Tatjana BERLIN, Essen

Anbahnung des algebraischen Denkens in der Klasse 5

Berichtet werden soll über eine laufende vergleichende empirische Untersuchung zum algebraischen Denken in Deutschland und Russland. Anhand einer ausgewählten Aufgabe werden erste Ergebnisse aus dieser Studie präsentiert.

1. Forschungsinteressen

Die Schwierigkeiten beim Erlernen der algebraischen Formelsprache und deren Anwendung beim Problemlösen sind nicht neu.

Viele Forscher haben sich mit dieser Problematik auseinander gesetzt und mögliche Ursachen benannt. Unter anderem wird die Meinung vertreten, dass die Schwierigkeiten der Schüler mit mathematischen Strukturen in algebraischen Systemen die Schwierigkeiten reflektieren, die diese Schüler schon mit arithmetischen Strukturen in Zahlensystemen haben.

Der Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 5 kann meiner Ansicht nach sinnvoll als frühe Stufe zur Erfassung der umgebenden Welt durch die algebraische Denkweise genutzt werden. Geht man davon aus, dass das Erkennen von Mustern und Gesetzmäßigkeiten in arithmetischen Problemkontexten eine wichtige Voraussetzung und Hilfe für einen verständigen Umgang mit der algebraischen Formelsprache ist, werden folgende Fragen interessant:

- Wie weit sind diesbezügliche Fähigkeiten in der Klasse 5 vorhanden bzw. entwickelbar?
- Wie und mit welchen Aufgaben kann Lernenden zu einem angemessenen Übergang von arithmetischem zu algebraischem Denken verholfen werden?

2. Durchführung der Studie

Die Untersuchungen fanden an drei Gymnasien in Essen und zwei Gymnasien in St. Petersburg in der Jahrgansstufe 5 statt.

In beiden beteiligten Ländern beginnt der Mathematikunterricht in der Klasse 5 traditionell mit dem Thema „Natürliche Zahlen“. Dabei stehen Rechengesetze und Wiederholung von den in der Grundschule erlernten Rechenoperationen im Vordergrund. Im Interesse der Forschungsfragen begab ich mich auf die Suche nach Aufgaben, die sich einerseits dem Einstiegsthema „Natürliche Zahlen“ zuordnen ließen, andererseits einen Blick aus neuer Perspektive auf das Thema ermöglichten und gleichzeitig für Partnerarbeit geeignet waren.

In klinischen Interviews stellte ich Paaren von Probanden Aufgaben aus der Arithmetik, in denen in symbolischen oder diagrammatischen Darstellungen Strukturen zu erkennen und zu beschreiben waren. Pro Probandenpaar waren zwei Sitzungen à 40 Minuten vorgesehen. Diese Interviews bilden die 1. Phase der Untersuchung aus der im Folgenden berichtet wird. Im weiteren Verlauf der Studie werden Unterrichtsmaterialien zur Einführung in die Formelsprache entworfen und in den Projektklassen erprobt.

3. Aufgabe MAMA

Das „einfachste", was alle Menschen aus dem Bereich der Zahlentheorie kennen, ist die Folge der Natürlichen Zahlen. Bereits im Kindergarten begegnen Kinder den ersten Zahlen dieser Folge, sie lernen, sie fortzusetzen und sind sehr stolz darauf, „große Zahlen" nennen zu können. In der Grundschule lernen die Kinder, mit natürlichen Zahlen arithmetisch zu operieren, indem sie – auch in Sachkontexten – mit vielen Rechenaufgaben beschäftigt sind.

Interessant schien mir „das Zahlensystem nach seinen inneren Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhängen zu befragen" (Hefendehl-Hebeker, 2001, S. 88). Um in einem für die getesteten Paare vertrauten Bereich zu bleiben, wählte ich folgende Aufgabe als Einstieg in meine Interviewreihe. Jedes Kind erhielt ein Blatt mit zwei untereinander geschriebenen Zahlen- und Buchstabenfolgen. Untersucht wurde der Zusammenhang zwischen einer Buchstabenfolge und der Folge der natürlichen Zahlen (nach einer Idee von Bauersfeld, 2007).

M	A	M	A	M	A	M	A	M	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	…

Die Kinder erhielten Kärtchen mit Fragen, wie etwa „Welcher Buchstabe steht über der 4?"; „Welche Zahl steht unter dem dritten M?". Nachdem alle Kinder verallgemeinernd feststellen konnten, dass über geraden Zahlen ein A und über ungeraden Zahlen ein M steht, wurden kompliziertere Fragen gestellt. Diese bezogen sich auf Bereiche der Folgen, die auf dem Arbeitsblatt nicht abgebildet waren. Essentiell wichtig waren hierbei die Argumentation und die Begründung der Aufgabenlösungen.

Zwei dieser weiterführenden Fragen sollen hier genauer untersucht werden:

- ***„Welche Zahl steht unter dem achten A?“***

Die interpretative Auswertung der Interviewtranskripte hat gezeigt, dass sich die Lösungsstrategien der Kinder in Gruppen einteilen lassen. Eine Gruppe verwendet die Strategie des Weiterzählens, indem sie die Frage durch das Fortsetzen beider Folgen bewältigt. Einige Schüler fangen dabei mit dem ersten A an, die anderen übernehmen als Stützpunkt das Resultat der vorherigen Frage und zählen ab dem fünften A weiter. Eine Schülerin begründete diese Vorgehensweise so: *„Es fällt einem leichter, wenn man's aufschreibt, weil man sich es dann eben noch besser vorstellen kann.“*

Es gibt auch Schüler, die die gegebene Situation zu strukturieren versuchen. Hierbei zeichnen sich folgende zwei Vorgehensweisen ab: Ein Teil der Schüler zerteilt „die Leiste“ in Abschnitte und versucht aus diesen Abschnitten das Ergebnis zusammen zu setzen: *„Viertes A steht über 8, dann noch mal dranhängen ergibt 16“*. Der andere Teil der Schüler begründet sein Vorgehen damit, dass die erste gerade Zahl 2 sei und berechnet die achte gerade Zahl durch das Multiplizieren „*2 mal 8*“.

