

Birte Julia SPECHT, Oldenburg

## **„36 kleine lila z“ – Zum Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern der vierten und achten Klasse**

Das Verständnis von Variablen bereitet vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten. Insbesondere der Aspekt von Variablen als Unbestimmte ist problematisch und fand bisher in der Forschung und in Schulbüchern wenig Beachtung. Unabhängig davon wird in verschiedenen Publikationen der bedeutende Einfluss von Sprache auf das Mathematiklernen dargestellt.

Im vorliegenden Beitrag wird von einem kleinen Ausschnitt eines Promotionsprojekts berichtet, bei dem mit 31 halbstandardisierten qualitativ ausgewerteten Interviews (354 bearbeitete Aufgaben) und einer quantitativen Überblicksstudie (842 Schülerinnen und Schüler, 3368 bearbeitete Aufgaben) der Einfluss verschiedener sprachlicher Formulierungen auf das Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern der vierten und achten Klasse untersucht wird. Die identifizierten Variablenverständnisse geben Hinweise auf mögliche Schwierigkeiten durch Fehlvorstellungen und auf hilfreiche oder hinderliche Formulierungen beim Erlernen von Variablen. Des Weiteren werden von Schülerinnen und Schülern gewählte Darstellungen für Variablen untersucht und klassifiziert.

### **1. Untersuchungsdesign und Datenerhebung**

Der übergeordneten Forschungsfrage ‚Wie entwickeln Schülerinnen und Schüler am besten ein adäquates Variablenkonzept?‘<sup>1</sup> werden verschiedene Untersuchungsfragen untergeordnet<sup>2</sup>:

- Welches Variablenverständnis zeigen Schülerinnen und Schüler in Klasse 4 und in Klasse 8?
- Wie hängt die ‚erfolgreiche‘ Bearbeitung von Aufgaben vom Variablenverständnis ab?
- Inwiefern beeinflusst die Wahl verschiedener Buchstaben für die Variablen die Bearbeitung der Aufgaben?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen verschiedenen sprachlichen Formulierungen und dem Variablenverständnis?
- Wie stellen Schülerinnen und Schüler Variablen (formal) dar?

---

<sup>1</sup> Siehe hierzu auch [1].

<sup>2</sup> Diese können auf Grund des Umfangs des Beitrags an dieser Stelle größtenteils nicht erörtert werden. Hierfür sei auf die Ende 2007/ Anfang 2008 erscheinende Dissertationsschrift verwiesen.

- Wie hängen unterschiedliche sprachliche Formulierungen und eine ‚erfolgreiche‘ Bearbeitung der Aufgaben zusammen?

Dabei werden jeweils Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den Klassenstufen aufgezeigt.<sup>3</sup> In diesen Beitrag wird ein Aspekt zu der letztgenannten Untersuchungsfrage kurz erörtert.

Für die Studie werden vier mathematische Inhaltskerne zu Variablen als Unbestimmte gewählt:

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x+y=z \quad \rightarrow \quad (x+4)+y = z+4$$

$$x+y+(x-y) = 2x$$

Diese werden jeweils in verschiedenen sprachlichen Formulierungen untersucht, beispielsweise:

natürlichsprachlich Ich habe eine Zahl und addiere null. Was passiert dann mit der Zahl?

gemischte Formen x plus 0 ist gleich \_\_\_\_\_

mit Wortvariablen Eine Zahl plus null ist gleich \_\_\_\_\_

formalsprachlich  $x + 0 =$

Alle Aufgaben in allen Formulierungen werden sowohl in den Interviews als auch bei der schriftlichen Bearbeitung im quantitativen Teil und in beiden Klassenstufen eingesetzt.

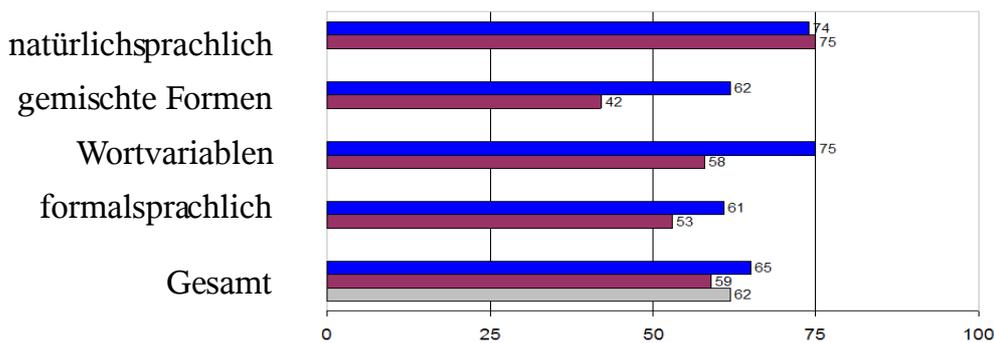
## 2. Sprachliche Formulierungen und ‚erfolgreiche‘ Bearbeitung

Insgesamt liegt die Erfolgsquote bei den mündlich erhobenen Daten deutlich über der bei der schriftlichen Bearbeitung. Vermutlich ist dies auf die in einer eins-zu-eins Situation höhere Motivation, kleine Hilfestellungen und die erweiterten Möglichkeiten durch den Verweisraum zurückzuführen. Im quantitativen Teil liegen die Lösungsquoten der Achtklässlerinnen und Achtklässler wie zu erwarten deutlich über denen der Viertklässlerinnen und Viertklässler.

Die Resultate der qualitativen Daten sind hingegen erstaunlich:

---

<sup>3</sup> Die Erhebungszeitpunkte waren in der vierten und achten Klasse ähnlich. Es handelt sich also nicht um die selben Schülerinnen und Schüler. Insbesondere kann nicht von einer Entwicklung gesprochen werden.



