

Computeralgebrasysteme und Prüfungen

In mehreren Bundesländern gibt es die Möglichkeit in zentralen Abiturprüfungen ein Computeralgebrasystem (CAS) einzusetzen. In den vergangenen Jahren konnten an der Friedensschule im Münster im Rahmen des Sinus-Transfer Projekts [1] Erfahrungen im Einsatz von CAS in Klausuren und (dezentralen) Abiturprüfungen gesammelt werden. Auf der Basis dieser Erfahrungen werden am Beispiel von Nordrhein-Westfalen einige Besonderheiten des Einsatzes von CAS in zentralen Prüfungen beschrieben.

Aufgabeninhalt und Aufgabenkontext

Vergleicht man Aufgabenstellungen für zentrale Klausuraufgaben mit und ohne CAS-Einsatz zum gleichen Kontext, so kann man an einigen Stellen Unterschiede in der Aufgabenstellung feststellen. Diese Unterschiede zeigen auf, in welche Richtung sich Prüfungsaufgaben entwickeln. Dies wird an der folgenden Beispielaufgabe aus dem Sinus-Transfer-Projekt NRW, die als Vorbereitung für eine zentral gestellte Klausur konzipiert ist, deutlich (s. [2]):

Ein Kanuclub möchte für ein neues Clubhaus mit Anlegestelle ein Grundstück an der Wupper erwerben. Der bisherige Eigentümer ... bietet das Grundstück ... zu einem Preis von 12 € pro m² an. Die Vermessung ergab eine Breite von 460 m. Von der Mitte der geraden Gebietsgrenze beträgt die Distanz zum Wasser 50 m.

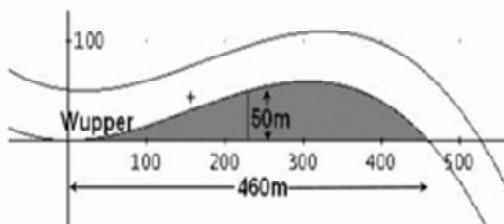


Abb. 1: Aufgabe ohne CAS

a) Erläutern Sie, dass der Uferverlauf im angegebenen Koordinatensystem durch $f(x) = a \cdot x^2(x - 460)$ beschrieben wird und berechnen Sie a . (Kontrollergebnis: $a = -\frac{1}{243340}$)

b) Berechnen Sie den Kaufpreis für das Grundstück.

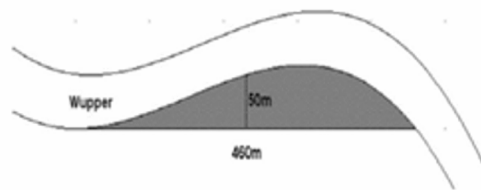


Abb. 2: Aufgabe mit CAS

a) Ermitteln Sie eine Funktion, die den Uferverlauf beschreibt bzgl. eines geeigneten Koordinatensystems und berechnen Sie die Höhe des Kaufpreises.

Aus diesem Beispiel lässt sich für CAS-Aufgaben im Unterschied zu Aufgaben ohne CAS-Einsatz der folgende Trend ableiten:

- CAS-Aufgaben sind weniger kleinschrittig.
- Es ist keine Funktionsgleichung vorgegeben.
- Es ist kein Koordinatensystem vorgegeben.
- Es sind keine Zwischenergebnisse angegeben.
- Die CAS-Aufgabe ist offener formuliert.

Dennoch sind die Unterschiede zwischen den beiden Aufgaben eher gering. Es gibt auch keinen Hinweis darauf, dass mathematische Inhalte in den Richtlinien speziell für CAS-Aufgaben verändert werden. Für den Einsatz von CAS im Abitur gelten im Prinzip keine anderen inhaltlichen Vorgaben als für herkömmliche wissenschaftliche oder grafikfähige Taschenrechner. Lediglich im Grundkurs können zusätzlich auch ganzrationale Funktionenscharen vorkommen [3]. Unterschiede sind dagegen eher bei den verwendeten Aufgabenkontexten zu erkennen. In Beispielaufgaben für den CAS-Einsatz werden häufig Funktionsanpassungen, Gleichungssysteme und Matrizenmultiplikationen verwendet. Hier setzt sich der Trend durch, die Aufgaben den Möglichkeiten des CAS anzupassen. Daher beinhalten die verwendeten Kontexte häufig Messwerte (z. B. Verlauf eines Brückenbogens, Wachstum von Fischen, etc.), die mit Hilfe von Funktionen beschrieben werden sollen und Prozesse (z. B. Kundenwanderungen), die durch Matrizen dargestellt werden können.

