Rudolf STRÄSSER, Gießen

Versuch über experimentelle Geometrie

1 Experimentelle Geometrie phänomenologisch

Im Zuge des zunehmenden (?) Einsatzes von Computern und Geometrie-Software, vor allem von Dynamischer Geometrie Software („DGS)“ scheint sich im Mathematik-Unterricht der Sekundarstufe I eine gewisse Renaissance des probierenden Umgangs mit Geometrie einzustellen.
Als Beispiel zu diesem probierenden Umgang mit Geometrie kann man z.B. auf die vielen Unterrichtsvorschläge zu Dreieckstransversalen mit DGS-Einsatz verweisen. Hierzu gibt es eine Vielzahl von Belegliteratur, die immer wieder darauf abstellt, dass alle SchülerInnen etwa die Konkordanz der drei Dreieckshöhen in einem Punkt sehen können. Dabei zeigte sich schon bald, dass nur wenige Lernende diese Konkordanz in einem Punkt bedeutsam finden. In der Regel werden Beweise bei einem solchen Zugang zu den Dreieckstransversalen eher sekundär.
Ein anderes Beispiel stellt die Problemstellung und das Ausprobieren des Vier- bzw. des Fünf-Farbensatzes dar. Auch hier gilt wieder, dass alle Lernenden die entsprechende Behauptung schnell sehen. Manche mögen die entsprechenden Aussagen überraschend finden. Jedenfalls sind die Beweise für die Sekundarstufe eher unzugänglich und wohl zu schwer für SchülerInnen – das gilt auch für den Beweis des Fünffarbensatzes in Rademacher&Toeplitz. Der Beweis des Vierfarbensatzes ist bis heute selbst unter MathematikerInnen umstritten – eben weil die Rolle des Ausprobierens am Computer kontrovers ist.
Zuletzt soll noch das Beispiel der Winkeldrittelung mit der Pascalschen Schnecke betrachtet werden. Hier stellt sich die Situation insofern wiederum anders dar, als alle Lernenden (eventuell nach einem Hinweis) die Möglichkeit der Winkeldrittelung einsehen können. Der Beweis ist einfach und nutzt nur die Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks und die Winkelsumme im Dreieck. Diese Konstruktion könnte geradezu als eines der ersten Beispiele zum Beweisen in der (gymnasialen) Sekundarstufe dienen. Allerdings ist die zugehörige Konstruktion traditionell nicht zugelassen, weil andere Werkzeuge als Zirkel und Lineal (gerade Kante) eingesetzt werden.

2 Experimentelle Geometrie epistemologisch

Unter einem wissenschaftstheoretischen Blickwinkel lässt sich experimentelle Geometrie als die Verneinung formal-deduktiver Geometrie charakterisieren. Experimentelle Geometrie setzt auf Ausprobieren, Messen, viele Beispiele, Induktion und Abduktion, nicht Deduktion.

Beweise spielen zunächst in dieser Geometrie eher eine Nebenrolle. Geometrie wird empirische Wissenschaft.

2.1 Zur Rolle des Werkzeuges

Die Beispiele im Abschnitt 1 sollten allerdings gezeigt haben, dass es nicht beliebig ist, welche Werkzeuge beim Experiment zur Hand und zugelassen sind. Die traditionelle Beschränkung auf Zirkel und Lineal ist für den Mathematikunterricht längst überwunden, wie man an dem unbestrittenen Einsatz des Geodreiecks im deutschsprachigen Geometrie-Unterricht sehen kann. Das Beispiel der Pascalschen Schnecke zur Winkeldrittelung bleibt noch sehr dem Umfeld der traditionellen Geometrie verhaftet. Demgegenüber verweist die Konstruktion geeigneter (Gelenk)Mecha-nismen (etwa zu Geradführung von Kreisbewegungen am Beispiel des Wattschen bzw. Peaucellier-Inversors) auch auf die Rolle experimenteller Geometrie für die Ingenieurwissenschaft (vgl. Hohenberg 1966). Epistemologisch ist hier der zentrale Lehrsatz von Kempe interessant, weil er nicht konstruktiv ist, sondern nur die Existenzaussage beweist (vgl. Kempe 1876). Man lernt daraus: Die beweisende Theorie zeigt die Möglichkeiten und Grenzen des Experimentes und belegt möglicherweise induktiv, experimentell gewonnene Vermutungen und Erkenntnisse.

