Dagmar BERTALAN, Essen

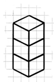
Eine Unterrichtsreihe zum anschauungsgestützten Einstieg in die Algebra in Klasse 7

Das Forschungsinteresse hinter dem Dissertationsprojekt, aus dem hier berichtet wird, lässt sich in folgender Frage bündeln: „Wie entwickeln sich die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu den Begriffen *Variable*, *Term* und *Gleichung* in einer konstruktivistischen Lernumgebung in Klasse sieben?“ Um dieser Frage nachzugehen, wurde eine vierwöchige Unterrichtsreihe zur Einführung von Variablen, Termen und Gleichungen konzipiert, die nacheinander in drei Klassen erprobt wurde. Der Unterricht wurde dabei von den regulären Fachlehrpersonen durchgeführt. Die Erprobung wurde durch Videoaufzeichnungen der Arbeit je zweier Schülergruppen dokumentiert.

In diesem Aufsatz sollen die Strategien der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der ersten Aufgabe der Unterrichtsreihe aufgezeigt werden, so wie sie sich bei einer ersten Analyse der Daten dargeboten haben. Dazu wird im Folgenden zunächst die Aufgabe selbst genauer vorgestellt.

Die erste Aufgabe

Die Idee dieser Aufgabe sowie einige ihrer Formulierungen stammen aus dem mathbu.ch 7 (Affolter, W. u.a., 2003, S. 22/23, Lernumgebung „X-beliebig“). Allerdings ist die Aufgabe nicht eins zu eins übernommen, sondern insbesondere durch Auslassungen modifiziert worden. Die Aufgabe wurde als Einstieg in die Algebra genutzt und ohne vorhergehende Informationen während der ganzen ersten Stunde in Vierergruppen bearbeitet.

Stein auf Stein 

Legt einen Würfel auf den Tisch. Es sind fünf quadratische Flächen sichtbar. Das untere Quadrat ist verdeckt.
Kurz: 5 Quadrate sind sichtbar
1 Quadrat ist verdeckt
Baut einen Turm, indem Ihr zwei Würfel aufeinander legt. Nun sind ringsherum und oben insgesamt neun Quadrate sichtbar. Am Boden und im Innern sind drei verdeckt.
Kurz: 9 Quadrate sind sichtbar
3 Quadrate sind verdeckt

In diesem ersten Teil wird zunächst die Bedeutung der Vokabeln *sichtbar* und *verdeckt* im Kontext dieser Aufgabe festgelegt. Es folgt:

1) Wie viele Quadrate sind sichtbar, wenn Ihr höhere Türme baut?
Tipp: Verschafft Euch Übersicht, indem Ihr eine Tabelle und / oder ein Diagramm der folgenden Art ausfüllt!

(...)[1]

Wie viele Quadrate sind sichtbar
- bei einem zehnstöckigen Turm?
- bei einem zwanzigstöckigen Turm?
- bei einem Turm aus allen Würfeln aller Gruppen Eurer Klasse?
Wie bestimmt Ihr die Anzahl, wenn die Türme zu wackelig werden und das Abzählen zu mühsam wird?

Die Aufgabe *Stein auf Stein* beinhaltet noch eine zweite Teilaufgabe, die die Anzahl der verdeckten Quadrate betrachtet. Sie soll im Folgenden nicht Gegenstand der Betrachtung sein.

Für die Bearbeitung von *Stein auf Stein* soll jede Schülergruppe 20 Holzwürfel (Kantenlänge 2 cm) zur Verfügung haben. Es ist beabsichtigt, dass die Lernenden zunächst wirklich Türme bauen und die sichtbaren Quadrate zählen. Die Fragen nach immer höheren Türmen setzen darauf, dass den Lernenden das Zählen irgendwann zu mühsam wird, sie das zugrunde liegende Prinzip suchen und generalisieren. Die letzte Frage nach der Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem Turm aus allen Würfeln der ganzen Klasse ist auch mit viel Geduld durch Bauen und Zählen nicht zu beantworten. Spätestens dabei muss eine Ablösung vom Zählen erfolgen.

Überblick über die Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe

Zunächst ist bei der Durchsicht der Videos aufgefallen, dass alle Gruppen die Tabelle als erste Darstellungsart bei dieser Aufgabe gewählt haben. Allerdings ließen sich zwei verschiedene Verfahren zur Generierung der Tabelleneinträge ausmachen.

Vier der betrachteten sechs Gruppen (Gruppen A, L, N, P) haben festgestellt, dass in der Spalte für die Anzahl der sichtbaren Quadrate von Zeile zu Zeile immer vier dazu kommen. Diese Gruppen haben alle Einträge dieser Spalte durch sukzessive Addition von vier erzeugt. Sie sind rekursiv vorgegangen. Die übrigen zwei Gruppen (Gruppen B, S) haben hingegen erkannt, dass es pro Stockwerk vier sichtbare Quadrate gibt und zusätzlich das „Dach-Quadrat“. Sie haben die Tabelleneinträge direkt über diesen Gedankengang gefunden: *gefragte Anzahl der Stockwerke mal vier plus eins*.

