Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück

Die Metapher „Vertragswerke zum Umgang mit Begriffen“ als strukturierendes Werkzeug im Algebra-Unterricht

1. Einleitung

Das mathematische Wissen vieler Schülerinnen und Schüler ist fragmentiert. Sie stellen keine Verbindungen zwischen den Fragmenten her, weil diese in ihrem Kopf nur als einzelne Gedächtniseinträge existieren. Dieses gilt insbesondere für den Bereich der Schulalgebra. Um diesem Missstand abzuhelfen, haben wir für eine Neuorientierung des Mathematikunterrichts – vorgestellt als Osnabrücker Curriculum (OC) für die Klassen 7 bis 10 des Gymnasiums, vgl. [1] - postuliert, dass der Aufbau eines kognitiven mathematischen Betriebssystems in den Köpfen der Lernenden Vorrang vor der Vermittlung von fragmentiertem und isoliert bleibendem mathematischem Sachwissen haben muss. Die Metapher „Betriebssystem” soll deutlich machen, dass eine wichtige Aufgabe beim Aufbau eines Wissensnetzes auch in der Organisation des Zugriffs besteht. Ein Ziel ist es, dass zu Beginn jeder Mathematikstunde dieses Betriebssystem in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler aufgerufen wird und dieses die Verbindungen des mathematischen Wissens organisiert. In diesem Papier soll ein Einblick gegeben werden, wie einer der beiden Teile des kognitiven Betriebsystems, die Vertragswerke-Metapher, in der Gleichungslehre benutzt wird.

„Vertragswerk zum Umgang mit Begriffen” ist im Osnabrücker Curriculum eine Metapher für den axiomatischen Umgang mit Begriffen. Entgegen dem üblichen Vorgehen in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik der sechziger und siebziger Jahre werden in der Unterrichtsreihe „Sätze aus dem Wüstensand” Axiomensysteme nicht durch Abstraktion aus vielen Beispielen eingeführt. Es wird vielmehr eine Rahmengeschichte „Vertragswerk zum Bau von Autobahnen” ([3], S. 33) benutzt, in der ein Scheich mit einer Baufirma einen Vertrag zum Bau eines Autobahnnetzes abschließt. Im Unterricht wird debattiert, was auf Grund dieses Vertragswerks mindestens gebaut werden muss, mathematisch gesprochen, welche Eigenschaften jedes Modell des Axiomensystems haben muss.

Durch den Aufruf der Metapher „Vertragswerk” wird dazu intuitiv vorhandenes Wissen der Schülerinnen und Schüler über die Problematik der Verwendung von Begriffen in juristischen Verträgen genutzt. Es wird so auch ein Zugang zum Verständnis des Unterschieds zwischen impliziten und expliziten Definitionen geschaffen. Beweise in einem Vertragswerk dienen dann auch dazu, sich zu vergewissern, ob die implizite Definition eines Begriffsnetzes durch das Vertragswerk (Axiomensystem) der Intention entspricht. Es wird den Schülerinnen und Schülern außerdem vermittelt, dass der Prozess der Präzisierung von Begriffen durch Definieren irgendwann bei einer Menge von Begriffen enden muss, zu deren Präzisierung andere Werkzeuge nötig sind: Der Bedeutungsumfang dieser relativ zu den anderen grundlegenden Begriffe gilt als im Argumentationskontext evident.

