Jens Holger LORENZ, Heidelberg

Die Repräsentation von Zahlen und Rechenoperationen im kindlichen Kopf

1. Repräsentationen im Denken

Wie rechnen wir? Natürlich gut und richtig, zumindest meistens. Aber was passiert dabei im Kopf, wie denken wir Zahlen und Rechenoperationen? Diese Frage betrifft das Denken, speziell Frage danach, wie wir Zahlen repräsentieren und damit umgehen. Ganz allgemein sind die Inhalte unseres Denkens, die Repräsentationen von etwas, das möglicherweise außerhalb von uns liegt, immer symbolisch. Das Format allerdings kann im Denken unterschiedlich sein: gestisch, bildhaft, sprachlich oder eben auch mathematisch-symbolisch. Diese Formate bilden die „Medien des Denkens“ (Aebli, 1980). Denken ist Prozess des Operierens mit diesen Symbolen in unterschiedlichen Formaten. Hierbei erzeugt/konstruiert Denken neues Wissen, ohne dass externe Information zusätzlich zur Verfügung stehen muss.

Ein Beispiel: Ein Grundschulkind lernt die 5er-Reihe auswendig. Damit ist sein Wissen in einer bestimmten Form, nämlich als verbale Kette gespeichert, mehr nicht. Durch Denken kann es aber den (logischen) Schluss ziehen, dass aus der Tatsache, dass 2x5=10, auch gelten muss, dass 4x5=20. Hier ist nicht gesagt, wie das Kind auf den Schluss kommt, ob es sich bildhaft die erste Tatsache 2x5=10 als beide Hände neben einander gelegt vorstellt und dann diese wiederum noch einmal vorstellungsmäßig daneben legt, oder ob andere Formen des Denkens vorliegen. Es gelangt aber zu einer Einsicht, die auf seinen Repräsentationen eines Denkinhalts beruhen.

Damit sind wesentliche Charakteristika des Denkens benannt: Es erzeugt Bedeutung, ist aktiv, kumulativ, idiosynkratisch und zielgerichtet. Wissen ist also keine Abbildung sondern eine (persönliche) Konstruktion mittels organisierender Schemata (Resnick, 1986) und Denken ist der Prozess des

Operierens mit Symbolen, die Wissen (subjektive Erfahrungen, Vorstellungen, Gedanken) repräsentieren.

Dies klingt erst einmal sehr einfach und einleuchtend, aber es stellt sich die Frage, wie die Repräsentationen in den Kopf des Kindes kommen. Piaget meinte, dass um die Welt „zu begreifen" das Kleinkind sensumotorische bzw. *enaktive Schemata* entwickelt; und diese stellen die Bausteine der weiteren kognitiven Entwicklung („buildung blocks", Rumelhart et al., 1986) dar. Nach Piaget entstehen die Schemata durch „Interiorisierung" der regulären Struktur von Handlungen. Auch dies erscheint auf den ersten Blick überzeugend, aber es erhebt sich die Frage, wie diese „Interiorisierung" vonstatten geht. Zumindest setzt dies voraus, dass Handlungsmerkmale im Gedächtnis fixiert und einer Abstraktion unterworfen werden (Campbell, 2005).

Versuchen wir den Vorgang am Beispiel der Mathematik zu verstehen: Addition als Handlungsvollzug ist die Vereinigung von Mengen, zumindest in dieser Form erleben die Kinder sie im ersten Schritt. Die Addition als Begriff, als Herauslösen aus der Wirklichkeit, ist aber eine doppelte Abstraktion: auf die Ebene der Mengen und von dort zur Ebene der Zahlen.

Die jeweiligen Repräsentationen, die den Kindern zu Verfügung stehen, sind unterschiedlicher Art: Der Handlungsvollzug (die Vereinigung von Mengen) ist eine enaktive Repräsentation, die überführt wird in eine ikonische Repräsentation und schließlich in eine sprachliche Repräsentation, bevor sie in eine mathematisch-symbolische Form mündet. Es bleibt als mathematikdidaktisches Forschungsproblem bestehen, diese Übergänge zu beschreiben und zu erklären.

Auch andere Ansätze, Formen des Wissen und der Repräsentationen zu beschreiben, führen auf empirische Widersprüche. Die Unterscheidung deklarativen vs prozeduralen Wissens löst die Theorieprobleme der Mathematikdidaktik nicht hinreichend auf. So wird deklaratives Wissen als semantisches Netzwerk aufgefasst, als Begriffsgefüge, wohingegen prozedurales Wissen als nichtbewusste kognitive Operationen fungiert, als „Produktionen" (Metapher: Computerprogramm).

