

Heinz SCHUMANN, Weingarten

## **Der Virtuelle Raum als interaktiver Handlungsraum für den Geometrieunterricht**

Handlungsräume oder Aktionsräume im Geometrieunterricht für ganzheitliches geometrisches Lernen (Kennzeichen: „geometrische Primärerfahrung“) sind: der lokale Raum (z. B. für die Anfertigung physischer geometrischer Modelle) und der Umgebungsraum (z. B. für das Vermessen im Gelände, den geometrischen Lerngang). Handlungsräume im Geometrieunterricht mit eingeschränktem ganzheitlichen Lernen (Kennzeichen: „geometrische Sekundärerfahrung“) sind: der globale Raum (z. B. für die „Erdmessung“) und der Weltraum (z. B. Entfernungsberechnung von Himmelskörpern). Hinzu tritt heute, ergänzend zu diesen Handlungsräumen, der Virtuelle Raum als geometrischer Handlungsraum. Der Virtuelle Handlungsraum gehört in anderen Bezügen bereits zur Lebenswirklichkeit der Schüler und Schülerinnen (z.B. in 3D-Computerspielen) und der Erwachsenen (z. B. in Planungssoftware für die Wohnraumeinrichtung). Unter dem Virtuellen Raum verstehen wir hier den „interaktiven Sicht-raum“ als eine (Zentral- oder Parallel-) Projektion des dreidimensionalen Koordinatenmodells der reellen euklidischen Geometrie in synthetischer Interpretation auf den Bildschirm. (Wie in den 3D-CAD-Systemen, ist dieser Raum begrenzt auf einen würfelförmigen Ausschnitt, an dessen Rand die im Würfeläußeren liegenden Objektteile geklippt, d. h. abgeschnitten werden.) Der so definierte virtuelle Raum kann nur beschränkt den physischen Raum simulieren. Seine Wahrnehmung bleibt rein visuell; die Benutzereingabe ist taktil reduziert auf Mausbewegungen und Tastaturbetätigung. – Vom Virtuellen Raum als interaktivem Sicht-raum ist der großräumigere Cyberspace zu unterscheiden. In diesem sind die Grenzen zwischen den Systemen Mensch und Computer partiell aufgehoben mittels geeigneter Schnittstellen: die Datenbrille für die Ausgabe, ausgerüstet mit stereografisch arbeitendem Bildschirmen; der Datenhandschuh oder „Datenstift“ für die Eingabe. In ihm hat der Mensch die (illusionäre) Wahrnehmung, sich in einer simulierten dreidimensionalen Welt ganzkörperlich zu bewegen und zu betätigen. Eine Beschreibung des Cyberspace für das raumgeometrische Lernen (Schumann 1996) ist heute bereits Wirklichkeit geworden: erste Entwicklungsergebnisse der Nutzung des Cyberspace als Handlungsraum für den Geometrie-Unterricht mit dem Konzept der „Erweiterten Realität“ (Augmented Reality) liegen vor (Kaufmann 2004). Dieses aus den Bedürfnissen der industriellen Praxis entwickelte Konzept der Erweiterten Realität erweist sich auch für das Lernen von Schulgeometrie tragfähig und zukunftsweisend.

Es stellen sich die folgenden **generellen didaktischen Forschungsfragen**:

**Welche Eigenschaften konstituieren den Virtuellen Raum als interaktiven Handlungsraum in einem interaktiven Werkzeug für den Geometrieunterricht? Von welcher Art sind Mentale Modelle des geometrisierten Raumes, die durch den Virtuellen Raum in einem solchen Werkzeug vermittelt werden?**

Wir beschränken uns hier auf die unvollständige, vorläufige und stichwortartige Beantwortung der ersten Frage, wohl wissend, dass beide Fragen grundlegend für eine formative Software-Entwicklung sind. Informationen zu einer solchen Beantwortung liefert eine Rekonstruktion der bereits in prototypische Werkzeuge wie Cabri 3D und Archimedes 3D Geo implementierten Eigenschaften des virtuellen Raumes (Welches mentale Modell des virtuellen Raumes haben die Autoren dieser Werkzeuge?). – Es kann keine Definition eines idealen Werkzeugs für das schulgeometrische Arbeiten im virtuellen Raum geben!

