

Markus MANN, Weingarten

## **Parkettierungen durch Experimente erforschen**

Die *Parkettierung der Ebene* bietet eine Reihe interessanter Problemstellungen für den Mathematikunterricht – darunter auch Aspekte des Erforschens und Experimentierens. Beim Parkettieren geht es um das lückenlose, überlappungsfreie und vollständige Bedecken einer Ebene mit kongruenten Grundfiguren (Mann 2007a, Hartfeldt & Henning, 2002). Dieses lässt sich auf verschiedene Arten erreichen, allerdings nur unter gewissen Voraussetzungen, die an geometrische Eigenschaften (der Grundfiguren) gebunden sind. Im einfachsten Fall kann eine Parkettierung durch wiederholtes Verschieben kongruenter Rechtecke erzeugt werden, aber auch mit einem allgemeinen Viereck lässt sich die Ebene parkettieren.

Mit dem Potential Dynamischer Geometriesysteme (DGS) bieten sich verschiedene Möglichkeiten auf experimentelle Art zu erforschen, welche Form ein Viereck haben muss bzw. haben kann, um damit eine Ebene zu parkettieren. In einer Unterrichtseinheit erforschten Schülerinnen und Schüler einer siebten Realschulklasse in einer interaktiven Lernumgebung solche Möglichkeiten der Parkettierung von Ebenen.

### **1. Experimentelles Parkettieren im Mathematikunterricht**

Experimente lassen sich ansehen als Erkundungen von gegebenen Situationen und als „bewusst geplante Vorgänge mit dem Ziel des Erkenntnisgewinns“ (Müller, 2006, S. 24), die handelnde, erprobende bzw. erforschende Elemente beinhalten (Mann, 2007a). Müller (2006) zählt sechs „Schritte zum Experiment“ auf, welche sich auf das experimentelle Parkettieren übertragen lassen:

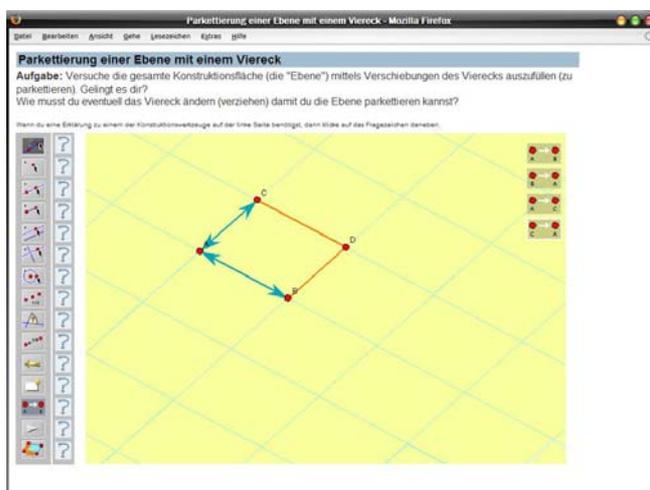
- Eine Frage finden  
Eine Fragestellung kann lauten: „Wie müssen Vierecke beschaffen sein, damit sich jede Ebene mit ihnen parkettieren, d.h. vollständig bedecken lässt? Lässt sich eine Ebene mit beliebigen Vierecken parkettieren? Wie musst du dazu vorgehen?“
- Hypothese aufstellen  
“Jede Ebene lässt sich mit beliebigen (allgemeinen) Vierecken parkettieren.“ Diese Hypothese wird im Einführungsbeispiel andiskutiert und im Unterrichtsverlauf durch Arbeitsaufträge präzisiert.
- Planen  
Bei der Planung geht es um die Frage, wie sich die Hypothese überprüfen lässt, also wie (mit gegebenen Hilfsmitteln) eine Ebene par-

kettiert werden kann. Diese Planung der Experimente wurde im geschilderten Fall weitestgehend vorweggenommen und wird den Schülern in Form von Aufgaben und Fragestellungen auf interaktiven Arbeitsblättern dargeboten.

- **Ausführen und Dokumentieren**  
Innerhalb der Lernumgebung experimentieren die Schüler mit interaktiven Arbeitsblättern. Während und nach der Durchführung sollen Beobachtungen angestellt und schriftlich festgehalten werden, wozu den Schülern ein Forscherpapier ausgeteilt wird (Mann, 2007a).
- **Auswerten**  
Die aufeinander aufbauenden Aufgaben führen zu Diskussionen über die gewonnenen Erkenntnisse und einer Auswertung der angestellten Beobachtungen.
- **Interpretieren**  
Die abschließende Fragestellung „Was folgerst du aus deinen Beobachtungen über die Parkettierung einer Ebene?“, welche auf dem Forscherpapier zu beantworten ist, fordert zu einer Interpretation der Ergebnisse auf.

## 2. Interaktives, web-basiertes Parkettieren

In einer Unterrichtssequenz hatten die Schülerinnen und Schüler einer siebten Realschulklasse die Aufgabe, Ebenen zu parkettieren. Dazu stand ihnen eine interaktive, web-basierte Lernumgebung zur Verfügung, welche auf dem DGS *Cinderella* basierende, interaktive Arbeitsblätter enthält ([6]). Auf diesen finden sich aufeinander aufbauende Experimentieraufgaben. Zusätzlich werden bei Bedarf verschiedene multimediale Hilfen bereitgestellt, u. a. interaktive Videohilfen und interaktive Lösungsbeispiele.