2.2 Experimentelle Geometrie und Beweisen durch Lernende

Mindestens in der französischsprachigen Mathematikdidaktik gehört zu einer epistemologischen Betrachtung auch die kognitive Seite des Erkenntnisprozesses. Es ist also angezeigt, auch empirische Erkenntnisse zum Beweisen durch Lernende zur Kenntnis zu nehmen – und so der Einschätzung von Holland nachzuspüren: „Der Aspekt der Geometrie als Beispiel einer deduktiven Theorie ist in erster Linie für das Gymnasium relevant“ (Holland 2007; S. 24). Ist die experimentelle Geometrie eher die demokratische Geometrie „für alle“? Zunächst einmal wird man ja die induktive Schlussweise für die natürliche Vorgehensweise halten – und sie steht außerdem dem naturwissenschaftlichen Denken näher als die axiomatisch-deduktive Vorgehensweise. Man kann also vermuten, dass experimentelle Geometrie eher die „Schüler-Geo“, die Geometrie der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I ist.
Dazu ein Blick in eine empirische Studie zum Beweisen (vgl. Healy&Hoyles 1999). Englischen Sekundarstufen-SchülerInnen wurde folgende Aufgabe und Lösungsvarianten vorgelegt: C ist irgendein Punkt der Mittelsenkrechten auf AB. Kobi, Linda, Marty und Natalie versuchen zu zeigen/beweisen, ob die folgende Behauptung wahr oder falsch ist: „Dreieck ABC ist gleichschenklig“. Als Lösungen wurden angeboten: Kobi: Bewege C auf der Mittelsenkrechten, Feststellung: Es entsteht immer ein gleichschenkliges Dreieck. Natalie: Gleichheit der Basiswinkel bei A und B, also Gleichschenkligkeit. Linda: (in Form eines formalen Listen-

beweises) mit dem Kongruenzsatz SWS. Marty: (in einem umgangssprachlichen Text) die beiden rechtwinkligen Teildreiecke sind Bilder einer Spiegelung an der Mittelsenkrechten, weil bei Achsenspiegelung an der Mittelsenkrechten A auf B abgebildet wird.

Die SchülerInnen sollten diese Lösungen unter zwei Gesichtspunkten bewerten: Welcher der Beweise entspricht deiner eigenen Vorgehensweise? Und: Welcher der Beweise würde von deinem Lehrer als bester Beweis bewertet? Als Ergebnis wird folgende Verteilung der Antworten genannt (alle deutschen Formulierungen sind Übersetzungen von mir, RS).

	Empirische Lösung (Kobi)	Formaler, falscher Beweis (Natalie)	Erzählender Beweis (Marty)	Formaler, korrekter Beweis (Linda)
Zugang des Schülers	40 %	13 %	26 %	21 %
Beste Lehrer-Bewertung	19 %	18 %	15 %	48 %

Nicht nur an diesem Test-Item zeigt sich eine deutliche Schüler-Präferenz für experimentelle Schlussweisen, obwohl den Befragten sehr wohl bewusst ist, dass ihre LehrerInnen formal-deduktives Schließen höher bewerten. Das geht so weit, dass der formale, aber falsche Beweis von Natalie immer noch für unter dem Lehrer-Blickwinkel besser eingeschätzt wird als der korrekte, aber umgangssprachlich formulierte Beweis von Marty. In einer deutschen Replikation dieses Fragebogen-Items haben Klieme, Reiss&Heinze (2003) für deutsche SchülerInnen analoge Antwortverteilungen gefunden. Sie führen zusätzlich an, dass „sehr gute" SchülerInnen möglicherweise eine Argumentation je nach ihrem Verwendungszweck bewerten und so zu dieser widersprüchlichen Einschätzung kommen, weil sie für sich selbst den empirischen Zugang eindeutig vorziehen, sich aber über ihre Abweichung von der Norm des schulischen Geometrieverständnisses im Klaren sind.