Dies bedeutet aber innerhalb dieser Theorie, dass das deklarative Wissen *vor* vor dem prozeduralen Wissen entsteht. Aufgebautes prozedurales Wissen ist leichter abrufbar, aktivierbar, man denke etwa an die Einmaleins-Reihen, die als Lösungsverfahren für die Multiplikation dem Schüler zur Verfügung stehen, die schriftlichen Rechenverfahren usw. Bevor also diese automatisierten Verfahren als Routinen verfügbar sind, so die Theorie, müssten die semantischen Netzwerke, also die Begrifflichkeit etwa der Multiplikation vorhanden sein. Nun weiß jeder Praktiker, dass dem keineswegs so ist, gerade die leistungsschwächeren Schüler entfalten ein großes Wissen der Routinen, ohne über ein Verständnis (Netzwerk) der Begriffe zu verfügen. Hier widerspricht die Empirie der Theorie.

Ähnliches gilt auch für die vorschulische Phase des Erwerbs mathematischen Wissens: Der kindliche Zählvorgang gelingt als Aufbau prozeduralen Wissens bereits während des Spracherwerbs, also im Alter von 2;5-3 Jahren und durchläuft die bekannten Stufen der Zählkompetenz. Dies bedeutet, dass der Aufbau konzeptionellen, also deklarativen Wissens dem prozeduralen Wissen zeitlich nachgeordnet ist und auf diesem auffußt.

2 Repräsentationen beim Vorschulkind

Empirische Studien zeigen, dass bereits Säuglinge in sehr frühem Alter Mengenanzahlen unterscheiden können (Wynn, 1990, 1992). Nicht nur dies, im Alter von wenigen Monaten sind sie sogar in der Lage, Mengen (unabhängig vom Typ der Elemente) und auditiv dargebotene Signalsequenzen anzahlmäßig zuzuordnen. Heißt dies aber, dass es frühkindliche arithmetische Kompetenzen gibt? Dies würde der Annahme Piagets widersprechen, der davon ausgeht, dass sich Zahlen und Rechenoperationen als Ergebnis einer generellen, unspezifischen Entwicklung, insbesondere der Koordination von Seriation und Klassifikation entwickeln.

Damit stellt sich ein weiteres theoretisches Problem ein: Ist die Repräsentation von Zahlen und Rechenoperationen ein spätes Produkt, wie Piaget annimmt, oder liegen bereits entsprechende Repräsentationen beim Säugling vor? Und wie hätte man sich diese Repräsentationen zu denken?

Nachweislich entwickelt sich die Invarianz wesentlich früher, als die von Piaget angenommene Altersgrenze von fünf Jahren angibt (Gelman, 1990a, b). Zudem ist auf den in der Mathematikdidaktik immer noch schwelenden Streit hinzuweisen, ob sich die Invarianz oder das Zählen früher entwickelt. Ohne sämtliche empirischen Befunde hier referieren zu wollen, so lässt sich doch festhalten, dass sich die Konservierung sehr früh (<5 J) einstellt, es aber sich am kindlichen Verhalten nicht ablesen lässt, ob sich die richtigen Konservierungsantworten über Invarianzurteile, über schnelles Zählen oder über Subitizing, das heißt direkte Wahrnehmungsurteile einstellen. Es ist auf Grund der empirischen Lage anzunehmen, dass sich eine Entwicklung, eine Repräsentationsänderung einstellt, da jüngere Kinder einen höheren Zeitbedarf bei ihren Urteilen aufweisen als ältere Kinder. Dies erklärt sich, wenn man annimmt, dass jüngere Kinder zählen, ältere Kinder hingegen logisch schließen.

Kommen wir noch einmal zurück zu den frühkindlichen arithmetischen Anzahlunterscheidung, die sich sehr früh (<7 M) nachweisen lassen und die nicht modalitätsspezifisch nur nachweisbar sind, sondern auch intermodal (Starkey et al., 1990). Mehr noch, ab dem Alter von zwölf Monaten sind Kleinkinder in der Lage, Mengenordnung nach der Anzahl vorzunehmen (Sophian, 1996, 1998). Heißt dies nun, es existieren protoquantitative Schemata (Repräsentationen) im Kopf des Säuglings? Dies wäre zu weit gehend, aber es existieren in Bezug auf Mengen verschiedene Schemata, insbesondere ein