Inhaltlich geht es in den Aufgaben um die Parkettierung mit Rechtecken, Parallelogrammen, allgemeinen Vierecken und Dreiecken (vgl. Mann, 2007a und [6]). Zu jeder Aufgabe werden Beobachtungsaufträge formuliert, deren Ergebnisse die Schüler auf ihrem Forscherpapier notieren.

Abb. 1: Interaktives Arbeitsblatt

### **3. Beobachtungen und Ergebnisse**

#### **Motivation**

Die Motivation der Schüler zu Beginn und während des Arbeitens war sehr hoch. Das lag zum einen an der nicht alltäglichen Unterrichtssituation einschließlich der Computerraumnutzung. Zum anderen erwies sich das Problem der Parkettierung als überaus reizvoll und schülernah. Da alle den zu Beginn präsentierten Parkettboden unmittelbar als solchen erkannten und seine Zusammensetzung aus Rechtecken sahen, erhielt das Problem für die Schüler eine Bedeutung. Das experimentelle (und weitestgehend selbständige) Vorgehen erhöhte diese Motivation dann zusätzlich.

#### **Umgang mit der Lernumgebung**

Der Umgang mit der Lernumgebung erwies sich für die meisten Schüler als völlig problemlos. Eine kurze Einführung genügte, um den Gebrauch und die Nutzungsweise verständlich zu machen. Die Neuheit und Unbekanntheit der Lernumgebung stellte offensichtlich kein Hindernis für die Bearbeitung der Aufgaben dar (vgl. Mann, 2007b). Die Lernumgebung hat sich als geeignetes Experimentierwerkzeug bewährt.

#### **Hilfenutzung (Lösungsbeispiele)**

Viele der Schüler machten Gebrauch von der Möglichkeit Lösungsbeispiele in Form von interaktiven Lösungsvideos oder Musterlösungen zu betrachten. Dieses Betrachten führte jedoch stets dazu, dass sie anschließend die Lösungen selbst erstellen wollten. Und in aller Regel gelang dies dann auch. Somit sorgten die Hilfestellungen für zusätzlich erhöhte Motivation.

#### **Ergebnisse**

Die Notizen der Schüler auf ihrem Forscherpapier wurden nach der Stunde gesammelt. Beispielsweise gaben die Schüler folgende Antworten:

- „Mit dem Quadrat und dem Rechteck kann die ganze Fläche bedeckt werden“, „Es hat sich alles ausfüllen lassen (parkettieren)“
- „Es gelingt nicht, weil die Seiten nicht gleichlang sind. Man muss es so verziehen, dass jeweils zwei Seiten gleich lang sind“
- „Man kann alle Lücken ausfüllen, aber das Viereck muss gespiegelt werden“

Wesentliche Ziele konnten also erreicht und ein grundlegendes Verständnis sowohl des Parkettierungsbegriff als auch des -vorgangs angebahnt werden. Acht Wochen nach der Durchführung verfassten die Schüler einen an Leitfragen orientierten Aufsatz zur „Parkettierung“. Ihre Antworten konnten die Schüler dabei rein auf ihre damaligen Experimente stützen, da die Parkettierung zwischenzeitlich kein Unterrichtsgegenstand mehr war.

1. Parkettierung ist wenn eine Fläche mit Formen ausgelegt werden kann. Man hat ein Grunddrei- oder viereck das man vermehren muss, dabei entstehen dennoch Lücken, die man durch Spiegeln des Drei- oder Vierecks füllt.

Abb. 2: Schüleraufsatz nach acht Wochen

Das Antwortbeispiel in Abbildung 2 zeigt, dass sich die Schüler gut an die Inhalte der Stunde erinnern konnten und eine überwiegend korrekte Vorstellung von Parkettierung haben.

#### 4. Ausblick

Es lässt sich eine reichhaltige Auswahl möglicher Anknüpfungspunkte zur weiteren Beschäftigung mit Parkettierungen nennen, wie z.B. Parkettierungen mit Sechsecken, mit mehreren, voneinander verschiedenen Grundfiguren oder mit von Schülern selbst erstellten Grundfiguren. Weitere Ansätze können eine fächerübergreifende Behandlung sein, z. B. mit dem Fach Kunst (vgl. Mann, 2007a und Hartfeldt & Henning, 2002), sowie Penrose-Parkettierungen oder die Parkettierung im Raum. All diese Aspekte lassen sich auch ohne Computer experimentell erkunden und eignen sich für offene Unterrichtsformen, wie z. B. Projektunterricht (Ludwig, 1997).

#### Literatur

- [1] Hartfeldt, C., Henning, H. (2002): Muster, Flächen, Parkettierungen – Anregungen für einen kreativen Mathematikunterricht, Magdeburg.
- [2] Ludwig, M. (1997). Projektorientierter Mathematikunterricht Folge 6. Projektthema: Symmetrie und Kongruenz, in: *Mathematik in der Schule* 35(2), S. 82-87.
- [3] Mann, M., (2007a). Fit für das Parkett – Interaktiv Vierecke verschieben, spiegeln und verändern, *mathematik lehren*, Heft 141, S. 18-21.
- [4] Mann, M., (2007b). About the usage of video enriched microworlds based on dynamic geometry environments, In *CERME 5: Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Proceedings of CERME 5*, Larnaca, Zypern, 2007.
- [5] Müller, J. H. (2006). Reis im Kreis. Experimentelle Zugänge zum Kreisflächeninhalt. *mathematik lehren*, Heft 138, S. 23-43.

#### Internet

- [6] <http://mathematik.ph-weingarten.de/~mann/cinderella/>