Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen

Algebraisches Denken – was ist das?

Die Entwicklung der symbolischen Algebra in der frühen Neuzeit war eine für die Mathematik und ihre Anwendungen konstitutive und vorbildlose Neuerung und ein Meilenstein in der Geschichte der Formalisierung. (Krämer 1988).

Das nach wie vor schwierige didaktische Problem der Einführung in die Algebra hat sich in den vergangenen Jahren zunehmender Aufmerksamkeit erfreut, doch die Einschätzung dessen, was „algebraisches Denken" maßgeblich ausmacht, ist uneinheitlich. Die folgenden Ausführungen möchten hierzu eine Bilanz ziehen.

1. Was ist Algebra?

Wir werden die folgenden Betrachtungen auf die elementare Algebra beschränken und die Strukturalgebra, die einer späteren Entwicklungsstufe angehört, nicht wesentlich berücksichtigen.

Die elementar-algebraische Formelsprache ermöglicht wie alle formalen Sprachen das Übertragen von Wissen in eine bestimmte Notationsform mit wohldefinierten und –deklarierten Ausdrücken und der Möglichkeit der regelhaften Umgestaltung (Wille 1994). Das macht sie zu einem Darstellungsmittel von besonderer Leistungsfähigkeit:

- Sie hilft, Gedanken zu materialisieren und kommunizierbar zu machen (Fischer 2003).
- Aufgrund der genau geregelten Verwendung der Symbole ermöglicht sie zugleich, das intuitive Wissen so zu präzisieren, dass die Vermittlung weitgehend eindeutig ist (Cohors-Fresenborg 2001).
- Die Möglichkeit der regelhaften Umgestaltung entlastet die Vorstellung und das Denken: Inhaltsgebundene logische Operationen werden weitgehend durch inhaltsinvariante Denkoperationen ersetzt (ebd.).
- Durch das regelgeleitete Operieren mit Symbolen können innerhalb der Formelsprache auch Produkte erzeugt werden, z. B. durch symbolisches Rechnen gewonnene Aufgabenlösungen oder Darstellungsänderungen, aus denen neue Informationen hervorgehen. Schließlich kann man sogar neue Objekte, wie z. B. √-2, symbolisch konstituieren.

Whitehead (1947) hebt hervor, dass die Algebra damit ein mächtiges Werkzeug bereitstellt, um ein ureigenes Anliegen der Mathematik zur Geltung zu bringen, nämlich Muster darzustellen und zu analysieren.

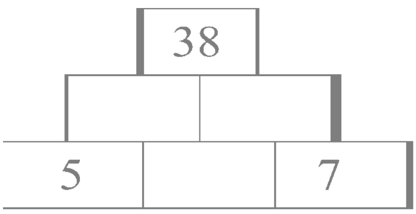
Aus einer soziokulturellen Perspektive kann man Algebra als eine Minikultur innerhalb der umfassenderen Kultur der Mathematik betrachten (Lee 1996). Wie im Fußball, der auch eine Kultur darstellt, findet sich eine Gemeinschaft von Leuten, die viele Gepflogenheiten und Überzeugungen miteinander teilen: eine gemeinsame Sprache, Regeln und Umgangsformen, den Glauben an die eigene Überlegenheit, die Verehrung von Helden usw. Die Einführung in die Algebra ist demnach auch ein Enkulturationsprozess.

2. Was gehört zum algebraischen Denken?

„It is difficult to characterize algebraic thinking“ (Charbonneau 1996). Diese Schwierigkeit wird entscheidend bedingt durch die in der Literatur (s. Bednarz et al. 1996) vielfältig diskutierte Grundsatzfrage: Ist „algebraisches Denken“ auf die Handhabung der Symbolsprache der Algebra beschränkt oder muss man den Begriff weiter fassen?

Wir nehmen dazu den folgenden methodischen Standpunkt ein: Wenn Algebra als eine innermathematische Kultur gelten kann, in der das Erfassen und Analysieren von Mustern eine besondere Rolle spielt, dann sollte man unter „algebraisches Denken“ alle Denkhandlungen fassen, die diese Kultur ausmachen bzw. zu ihr hinführen.

Betrachten wir dazu ein Beispiel aus der Schulpraxis der Sekundarstufe I (Sjuts 2006): Die nachstehend abgebildete Zahlenmauer ist zu ergänzen.