- „increase-decrease-Schema“ und ein
- „part-whole-Schema“

Stellt dies nun einen angeborenen Zahlenmodul dar? Ist das Urteil über die Anzahl einer Menge im Alter von wenigen Monaten lediglich ein „subitizing“, also ein Wahrnehmungsprozess (Glasersfeld, 1982; Mack, 2005) oder doch konzeptionell gesteuert (Mandler et al., 1982; Gelman, 1990)? Zumindest lässt sich auf dem aktuellen Stand der empirischen Befunde festhalten, dass es sich nicht (nur) um eine angeborene Fähigkeit im Bereich der visuellen Wahrnehmung handelt. Die beobachtete Intermodalität setzt vielmehr voraus, dass es ein einheitliches Format für numerische Informationen (Anzahl und Anzahlveränderungen) gibt. Die Anzahl aber ist etwas, das das Kind der Umwelt aufdrückt, sie ist nicht wahrnehmbar wie die Farbe „Blau“.

Andererseits setzt die intermodale Eins-zu-Eins-Zuordnung kein Wissen über Zahlen („3“), oder Bezeichnungen („+1“) voraus, sondern ist lediglich die kognitive Basis für (anschließendes) Lernen.

Die Entwicklung der Zahlwortreihe beginnt als (fehlerhafte) Sprachkette, ohne Bewusstsein von Prinzipien. Zählprinzipien entwickeln sich im Laufe des Gebrauchs der Zahlwortreihe, insbesondere die Prinzipien der

- das Prinzip der Eins-zu-Eins-Zuordnung
- das Prinzip der stabilen Ordnung
- das Kardinalprinzip
- Abstraktionsprinzip und schließlich
- das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung

Aber: Diese Prinzipien sind nicht bewusst und schon gar nicht explizit versprachlichbar. Und die Prinzipien werden in bestimmten Bereichen angewendet, sie sind aber nicht übertragbar.

Fasst man die Befunde zusammen, dann stellt man fest: Das Lernen verläuft in Phasen! Dies ist zwar keine umwerfende oder gar neue Entdeckung, es erklärt aber auch nicht, wie Zahlen und Rechenoperationen im Kopf repräsentiert werden und wie sie sich entwickeln. Wir stehen noch immer am Anfang des Problems.

3 Die Veränderung der Repräsentationen: Das RR-Modell („representational redescription“)

Ein für die Mathematikdidaktik brauchbares Konzept, um Veränderungen der Repräsentationen zu beschreiben, liegt in dem Modell der „Repräsentationsumorganisation“ vor (RR-Modell, Karmiloff-Smith, 1992). Es beschreibt Lernphasen, die jedes Lernen durchläuft, egal auf welcher Altersstufe und mit welchem Inhalt. Die Phasen sind also keine Stufen im Sinne Piagets.

In dem Modell ist die Phase I eine datengetriebene Lernphase, die aufgrund äußerer Stimuli abläuft. In dieser Phase ist Wissen nur implizit, als Prozedur verfügbar, nicht explizit oder bewusst und daher auch nicht verbalisierbar. Während dieser Phase kommt es additiv zu bereichsspezifischen repräsentationalen Verbindungen, die zur Verhaltensgeläufigkeit („behavioral mastery“) führen. Man denke etwa an die Zahlwortreihe oder Einmaleinsreihen, an das Aufsagen binomischer Formeln oder die schriftlichen Rechenverfahren incl. von Funktionsableitungen in der Analysis. Nichtverbalisierbar bedeutet nicht, dass die Formeln aufgesagt werden können, es liegt aber kein versprachlichbares Wissen (über Zusammenhänge) vor.

In der nächsten Phase, der Phase II (E1), kommt es zu einer Repräsentationsänderung. Jetzt kommt es zu einer internen Steuerung, welche die (auch/nur falsche) äußere Information lenkt. Die Repräsentation ist von dieser abgekoppelt, was einen Transfer der vorhandenen Repräsentation in andere Bereiche ermöglicht. Diese Abkopplung ist notwendig mit einem Detailverlust verbunden, d.h. sie ist weniger spezialisiert und daher ist eine Analogiebildung möglich. Aber auch in dieser Phase gilt, dass die Repräsentationen unbewusst und nicht verbalisierbar sind.

Auch in der folgenden Phase II (E2) ist das Wissen nicht verbalisierbar, aber es wird in neuem Format repräsentiert. Diese Repräsenationsänderung ist in einer Reihe von Studien belegt worden. So kommt es bereits im Vorschulalter zu bildhaften Vorstellungen bei der Vorhersage von Ergebnissen additiver oder subtraktiver Handlungen (4/5 Jahre; Vilette, 2002; Brannon, 2002). Auch werden die Repräsentationen in anderem Format darstellbar, etwa in Handlungen oder Zeichnungen (auf diese Form der Wissenserfassung wird auch im Grundschulalter selten zurückgegriffen!).

