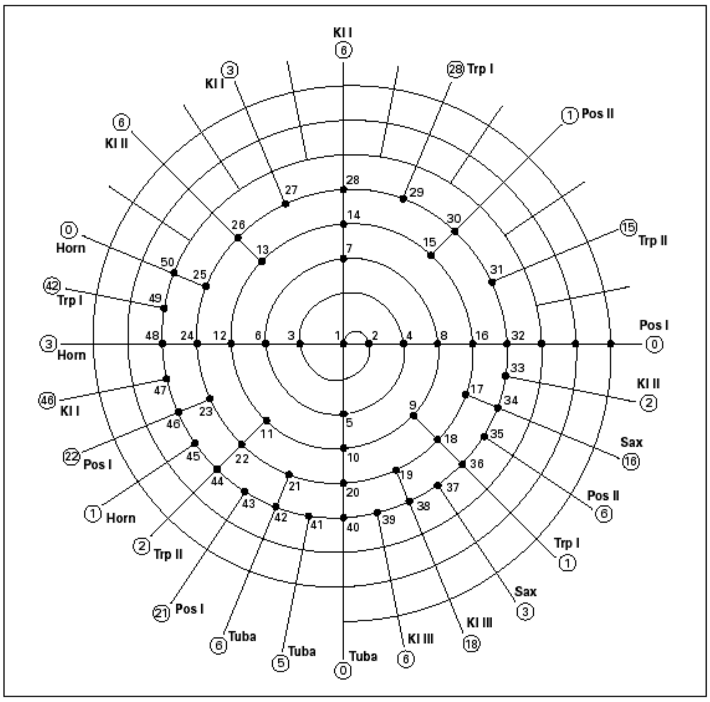

Bild 4: Besetzung und Zuordnung der Instrumente zu den Stammbrüchen mit Nenner n

Beispiel 2b: Fractions OS

Bei der Auffassung von Dezimalbrüchen als Zeichenketten wird nicht berücksichtigt, dass der „Wert“ der einzelnen Periodensequenzen immer geringer wird. Durch Verringern der Notenwerte und Lautstärke kann man einen unendlichen Dezimalbruch in endlicher Zeit einfangen (Ausnutzen von entsprechenden Parametern bei Sequenzerprogrammen).

3 Musikalisches Spielen mit mathematisch begründeten Motiven

Aus Platzgründen sei nur ein Beispiel angedeutet: Berechnet man für die Fibonacci-Folge 1, 2, 3, 5, 8,…. die 7-er-Reste, so erhält man nach Umrechnen in Tonhöhen (1 in c, 2 in d usw.) eine Tonhöhenfolge mit der Periode c, d, e, g, c, a, h, a, a, g, f, d, a, c, h, c. Dieses Motiv kann durch Hinzunehmen von Formelementen, Rhythmen einer Begleitautomatik usw. zu einem Walzer, Cha-Cha-Cha usw. ausgestaltet werden. Statt der hier vorgegebenen Skala kann man auch andere verwenden (z. B. Pentatonik, Zwölftonreihe), die Folge erweist sich in jedem Fall periodisch.

Weitere Informationen finden sich auf der o.a. Lernplattform oder können per Mail beim Autor (christmann@mathematik.uni-kl.de) angefordert werden.