

Astrid FISCHER, Duisburg-Essen

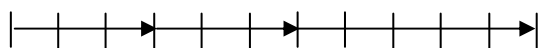
Einzelfall und Struktur- Verwendung von Anschauungshilfen zur Erfassung arithmetischer Gesetzmäßigkeiten

1. Forschungsanliegen

Zur Beschreibung von arithmetischen Zusammenhängen verwendet die Expertin die algebraische Sprache als effektives und einfach zu handhabendes Instrument. Gleiches kann man von mathematischen Novizen nicht behaupten. Wie der Artikel von Nowinska & Schwank (2007) verdeutlicht, fällt es sogar Studierenden schwer, die algebraische Formelsprache zur Darstellung anschaulicher Zusammenhänge von Rechenaufgaben einzusetzen. Einen Grund für diese Diskrepanz vermute ich darin, dass Lernende oft einen Zugang zur Algebra erleben, der sich auf den Umgang mit formalen Regeln und Verfahrensweisen beschränkt und den Schritt des Beobachtens, Beschreibens und eigenen Formalisierens von strukturellen Zusammenhängen in der Arithmetik auslöst. Hefendehl-Hebeker (2003) führt aus, dass formale Darstellungen, die Lernende ohne Bezug zu dem, was dargestellt wird, kennen lernen, eine Belastung statt Bereicherung bedeuten. Dieser Aufsatz zeigt Aspekte einer dreiwöchigen Unterrichtsreihe für Klasse 5, in der präformale Darstellungen von arithmetischen Aufgaben und Strukturen entwickelt werden. Ein Übergang zu einer rein formalen, algebraischen Beschreibung wird in dieser Klassenstufe weitgehend ausgelassen, um Zeit für die Auseinandersetzung mit den Inhalten zu geben. Anhand einiger Beispiele von Darstellungen von Schülerinnen und Schülern werden Hürden in dieser Entwicklung aufgezeigt.

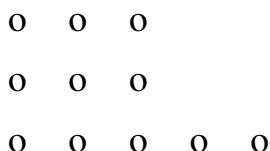
2. Das Unterrichtskonzept

In einer Einführungssequenz wurden die Kinder im Rahmen von zwei verschiedenen Anschauungskontexten mit Darstellungsarten für Additions- und Multiplikationsaufgaben vertraut gemacht. Mit diesen Darstellungsformen sollten den Lernenden Werkzeuge bereitgestellt werden, mit denen sie im weiteren Verlauf des Unterrichts arithmetische Zusammenhänge aufdecken konnten. In Anbetracht unterschiedlicher persönlicher Neigung zu einem eher prädikativen, d.h. an statischen Eigenschaften orientierten, oder eher funktionalen, d.h. an der Organisation von Abläufen orientierten, Denken (Schwank 2003) wurden die Darstellungen so gewählt, dass eine von ihnen das prädikative, die andere das funktionale Denken unterstützt. Die erste Darstellungsart beruht auf der Idee des Fortschreitens entlang einer Geraden und bedient sich Pfeilen als Darstellungsmittel. Die Rechenaufgabe $2 \cdot 3 + 5$ bzw. $3 + 3 + 5$ wird z.B. so dargestellt:



Dies passt gut zum funktionalen Denken.

Die zweite Darstellungsart besteht aus statischen Punktmustern. Die Aufgabe kann hier z.B. so aussehen:



Diese Darstellungsform unterstützt prädikatives Denken. Aus Platzgründen werde ich mich im Weiteren auf eine Darstellungsform, die Pfeile, beschränken und auch Schülerdarstellungen nur von dieser Art diskutieren.

