

Reinhard OLDENBURG, Heidelberg

## **Was Schüler über CAS wissen – was Schüler über CAS wissen sollten**

Computeralgebrasysteme sind die komplexesten der bisher im Mathematikunterricht eingesetzten Softwareprodukte. Diese kompetent nutzen zu können ist eine Herausforderung.

### **1. Modellvorstellungen**

Erklärung ist *eine* wichtige Funktion von Modellen. Geeignete Modellvorstellungen können dem Benutzer das Verhalten des Computers erklären und damit Hilfen zu seiner korrekten Benutzung geben. Solche Modellvorstellungen geben das Gefühl eines Verständnisses und erhöhen damit die emotionale Akzeptanz des Werkzeugs.

Selbst wiederum ein Modell für diese Sachverhalte gibt die folgende Modellvorstellung zur numerischen Nullstellensuche, wie sie beispielsweise von grafikfähigen Taschenrechnern angeboten wird:

Bei der numerischen Nullstellenberechnung handelt es sich um eine rechnerische Suche, bei der, beginnend mit einem Startwert, ein schrittweises Herantasten erfolgt, bis der Funktionswert sehr klein ist.

Dieses Modell erklärt:

- Nullstellen werden evtl. nicht exakt gefunden
- Es können auch fälschlich Nullstellen gefunden werden, z.B. bei  $f(x)=x^2+10^{-30}$ , weil der Funktionswert unter der Toleranzgrenze liegt
- Es kann höchstens eine Nullstelle gefunden werden
- Für weitere Nullstellen: Start von anderer Stelle (dazu ist Wissen über die Funktionstypen wichtig)

Nach Beobachtungen im Unterricht zerfallen die Schüler in der Sekundarstufe II in zwei Gruppen: Diejenigen, die diese Modellvorstellungen erworben haben, benutzen die numerische Nullstellensuche kompetent, während die anderen diese als nicht nützlich empfinden und ablehnen.

Damit stellt sich folgende Aufgabe: Es sollte identifiziert werden, welche Modellvorstellungen zur Arbeit von Computeralgebrasystemen analog in der Lage sind, die kompetente CAS-Nutzung anzuleiten.

### **2 CAS – geeignete Modellvorstellungen**

Hier soll, analog zum obigen Modell, ein einfaches Modell zur technischen Basis von CAS vorgestellt werden. Es umfasst folgende Komponenten:

- Trennung: Rechenzentrale – Darstellung (EVA). Dies erklärt, dass das, was auf dem Bildschirm steht, erst durch die Verarbeitung wirksam wird
- CAS haben eine Variablen-Wert-Tabelle, darin darf die Wertespalte leer sein. Vorhandene Werte werden immer eingesetzt, aber keine automatische Variablenbelegung z.B. bei solve. Dies erklärt, wie man zwischen Zuweisung und Substitution wählt, und dass  $x:=y$ ;  $y:=x$  unzulässig ist.
- Alle Objekte sind (verallgemeinerte) Terme, aufgebaut aus einem Kopf und einer Anzahl von Operanden (Baumdarstellung). Dies erklärt u.a. die Wirkungslosigkeit von  $\text{subs}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, x^2+y^2=r^2)$
- Operationen werden durch Regelbefolgung durchgeführt, d.h., wenn die Form passt, wird ausgeführt: In Maxima kann man beispielsweise 0 zu einer Zeichenkette addieren
- Die Auswertung ist ein Ersetzen von Teiltermen nach Regeln. Diese sind teilweise nur eingeschränkt gültig:  $\sqrt{x^2}$  wird nicht vereinfacht
- Sonderfälle werden i.d.R. nicht beachtet. Das erklärt z.B., dass  $\text{subs}(\text{int}(x^n, x), n=-1)$  falsch ist.
- Die Art der Daten legt mögliche Operationen fest (z.B. Menge und Liste nicht verwechseln, Term oder Funktion angeben)

Dieses Modell lässt noch vieles unspezifiziert. Allein zum Teilbereich des Gleichungslösens muss ein detailliertes Modell noch viel mehr umfassen:

- Lösungen sind Substitutionen, die die Ausgangsgleichung zur Identität machen
- Sonderfälle werden i.allg. nicht beachtet, z.B. in  $a*x=b$
- Die Variablennamen sind bedeutungslos, man kann  $a*x=b$  nach  $a$  lösen
- Für Polynomialgleichungen über Grad 4 gibt es evtl. keine Darstellung mit Wurzeln: Darstellung durch algebraische Zahlen RootOf-Objekte
- Lineare und polynomielle Gleichungssysteme sind immer lösbar
- Transzendente Gleichungen können nur in Ausnahmefällen symbolisch gelöst werden.

Dies demonstriert die angesprochene Komplexität.

### 3 Schülervorstellungen

Besitzen Schüler nach längerer Arbeit mit einem CAS angemessene Vorstellungen, die dem skizzierten Modell nahe kommen? Um dem zumindest in wenigen Fällen nachzugehen, wurde den 18 SchülerInnen (8w, 10m) eines Mathematik-Leistungskurses kurz vor dem Abitur ein Fragebogen vor-

gelegt. Die Schüler benutzen des CAS-Taschenrechner TI92+ seit Beginn der elften Jahrgangsstufe.