Prozent der erfolgreich bearbeiteten Aufgaben in der jeweiligen Formulierung  
 ■ Klasse 4/ ■ Klasse 8 im qualitativen Teil

Es fällt auf, dass in vielen Formulierungen die Lösungsquoten der ViertklässlerInnen über denen der AchtklässlerInnen liegen, sogar bei der formalsprachlichen Formulierung, die den SchülerInnen der achten Klasse vermutlich aus dem Unterricht bekannt ist. Aus der Interpretation der Interviews geht hervor, dass dies zusätzlich zu den weiteren Faktoren (s.u.) auf eine höhere Anstrengungsbereitschaft der ViertklässlerInnen zurückzugehen scheint, sowie darauf, dass diese Hinweise des Interviewenden schnell in Überlegungen einbeziehen und dass die AchtklässlerInnen neu Gelerntes fehlerhaft anwenden. Neu gelernte Regeln werden oft übergeneralisiert, so wird beispielsweise  $x + x$  zu  $x^2$  oder  $x = 1x$  zu  $x = 1$ .

Insgesamt haben natürlichsprachliche Formulierungen eine relativ hohe Lösungsquote und sind damit eher einfach, formalsprachliche sehr viel schwieriger. Formulierungen mit Wortvariablen scheinen einem mittleren Schwierigkeitsgrad zu entsprechen, während gemischte und ergänzende Formulierungen die Schülerinnen und Schüler eher zu verunsichern scheinen. Vermutlich sind diese für sie ungewohnt.

Zusätzlich zum Variablenverständnis wird die Performanz der Schülerinnen und Schüler durch weitere Faktoren beeinflusst. Hervorzuheben sind hier die Operation, die Dominanz der Null, das Gleichheitszeichen, Fehldeutungen der Konkatenation<sup>4</sup> und die verwendeten Farben<sup>5</sup>. Beispielhaft wird in dem folgenden Transkriptausschnitt aus dem Gang mit den Farben dargelegt.

$z \cdot z$     $z \cdot z$    Was fällt dir auf?

„So, blau mal rot, das wäre dann wieder lila. Also, das sind jetzt aber kleine z's, also müsste man ein kleines z hinschreiben, weil es davor große waren. [...] Also z, dann eben (.) das sind dann wieder 24, nee sechsund, äh, 26. Und ähm dann

<sup>4</sup> Mit *Fehldeutungen der Konkatenation* wird beispielsweise das Zusammenziehen von  $x + 4$  zu  $4x$  bezeichnet (vgl. [2]).

<sup>5</sup> In der vorliegenden Studie wurden verschiedene Buchstaben für die Variablen eingesetzt, um den Einfluss dieser zu untersuchen. Da vermutet wurde, dass der Großbuchstabe ‚Z‘ als Abkürzung für ‚Zahl‘ hilfreich sein könnte, wurde u.a. dieser verwendet. Für die Unterscheidung verschiedener Variablen wurden dabei Farben genutzt.

wieder 26 mal 26, das ist schwer, dann nehmen wir die Zehner weg und dann wären das sechs mal sechs. Das wären dann ähm sechs mal sechs sind 36. Und ähm ja dann wären es vielleicht auch eine Zahl, also vielleicht 36 kleine z's, oder so. Und wenn man dazu dann noch die Farben nimmt, dann wäre es auch noch lila. Dann könnte man daraus eine ganz schön lange Aufgabe machen.“

Neben dem Umgang mit Farben ist wahrscheinlich eine Übersetzung der Buchstaben in eine Zahl über seine Position im Alphabet zu erkennen. Da Lisa anschließend als Vereinfachung die Zehner weglässt, stellt sich die Frage, ob sie die Bedeutung des Buchstabens doch nicht über das Alphabet sucht, da sie schnell bereit ist, eine andere Zahl für ‚z‘ zu setzen oder ob sie bereits vergessen hat, dass sie die Zahl 26 für den Buchstaben ‚z‘ gewählt hat und meint, sie könne sich eine Zahl ausdenken. Diese Hypothese wird dadurch gestützt, dass Lisa das ersetzte ‚z‘ nach ihrer Rechnung an das Ergebnis anfügt. Auf diese Weise erhält sie ‚36 kleine lila z‘.

### **3. Konsequenzen**

Aus den Resultaten der Studie ergeben sich verschiedene Ansatzpunkte für den Umgang mit Variablen im Unterricht. Vor der unterrichtlichen Behandlung von Variablen scheint es wichtig, bereits vorliegende Vorstellungen und Verständnisansätze von Schülerinnen und Schülern und ihre Ursachen zu kennen. Ungünstige Vorstellungen können auf diese Weise thematisiert werden. Die Sensibilisierung für die Bedeutung von Sprache, insbesondere von verschiedenen Formulierungen für das Mathematiklernen könnte ebenfalls zur Verbesserung von Unterricht beitragen. Des Weiteren kann es zur Einführung der formalen Sprache hilfreich sein, an intuitiv von Schülerinnen und Schülern gewählte Darstellungen anzuknüpfen und diese gemeinsam zu reflektieren. Die Kenntnis häufig gewählter Darstellungen kann helfen, die Darstellungen der Schülerinnen und Schüler zu verstehen.

### **Literatur**

- [1] Birte Julia Specht: Early Algebra – Processes and concepts of fourth graders solving algebraic problems. In: Marianna Bosch (Hg.), European Research in Mathematics Education IV, Proceedings of the Fourth CERME, Sant Feliu de Guíxols, Spain 2006, S. 706-716
- [2] Günther Malle: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1993