Erst in der Phase III (E3) werden die Repräsentationen bewusst und verbalisierbar. Gleichzeitig werden die Format-/Repräsentationswechsel häufig. So zeigen sich auch bei verbaler und nonverbaler Aufgabendarbietung von Additions- oder Subtraktionssitationen, dass von den Kindern in eine bildhaft-visuelle Repräsentation gewechselt wird (Klein & Brisanz, 2000; Rasmussen et al., 2004).

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass Wissen nicht mit Verständnis gekoppelt sein muss, dass im Rahmen kindlicher arithmetischer Lernprozesse eher das Gegenteil zu erwarten ist. Für Wissen ohne konzeptionelles Verständnis und notwendige Repräsentationsänderungen lassen sich beispielhaft anführen:

- Kinder zeigen ihr Alter mit Fingern, können aber weder ihr Alter sagen noch die Zahl mit Mengen oder in anderer Form darstellen;
- Die Verwendung des Kommutativgesetzes (a+b=b+a), welche die Kinder bei der min-Strategie der Addition anwenden, indem sie vom größeren Summanden weiterzählen; hierbei liegt keine explizite Erkenntnis der Ergebnisgleichheit (Baroody et al., 2003), sondern ein unterschiedliches konzeptionelles Verstehen, (Canobi et al., 1998) vor.
- Verwendung der Inversion (a+b-b); hierbei muss in der kindlichen Entwicklung zwischen einer *qualitativen* Inversion, die bereits im Vorschulalter vorliegt und die Ergebnisgleichheit bei Entfernung der hinzu gelegten Objekte, unabhängig von der Ausgangszahl konstatiert, und einer *quantitativen* Inversion unterschieden werden, die im Schulalter die Ergebnisgleichheit auch bei Entfernung anderer, aber gleich vieler Elemente anzugeben weiß (Rasmussen et al., 2003); noch schwieriger und daher erst in einer höheren Altersstufe zu erreichen ist die Inversion a+b-a. Sie bedarf einer sehr formalen Repräsentation.
- Zahlen werden im Vor- aber auch noch im Grundschulalter als Ergebnis eines Zählvorganges repräsentiert. Sie geben das Produkt eines Prozesses an. Dies steht in dieser Form der Zahlbereichserweiterung in den höheren Klassenstufen entgegen, da diese Repräsentationsänderung nicht vorgenommen wird, es erschwert

auch die Hinzunahme der Null zu den Zahlen, die von Kindern in einer bestimmten Entwicklungsphase noch abgelehnt wird.

- Die Zahlen als Anzahlbestimmung von Mengen und damit eng mit dem Zählprozess verbunden bzw. durch ihn repräsentiert stehen kraftvolleren Strategien im Weg. Nicht zuletzt diese Repräsentationsverkürzung stellt das Hauptcharakteristikum von Dyskalkuliekindern dar. Die notwendige Repräsentationsänderung im Grundschulalter (vorzugsweise in den Eingangsklassen) muss zu Längen führen, zur Repräsentation von Zahlen als räumliche Beziehungen (Relationalzahlaspekt).
- Die Rechenoperationen werden ebenfalls verkürzt repräsentiert, so etwa die Addition als Mengenvergrößerung; es bedarf einer Umorganisation, die mit der Überführung der Repräsentation von Zahlen als Mengeneigenschaften hin zu Zahlen als Längenbeziehungen einhergeht. So ist der Zählprozess meist an die Finger gebunden, die Zahl wird aber von einem bestimmten Zeitpunkt der Entwicklung verändert als Länge, etwa „Fünf“ als Handbreite, repräsentiert, die nun Analogiebildung und Transfers ermöglicht. Die Modalität der Repräsentation kann immer noch enaktiv sein: Im ersten Fall „Hinzutun“ (Mengen), im zweiten Fall „Sprung nach rechts“ in dem vorgestellten Zahlenraum, für den es nach neuesten Befunden neuronale Grundlagen als Entwicklungsbedingungen im menschlichen Gehirn gibt (Dehaene, 1999). Ähnliches gilt für die Subtraktion: In einer ersten Phase als Rückwärtszählen repräsentiert, dann als Mengenverkleinerung (Wegnehmen), das Analogiebildung auf verschiedene Mengen erlaubt, das schließlich in der Grundschule umorganisiert wird zu „Sprung nach links“ (Längen im vorgestellten Zahlenraum).

