

Andreas FILLER, Heidelberg

Dreidimensionale Koordinatengeometrie in der Sekundarstufe I? (Diskussionsbeitrag)

Wie bereits mehrfach hervorgehoben wurde (siehe z. B. [3]), ist Raumgeometrie im Mathematikunterricht der SI traditionell unterrepräsentiert. Dynamische Raumgeometriesysteme wie Cabri 3D und Archimedes Geo3D schaffen nun Möglichkeiten, im „virtuellen“ dreidimensionalen Raum interaktiv geometrisch zu konstruieren. Diese Werkzeuge, insbesondere Archimedes Geo3D, ermöglichen es auch zunehmend, Koordinaten von Punkten einzugeben bzw. zu verändern sowie geometrische Objekte durch Gleichungen bzw. Parameterdarstellungen zu erzeugen (vgl. z. B. [2]). Jedoch ist davon auszugehen, dass Schüler (insbesondere der SI) in interaktiver Software primär mausgestützte Eingabe- und Konstruktionsmöglichkeiten nutzen, somit also mit räumlichen Koordinaten zunächst kaum in Berührung kommen.¹ In dem vorliegenden Beitrag wird auf die Arbeit mit räumlichen Koordinaten anhand der Beschreibung und Darstellung geometrischer Grundkörper eingegangen, wobei Software zum Einsatz kommt, die Koordinatenbeschreibungen für die Erzeugung grafischer Darstellungen zwingend erfordert.

Elementare räumliche Koordinatengeometrie mit Computerunterstützung

Während Schüler das ebene Koordinatensystem i. Allg. bereits in der fünften oder sechsten Jahrgangsstufe kennenlernen, wird mit räumlichen Koordinaten im MU der SI (von Ausnahmen abgesehen) bislang praktisch nicht gearbeitet. Die Ursache hierfür dürfte kaum darin bestehen, dass das Prinzip des räumlichen Koordinatensystems Schülern grundsätzliche Verständnisschwierigkeiten bereitet – die Erweiterung eines ebenen Koordinatensystems durch eine z. B. senkrecht zur „Tafelebene“ verlaufende z -Achse ist auch für Schüler der Mittelstufe leicht nachvollziehbar. Jedoch fehlen in einem derartig erzeugten Koordinatensystem Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten; das Einzeichnen zu gegebenen Koordinaten gehörender Punkte ist nicht

¹Koordinaten- und Gleichungsbeschreibungen sind z. B. in Archimedes Geo3D erforderlich, um durch Funktionsgleichungen zweier Variablen gegebene Flächen oder Parameterkurven bzw. -flächen darzustellen. Derartige Objekte dürften jedoch frühestens am Ende der SI, meist erst in der SII thematisiert werden.

unmittelbar möglich. Geeignete Software ermöglicht jedoch auch die Arbeit im räumlichen Koordinatensystem. Als Beispiel sei die Beschreibung einer aus einigen Grundkörpern zusammengesetzten Szene in der skriptgesteuerten 3D-Grafiksoftware POV-Ray angeführt:²

```
sphere{ <-0.3, -0.5, 1.2> 0.5
  texture{ pigment {color Blue} } }
cone{ <1.2, -1, 0.5>, 0.5, <1.2, 1, 0.5>, 0
  texture{ pigment{color Red} } }
cone{ ... }
cylinder{ <0, -1.1, 0>, <0, -1, 0>, 2
  texture{ DMFWood6 } }
cylinder{ ... }
```

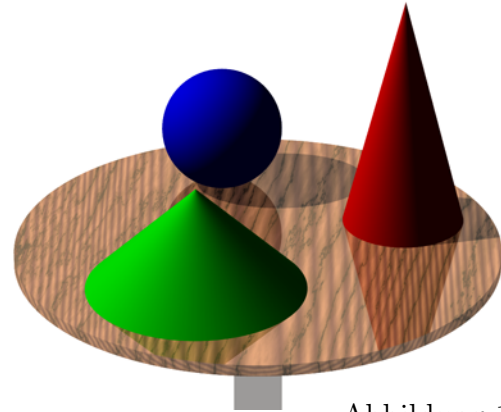


Abbildung 1

Um auf eine derartige Weise räumliche Szenen zu erstellen, müssen Schüler vor allem zwei Fähigkeiten herausbilden:

- Beschreibung einfacher Körper durch Koordinaten und charakteristische Größen (z. B. Kugel durch Mittelpunkt und Radius, Kegelstumpf durch Mittelpunkte und Radien von Grund- und Deckfläche);
- Wahl geeigneter Koordinaten und Abmessungen, sodass die einzelnen Körper sich zueinander in der beabsichtigten Lage befinden.

