Heinz SCHUMANN, Weingarten

Experimentelles Lösen raumgeometrischer Berechnungs-aufgaben mit Cabri 3D

Cabri 3D unterstützt mit seiner Berechnungsfunktion das herkömmliche Lösen von raumgeometrischen Berechnungsaufgaben; außerdem kann man mit Cabri 3D die Konfigurationen, auf welche sich die raumgeometrischen Berechnungsaufgaben beziehen, visualisieren und auch die Lösungsschritte solcher Aufgaben veranschaulichen. Darüber hinaus bieten die Konstruktions- und Messwerkzeuge und der Zug-Modus von Cabri 3D **neue** Möglichkeiten des Lösens raumgeometrischer Berechnungsaufgaben, in denen Längen, Winkelmaße, Flächeninhalte und Volumina als Größen vorkommen. Die neuen idealtypischen Möglichkeiten sind (Schumann 2007a):

- Berechnungsaufgaben lösen mittels raumgeometrischem Konstruieren und Messen ohne Anwendung des Zug-Modus; dabei bestimmt man nach Abschluss der Konstruktion die zu berechnenden Größen als gerundete Messwerte („K-Berechnungsaufgaben"). Es lassen sich nur solche Aufgaben lösen, deren Lösungen mit den implementierten raumgeometrischen Konstruktionen ausgeführt werden können.
- Berechnungsaufgaben experimentell lösen in Kombination von raumgeometrischem Konstruieren, Messen (gegebenen falls auch Berechnen) mit Anwendung des Zug-Modus („M-Berechnungsaufgaben"). Diese Art des Lösens nennen wir experimentell, weil die individuell gesteuerte Variation unabhängiger Größen zur näherungsweisen Bestimmung der gesuchten abhängigen Größen führt. Die betreffende konstruierte bzw. zu konstruierende raumgeometrische Konfiguration fungiert dabei als Versuchsanordnung.

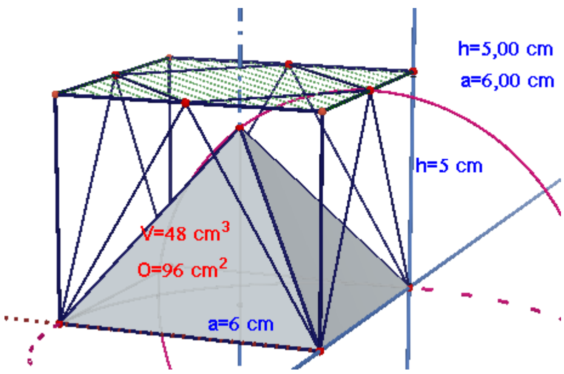
Im Allgemeinen sind die K-Berechnungsaufgaben auch als M-Berechnungsaufgaben interpretierbar und lösbar; dabei nimmt man aber einen Genauigkeitsverlust der Lösung in Kauf. Andererseits sind Berechnungsaufgaben, die auf algebraische Gleichungen 3. bzw. höheren Grades oder auf trigonometrische Gleichungen führen im Allgemeinen nicht mehr als K-Aufgaben lösbar, wohl aber als M-Aufgaben. Das Lösen von Berechnungsaufgaben als K-Aufgaben mit Cabri 3D hat den Vorteil, dass Messwerte exakt ausgegeben werden, so z. B. ist $\sqrt{3}$ die Ausgabe der Maßzahl der Raumdiagonale eines Würfels der (exakten) Kantenlänge 1.

Wir verdeutlichen den Unterschied beider Aufgabenlösungen an folgender Aufgabe:

Gegeben ist ein quadratische Säule mit der Grundkante 6 cm und der Höhe 5 cm. Die Kantenmitten der Deckfläche werden mit den Ecken der Grund-

fläche verbunden, so dass ein vierseitiges Antiprisma entsteht. Vier der Seitenflächen des Antiprisma, die mit der Grundfläche eine Kante gemein haben, dreht man um die Grundkanten nach innen, so dass sie zu Seitenflächen einer geraden quadratischen Pyramide werden. Berechne das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide.