Einsatz unterschiedlicher CAS in zentralen Prüfungen

In den Schulen werden zurzeit unterschiedliche CAS verwendet. Sie unterscheiden sich in der Handhabung und in der Leistungsfähigkeit. Bezogen auf die Handhabung sind zunächst PC-CAS und Handheld-CAS zu unterscheiden. Hier ist die Handhabung der PC-CAS in der Regel komfortabler und daher meist auch schneller als die der Handhelds. Die Handhelds haben nur beim Einschaltvorgang einen zeitlichen Vorteil, der aber bei einer Prüfung keine Rolle spielt. Die komfortablere und schnellere Handhabung sowie die Rechengeschwindigkeit der PC-CAS können daher zu Vorteilen in zentralen Prüfungen führen. Allerdings ist die Leistungsfähigkeit eines CAS ist – verglichen mit dem Zeitfaktor – in einer Prüfung sicherlich entscheidender. Es gibt Aufgaben, die mit einigen CAS nicht oder nur sehr umständlich bearbeitet werden können, während sie von anderen Systemen schnell und einfach gelöst werden. Dies soll an zwei Beispielaufgaben für das Zentralabitur 2007 erläutert werden:

Beispiel 1: Die Brücke über den Großen Belt

In der Aufgabe wird eine Brücke beschrieben, die unterschiedlich modelliert werden soll. Eine der verlangten Modellierungen ist eine Kettenlinie. Dazu sollen die Konstanten a und b in der Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot (e^{b \cdot x} + e^{-b \cdot x})$ bestimmt werden [4]. Mit dem PC-CAS Derive oder dem Handheld Voyage 200 lässt sich das durch die beiden Funktionswerte gegebene Gleichungssystem direkt eingeben und lösen. Mit dem Handheld-CAS Casio Classpad 300 führen entsprechende Eingaben zu einem Fehler.

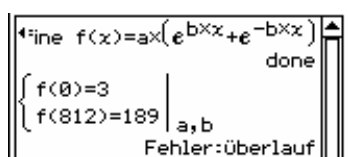


Abb. 3: Classpad-Ergebnis

Erst das Definieren einer Hilfsfunktion oder die Suche nach einer numerischen Lösung führt zum Ziel. Hier können also nur Teile der Aufgabe mit dem Rechner ausgeführt werden. Dazu müssen den Schülerinnen und Schülern die Schwächen

des Rechners im Bereich der Exponentialfunktionen bekannt sein. Bei diesem Beispiel handelt es sich aber nicht um ein Problem eines bestimmten CAS, sondern es gibt aufgabenabhängig auch den umgekehrten Fall.

Beispiel 2: Mathematik und Paläontologie

In der Aufgabe soll der Rücken eines Dinosauriers mit Hilfe von Funktionen beschrieben werden. Für den Schwanzbereich bietet sich eine exponentielle Regression an [5]. Mit Derive kann keine exponentielle Regression direkt durch die verwendeten Punkte gelegt werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen die Daten zunächst linearisieren. Dann kann eine lineare Regression berechnet werden und schließlich in eine Exponentialfunktion umgewandelt werden. Es ist damit folgende Überlegung zusätzlich nötig: $y = a e^{bx} \Rightarrow \ln(y) = bx + \ln(a)$. Mit dem Classpad dagegen kann die Regression direkt durchgeführt werden. Die zusätzliche Überlegung zur Linearisierung und das Übertragen der linearen Regression in eine Exponentialfunktion entfallen.