2. Vertragswerke über den Umgang mit Zahlen

Die Verfügbarkeit der Vertragswerk-Metapher erlaubt ein anderes unterrichtliches Vorgehen zur Behandlung der Erweiterung des Zahlbereichs von natürlichen zu ganzen Zahlen: Mit einer Bank soll ein Vertrag zum Buchen von „Soll und Haben” geschlossen werden, der sicherstellt, dass die Bank in jedem Fall genau so bucht, wie der Kunde es sich vorstellt (vgl. [2]). Es geht also darum, vorhandenes intuitives Wissen über die Buchungspraxis von Geldinstituten bei der Kontoführung (das heißt, über das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen) zu präzisieren sowie Ein- und Auszahlungsvorgänge formal darzustellen. Das Ergebnis ist ein „Vertragswerk zum Umgang mit Soll und Haben“, mathematisch gesprochen ein Axiomensystem für Kommutative Gruppen. Dabei wird auch herausgearbeitet, inwieweit das Auszahlen sich als eine Umkehrfunktion zum Einzahlen auffassen lässt. Die sich ergebende Nominaldefinition für die Subtraktion wird von den Schülern (auch im später folgenden Transkript unter 3.2) beim Termumformen als S zitiert. Die Überlegungen werden weitergeführt zu einem Vertragswerk, welches das schon bis dahin intuitiv praktizierte Rechnen mit Brüchen präzise regelt (Axiomensystem für Kommutative Körper).

3. Beispiel: Klassenarbeitsaufgabe im Bereich „Lineare Gleichungen”

Zum Lösen von linearen Gleichungen wird das Vertragswerk der Körperaxiome (beschreibt Wissen über die Objekte der Theorie) um zwei Paragraphen (beschreiben Wissen über den Umgang mit diesem Wissen) erweitert: K^+ legitimiert die Addition eines Terms auf beiden Seiten einer Gleichung, K legitimiert die Multiplikation. Beide Paragraphen sind aus den Körperaxiomen hergeleitet worden ([2], S. 96). In einer Klasse 8, die seit einem Schuljahr nach dem OC unterrichtet worden ist, wurde in einer Klassenarbeit folgende Aufgabe gestellt:

3.1 Aufgabe

Paula trainiert das Lösen von linearen Gleichungen am Beispiel:

$1{,}25\,y-0{,}5\cdot(1+0{,}5\,y)+2{,}5=-4{,}25-0{,}5\cdot(y-0{,}5)+0{,}5\,y$

Nach einer Reihe von Äquivalenzumformungen hat sie diese Gleichung vereinfacht zu:

$y+2=-4$

Mit folgendem Kommentar gibt sie auf: „Ich muss einen Fehler gemacht haben. Solche Gleichungen hatten wir noch nie. Hier kommt man nur weiter, wenn man einen Paragraphen R^{-} benutzen darf.”

a) Überprüfe, ob Paula ein Fehler unterlaufen ist.
b) Formuliere einen Paragraphen R^- in Paulas Sinn.
c) Was würdest du ihr antworten?

Die Aufgabe ist typisch für das OC und die dort praktizierte andere Aufgabenkultur (vgl. [4]): Die Schüler werden angeregt, über ihre und die Vorstellungen ihrer Mitschüler zu reflektieren und sich dann schriftlich zu äußern. Solche metakognitiven Aktivitäten bereiten auch metamathematische Einsichten vor.

Zur Lösung des Aufgabenteils a sind Termumformungen vorzunehmen und mit den Paragraphen zu legitimieren. Beim Aufgabenteil b ist zunächst die konkrete Situation in einem allgemeineren Licht zu analysieren und dann die gewonnene Erkenntnis allgemein als mathematischer Satz zu formulieren. Gefordert ist also die Generierung von universell verwendbarem neuem Wissen. Mathematisch handelt es sich um das Erfinden eines neuen Satzes. Beim Aufgabenteil c geht es auch darum, den Stellenwert dieses Satzes im bisherigen Vertragswerk zu diskutieren.