Lösung als K-Berechnungsaufgabe (Abb. 1): Man konstruiert die quadratische Säule aus den vorgegebenen Größen. Dann konstruiert man regelgerecht mit den Optionen von Cabri 3D Antiprisma und Pyramide. Danach werden Volumen und Oberfläche der Pyramide gemessen. Man erhält exakte ganzzahlige Maßzahlen, wie sich leicht durch Kopfrechnen bestätigen lässt.
Lösung als Z-Berechnungsaufgabe (Abb. 2): Man konstruiert eine quadratische Säule, misst die Länge einer Grundkante und die Läge der Höhe und stellt die gegebenen Maße durch Verziehen ein. Dann konstruiert man eine Dreiecksflächen, die zu einer Pyramidenseitenfläche werden soll und misst die Länge eines Schenkels. Nun konstruiert man eine gerade quadratische Pyramide, deren Grundfläche mit der der Säule übereinstimmt, und deren bewegliche Spitze auf der vertikalen Achse der Säule liegt. Jetzt wird die Pyramidenspitze verzogen, bis die Seitenkantenlänge der Pyramide mit der betreffenden Dreiecksseite übereinstimmt. Schließlich misst man Volumen und Oberfläche der so eingestellten Pyramide und erhält so eine Näherungslösung.



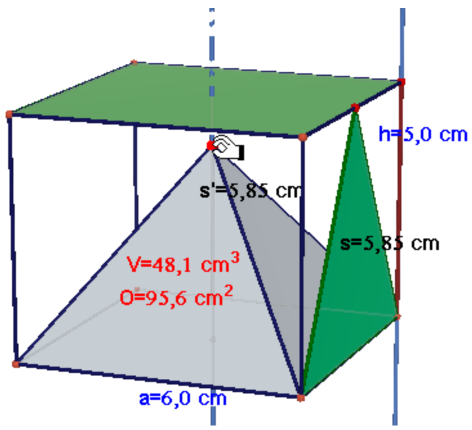


Abb. 1 „K-Lösung“ Abb. 2 „M-Lösung“

Anmerkung: Die üblichen Aufgaben der analytischen Schulgeometrie des Raumes können als K-Aufgaben mit Cabri 3D gelöst werden. Diese Art der Lösung ist, neben dem traditionellen, ein neuer Lösungsstandard, der das Verständnis der Aufgabenstellung fördert und der algebraischen Lösung vorausgehen kann. Die algebraische Berechnung kann dann motiviert werden durch das Transparentmachen der unter der Oberfläche des Systems notwendigen Berechnungen für das Konstruieren und Messen (Schumann 2007b). – Raumgeometrische Extremwertaufgaben lassen sich im Kontext der Schulmathematik gut experimentell bearbeiten (Schumann 2007c).

Methode des experimentellen Lösens raumgeometrischer Berechnungsaufgaben (Grobbeschreibung):

(1) Konstruktion einer geometrischen Konfiguration im virtuellen Raum, auf die sich die Berechnungsaufgabe bezieht.
(2) Visualisierung der raumgeometrischen Konfiguration (Betrachtung von allen Seiten).
(3) Probeweises Messen von Objekten der Konfiguration, welche die gegebenen, gesuchten Größen bzw. Eigenschaften und, gegebenenfalls, Hilfsgrößen besitzen sollen (u. U. sind einfache Berechnungen notwendig).
(4) Formvariation der Konfiguration durch Verziehen, um die gegebenen Größen bzw. Eigenschaften näherungsweise justierend einzustellen.
(5) Ablesen der Näherungswerte für die gesuchten Größen bzw. Eigenschaften.
(6) Formulierung des Ergebnisses.