In einem ersten Teil wurden affektive Items durch Zustimmung zu vorgelegten Aussagen auf einer Skala von -3 bis +3 erhoben:

Item Skala -3..3	Mittel	Stdabw.
1 Ich arbeite gerne mit dem TI89 bzw 92	1,0	0,7
2 Der TI hilft, eigene Ideen bis zu Ende zu verfolgen	0,76	1,0
3 Ich kenne mich mit dem TI ganz gut aus	0,66	0,8
4 Ich vertraue den Ergebnissen des Rechners	0,44	0,98
5 Die Bedeutung der Ausgaben ist immer klar	0,11	1,1
6 In Situationen ohne den Rechner fühle ich mich unsicher	-0,67	1,14

Ergebnisse: Items 1 und 3 korrelieren fast signifikant ( $p=5,7\%$ ), Items 3 und 6 korrelieren interessanterweise signifikant negativ. Es gibt keine Korrelation zwischen Items 1 und 4:  $r=-0,078, p=76\%$ .

Varianzaufklärung zeigt, dass die Leistungsvarianz zu 51% von affektiven Variablen erklärt wird, besonders wichtig sind dabei die Items 2 und 5. Dagegen ist Item 4 (Vertrauen) praktisch unwichtig (Schlussfolgerungen: SuS Vertrauen oft zu unrecht!).

#### 4 Schülerleistungen

In einem Testteil ohne Zugang zum CAS sollten die Schüler einige CAS-Ausgaben interpretieren (in Klammern die Anteile der Nennungen):

Item 1: Der TI gibt bei der Eingabe  $\text{factor}(1+x+x^2+x^3+x^4)$  die Ausgabe  $1+x+x^2+x^3+x^4$ . Das bedeutet...

- Der TI konnte keine Produktdarstellung finden (50%)
- Es gibt definitiv keine Produktdarstellung, ohne irrationale Zahlen (50%)

Item 2: Der TI gibt bei der Eingabe  $\text{solve}(x^2-y^2/2+2*x=5 \text{ and } x^2+2*x-5/3+1/3*y^2-4/3*y=0, \{x,y\})$  die Ausgabe  $\text{false}$ . Das bedeutet...

- Der TI konnte keine Lösung finden (28%)
- Es gibt definitiv keine reelle Lösung (28%)
- Es ist bewiesen, dass es überhaupt keine Lösung gibt (56%)

Item 3: Der TI gibt bei der Eingabe  $\text{solve}(e^x+x=0, x)$  die Ausgabe  $e^x+x=0$ . Das bedeutet...

- Der TI konnte keine Lösung finden (66%)
- Es gibt definitiv keine reelle Lösung (28%)
- Es ist bewiesen, dass es überhaupt keine Lösung gibt (0%)

Item 4: Zeigt die folgende Rechnung einen Fehler des Computeralgebrasystems?

$(1/x^2, x) ? F$       Antwort:  $F = -1/x$

$(F|x=1) - (F|x=-1)$       Antwort: -2

$(1/x^2, x, -1, 1)$       Antwort: Unendlich

Korrekte Lösung: 61%

Es gab auch Aufgaben, in denen das CAS zugelassen war:

Item 5:  $\text{expand}(\log(3*a))$  liefert eine Summenschreibweise,  $\text{expand}(\log(a*b))$  dagegen nicht. Woran liegt das? Kann man den zweiten Term trotzdem mit dem TI in Summenform schreiben lassen?

Korrekte Lösung: 0%

Schlussfolgerungen: Schüler können nur bedingt verlässlich einschätzen, ob negative Antworten mathematische oder technische Gründe haben. Immerhin gibt es dazu Vorstellungen, obwohl diese Fragen im Unterricht nicht thematisiert wurden

## 5 Perspektiven für die Lehre

CAS stellen ein didaktisches Problem dar, denn geeignete Modellvorstellungen sind wesentlich komplexer als beim GTR. Der Informatikunterricht könnte, wo er erteilt wird, hier Wesentliches zuliefern: Es ist möglich, die Grundfunktionen eines Computeralgebrasystems in einem Modell-System zu rekonstruieren („Working model eines CAS in 500 Programmzeilen“). Allerdings besteht derzeit seitens der Informatikdidaktik kein Interesse an einer solchen fächerverbindenden Zusammenarbeit.

Man kann aber Leistung und Grenzen von CAS auch ohne Programmieren zum Unterrichtsgegenstand machen. Zum einen kann auf mathematischer Ebene geklärt werden, welche Problemklassen algorithmisch berechenbar sind (und in CAS typischerweise implementiert sind), so dass man z.B. aus einer negativen Antwort des CAS schließen kann, dass keine Lösung existiert. Zum anderen kann man die Arbeitsweise eines CAS auch mit Papier, Bleistift und Radiergummi nachspielen. Dazu müssen zunächst CAS-übliche Termdarstellungen behandelt werden z.B.  $x+y+5$  als  $(+ x y 5)$  und  $x^2+3x-y/z$  als  $(+ (^ x 2) (* 3 x) (* -1 (* y (^ z -1))))$ . Diese „Lispish“-Schreibweise macht das Assoziativitätsgesetz überflüssig, erlaubt ein Sortieren der Terme und außerdem werden - und / als Operatoren unnötig!

Die CAS-Regeln kann man explizit aufschreiben, zB:

$(\text{expand} (* A (+ B1 B2 ...))) \Rightarrow (+ (* A B1) (* A B2) ...)$

und auf Papier ausführen. Erstaunlich viel ist so erreichbar!

**Literatur: Bitte unter [oldenburg@ph-heidelberg.de](mailto:oldenburg@ph-heidelberg.de) erfragen.**