3.2 Schülerlösungen

Anja:

Woher willst Du wissen, dass Du einen Fehler gemacht hast? Statt $y+2=-4$ kann man auch $1\cdot y+2=-4$ sagen und solche Gleichungen hatten wir immer schon. Außerdem haben wir nie einen § R^- gebraucht und werden ihn auch nicht gebrauchen, da dieser auch durch § K^+ geregelt werden kann, indem man z.B. $+(-a)$ sagt.

$$\begin{array}{rrl} & y+2=-4 & \\ \Leftrightarrow & y+2+(-2)=-4+(-2) & \text{§ } R^+ \\ \Leftrightarrow & y+0=-4+(-2) & \text{§ } I^+ \\ \Leftrightarrow & y+0=-6 & * \\ \Leftrightarrow & 0+y=-6 & \text{§ } K^+ \\ \Leftrightarrow & y=-6 & \text{§ } N^+ \end{array}$$

Hans:

Daß wir diesen § indirekt schon haben! Denn mit S können wir ja $a-b$ zu $a+(-b)$ machen und auch umgekehrt. So können wir also mit R^+ z.B. $a+(-c)=b+(-c)$ rechnen und das dann mit Hilfe von S zu $a-c=b-c$ umformen.

Fritz:

Eine Art von Paragraf R^- haben wir ja schon. Er fällt unter Paragraf R^+. Er wird nach dem Prinzip Schulden zuzahlen angewandt.

3.3 Interpretation

Bei den Schülerlösungen gibt es Qualitätsunterschiede hinsichtlich der Tiefe des Verständnisses. Anja orientiert sich mit ihrer Formalisierung sehr an der Termstruktur des Beispiels. Sie geht von Termen in Summenform aus, löst aber allgemein das Problem der Subtraktion eines beliebigen Terms. In ihrer Argumentation zeigt sie außerdem, dass man das Problem ohne die Benutzung eines neuen Satzes lösen kann. Das fassen wir als eine Vorform eines Beweises für ihren Satz auf. Hans gibt eine allgemeine Lösung an und begründet, warum dieser neue Satz aus dem bisherigen Vertragswerk beweisbar ist. Fritz gibt die allgemeine Lösung unter einem Namen und in einer Darstellung an, die dem Leser sofort auch die Beweisidee liefert. In seiner Argumentation macht er darüber hinaus auch deutlich, welchen Nutzen zum Verständnis für ihn die Metapher „Soll und Haben" hat.

4. Zusammenfassung

Wir haben an einem Beispiel dargelegt, wie zwei zunächst unterschiedliche Teilbereiche der Schulmathematik von einem kognitionstheoretischen Standpunkt aus einen gemeinsamen Zugang haben: das schrittweise, regelbasierte Umformen von Termen und das schrittweise kontrollierte Argumentieren und Beweisen. Auch Schülerinnen und Schüler verfügen über die Einsicht, wie folgender Dialog in einer Klasse 10 zeigt:

> Lehrerin: Was muss man können, wenn man beweisen will?
>
> Clemens: Ja, das wichtigste ist, denk' ich mal, dass man das Vertragswerk draufhat, damit man auch weiß, von vornherein, was man machen darf, und was man nicht machen darf.
>
> Lehrerin: Ist Beweisen denn schwieriger als Rechnen?
>
> John: Wenn man jetzt da 'n normalen Term stehen hätte, dann müsste, könnte man das ja auch nicht anders machen, als jetzt. Man müsste das ja auch irgendwo herholen, sein Wissen aus den Vertragswerken. Und das wär' auch nichts anderes als das mit den Variablen [*gemeint ist die Darstellung von Termumformungsregeln mit Variablen*].

Literatur

[1] Elmar Cohors-Fresenborg: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. *Der Mathematikunterricht*, (2001)1, 5–13

[2] Elmar Cohors-Fresenborg et al.: Vertragswerke über den Umgang mit Zahlen. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück 1998

[3] Elmar Cohors-Fresenborg et al.: Sätze aus dem Wüstensand, Textbuch für Schülerinnen und Schüler zur Einführung in die axiomatische Auffassung von Mathematik. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück 2003

[4] Christa Kaune: Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als die „etwas andere Aufgabe". *Der Mathematikunterricht*, (2001)1, 35-46