Anmerkungen: Der Nutzer kann in Cabri 3D betreffende gemessene oder berechnete Werte wahlweise mit 0 bis 10 Nachkommastellen anzeigen lassen; dabei wird ein auf die gewählte Nachkommastellenanzahl gerundeter Wert angezeigt. Als Konsequenz wird beim Verziehen eines Punktes über ein Längenintervall hinweg derselbe Messwert angezeigt. Die Länge dieses Intervalls hängt von der eingestellten Genauigkeit des Längenmaßes ab. Bei Streckenlängen mit k Nachkommastellen hat das Intervall die Länge $(10^{k+1}-1)/10^{k+1}$. Am Beispiel k=1 für den Messwert einer Würfelkantenlänge, bei dem auch die Variation der von der gemessenen Kantenlänge abhängigen Größen z. B. des Flächeninhalts und des Volumens eines Würfels mit einbezogen wird, ergibt sich: der Messwert 1,5 cm wird für das Intervall [5,05 cm; 5,14 cm] der Länge 99/100 angezeigt. Das von diesem Messwert abhängige Oberflächenmaß läuft in etwa von 153,0 bis 158,6 (die Berechnung ergibt: $6 \cdot 5{,}05^2=153{,}0$; $6 \cdot 5{,}14^2 =158{,}5$), das Volumenmaß in etwa von 128,8 bis 135,9 (die Berechnung ergibt: $5{,}05^3=128{,}8$; $5{,}14^3=135{,}8$). Die abhängigen Maße sind also nur Näherungswerte, deren Intervalle beim experimentellen Lösen von Berechnungsaufgaben – genau genommen – mit angegeben werden müssten.

Die Variation von Messwerten durch Verziehen von Punkten hat Genauigkeitsgrenzen bei der Einstellung der gerundeten Nachkommastellen dieser Messwerte, die Genauigkeit hängt ab vom gewählten vergrößernden Zoom und von der Art der Maßzahl (vgl. Diagramm 1; NKS: Nachkommastelle).

	Genauigkeit *Längenmaß*	Genauigkeit *Flächen-maß*	Genauigkeit *Volumenmaß*
Zoom 1:1	1 NKS	0 NKS	./.
Zoom 1:2	1 NKS	0 NKS	0 NKS
Zoom 1:4	2 NKS	1 NKS	0 NKS

Diagramm: Einstellgenauigkeit von Längen-, Flächen-, und Raummaßen

Die relativ optimalen Genauigkeitsangaben beziehen sich auf ein Verziehen von Punkten, bei denen sich die gemessenen Linienobjekte parallel zur Bildschirmebene befinden und der Bildschirm eine Auflösung von 1024x768 Pixel hat.
Zusammenfassung; Die Methode des experimentellen Lösens raumgeometrischer Berechnungsaufgaben trägt zur Methodenvielfalt beim raumgeometrischen Berechnen bei, vernetzt sowohl geometrische Körper als auch ihre Maßeigenschaften miteinander, bereitet das kalkülhafte Berechnen vor, geht über das kalkülhafte Berechnen hinaus (d. h. eine Lösung ist auch noch möglich, wenn dieses Berechnen zu schwierig wird oder versagt), dient dem Auffinden von Gesetzmäßigkeiten über raumgeometrisches Berechnen mittels heuristischer Methoden (Induktion und Analogie, Generalisierung und Spezialisierung, Grenzübergang, Abstrahieren und Konkretisieren), verbindet synthetische Geometrie mit Arithmetik und Algebra), verstärkt und erweitert stereometrisches Wissen, übt die Raumvorstellung, das „figurenbewegliche" und funktionale Denken, unterstützt das experimentelle geometrische Arbeiten im virtuellen Raum und motiviert die Schüler und Schülerinnen durch direktes Manipulieren im virtuellen Raum.

Literatur

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2005/2006): Cabri 3D 2.0. (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version, bearbeitet von H. Schumann, zu beziehen von: www.cotec.de
Schumann, H. (2007a): Experimentelles Lösen raumgeometrischer Berechnungsaufgaben. In: BEITRÄGE zum COMPUTEREINSATZ in der SCHULE, Jg. 21, 2007, Heft 1, S. 73-93
Schumann, H. (2007b): Exaktes Lösen analytisch-geometrischer Aufgaben des Raumes durch interaktives Konstruieren und Messen. In: BEITRÄGE zum COMPUTEREINSATZ in der SCHULE, Jg. 21, 2007, Heft 2, S. 9 ff
Schumann, H. (2007c): Extremwertaufgaben bearbeiten mit Cabri 3D (Interaktives Skript). Rosenheim: Co.Tec