Warum räumliche Koordinatengeometrie in der S I?

Gegen die Behandlung elementarer Koordinatengeometrie in der S I lässt sich einwenden, dass für Koordinatenbeschreibungen räumlicher Objekte mehr Zeit benötigt wird als z. B. für synthetisch betriebene Raumgeometrie. Zudem ist die Bedienung von skriptgesteuerter Software komplizierter als die von dynamischer Raumgeometrie-Software. Allerdings hat sich in ersten Unterrichtsversuchen gezeigt, dass bereits Schüler der Klassenstufe 8 recht schnell mit der Software umgehen und einfache Szenen erstellen konnten, wenn ihnen geeignete Vorlagen und Anleitungen zur Verfügung gestellt wurden.³ Ein

²POV-Ray ist Freeware und kann unter www.povray.org heruntergeladen werden. Alternativ könnten auch Computeralgebrasysteme wie MuPAD oder Maple, die eine elementare Beschreibung geometrischer Grundkörper ermöglichen, zum Einsatz kommen.

³Eine Kurzanleitung für den Einstieg in POV-Ray, die in leicht modifizierter Form auch mit Schülern der Klassenstufen 7-10 erprobt wurde, steht unter <http://www.afiller.de/3dcg> (Rubrik „Downloads“, Datei „Erste Schritte mit POV-Ray“) zur Verfügung.

beachtliches Potenzial weist die Arbeit mit räumlichen Koordinaten dahingehend auf, dass für Schüler dabei zwangsläufig Beziehungen zwischen Geometrie und Arithmetik (sowie später Algebra) sichtbar werden und Elemente „rechnerischer Geometrie“ (z. B. Satzgruppe des Pythagoras, Trigonometrie) genutzt werden können, um geometrische Objekte im Raum zu erzeugen und exakt zu positionieren.

Ein wesentliches Ziel des Unterrichts in Raumgeometrie besteht in der *Entwicklung des Raumvorstellungsvermögens*. Allerdings wurde festgestellt, dass die Möglichkeiten hierfür bereits ab dem 14. Lebensjahr recht begrenzt sind (vgl. [1]). Das Betreiben von räumlicher Koordinatengeometrie könnte zur Herausbildung einer „vermittelten Raumanschauung“ beitragen. Hierfür sind gedankliche Transfers zwischen Zahlen(tripeln) und Positionen im Raum erforderlich – bei der Beschreibung dreidimensionaler Szenen bildet sich zwangsläufig ein „Gefühl“ für Beziehungen zwischen Koordinaten- und Positionsänderungen heraus. Es ergibt sich daraus die Frage, ob sich *Koordinatisieren als Transferstrategie* nutzen lässt, um eine geringer ausgebildete unmittelbare Raumvorstellung durch Fähigkeiten der gedanklichen Veranschaulichung von Zahlen und (Un-)Gleichungen zu kompensieren und evtl. auch umgekehrt. Derartige Fragen nach einer „koordinatenbezogene Raumvorstellung“ sind sicherlich ein interessantes Themengebiet für künftige Untersuchungen.

Erste Unterrichtserfahrungen

In zwei Informatik-Arbeitsgemeinschaften haben Schüler der Klassenstufen 7-10 mithilfe der Software POV-Ray dreidimensionale Szenen durch Koordinatenbeschreibungen erstellt. Dabei zeigte sich, dass die meisten teilnehmenden Schüler der Klassenstufe 7 erhebliche Schwierigkeiten sowohl hinsichtlich des Koordinatisierens als auch bei der Bedienung der Software hatten. Hingegen fielen beide Aspekte Schülern der Klassenstufen 8-10 deutlich leichter. Abbildung 2 zeigt exemplarisch Arbeiten eines Schülers der Klassenstufe 8 und eines Schülers der Klassenstufe 10, die diese in den Arbeitsgemeinschaften anfertigten.