Wir unterscheiden im Folgenden vier interdependente Eigenschaften:

**Fachgeometrische Eigenschaften, schulgeometrische Eigenschaften, Wahrnehmungseigenschaften, software-technische Eigenschaften.**

**(1) Fachgeometrische Eigenschaften:** Die synthetische Raumgeometrie kann nach Hilbert (1899) durch die **Inzidenzaxiome**, die das Zusammenspiel von Punkten, Geraden und Ebenen regeln, definiert werden. Hinzu kommen noch die **Axiome für Anordnung und Metrik** im Rahmen eines didaktisch orientierten Axiomensystems.

Zu den Axiomen der synthetischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes müssen in diesem als „Konstruktionsraum“ **die räumlichen Postulatkonstruktionen** in Erweiterung der ebenen Postulatkonstruktionen ausgeführt werden können (u. a. Schumann 2006).

**(2) Schulgeometrische Eigenschaften:** Objekt- Abbildungs- und Operationsrepertoire (kompatible zur Schulgeometrie), Simulation physischer Handlungen, Dynamische Visualisierung und Manipulation (Zug-Modus), Transparenz der Werkzeug-Module, Schnittstelle zur analytischen Geometrie, Schnittstelle zur physischen Realität, ...

**(3) Wahrnehmungseigenschaften:** *Raumtiefe* (die Tiefenwahrnehmung wird durch Hintergrund-/Vordergrundunterscheidung mittels Farbverblassung/-intensivierung, Konturabschwächung/-verstärkung und Objektverkleinerung/-vergrößerung hervorgerufen), *Orientierung* (unten, oben, links, rechts usw.), *Offenheit* (nach allen Seiten), *Beweglichkeit* (freie Bewegung in drei Freiheitsgraden, eine räumliches Eingabegerät fehlt!), *Realitätsbezug* (Simulation physischer bzw. physisch vorstellbarer Handlungen versus Verfremdung durch aphysische Handlungen; Problem: Schwerkraftfreiheit), ...

**(4) Software-technische Eigenschaften:** Direkte Interaktion mit System und Inhalt, Automatische Animation, Polymorphe Optionen, „Angemessenes“ Objekt-Rendern, Objekt-Attribute zur Unterstützung der Wahr-

nehmung, Zug-Modus (differenzierter als in 2-dimensionalen DGS), „Intelligente“ Verwaltung der Objektsichtbarkeit, Selbsterklärung, ...

Der folgende Diskussionsvorschlag für die Inhalte des Lehrens und Lernens von Raumgeometrie im virtuellen Raum basiert auf der pragmatischen Grundlegung der interaktiven Raumgeometrie im Geometrieunterricht: Die raumgeometrischen Phänomene, die durch interaktive, im virtuellen Raum ausführbare Konstruktionen, Messungen, Manipulationen und Visualisierungen erzeugt werden und die wir kraft unserer räumlichen Anschauung wahrnehmen und internalisieren, bilden eine wesentliche Grundlage für raumgeometrische Erkenntnis- und Theoriebildung. – Eine solche Grundlegung wird auch von Felix Klein (1872) gestützt:

*„Ueber den Werth räumlicher Anschauung. ... Ganz anders stellt sich ... die Frage nach dem Werthe der räumlichen Anschauung überhaupt. Ich stelle denselben als etwas selbständiges hin. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen (gemeint ist hier das „Erlanger Programm“), nur eine veranschaulichte Form abstracterer Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst. Wenn wir so, neben und unabhängig von der reinen Mathematik, Geometrie als etwas Selbständiges hinstellen, so ist das an und für sich gewiss nichts Neues.“*

### **Lehr- und Lernplan für die Klassen 5 – 12**

Generelle Intention des Lehrplans: Der virtuelle Raum ist als Handlungs- und Erfahrungsraum für das Lehren und Lernen von Geometrie zu nutzen. Im Vordergrund steht dabei die phänomenologische Aneignung raumgeometrischen Wissens und die stärkere Vernetzung ebener mit räumlicher synthetischer Geometrie. Die Fähigkeit zum geometrischen Arbeiten im virtuellen Raum ist dabei als Bestandteil der im Geometrieunterricht zu erwerbenden visuellen Kompetenz anzusehen. Die folgenden Inhalte bieten auch einen Rahmen für die entsprechende Lehrerausbildung. Die nachstehenden Inhalte können auch als Themen für individuelle mathematische Schulcurricula, für Projekt-, Facharbeiten und für fächerverbindenden Unterricht ausgewählt werden, da nicht zu erwarten ist, dass der Behandlung der Geometrie im virtuellen Raum ein Platz im deutschen Kerncurriculum eingeräumt werden wird. Eine punktuelle Nutzung des virtuellen Raumes im Geometrieunterricht wirft natürlich das Problem der medienbezogenen systematischen Wissensentwicklung und -strukturierung auf.