Die Sichtung der Videos hat weiterhin gezeigt, dass alle Gruppen versucht haben, die Anzahl der sichtbaren Quadrate eines Turmes durch Vervielfachung der bereits bekannten Anzahl für einen niedrigeren Turm zu bestimmen (z. B. die Anzahl der sichtbaren Quadrate eines zwanzigstöckigen Turmes durch Verdopplung der entsprechenden Zahl eines zehnstöckigen Turmes). Die Problematik dieser Vervielfachung wurde in fünf der sechs Gruppen thematisiert und auch gelöst. Dabei haben vier dieser Gruppen dem Verfahren das Argument entgegengesetzt, dass immer wieder Quadrate verdeckt würden. Sie haben daraufhin folgende Lösungen gefunden:

A
- $7 \cdot 81 - 6$; $7 \cdot 80 + 1$
- $139 \cdot 4 + 5$ (Klasse mit 7 Gruppen)

P $7 \cdot 80 + 81$ (Klasse mit 8 Gruppen)

B
- Ergebnis von 10 Stockwerken verdoppeln, „außer dem da oben“
- gleiches Verfahren, nur 20 statt 10

N vier zwanziger Seiten plus eins oben

Die Gruppen A und P haben die Problematik bei der Betrachtung eines Turmes aus allen Würfeln der Klasse thematisiert, die Gruppen B und N bei der Untersuchung eines Turmes aus 20 Würfeln.

Gruppe L hat hingegen argumentiert, dass man nicht zwei mal 41 rechnen könne, um die Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem zwanzigstöckigen Turm zu bestimmen, da die Anzahlen immer ungerade seien, zwei mal 41 aber gerade sei. Sie haben dann die Lösung durch folgenden Gedanken gefunden: bei fünf Stockwerken sind 21 Quadrate sichtbar, bei zehn Stockwerken 41, es kommen also 20 dazu, bei 15 Stockwerken sind also 61 und bei 20 Stockwerken 81 Quadrate sichtbar. Für die Bestimmung der Anzahl der sichtbaren Quadrate eines Turmes aus allen Würfeln der ganzen Klasse haben sie diesen Gedankengang aber nicht weiterverfolgt, sondern folgenden Term angegeben: $160 \cdot 4 + 1$ (Klasse mit acht Gruppen).

Gruppe S hat die Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem Turm aus allen Würfeln der Klasse durch Vervielfachung der Anzahl für den zwanzigstöckigen Turm gewonnen: $(4 \cdot 20 + 1) \cdot 8$ (Klasse mit acht Gruppen). Sie haben die Problematik dieser Vervielfachung nicht erkannt. Dies erstaunt umso mehr, da die Gruppe ihre Tabelleneinträge bis zu sieben Stockwerken, und auch noch die Anzahlen für den zehn- und zwanzigstöckigen Turm durch das direkte Verfahren bestimmt hat. Bei der letzten Frage wechseln sie dann und suchen auch keine Rückversicherung in ihrer alten Methode. Auch bei der allgemeinen Formulierung ist nichts mehr von der anfänglichen Vorgehensweise zu erahnen: „Bei jedem neuen Stockwerk kommen zu dem Turm 4 sichtbare Quadrate dazu.“

Die allgemeinen Formulierungen der anderen fünf Gruppen lassen sich wiederum in zwei Gruppen bündeln. Zwei der Gruppen haben allgemeine Formulierungen gefunden, die man durch den algebraischen Term $(x-1) \cdot 4+5$ ausdrücken könnte – Gruppe A: „Man kann die Anzahl der Stockwerke minus 1 rechnen und die verbleibende Zahl mal 4. Am Ende addiert man das Ergebnis mit 5.“; Gruppe P (nur mündlich): „Anzahl der Würfel minus 1, das mal 4, plus 5“.

Der Term $x \cdot 4+1$ lässt sich mit den allgemeinen Formulierungen der übrigen drei Gruppen deuten – Gruppe B: „Bei jeder dieser Aufgaben wird der gleiche Rechenweg eingeschlagen (¿4+1) “; Gruppe N: „Wir haben es herausbekommen, indem wir die Flächenquadrate der vorderen Turmfläche mal 4 genommen haben, da der Turm 4 Seiten hat und plus 1 wegen des obersten Quadrates des Turmes.“; Gruppe L: „Man muss die Anzahl der Würfel mit Vier multiplizieren, da es Vier sichtbare Seiten gibt. Dann muss man eine Fläche addieren, da oben eine einzelne Fläche besteht.“

Schlussfolgerungen

Diese erste grobe Analyse hat gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler eine vielfältige Basis für das Lernen von Algebra mitbringen. Sie haben z. B. Fähigkeiten im Erkennen von Mustern und Ausdrücken von Allgemeinheit bewiesen.

Nach dieser ersten Auswertung scheint es lohnend, diesen Datensatz noch genauer zu analysieren, um ein schärferes Bild dieses Ausgangspunktes des Algebraunterrichts zu bekommen. Dabei könnten sich folgende Fragen als hilfreich erweisen: Was machen die Einzelnen? Wie entwickelt sich aus deren Interaktion der Gesamteindruck der Gruppentätigkeit, der in diesem Aufsatz präsentiert wurde?

Eine Aufgabe des gesamten Projektes wird es sein, herauszuarbeiten, wie sich – von diesem Startpunkt ausgehend – die Vorstellungen der Lernenden im Verlauf der Unterrichtsreihe weiterentwickeln.

[1] An dieser Stelle folgen auf dem Schülerarbeitsblatt eine Beispiel-Tabelle sowie ein Beispiel-Diagramm mit jeweils den ersten zwei Einträgen.

Literatur

Affolter, W. u.a. (2003): mathbu.ch 7. Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: schulverlag blmv AG und Zug: Klett und Balmer AG. Lernumgebung 10 „X-beliebig“, S. 22/23.