3. Ein Aufgabenbeispiel

Im Anschluss an erste Erfahrungen im Darstellen von arithmetischen Aufgaben mit Hilfe der beiden eingeführten Darstellungsformen erhielten die Lernenden folgende Aufgabe:

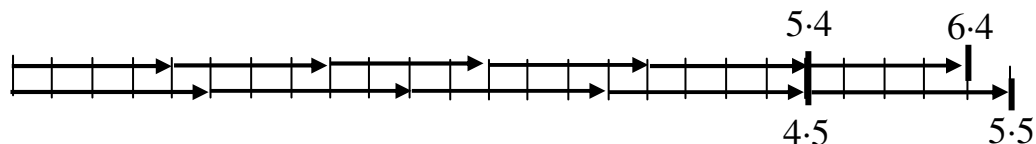
Timo hat sich einen Rechenrick ausgedacht:

Statt 6 mal 4 rechnet er 5 mal 5,
 statt 8 mal 6 rechnet er 7 mal 7 ,
 statt 21 mal 19 rechnet er 20 mal 20.

a) Worin besteht Timos Trick? Funktioniert er wirklich? Rechnet nach! Was fällt euch auf?

b) Findet heraus, woran das liegt, was euch aufgefallen ist. (Tipp: Zeichnet zwei Malaufgaben, die zusammen gehören, und vergleicht.)

Eine Lösung zu dem ersten Aufgabenpaar, die mit Pfeilen dargestellt wird, könnte so aussehen:

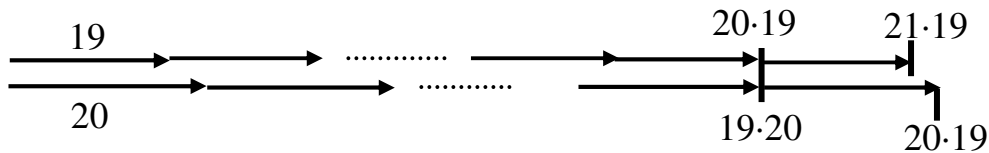


Man sieht hier: Fünf Vierersprünge kommen genauso weit wie vier Fünfersprünge. Sechs Vierersprünge kommen noch vier weiter, fünf Fünfersprünge noch fünf weiter, also insgesamt einen weiter als sechs Vierersprünge.

Man kann die zeichnerische und die verbale Beschreibung auch in eine arithmetische übersetzen:

$5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$. Nun ist $6 \cdot 4 = 5 \cdot 4 + 4$ und $5 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 5$. Also $6 \cdot 4 + 1 = 5 \cdot 5$.

Für die großen Zahlen des dritten Aufgabenpaares kann man die Zeichnung durch Weglassen von Informationen vereinfachen:

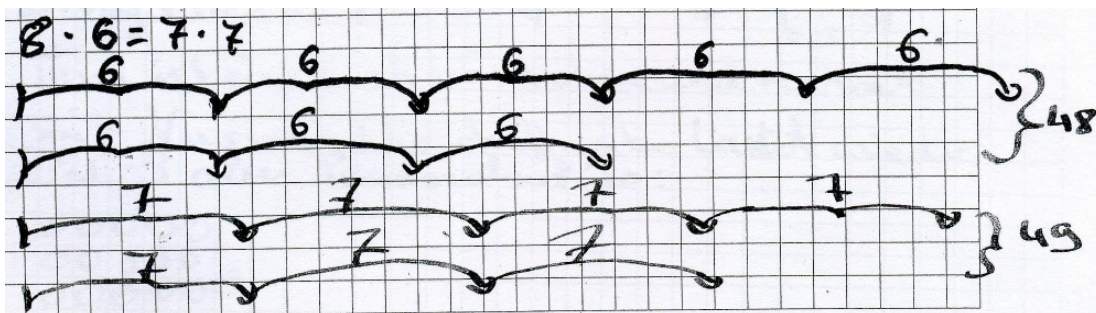


Diese Darstellung nun eignet sich als Prototyp für alle Aufgabenpaare von Timos Art, denn man muss nur die Beschriftungen in geeigneter Weise ändern.