4 Der Erwerb von Konzepten

Der Erwerb mathematischer Konzepte gelingt durch die Verbindung verschiedener Repräsentationsformate, und das ist an dieser Stelle entscheidend. Für die Grundschule gilt, dass die Prototypen arithmetischer Operationen aus Handlungen entstanden sind, deren situative Charakteristik abgestreift wurde; sie bleiben aber dynamisch. Dies wurde im Vorangehend als enaktive Repräsentation bezeichnet. Die durchaus angemessene Repräsentation, die auf Handlungen beruht, hat aber ihre einschränkende Funktion. So sind z.B. bei Text- bzw. Sachaufgaben jene Situationen einfacher für Kinder lösbar, die eine dynamische Struktur aufweisen. Schwieriger sind statische Vergleichsaufgaben, die nicht der prototypischen Operations-vorstellung entsprechen. Auch das Gleichheitszeichen wird interpretiert als „ergibt“, das handlungsgebunden ist, nicht etwa als (wünschenswerte) numerische Gleichheit auf beiden des Zeichens. Aus diesem Grund stellen die symbolischen Darstellungen b=a+x, x=a+b oder x+a=b hohe Hindernisse im Verständnis der Grundschüler dar.

Die Formate bei Sachaufgaben gehen von einer kognitiv nicht lösbaren Transformation aus, nämlich von einer direkten Umsetzung von sprachlich dargebotenen Aussagen zur mathematisch-symbolischen Schreibweise (Transformation Sprache -> Symbol).

Dies wird auch in den gängigen Modellen zur „Mathematische Modellierung“ noch so gesehen, indem davon ausgegangen wird, dass die aus der Realität entnommene Situation überführt, „modelliert“ wird auf der mathematischen Ebene. Hier fände dann die Lösung statt, die wiederum rücktransformiert wird („interpretiert“) auf die Sachebene und dort noch einer Plausibilitätsprüfung unterzogen wird („validiert“). Dieser Modellierungskreislauf hat aber die Tücke, dass gerade der Prozess der Modellierung von der Sachebene auf die Ebene der Mathematik weiterhin unklar bleibt. Damit hat man aber didaktisch wenig Möglichkeiten, den „modellierenden Schülern“ Hilfestellungen zukommen zu lassen.

Die Mathematikdidaktik belässt die kognitive Modellierung von Sachkontexten als Blackbox; die Funktionsweise, d.h. die Transformation und damit der Lösungsprozess bleiben unklar. Insbesondere stimmt die Verkürzung auf die schlichte Transformation (Repräsentationsänderung) von Sprache zur Symbolik nicht mit den konzeptionellen Repräsentationen der Kinder überein. Mathematische Begriffe werden vielmehr in Form von Handlungen und/oder in Form bildhafter Vorstellungen über diese Handlungen repräsentiert, die sprachliche und mathematisch-symbolische Repräsentation ist in der Altersstufe der Grundschüler eher Beiwerk und wird lediglich zu kommunikativen Zwecken genutzt. Der mathematische Begriff ist erst dann hinreichend repräsentiert, wenn

Übersetzungsleistungen zwischen den verschiedenen Repräsentationsformaten gelingen.

So stellt die Aufgabe, eine bildhafte Darstellung herzustellen oder eine Geschichte zu erfinden, die zu dem Term 3+4x5 passt, die Schüler vor meist unüberwindbare Schwierigkeiten: Der Repräsentationswechsel gelingt nicht. Damit ist aber ein Lösen von Textaufgaben, das eine Repräsentationsumorganisation erfordert, erschwert bis unmöglich.

Die wechselweisen Übersetzungen von einem Repräsentationsformat in ein anderes sind der eigentliche Gegenstand des Sachrechnens. Das Lösen von Sachaufgaben ist nicht der Prozess des Modellierens einer Sachsituation. Es erscheint im Sinne der Kognitionspsychologie (Seel, 2000) plausibler anzunehmen, dass mentale Modelle von der Situation erstellt und mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Konzepten und ihren Repräsentationen verglichen werden (Passung). Die vorhandenen Repräsentationen der arithmetischen Operationen bestimmen daher die Fähigkeit des Schülers, Sachaufgaben zu lösen. Es ist keine Modellierungsfähigkeit als allgemeine Kompetenz anzunehmen. Dies macht allerdings den Unterricht keineswegs einfacher.

(Die Literatur zu diesem Beitrag ist auf meiner Homepage, www.jh-lorenz.de, einzusehen)