Diskussion

Die Bearbeitung realitätsnaher Aufgaben mit einem Computeralgebrasystem erfordert zwei Übersetzungsprozesse (s. Abb. 4). In den bisherigen Überlegungen zum Zentralabitur, wurde der Schritt von der Mathematik zum CAS und zurück kaum betrachtet. Die vorhandenen Operatoren berücksichtigen nicht speziell den CAS-Einsatz. Hier wäre zu überlegen, ob für CAS-Aufgaben nicht auch CAS-spezifische Operatoren, wie z. B. *berechne numerisch* oder *berechne algebraisch* einige Schwierigkeiten verhindern könnten. Ein ähnliches Ziel könnte durch die Einschränkung der erlaubten CAS im Zentralabitur auf wenige Modelle erreicht werden. Dies

hätte außerdem den Vorteil, dass die Schülerinnen und Schülern weiterhin aus den Möglichkeiten des Rechners frei wählen könnten und nicht durch Operatoren eingeschränkt sind. Dann gäbe es für die Gestaltung der Aufgaben wieder mehr Freiräume und es bestünde die Hoffnung, dass auch neue Kontexte für Abituraufgaben gefunden werden können.

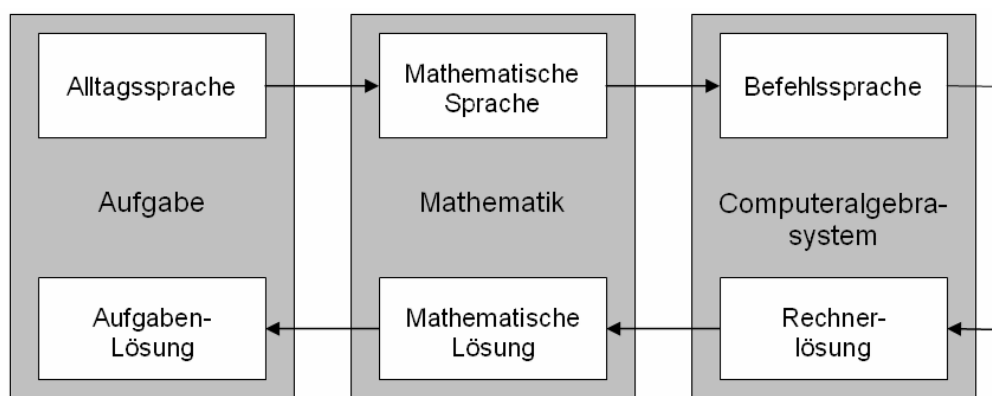


Abb. 4: Übersetzungsprozesse

Um eine größere Gleichwertigkeit von Aufgaben in zentralen Prüfungen zu erreichen, wäre eine Festlegung von CAS-Standard-Techniken für Abituraufgaben in den zu erstellenden Kernlehrplänen für die Sekundarstufe II sinnvoll. Eine solche Liste könnte beispielsweise im Bereich Analysis unter anderen die folgenden Punkte enthalten: Gleichungen lösen (Exponentialgleichung, Wurzelgleichung, Polynomgleichung), Gleichungssystem lösen (Lineares Gleichungssystem, Exponential-Gleichungssystem), Regression bestimmen (Lineare Regression, Exponentielle Regression), Ableitung und Integrale bestimmen, Dies wäre zusätzlich für alle Beteiligten eine Orientierungshilfe bei der Vorbereitung auf die Prüfungen.

Literatur:

- [1] Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur: SINUS-Transfer NRW, Berichte aus dem Modellversuch, Klett, Stuttgart 2006
- [2] <http://www.learn-line.nrw.de/angebote/sinus/projekt2/mustervergkl.pdf> (25.01.2007)
- [3] <http://www.learn-line.nrw.de/angebote/abitur-gost-07/faecher.php> (25.01.2007)
- [4] G. Greefrath & U. Mühlenfeld (Hrsg.): Realitätsbezogene Aufgaben für die Sekundarstufe II, Bildungsverlag Eins, Troisdorf 2007
- [5] <http://www.learn-line.nrw.de/angebote/abitur-gost-07/download/ma-kl1-cas-aufgabe-1.pdf> (25.01.2007)