- ***„Welche Zahl steht unter dem elften M?“***

Bei der Bearbeitung dieser Frage haben die Kinder eine ganze Reihe von Lösungsansätzen: von der Methode des Weiterzählens bis hin zur Methode, mit der die 11. ungerade Zahl als die nächste zur 10. geraden Zahl berechnet wird. Dazwischen gibt es wiederum zwei Gruppen, die sich nach der Art des Vorgehens und Argumentierens voneinander unterscheiden. Während ein Teil der Schüler größere Abschnitte zusammensetzt (durch Anstückeln, Addieren, Verdoppeln u. ä), versucht der andere Teil, die erkannte Struktur (Abstand zwischen zwei benachbarten ungeraden Zahlen) zu nutzen. Diese beiden zwar sehr unterschiedlichen aber sowohl in den deutschen als auch in russischen Interviews deutlich erkennbaren Vorgehensweisen werden im Folgenden durch Argumentationsbeispiele exemplarisch dargestellt:

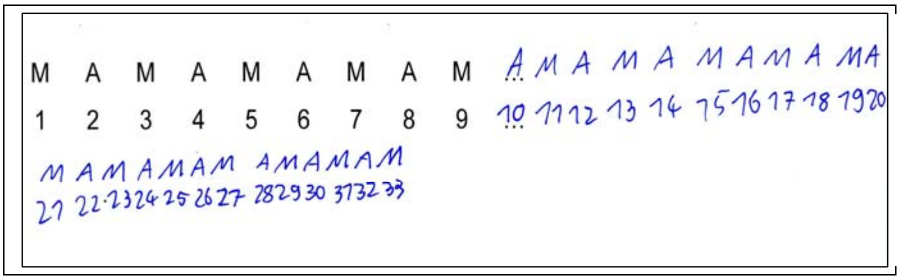
<u>Beispiel 1</u>**:** Ein Mädchen versucht elf M's in zwei „Fünf-M-Stücke“ und ein weiteres M zu gliedern: *„… also, hier sind ja eins, zwei, drei, vier, fünf M's, (zeigt zählend mit dem Stift auf die M's), und hier unter dem fünf Stück steht 'ne neun, und wenn man neun plus neun rechnet, dann sind das achtzehn. Und dann müssen wir noch drei dazu nehmen, weil hier beim anderen M (zeigt mit dem Stift auf das dritte M) ist 'ne drei, also müssen wir plus drei nehmen, das sind dann einundzwanzig“*. Das Mädchen wendet die Additionsstrategie an, die bei der vorherigen Frage nach dem „achten A“ gut funktioniert hat. Dabei merkt es zum einen nicht, dass sich zwischen den beiden „Fünf-M-Stücken“ noch ein A befindet. Zum anderen nimmt es

fälschlicherweise an, der Abstand von einem zum nächsten M hätte die „Länge“ 3. Da die Lösung - was auch ihren Vorüberlegungen entspricht – eine ungerade Zahl ist, bleiben dem Mädchen beide Gedankenfehler verborgen.

Beispiel 2. Ein Junge beantwortet die Frage nach dem „elften M“ durch die Multiplikation „3 mal elf“. Die Argumentation basiert auf der Annahme, dass für den Sprung zwischen zwei benachbarten M’s die Zahl 3 gebraucht wird: *„man muss dreimal die elf nehmen … dann hat man das, ja“ (bewegt dabei rhythmisch springend die rechte Hand).*

4. Bemerkungen

Aus psychologischer Sicht ist die von mir in der MAMA-Aufgabe zuletzt gestellte Frage „Welcher Buchstabe steht über 33?“ interessant. Da die Schüler beider Länder daran gewöhnt sind, dass die Teilfragen einer Aufgabe immer schwieriger werden, fühlten sich viele Kinder durch diese allerletzte Frage verunsichert. Einige haben die Frage falsch interpretiert, indem sie nach dem „33. M“ gesucht haben; andere haben (um sicher zu gehen) solche Lösungen präsentiert:



Bei der Durchführung der Interviews sind mir bei den Befragten ferner unterschiedliche Kooperationsformen aufgefallen: von einer Konkurrenz bis hin zur guten Zusammenarbeit. Es soll noch untersucht werden, wie weit unterschiedliche bzw. übereinstimmende Denkweisen als Ursachen dafür gelten können.

Literatur

[1] Heinrich Bauersfeld: Für kleine Mathe-Profis. 100 Aufgaben für die Partner- und Einzelarbeit im 2.-5. Schuljahr mit ausführlichen didaktischen Hinweisen und Lösungen. Verlag Aulis Deubner, 2007

[2] Lisa Hefendehl-Hebeker: Die Wissensform des Formelwissens. In: Werner Weiser, Bernd Wollring (Hrsg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe, Festschrift für Siegbert Schmidt. Kovač, Hamburg 2001, S. 83-97