Karen erkennt die Abhängigkeit der Zahlen innerhalb des Systems und argumentiert so: „5+7=12, 38-12=26, 26:2=13, weil die Zahl zweimal gebraucht wird. Einmal bei der 5 und einmal bei der 7.“

Torsten achtet mehr auf die Stabilität der Differenz: „Die Differenz zwischen 5 und 7 beträgt 2. So müssen die oberen Zahlen auch eine Differenz von 2 haben, weil 5 und 7 mit der gleichen Zahl addiert werden. Nur 18 und 20 haben eine Differenz von 2 und geben zusammen 38. Dann ist das 13, weil 5+13=18 und 7+13=20.“

Beide Kinder erkennen das Muster, das beschreibt, wie sich die gesuchte Zahl auf dem mittleren Stein der unteren Reihe in der Mauer „weiter nach oben bewegt“. Sie argumentieren mit den festgestellten Zahlbeziehungen, arrangieren diese neu und ziehen Schlüsse daraus. Dabei aktivieren sie analytisches Denken im Sinne von „Analyse“ als Problemlösestrategie der Antike. Zentral hierbei ist die „Hypothese“, also die Annahme, dass das Problem bereits gelöst, die gesuchte Zahl somit gefunden sei. Daher kann man mit der unbekannten Zahl in Gedanken operieren wie mit bekannten Zahlen (Charbonneau 1996). Die symbolische Handhabung dieses Prozesses ist eine Weiterentwicklung, der die beteiligten Vorstellungen zur völligen Deutlichkeit bringt.

3. Noch einmal: Was ist Algebra?

Algebra ist verallgemeinerte Arithmetik, aber nicht nur dies. Charbonneau (1996) weist daraufhin, dass historisch betrachtet geometrische Größen (Strecken, Flächen, Volumina) den algebraischen Symbolen näher stehen als Zahlen. Sie sind weniger abstrakt, weil z. B. beim Zusammenfügen zweier Strecken die Teile je für sich sichtbar bleiben, während bei der Addition von Zahlen die Summanden in der Summe verschmelzen.

Algebra ist Umgang mit Symbolen, aber nicht nur dies. Einerseits sind Symbole wesentlich für die Algebra. Sie liefern die Sprache und erlauben, etwas zu benennen, das keinen Namen a priori hat. Andererseits ist die Symbolsprache nicht das Ganze. Sie hat Ziele, die über das symbolische Rechen hinausgehen.

Algebra ist eine Weise, Beziehungen zwischen Zahlen bzw. Größen darzustellen und zu manipulieren. Analysis im oben dargestellten Sinn ist, wie Charbonneau (ebd.) meint, „das Herzstück“ der Algebra.

4. Algebraisches und mathematisches Denken

So betrachtet ist Algebra mit vielen Denkhandlungen verbunden, die für die Mathematik kennzeichnend sind: Generalisieren, Abstrahieren, Analysieren, Strukturieren und Restrukturieren ...

Dann aber wird es schwierig, die wesentlichen Charakteristika algebraischen Denkens auszusondern. „I tend to think this question has not yet been worked on enough ... We’ve seen that there is no consensus on the attempt to differentiate algebraic thinking from mathematical thinking in general, or on the attempt to reduce the essential content of algebraic thinking to a set of very elementary operations.“ (Wheeler 1996, S. 322).

So endet die beabsichtigte Bilanz zwangsläufig in einer prinzipiellen Frage: Wenn die Entwicklung der Algebra mit der Entwicklung der neuzeitlichen

Mathematik so untrennbar verbunden ist, wie oben dargelegt wurde – ist dann eine solche Differenzierung überhaupt möglich?

Literatur

[1] Nadine Bednarz, Caroly Kieran, Lesley Lee (Hrsg.): Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1996.

[2] Louis Charbonneau: From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In: N. Bednarz et al.: Approaches to algebra, 1996, 15-37.

[3] Elmar Cohors-Fresenborg: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht 47 (2001), Heft 1, 5-13.

[4] Roland Fischer: Reflektierte Mathematik für die Allgemeinheit. In: L. Hefendehl-Hebeker, St. Hußmann (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Empirie und Fachorientierung. Festschrift für Norbert Knoche. Hildesheim, Berlin, Franzbecker 2003.

[5] Sybille Krämer: Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung im geschichtlichen Abriss. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988.

[6] Lesley Lee: An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: N. Bednarz et al.: Approaches to algebra, 1996, 87-106.

[7] Johann Sjuts: Diagnostische und didaktische Kompetenz auf Forschungsbasis: das Beispiel Zahlenmauern. In: F. Rieß (Hrsg.): Einblicke in aktuelle Forschungszusammenhänge zum Mathematikunterricht. Oldenburg 2006, 21-37.

[8] David Wheeler: Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. In: N. Bednarz et al.: Approaches to algebra, 1996, 87-106.

[9] Alfred North Whitehead: Essays in science and philosophy. Philosophical Library, New York 1947.

[10] Rudolf Wille: Plädoyer für eine philosophische Grundlegung der begrifflichen Wissensverarbeitung. In: R. Wille und M. Zickwolf (Hrsg.): Begriffliche Wissensverarbeitung. Grundlagen und Aufgaben. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1996, 11-25.