4. Darstellungen von Schülerinnen und Schülern

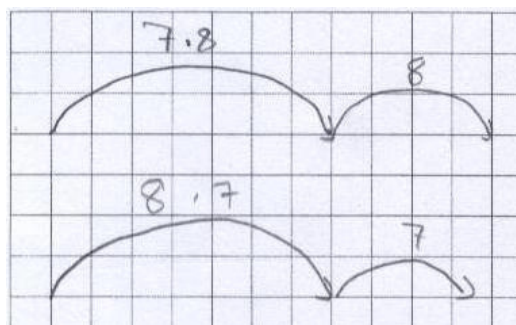
In diesem Abschnitt werden einige Zeichnungen von Fünftklässlern gezeigt, welche jeweils auf ein zu „Timos Trick“ passendes Aufgabenpaar bezogen sind. Sie entstanden in unterschiedlichen Situationen im Unterrichtsalltag bei der Testphase der oben beschriebenen Unterrichtsreihe: einige wurden als Hausaufgaben angefertigt, andere in Gruppenarbeit während des Unterrichts. Somit konnten nicht jegliche äußeren Einflüsse auf die Lernenden kontrolliert werden. Dennoch lassen die Zeichnungen insbesondere zwei Hürden für die Lernenden erkennen. Die erste ist der Sichtwechsel von den Ergebniszahlen hin zum Entstehungsprozess der Ergebnisse, oder anders formuliert, hin zu der Beziehung, in der die Bestandteile der Ergebnisterme zueinander stehen. Die zweite Hürde ist der Sichtwechsel vom Einzelfall eines bestimmten Aufgabenpaares hin zu einem Prototyp, der die gemeinsame Struktur aller Aufgabenpaare, die zu „Timos Trick“ passen, repräsentiert.

Die erste Hürde zeigt sich bei Adrians Zeichnung:



Adrian schreibt ein Gleichheitszeichen zwischen $8 \cdot 6$ und $7 \cdot 7$, aber statt auszusagen: „Diese beiden Produkte sind gleich“ könnte er auch sagen wollen: „Hier werden die beiden Produkte verglichen.“ Er stellt dann beide Produkte mit Pfeilen dar, aber er kennzeichnet keinerlei Beziehung zwischen ihnen. Er notiert jedoch die beiden Ergebniszahlen und an diesen allein kann man erkennen, dass das zweite Produkt eins größer ist als das erste. Trotz des Versuchs, die Entstehung der Ergebnisse aufzuzeigen, liegt das entscheidende Argument bei den errechneten oder abgezählten Ergebniszahlen.

Die nächste Hürde, die Darstellung eines Prototyps, wurde nur von wenigen Kindern gemeistert. Eine Argumentation, die auf alle Beispiele passt, wurde in dieser ersten Aufgabe auch nicht verlangt. Johann ist das dennoch in einer Hausaufgabe mit dem Aufgabenpaar $8 \cdot 8$ und $9 \cdot 7$ gelungen:



Die Schlichtheit dieser Zeichnung blendet alles aus, was für die Begründung des Sachverhalts unwesentlich ist. So ist die Zeichnung z.B. nicht maßstabsgetreu. Sie hebt stattdessen strukturelle Beziehungen hervor: die Sprünge von $7 \cdot 8$ und $8 \cdot 7$ haben gleiche Länge und der anschließende Achtersprung der ersten Darstellung ist etwas länger als der anschließende Siebenersprung der zweiten. Den exakten Unterschied kann man an den Zahlen 8 und 7 erkennen. Diese Zeichnung eignet sich für alle zu „Timos Trick“ passenden Aufgaben, wenn man lediglich die Beschriftung ändert. Sie stellt somit einen Prototyp dar.

Literatur

- [1] Lisa Hefendehl-Hebeker: Das Zusammenspiel von Form und Inhalt in der Mathematik. In: Hefendehl-Hebeker, L. & Hußmann, S. (Hrg), Mathematikdidaktik zwischen Empirie und Fachorientierung. Festschrift für Norbert Knoche. Hildesheim: Franzbecker 2003, S. 65-71.
- [2] Edyta Nowinska, Inge Schwank: Zur Vorbereitung algebraischen Denkens. In diesem Band.
- [3] Inge Schwank: Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 35(3) 2003, S. 70-78.