Ein Auszug aus der (insgesamt 22 geometrische Objekte umfassenden) Szenenbeschreibung des Schneemannes in Abbildung 2 verdeutlicht die durchaus anspruchsvollen Koordinatisierungsüberlegungen des Schülers, der die Szene

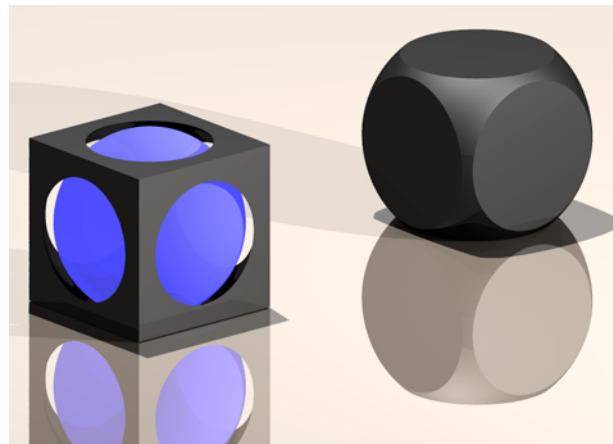
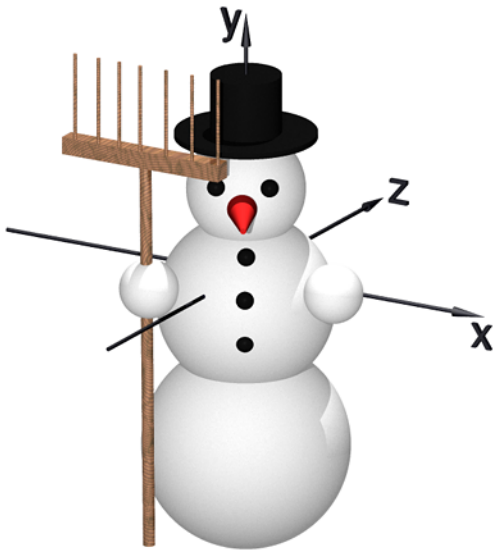


Abbildung 2: Arbeiten von Schülern der Klassenstufen 8 (links) und 10 (rechts)

anfertigte:

```
sphere{<0,1.5,0> ,1.0 texture{mattweiss} } //Kopf
sphere{<0.0,1.8,-1.0> ,0.15 texture{schwarz} } //Auge_1
cylinder{<-1.0,-4.5,-1.5> ,<-1.0,2.25,-1.62> ,0.1 texture{holz} } //Stab
box{<-2.5,2.2,-1.5> ,<0.5,2.5,-1.8> texture{holz} } //Box_1
cylinder{<-1.0,2.5,-1.8> ,<-1.0,4.0,-1.8> ,0.03 texture{holz} } //Borste_1
```

Die rechte Abbildung wurde von einem Schüler der Klassenstufe 10 unter Verwendung Boolescher Operationen (Differenz, Durchschnitt) angefertigt.

Die Beispiele stellen m. E. einen Anhaltspunkt dafür dar, dass räumliche Koordinatengeometrie durchaus durch Schüler der SI betrieben werden kann; Gründe, welche dies sinnvoll erscheinen lassen, wurden bereits genannt.

Literatur

- [1] Besuden, H.: Raumvorstellung und Geometrieverständnis. In: Mathematische Unterrichtspraxis 1999, III, S. 1-10
- [2] Goebel, A.: Archimedes Geo3D: Eine neue Raumgeometrie-Software an der Schnittstelle zwischen synthetischer und analytischer Geometrie. Vortrag im Minisymposium D03 auf der DMV/GDM-Jahrestagung 2007
- [3] Schumann, H.: Der virtuelle Raum als interaktiver Handlungsraum für den Geometrieunterricht. Vortrag im Minisymposium D03 auf der DMV/GDM-Jahrestagung 2007 (siehe Beitrag auf der vorliegenden CD)