3 Schlussfolgerungen für den Geometrieunterricht

Nimmt man diese Erkenntnisse zusammen, so erscheint experimentelle Geometrie für eine Schülermehrheit zugänglicher als beweisende, formal-deduktive Geometrie. Im Übrigen hat schon Holland (2007) in seinem Standardwerk den deduktiven Aspekt der Geometrie in der Sekundarstufe I als nur für gymnasiale Klassen relevant erklärt (vgl. 2.2).

Außerdem ist experimentelle Geometrie näher an der gesellschaftlichen Verwendung von Geometrie, an „deskriptiver Geometrie" (vgl. Sträßer 1990). In der Regel wird sich eine NutzerIn von Geometrie nur dafür interessieren, dass eine Konfiguration gewisse Eigenschaften hat. Die Frage nach dem „Warum" wird allenfalls gestellt, wenn die Konfiguration ihren Dienst versagt, in der „break-down"-Situation. Und schon Grunbaum hat 1980 darauf verwiesen, dass einem damals auch von Mathematikern befürchteter „Tod der Geometrie“ am ehesten durch eine stärkere Berücksichtigung der experimentellen Geometrie entgegengewirkt werden könnte (vgl. Grunbaum 1983).

Jedenfalls kann experimentelle Geometrie vom Einsatz des Computers samt Software dadurch profitieren, dass der Werkzeug-Kasten der Geometrie durch diese Zeichengeräte erweitert wird. Andererseits zeigen die Eingangsbeispiele, dass die experimentelle Geometrie von formal-deduktiver Geometrie profitieren kann.

Entscheidend für den Geometrie-Unterricht der Sekundarstufe I dürfte demnach die Frage sein: Sollte Schulgeometrie **vor allem** experimentelle Geometrie sein? Bei positiver Beantwortung muss dann beschrieben werden, wie ein Curriculum der experimentellen Geometrie aussehen kann. Die traditionelle, von Euklid und logischen Zusammenhängen dominierte Schulgeometrie ist dazu offensichtlich weniger geeignet.

Literatur

Grunbaum, B. (1983). Shouldn't We Teach Geometry ? In M. Zweng u.a. (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (165 - 167). Boston - Basel - Stuttgart: Birkhäuser

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). *Justifying and Proving in School Mathematics* (Technical Report on the Nationwide Survey). London: Institute of Education, Univ. of London.

Hohenberg, F. (1966). *Konstruktive Geometrie in der Technik* (3. Aufl.). Wien - New York: Springer.

Holland, G. (2007). *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken - Konstruieren - Deduzieren* (3. Aufl.). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Kempe, A. B. (1876). On a General Method of Describing Plane Curves of the nth Degree by Linkwork. *Proc. of the London Mathematical Society*, 213-216.

Klieme, E., Reiss, K., & Heinze, A. (2003). *Geometrical Competence and Understanding of Proof.* Paper presented at the International Conference on Science and Mathematics Learning, Taipei / Taiwan.

Rademacher, H., & Toeplitz, O. (1933; Reprint 1968)). *Von Zahlen und Figuren - Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik.* Berlin: Springer.

Sträßer, R. (1990). Euklidische Geometrie versus deskriptive Geometrie. In Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.), *Die Zukunft des Mathematikunterrichts* (73-76). Soest: Soester Verlagskontor.