**Lehrplan Klasse 5/6:** Raumgeometrische Grundbegriffe; erste Formenkunde der Quader, Prismen, Pyramiden und der Platonischen Körper; geometrische Körper visualisieren, manipulieren, nach Form, Größe und Lage variieren, auf- und abfalten, zusammensetzen, zerlegen und puzzeln, vermessen; Dreitafelbild (Vorderansicht, Draufsicht und Seitenansichten von Körpern).

**Lehrplan Klasse 7/8:** Analogisieren ebener zu räumlichen geometrischen Konstruktionen (Kreisbogen- und Geradenlineal-Konstruktionen zu Kreisbogen- und Ebenenlineal-Konstruktionen; Analogisierung der Postulat- und Grundkonstruktionen); Analogisieren der ebenen zu den räumlichen Kongruenzabbildungen; Konstruktionen mit Verwendung räumlicher Kongruenzabbildungen; Zurückführung räumlicher auf ebene Konstruktionen; Konstruierende Formenkunde der Parallelepipede („Parallelogramm-Hexaeder“), Prismen und Antiprismen; Polyedererzeugung mittels konvexer Hülle von Punkten, Strecken und Polygonen („Von der Konstruktion zum referenzierbaren Objekt“).

**Lehrplan Klasse 9/10:** Konstruierende Formenkunde für die Berechnungen an geometrischen Körpern, auch für Pyramiden, Pyramidenstümpfe und Prismatoide; Polyedrische Approximation von Zylinder, Kegel und Kugel; interaktive Messungen und Berechnungen an Körpern; Analogisierung der Dreiecksgeometrie zur Tetraedergeometrie; Analogisierung der ebenen zur räumlichen zentrischen Streckung; Modellieren von realen Objekten und einfachen beweglichen Vorrichtungen; Generierung von Polyeder als konvexe Hüllen; erste Behandlung der Parallel- und Zentralprojektion.

**Lehrplan Klasse 11/12:** Veranschaulichung analytischer Raumgeometrie (auch konstruierendes und messendes Lösen von Aufgaben); fortgeschrittene Behandlung der Parallel- und Zentralprojektion; Anwendungen der Parallel- und Zentralprojektion (Schattenbilder, Malerperspektive, Computergrafik etc.); konstruierende Behandlung und Anwendung der stereografischen Projektion und Kugelspiegelung; konstruierende und namensgemäße Behandlung der Kegelschnitte; Durchdringungskörper und Durchdringungskurven; systematische Behandlung der Platonischen, der Archimedischen, der konvexen Polyeder aus gleichseitigen Dreiecke (Deltaeder), der Johnsonschen Polyeder (konvexe Polyeder aus regelmäßigen Polygonen) und der uniformen Polyeder; Systematisierung der Körpergenerierung; Entwicklung lokal deduktiver raumgeometrischer Theorie-Elemente; Raumgeometrische Beweise (auch von Aussagen der ebenen Geometrie).

Wie bei allem computerunterstütztem Wissenserwerb ist die Frage nach dem Transfer des so erworbenen Wissens in die physische Welt zu stellen. Diese Frage ist aber zu relativieren unter dem Eindruck der Integration der virtuellen Welt in unsere physische Welt, wie sie in extremer Weise des „Second Life“ in Gestalt der Avataren repräsentiert wird. So ist es denkbar, dass Schüler und Schülerinnen eines Tages auch eine im Kontext der Schulgeometrie stehende Existenz als geometrische Avataren haben könnten.

### **Literatur**

Schumann, H. (2007): Der Virtuelle Raum als interaktiver Handlungsraum für den Geometrieunterricht. In: BEITRÄGE zum COMPUTEREINSATZ in der SCHULE , 2007, Jg. 21, Heft 2, S. 1-8. (Der vorstehende Tagungsbeitrag ist ein Auszug aus diesem Beitrag, der auch die betreffenden Literaturangaben enthält.)